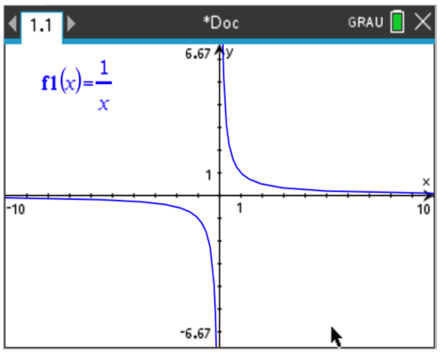
Funções Racionais
Transformações - Resolução

1. Considera a função $f(x) = \frac{1}{x}$, real de variável real.

1.1. A partir da representação gráfica da função f indica o domínio, o contradomínio e as equações das assíntotas.

Após a representação gráfica da função f, o aluno deve ser capaz de concluir que:

- $D_f = IR\backslash\{0\}$
- $D'_f = IR\backslash\{0\}$
- Assíntota horizontal: $y = 0$
- Assíntota vertical: $x = 0$

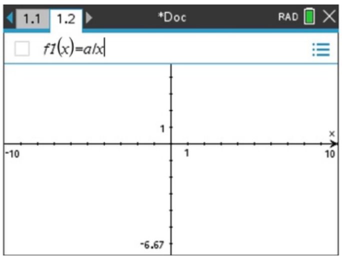


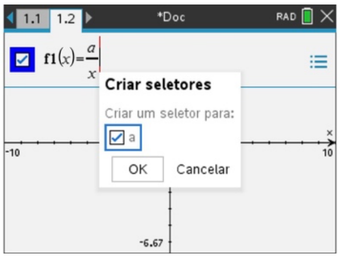
1.2. Considera as seguintes famílias de funções racionais:

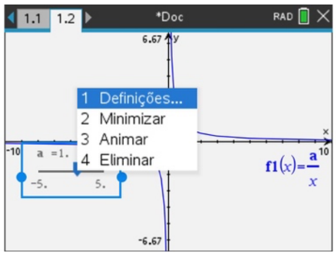
- $f_a(x) = \frac{a}{x}$, $a \neq 0$
- $f_b(x) = b + \frac{1}{x}$, $b \in lR$
- $f_c(x) = \frac{1}{x-c}$, $c \in lR$

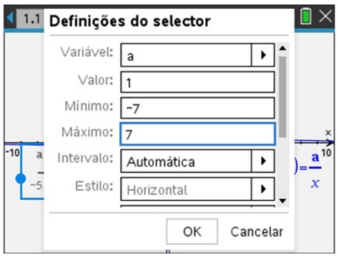
Representa-as graficamente. Fazendo variar os valores dos parâmetros a, b e c regista as alterações observadas relativamente ao domínio, contradomínio e equações das assíntotas do gráfico de f.
Que conjeturas podes fazer relativamente à influência desses parâmetros?

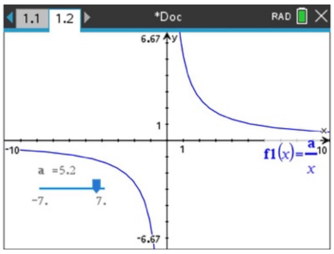
O aluno para estudar a família de funções f_a, f_b e f_c deve criar seletores. Para o fazer, deve escrever no editor de funções a expressão analítica da função com o parâmetro que pretende fazer variar. Ao pressionar ***enter*** automaticamente a calculadora cria um seletor, e o aluno poderá definir entre que valores pretende que o parâmetro selecionado varie.











Nos écrans acima, está exemplificado como criar o seletor para o parâmetro a. O aluno terá de proceder da mesma forma para criar os seletores para os parâmetros b e c.

Após a manipulação dos parâmetros atrás referidos o aluno deverá ser capaz de concluir que:

- ao variar os valores do parâmetro a, o gráfico da função “afasta-se” ou “aproxima-se” dos eixos do referencial e, no caso de $a < 0$, o gráfico ainda sofre uma reflexão em relação ao eixo Ox, no entanto não se verificam alterações em relação ao domínio, contradomínio nem alterações das equações das assíntotas do gráfico de f.

- ao variar os valores do parâmetro b, o gráfico da função “desloca-se” na vertical, b unidades, para cima, no caso de $b > 0$, e para baixo, no caso de $b < 0$. Assim, verificam-se alterações no contradomínio e na equação da assíntota horizontal do gráfico de f.

- $D'_{f_b} = IR \backslash \{b\}$
- Assíntota horizontal: $y = b$

- ao variar os valores do parâmetro c, o gráfico da função “desloca-se” na horizontal, c unidades, para a direita, no caso de $c > 0$, e para a esquerda, no caso de $c < 0$. Assim, verificam-se alterações no domínio e na equação da assíntota vertical do gráfico de f.

- $D_{f_c} = IR \backslash \{c\}$
- Assíntota vertical: $x = c$

Em suma:

- o parâmetro a (que provoca contrações/dilatações/reflexões) não provoca alterações no domínio, contradomínio e equações das assíntotas;
- o parâmetro b (que provoca translações associadas ao vetor $(0,\ b)$ – "alterações verticais") provoca alterações no contradomínio e na assíntota horizontal.
- o parâmetro c (que provoca translações associadas ao vetor $(c,\ 0)$ – "alterações horizontais") provoca alterações no domínio e na assíntota vertical.

1.3. Depois das conjeturas que formulaste anteriormente, indica, sem utilizar a calculadora, o valor lógico das seguintes afirmações e corrige as falsas:

- $y = 2$ é a equação da assíntota horizontal ao gráfico da função $y_1 = \frac{1}{x-2}$;

  Proposição falsa. O gráfico da função $y = \frac{1}{x}$ "desloca-se" duas unidades para a direita, verificando-se desta forma alteração da assíntota vertical, que passa de $x = 0$ para $x = 2$.

- o domínio da função $y_2 = 4 - \frac{3}{x+1}$ é $IR\backslash\{4\}$

  Proposição falsa. O gráfico da função $y = \frac{1}{x}$ "desloca-se" uma unidade para a esquerda, verificando-se desta forma alteração do domínio, que passa de $IR\backslash\{0\}$ para $IR\backslash\{-1\}$.

- o gráfico de $y_3 = -\frac{3}{2x+1}$ tem por assíntota vertical $x = -\frac{1}{2}$

  Proposição verdadeira.

- o gráfico de $y_4 = 2 + \frac{1}{x-3}$ tem por assíntota horizontal $y = 2$

  Proposição verdadeira.

- o contradomínio de $y_5 = -1 - \frac{4}{x-2}$ é $IR\backslash\{2\}$

Proposição falsa. O gráfico da função $y = -\frac{1}{x-2}$ "desloca-se" uma unidade para a baixo, verificando-se desta forma alteração do contradomínio, que passa de $IR\backslash\{0\}$ para $IR\backslash\{-1\}$.

- o gráfico $y_6 = \frac{3x+1}{x}$ tem uma assíntota vertical $x = 0$

  Proposição verdadeira.

- o gráfico de $y_7 = \frac{3-3x}{4x+1}$ tem por assíntota horizontal $y = 3$

  Proposição falsa. A função $y_7 = \frac{3-3x}{4x+1}$ pode ser escrita na forma $y = b + \frac{a}{x-c}$ efetuando-se a divisão dos polinómios $3 - 3x$ e $4x + 1$.

  Assim, $y_7 = -\frac{3}{4} + \frac{\frac{15}{4}}{4x+1}$. Logo o gráfico da função $y = \frac{\frac{15}{4}}{4x+1}$ "desloca-se" $\frac{3}{4}$ unidades para baixo, verificando-se desta forma alteração da assíntota horizontal, que passa de $y = 0$ para $y = -\frac{3}{4}$.

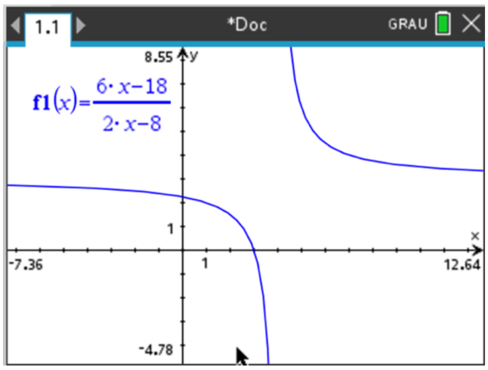
2. Sem utilizar a calculadora, faz um esboço do gráfico da função g, definida em IR, por $g(x) = -\frac{3}{2} - \frac{1}{x+3}$

   O aluno deve perceber que o gráfico da função g tem uma assíntota horizontal de equação $y = -\frac{3}{2}$ e uma assintota vertical de equação $x = -3$. Assim, deve começar por representar a tracejado, num referencial o.n., as retas que representam as assíntotas do gráfico da função g. De seguida, deve determinar as coordenadas de um ponto que pertença ao gráfico de g. Por exemplo, o ponto onde o gráfico da função g interseta o eixo Oy,

   $g(0) = -\frac{3}{2} - \frac{1}{3} = -\frac{11}{6}$ e representar o ponto. Por último, deve fazer o esboço do gráfico pedido.

3.

3.1. Recorrendo à calculadora, representa o gráfico da função $h(x) = \frac{6x-18}{2x-8}$



3.2. Observando a representação gráfica da função h, escreve-a na forma

$$h(x) = b + \frac{a}{x-c}$$

Por observação gráfica conjetura-se que o gráfico da função h tem uma assíntota horizontal de equação $y = 3$ e uma assíntota vertical de equação $x = 4$. Ainda pode observar-se que a função interseta o eixo Ox no ponto $(0, 3)$. Assim, $h(x) = 3 + \frac{a}{x-4}$ e como $h(3) = 0$ então,

$$3 + \frac{a}{3-4} = 0 \Leftrightarrow -a = -3 \Leftrightarrow a = 3$$

Logo, $h(x) = 3 + \frac{3}{x-4}$

3.3. Confirma analiticamente a expressão encontrada na alínea anterior.

$$h(x) = 3 + \frac{3}{x-4} = \frac{3(x-4)+3}{x-4} = \frac{3x-12+3}{x-4} = \frac{3x-9}{x-4} = \frac{2(3x-9)}{2(x-4)} = \frac{6x-18}{2x-8}$$