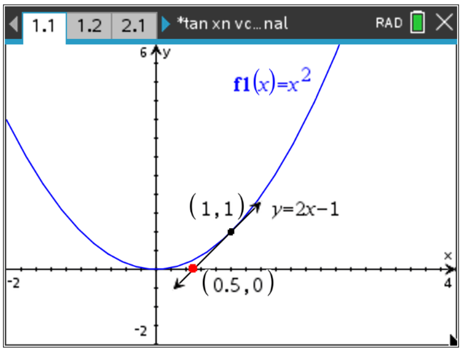
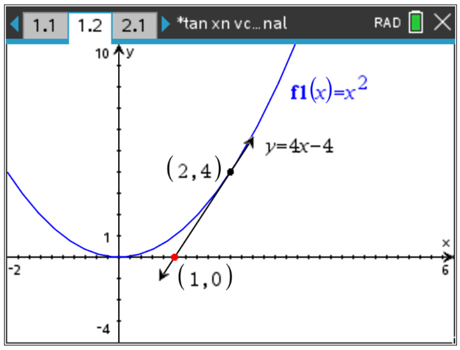
Tangentes ao gráfico das funções $y=x^n$

Proposta de resolução

Representa-se o gráfico da função $f(x) = x^2$

Traça-se a reta tangente ao gráfico num ponto ao acaso. Obtêm-se as coordenadas do ponto de interseção da reta tangente com o eixo Ox e as coordenadas do ponto P.
Arrasta-se este ponto sobre a curva:





Ao comparar as respetivas abcissas pode-se conjeturar que a abcissa do ponto de interseção da reta tangente com o eixo Ox é metade da abcissa do ponto de tangência.

1.2.

Seja $f(x) = x^2$ e $P(a, a^2)$, um ponto qualquer do gráfico da função f, (que não seja a origem do referencial).
A derivada da função f é: $f'(x) = 2x$
O valor da derivada da função em $x = a$ é:

$$f'(a) = 2a = m\ (declive\ da\ reta\ tangente\ ao\ gráfico)$$

Pelo que, a equação reduzida da reta tangente no ponto $P\ (a, a^2)$ é:

$$y = 2a(x-a) + a^2$$

Manuel Lagido

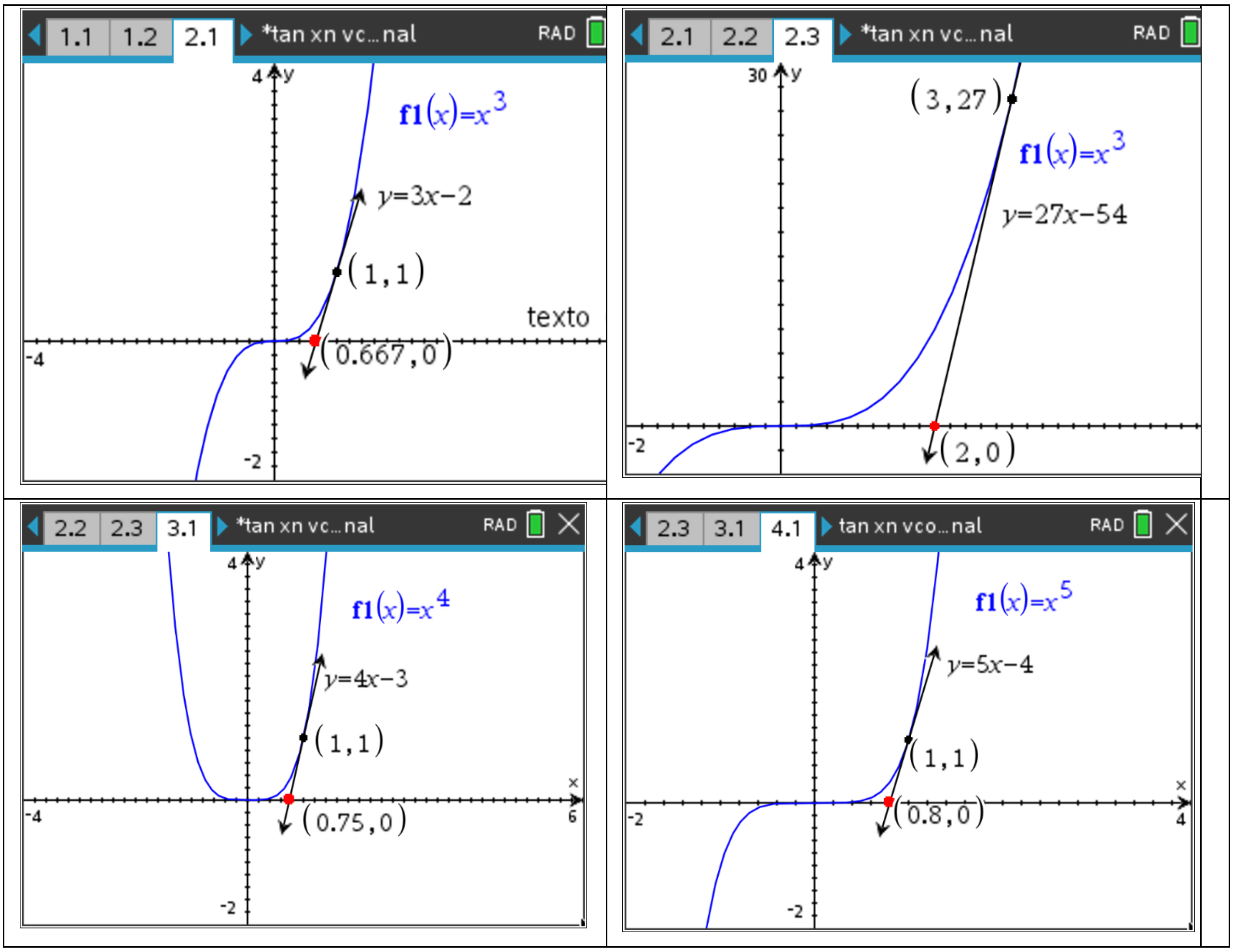
Interseção com Ox :

$y = 2a(x-a) + a^2 \ \wedge \ y = 0 \ \Leftrightarrow \ x = \frac{a}{2} \quad (a \neq 0)$.

Logo, a abcissa do ponto de interseção da reta tangente ao gráfico nesse ponto com o eixo Ox é metade da abcissa do ponto $P\ (a, a^2)$.

2.1.

A representação do gráfico de outras funções do tipo $f(x) = x^n$, para valores superiores de n, o traçado da tangente num certo ponto do gráfico de f e a observação do ponto de interseção da reta tangente nesse ponto com o eixo Ox permite estabelecer a conjetura pedida.



2.2.

Pode-se conjeturar que a abcissa do ponto de interseção da reta tangente com o eixo Ox é dada por :

$$x = \frac{a.(n-1)}{n}$$

sendo $\boldsymbol{a}$ a abcissa do ponto de tangência e n o expoente.

A demonstração segue os seguintes passos:

$$y=x^{n}$$

$$\frac{d}{dx}(y)=n\cdot x^{n-1}$$

$$y-a^{n}=\mathrm{n}*a^{n-1}*(\mathrm{x}-\mathrm{a})$$

$$y=\mathrm{n}*a^{n-1}*(\mathrm{x}-\mathrm{a})+a^{n}$$

Obtém-se a abcissa pedida fazendo a interseção da reta tangente em x=a ,representada pela última equação, com o eixo das abcissas.

Assim, vem:

$$y = 0 \Leftrightarrow \quad n.a^{n-1}(x-a) + a^{n} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{n.a^{n} - a^{n}}{n.a^{n-1}} \Leftrightarrow x = \frac{a^{n}.(n-1)}{n.a^{n-1}} \Leftrightarrow x = \frac{a.(n-1)}{n} \quad c.q.d.$$