Sequências: Cálculos repetidos -Tarefas de Investigação em Matemática

Notas sobre as investigações com cálculos repetidos I, II e III

Estas tarefas podem ser propostas aos alunos no início do tema sucessões. Os alunos já trabalharam com sequências e expressões com variáveis no ensino básico. A utilização da calculadora nada tem de sofisticado, pelo contrário, apenas trabalha com as operações elementares. Aquilo que fascina é que operações tão conhecidas e utilizadas conduzam a resultados que nos surpreendem (caso III) e põem a pensar. Se nos surpreendem a nós, professores, e nos motivam para encontrar explicações, certamente também motivarão os nossos alunos a fazer conjeturas e a confirmá-las. Para além disso, a rapidez com que alteramos dados podem levar a uma formulação de conjeturas mais fortes sobre o papel dos valores iniciais e do próprio processo operatório.

Cálculos repetidos I

Podem recordar-se as sequências e introduzir novos termos e conceitos: sucessão, sucessão definida pelo termo geral e por recorrência, termo/imagem, ordem/origem, progressão aritmética, razão, infinitamente grande.
Os termos gerais dependem do valor inicial, embora sejam da família $6n+(u_1-6)$

Cálculos repetidos II

Espera-se que os alunos experimentem vários valores iniciais; positivos negativos. O valor inicial, -1, dá origem a um caso particular.
Espera-se que os alunos, na questão 6, escrevam coisas do tipo:
1)10 (por ex.);
2) 10x3+2
3) $(10x3+2)x3+2=10x3^2+2x3+2$
.....

$U_2=3\ u_1+2$
$U_3=3^2\ u_1+2x3+2$
$U_4=3^3\ u_1+2x3^2+2x3+2$
.....
$U_n=3^{n-1}\ u_1+2.(3^{n-2}+...+3+1)$

Explorar a sucessão 3^n, quanto ao limite; falar sobre infinitamente grandes positivos e negativos

Cálculos repetidos III

Explorar o valor 'inesperado' 6.
Conjeturas:

1. O valor para que tende não depende do valor inicial;
2. 6=2x3?

Explorações, em que se divide por 2, mas se adiciona um valor diferente de 3, sendo o valor inicial *A*:

$$\frac{A}{2}+4\rightarrow 8$$
$$\frac{A}{2}+1\rightarrow 2$$
$$\frac{A}{2}+b\rightarrow 2\times b$$

Conjetura para a situação acima: tende para 2xb;

Valor inicial A, que se divide por 3 adiciona-se um valor (b, na expressão):

$$\frac{A}{3} + 1 \to 1.5$$
$$\frac{A}{3} + 2 \to 3$$
$$\frac{A}{3} + b \to 1.5 \times b$$

Espera-se que os alunos cheguem a conjeturas do tipo
Se o divisor é 2, na sequência de procedimentos tende-se para $2 \times b$; se é 3 obtém-se $\frac{3}{2} \times b$; se o divisor é 4 obtém-se $\frac{4}{3} \times b$,...

Para
$$\frac{A}{c} + b \to \frac{c}{c-1} \times b$$

Interpretando cada uma das etapas dos cálculos efetuados na primeira situação, vê-se que, $\forall A \in R$:

$$x_1 = \frac{A}{2} + 3$$
$$x_2 = (\frac{A}{2} + 3)\frac{1}{2} + 3 = \frac{A}{4} + \frac{3}{2} + 3$$

$$x_3 = (\frac{A}{4} + \frac{3}{2} + 3)\frac{1}{2} + 3 = \frac{A}{8} + \frac{3}{4} + \frac{3}{2} + 3$$

$$x_4 = (\frac{A}{8} + \frac{3}{4} + \frac{3}{2} + 3)\frac{1}{2} + 3 = \frac{A}{16} + \frac{3}{8} + \frac{3}{4} + \frac{3}{2} + 3 = \frac{A}{16} + 3\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1\right)$$

$$x_n = \frac{A}{2^n} + 3\left(\frac{1}{2^{n-1}} + \ldots\ldots + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1\right)$$

Como $x_n \to 6$ e $\frac{A}{2^n} \to 0$, pode concluir-se que

$$\left(\frac{1}{2^{n-1}} + \cdots \ldots + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1\right) \to 2$$

$$x_n \to 0 + 3 * 2 = 6$$

Antes de formalizar o cálculo da soma de n termos de uma progressão geométrica e do seu limite, pode fazer-se uma prova para este caso particular:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\ldots$$
$$2S = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\ldots$$
$$2S - S = 2$$
S=2