ACTAS

A **Associação de Professores de Matemática**, em parceria com o Departamento de **Matemática** da **Universidade de Aveiro**, promove, de 1 a 3 de Setembro, nas instalações da Universidade, o Encontro Nacional de Professores de Matemática - **ProfMat'2010**. Todas as sessões decorrerão no edifício do Complexo Pedagógico, Científico e Tecnológico, com excepção das conferências plenárias que terão lugar no edifício da Reitoria. A conferência plenária de abertura sobre "Os Fins da Educação e o Envolvimento Familiar na Educação Escolar", será proferida por Júlio **Pedrosa** de Jesus., personalidade bem conhecida da Universidade de Aveiro, da qual foi Reitor, mas também do mundo académico universitário e da educação, tendo sido Presidente do Conselho de Reitores das Universidades Portuguesas, Ministro da Educação e Presidente do Conselho Nacional de Educação. No ano em que milhares de jovens se reuniram em Santarém para a final do Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos, o ProfMat dá destaque aos "**Jogos** Matemáticos"numa conferência de Jorge Nuno Silva, da Universidade de Lisboa. José Francisco **Rodrigues**, da Universidade de Lisboa, apresenta "Felix Klein e a Matemática elementar do ponto de vista superior"trazendo ao Encontro Nacional de Professores de Matemática o pensamento e a obra de **Felix Klein**, no âmbito do "Projecto Klein para o século XXI", iniciativa internacional do "ICMI - International Commission on Mathematical Instruction"e da "IMU - International Mathematical Union", que celebra a passagem dos 100 anos sobre a publicação da obra de Felix Klein. **Eduardo Veloso**, figura prestigiada da Associação de Professores de Matemática e da educação matemática, apresentará uma conferência muito importante para todos quantos se preocupam com a Geometria e o seu ensino: "Simetrias no Ensino Básico". Como vem sendo hábito, as conferências com discussão, sessões práticas, simpósios de comunicações, exposições e convívio, entre outras actividades do ProfMat estarão mais próximas da vida profissional dos profes sores, a maior parte delas resultantes da iniciativa de professores em exercício. Várias conferências sobre a História do Ensino de Matemática devolvem-nos personagens e iniciativas da educação matemática, fundamentais à nossa identidade cultural e profissional; um destaque particular para uma memória de "George **Pólya**", por Henrique **Guimarães**, da Universidade de Lisboa. A Matemática vista por professores de outras áreas e o discurso das iniciativas de animação e divulgação da matemática por quem as faz devolve-nos o olhar dos outros sobre a Matemática e quem a ensina, ao mesmo tempo que abre novas oportunidades de enriquecimento e colaboração. As grandes questões do momento, como os novos programas do ensino básico, a experimentação e sua avaliação e o ensino secundário profissional serão discutidas por painéis de responsáveis e pelos professores presentes. Finalmente, como sempre assim tem sido, professores de Matemática, sócios e não sócios da APM, dos diversos graus de ensino (do básico ao superior), apresentarão comunicações e dinamizarão sessões práticas sobre todos os assuntos da educação matemática ou com ela relacionados.

PROFMAT 2010

Associação de Professores de Matemática ⋄□⋄ Departamento de Matemática, U. Aveiro

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, n.º 27-A 1500-236 Lisboa
Tel.: +351 21 716 36 90 Fax: +351 21 716 64 24
direccao@apm.pt

Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro
Campus de Santiago 3810 AVEIRO

Comissão Organizadora do PROFMAT:

Ana Breda*, Ana Fraga Mota, Albertina Monteiro, Arsélio Martins*, Domingos Fernandes*, Ester Nolasco, Graça Barbosa, Jaime Carvalho e Silva*, Liliana Costa*, Margarida Beça Pereira, Maria Teresa Santos, Teresa Bixirão Neto*, Teresa Castanhola e Yvonne Catarino.
Apoio à distância: Paulo Correia.

**Comissão do Programa*

Distribuído em suporte digital no ProfMat2010 com o apoio da **Texas Instruments***,*

Filme-anúncio, logotipo, cartaz :
entropia.design e *João Martins* (cedência de imagens por Mário Marnoto e Turismo do Centro)

Nota:

Os textos que se seguem foram entregues pelso seus autores e pretendem ser textos completos das comunciações que proferiram ou sessões práticas que dinamizaram. Seguem como chegaram.

A. Martins (organizador responsável por todos os erros e falhas e gralhas)

índice:

Rui Pedro Campos Bento de Barros Candeias, EB1/JI Quinta de Santo António, ruicandeias1@sapo.pt
CONTRIBUTO PARA A HISTÓRIA DAS INOVAÇÕES NO ENSINO DA MATEMÁTICA NO PRIMÁRIO: JOÃO ANTÓNIO NABAIS E O ENSINO DA MATEMÁTICA NO COLÉGIO VASCO DA GAMA

Ana Caseiro, Escola Superior de Educação de Lisboa, anac@eselx.ipl.pt
22 MÁGICO
SAPOS E ÁLGEBRA

Marcio Buzato. Pontíficia Universidade Católica de Campinas - Campinas – São Paulo, Brasil marciobuzato@hotmail.com
ENSINANDO GEOMETRIA ESPACIAL e SÓLIDOS DE PLATÃO
COM GEOMETRIA TAMBÉM SE BRINCA PARTE II – GEOMETRIA NA PIPA

C. Miguel Ribeiro, Universidade do Algarve, CIEO, cmribeiro@ualg.pt

Fernando Martins, ESE do Instituto Politécnico de Coimbra , fmlmartins@esec.pt
(DES)CONHECIMENTO MATEMÁTICO PARA ENSINAR OTD QUE POSSUEM FUTUROS PROFESSORES DOS PRIMEIROS ANOS

Helena Gomes, ESE Viseu, hgomes@esev.ipv.pt
O QUE NECESSITAMOS SABER PARA ENSINAR GEOMETRIA – O CASO DOS RECTÂNGULOS

José Carrillo, Universidade de Huelva, carrillo@uhu.es
Sandra Correia, EB2/3 D. Dinis (Quarteira) sandra-gc@sapo.pt;
O PAPEL DO ERRO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS. A PRÁTICA DE UMA PROFESSORA DO 1º CICLO

Sandra Correia, EB2/3 D. Dinis (Quarteira) sandra-gc@sapo.pt;
A IMPORTÂNCIA DA AFECTIVIDADE NA APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

Fernando Martins, ESE do Instituto Politécnico de Coimbra, fmlmartins@esec.pt.
QUE CONHECIMENTO MATEMÁTICO SERÁ SUFICIENTE PARA ENSINAR RECOLHA, ORGANIZAÇÃO E TRATAMENTO DE DADOS?

Helena Rocha, Bolseira da FCT / ME , hcr@fct.unl.pt
DOS CONSTRUCTOS TEÓRICOS À SALA DE AULA: UM OLHAR SOBRE A CALCULADORA GRÁFICA

Mageri Rosa Ramos - Escola Municipal Gabriel Gonçalves da Silva, Juiz de Fora, Minas Gerais, Brasil. mageri@uol.com.br;
Marcílio Dias Henriques - Instituto Estadual de Educação de Juiz de Fora, Minas Gerais, Brasil. mdhenriques@oi.com.br;
Amarildo Melchiades da Silva - Universidade Federal de Juiz de Fora, Minas Gerais, Brasil. xamcoelho@terra.com.br
A EDUCAÇÃO ALGÉBRICA NO ENSINO FUNDAMENTAL

Fernanda Joaquim, Escola do 1.º Ciclo de Lagoa ferquim@iol.pt
CONSTRUINDO O SENTIDO DO NÚMERO - O PAPEL DO CÁLCULO MENTAL

Raquel Dinis, Universidade dos Açores/Centro de Estudos da Criança da Universidade do Minho, raquel.j.dinis @hotmail.com

Filomena Rebelo,Escola Básica 2,3 Roberto Ivens, menarebelo@gmail.com
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA SALA DE AULA: UMA EXPERÊNCIA COM ALUNOS DO 6º ANO DA EB2,3 ROBERTO IVENS

Helena Gerardo, Escola Secundária Sá da Bandeira Bolseira de Doutoramento da Fundação para a Ciência e a Tecnologia
EDUCAR MATEMATICAMENTE PARA QUESTIONAR O MUNDO...PORQUÊ?
PENSAR A FAMÍLIA NA AULA DE MATEMÁTICA

José Alexandre dos Santos Vaz Martins, Escola Superior de Turismo e Hotelaria, Instituto Politécnico da Guarda, jasvm@ipg.pt;
Pedro Nuno Oliveira Figueiredo Ramalhete Carvalho, Escola Superior de Turismo e Hotelaria, Instituto Politécnico da Guarda, ramalhete_pedro@hotmail.com
PROJECTO E RESULTADOS ESTATÍSTICOS SOBRE A FELICIDADE NA ESTH/IPG

Leonor Santos, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, leonordsantos@sapo.pt

Cristina Martins, Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Bragança, mcesm@ipb.pt,
UTILIZAÇÃO DE MATERIAIS MANIPULÁVEIS: A DESCOBERTA DE NOVAS POTENCIALIDADES NUM CONTEXTO DE FORMAÇÃO CONTÍNUA

Jaime Carvalho e Silva (Univ. Coimbra) [jaimecs@mat.uc.pt] Joaquim Pinto (Esc. Sec. Marques de Castilho, Águeda) [prof.joaquimpinto@gmail.com] Vladimiro Machado (Esc. Sec. Valongo) [vladimiro.machado@gmail.com]
Estudo combinado gráfico e algébrico de polinómios de grau 3 e superior
Gráficos e representações gráficas

João Sampaio Maia, Escola Superior de Educação do Porto, jsampmaia@gmail.com

Manuela Neto, Escola E.B. 2,3 Maria Lamas, manuela.alves.neto@gmail.com
DESPERTAR PARA A GEOMETRIA – UM PROJECTO DESENVOLVIDO COM ALUNOS DO 5.º E 6.º ANOS DE ESCOLARIDADE

Ana Paula Teixeira, Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, ateixeir@utad.pt

Paula Maria Barros, Instituto Politécnico de Bragança, pbarros@ipb.pt; Ana Isabel Pereira, Instituto Politécnico de Bragança, apereira@ipb.pt
À DESCOBERTA DE SOFTWARE PARA EXPLORAR A PROGRAMAÇÃO LINEAR NO ENSINO SECUNDÁRIO

Ana Amélia A. Carvalho, Universidade do Minho, aac@ie.uminho.pt;

Rute Almendra Lopes, Escola Secundária de Ponte de Lima, rsavlopes@gmail.com
UTILIZAÇÃO DO ENHANCED PODCAST NO APOIO AO ESTUDO DA MATEMÁTICA: UMA EXPERIÊNCIA NO 11ºANO DE MATEMÁTICA A

Neusa Branco, Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Santarém, neusa.branco@ese.ipsantarem.pt;

Maria Graciete Brito, mgcbrito@gmail.com
A ÁLGEBRA DESDE OS PRIMEIROS ANOS

Margarida Rodrigues, ESE de Lisboa, margaridar@eselx.ipl.pt;

Cecília Felício, EB 2,3 de Luísa Todi, cecilia.felicio@sapo.pt;
A NATUREZA DA TAREFA E OS DESAFIOS DA GESTÃO CURRICULAR

Maria de Fátima Durão, ESE de Santarém - PFCM, fritadurao@gmail.com; Maria Cecília Rebelo, ESE de Santarém - PFCM, mceciliaprebelo@sapo.pt; Célia Mercê, ESE de Santarém - PFCM, celiamerce@sapo.pt; Susana Colaço, ESE de Santarém - PFCM, susana.colaco@ese.ipsantarem.pt
DIVIDINDO QUADRADOS: UMA PROPOSTA PARA A AULA DE MATEMÁTICA

Maria Patrícia F. Lemos, UFPI, PUC-SP ?Bolsista CAPES, mpflemos@gmail.com
A COMPREENSÃO DE PROFESSORAS DO 1º AO 2º CICLO DO ENSINO FUNDAMENTAL SOBRE MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL A PARTIR DA ANÁLISE DE ATIVIDADES

Jorge Cruz, E B I Santiago Maior – Beja, jorgeascruz@gmail.com
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: DA INVESTIGAÇÃO À PRÁTICA

Kátia Maria de Medeiros, Universidade Estadual da Paraíba-Brasil, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, katiamedeirosuepb@gmail.com
A EXPLICAÇÃO DE IDEIAS MATEMÁTICAS: AS PRÁTICAS E A REFLEXÃO SOBRE A PRÁTICA DE UMA FUTURA PROFESSORA DO 2.º CICLO

Leonora Pilon Quintas, PUCRS, lpq@uol.com.br
CONTRIBUIÇÕES DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PARA A FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES NAS SÉRIES INICIAIS

Contributo para a história das inovações no Ensino da Matemática no Primário: João António Nabais e o Ensino da Matemática no colégio Vasco da Gama

Rui Pedro Campos Bento de Barros Candeias
EB1/JI Quinta de Santo António
ruicandeias1@sapo.pt

Resumo. O presente artigo, que se situa no âmbito da História do Ensino da Matemática, tem como objectivo conhecer o papel do pedagogo João António Nabais, fundador do Colégio Vasco da Gama, no desenvolvimento e divulgação de materiais didácticos para o ensino desta disciplina no Ensino Primário, no período compreendido entre a década de 1960 e a década de 1970, no contexto Matemática Moderna. A investigação foi conduzida com uma metodologia baseada na investigação histórica, tendo como referência a história cultural. As principais fontes do estudo são os documentos escritos pelo próprio Nabais sobre o trabalho desenvolvido no Colégio Vasco da Gama, os depoimentos orais de pessoas que trabalharam com este pedagogo, os materiais didácticos desenvolvidos por Nabais para o ensino da Matemática, os apontamentos dos cursos e os registos fotográficos. Sobre estes documentos, procedeu-se a uma análise do tipo qualitativo.

Relativamente ao trabalho de João António Nabais, destaca-se o seu papel na divulgação e desenvolvimento de materiais didácticos para o ensino da Matemática. No início da década de 1960, o seu trabalho desenvolve-se essencialmente com a divulgação do material Cuisenaire e a partir de 1966, com o desenvolvimento de materiais didácticos, como o Calculador Multibásico e os Cubos – Barras de cor. Paralelamente, traduz e produz metodologias para explorar os conteúdos matemáticos com esses materiais. Este pedagogo desenvolve também um intenso trabalho no âmbito da formação professores.

Palavras-chave: materiais didácticos; História do Ensino da Matemática; Ensino Primário; Matemática Moderna.

Introdução

De acordo com Matos (2007), a história do campo da Educação Matemática está apenas a começar a dar os primeiros passos em Portugal. Matos (2007) aponta algumas perspectivas para o futuro da História do Ensino da Matemática, referindo que existe uma influência tripla sobre os campos científicos e metodologias que são necessários para a pesquisa nesta área: a Educação, a História e a Matemática.

Em relação ao objecto de estudo, Matos (2007) refere que a investigação na História do Ensino da Matemática deverá deslocar-se de um estudo da legislação, incluindo os programas e regulamentos, ou dos materiais publicados em livros de texto, para o campo dos usos e das práticas de aula, da avaliação e da formação de professores.

Matos (2007) salienta a importância de serem elaborados estudos de casos relevantes, nomeadamente de instituições de ensino e de personalidades.

O estudo que se apresenta neste artigo[1] pretende contribuir para o conhecimento das inovações curriculares e didácticas produzidas no ensino da Matemática, no período compreendido entre o início da década de 1960 e meados da década de 1980, no Ensino Primário em Portugal, no contexto do Movimento da Matemática Moderna. Com este objectivo, estuda o papel do pedagogo João António Nabais, no desenvolvimento e divulgação de materiais didácticos para o Ensino da Matemática no Primário e a sua aplicação em metodologias.

João António Nabais e o Colégio Vasco da Gama

João António Nabais[2] nasce na Aldeia do Bispo, concelho do Sabugal, em 1915, realizando os primeiros estudos escolares em Forcalhos, no mesmo concelho. Paralelamente à sua carreira eclesiástica[3], realiza estudos na área da Pedagogia e Psicologia vindo a licenciar-se, nesta área científica, no ano de 1948 pela Universidade de Lovaina na Bélgica.

Em 1959, funda o Colégio Vasco da Gama, em Meleças, onde irá desenvolver grande parte da sua obra pedagógica. Enquanto director do colégio incentiva experiências pedagógicas inovadoras, nomeadamente na área da Matemática, com a introdução do material Cuisenaire[4].

A partir de 1962 começa a promover cursos de Verão destinados à reciclagem de professores. Esses cursos visam essencialmente o ensino da Matemática e das Línguas Vivas.

Demonstrando uma necessidade de constante actualização, no final dos anos sessenta João António Nabais desloca-se aos Estados Unidos da América com a finalidade de frequentar um curso de Matemáticas Modernas.

---

[1] Este estudo faz parte de uma investigação mais ampla, realizada no âmbito de uma Tese de Mestrado em Educação, especialização em Didáctica da Matemática (Candeias, 2007).
O presente texto é baseado num texto apresentado no I Seminário de História do Ensino da Matemática e das Ciências, realizado em 27 e 28 de Junho de 2008, na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

[2] A informação referente aos dados biográficos foi recolhida em Nóvoa (2003).

[3] João António Nabais fez os seus estudos no Seminário de Évora, onde se ordenou em 1938. Em 1947 foi elevado a cónego. Foi professor no Seminário de Vila Viçosa e fez a campanha Bacalhoeira como padre capelão nos anos de 1952 e 1953. Mais tarde João António Nabais abandona a celebração e de seguida solicita o abandono do sacerdócio. A autorização papal é-lhe concedida em 1971 (Nóvoa, 2003).

[4] O material Cuisenaire foi desenvolvido por Georges Cuisenaire, professor do Ensino Primário belga, no início da década de 1950 (Jeronnez, 1964).

As experiências pedagógicas realizadas no Colégio Vasco da Gama são acompanhadas pela produção e desenvolvimento de material didáctico. Isso acontece tanto com a introdução do método Cuisenaire, como com a introdução do calculador Multibásico.

Enquadramento Metodológico

Viñao (2007) destaca a necessidade de haver uma perspectiva histórica da mudança na educação. De acordo com Viñao (2007), a análise histórica da mudança deve distinguir diversos aspectos, entre os quais destaca as mudanças, em geral curriculares, que são o resultado de movimentos ou tendências que unam reforma e inovação em relação com a prática de ensino ou um campo disciplinar, geradas, embora nem sempre, no âmbito universitário.

A opção por este tipo de abordagem influenciou as decisões no campo metodológico, tanto ao nível da selecção das fontes como da análise dos dados. Assim, na selecção dos documentos a utilizar no desenvolvimento do trabalho, foram seleccionados aqueles que permitissem ter uma imagem próxima daquilo que aconteceu, tanto ao nível das metodologias propostas por Nabais, como na divulgação e desenvolvimento dos materiais didácticos.

A análise de conteúdo foi realizada de uma forma diferenciada, cronologicamente e por temas, seguindo uma proposta de Burns (2000). Em relação à análise por temas, foram organizadas as seguintes categorias de análise, que permitiram comparar as propostas apresentadas por Nabais para o ensino da Matemática e as propostas apresentadas nos Programas do Ensino Primário de 1960: Teoria dos Conjuntos, Estudo do Número, Adição e Subtracção, Multiplicação e Divisão, Fracções e Decimais, Medidas e Grandezas, Geometria e Materiais Didácticos. Estas categorias emergiram da análise dos documentos.

O Movimento da Matemática Moderna (MMM) e as reformas do Ensino Primário

De acordo com Moon (1986), investigações feitas pela UNESCO e pela OCDE indicam que, antes do Seminário de Royaumont[5] pouco conhecimento se tinha sobre o trabalho desenvolvido na disciplina de Matemática nos primeiros anos de escolaridade, nos diferentes países. Enquanto os currículos do Ensino Secundário foram alterados na década de 1950, as escolas do Ensino Primário só receberam o impacto do movimento de reformas curriculares em Matemática, na década seguinte.

A partir de meados da década de 1960 são desenvolvidos diversos projectos que se centram na Matemática do Ensino Primário, tal como o projecto Nuffield (Nuffield Primary Mathematics Project), desenvolvido em Inglaterra a partir de 1964. Este projecto preocupava-se com a metodologia da Matemática no Ensino Primário, principalmente com a aprendizagem pela descoberta para as crianças dos 5 aos 13 anos. Entretanto outros projectos que se dedicaram ao Ensino Primário foram-se desenvolvendo noutros países, como o Alef, na Alemanha e o Analogue, em França (Matos, 2004b).

Em 1966 Dienes compila um relatório sobre a Educação Matemática no Ensino Primário, onde destaca que neste nível de ensino existiam importantes mudanças em curso. De acordo com Moon (1986), em 1969 a Matemática no Ensino Primário já se tinha estabelecido como uma importante área de interesse, no contexto da reforma da Matemática Moderna.

Segundo Moon (1986), num documento publicado pela UNESCO em 1979, onde se apresentam as conclusões dos trabalhos do Seminário de Karlsruhe de 1976, e no que diz respeito à introdução da Matemática Moderna no Ensino Primário, são destacadas as seguintes tendências neste nível de ensino: (1) uma tendência estruturada, que destaca o ensino das estruturas matemáticas com o objectivo de trabalhar conteúdos tradicionais de uma nova forma, (2) uma tendência aritmética, com a introdução desde muito cedo da linguagem dos conjuntos, com uma aproximação à aritmética, que a torna mais numa nova unidade de conteúdos do que numa introdução ao mundo quantitativo e (3) uma tendência empírica, em que o ensino da Matemática é feito através de actividades variadas nas áreas de medida e geometria, concentrando-se mais numa abordagem didáctica do que numa organização lógica e vertical.

[5] Seminário realizado em França nos finais de 1959. A partir das conclusões deste seminário foram elaboradas propostas de programas de Matemática para o Ensino Secundário.

De acordo com as conclusões que Moon (1986) salienta neste documento, o que colocou a reforma em marcha, relacionou-se mais com alguns aspectos espectaculares de alguns conteúdos, do que na mudança de métodos. Outro aspecto destacado por este autor (1986) é que a maioria dos professores do Ensino Primário entrou em contacto com as inovações propostas através dos manuais produzidos, que muitas vezes reflectiam apenas a interpretação dos autores sobre as ideias da reforma.

Analisando o desenvolvimento das reformas curriculares que ocorreram no Ensino Primário entre 1960 e 1980, Moon (1986) realça a importância do papel dos projectos desenvolvidos de uma forma não centralizada e com apoio de fundações privadas, referindo a este o exemplo do trabalho de Nicole Picard[6] em França que, apesar de ter tido um apoio indirecto do governo francês, nunca foi assumido como um projecto nacional, como ocorreu por exemplo na Holanda com o projecto WISKOBAS[7].

Segundo Guimarães (2003), a proposta de Royaumont teve vários desenvolvimentos e formas de concretização, tanto nos Estados Unidos da América, como na Europa. Nos Estados Unidos da América, Guimarães (2003, citando Howson, 1981) destaca alguns projectos com um carácter mais comportamentalista, como o projecto da Universidade de Maryland, e outros de carácter mais cognitivista, como o projecto Madison.

De acordo com Servais (1975), na Europa também existiram diferentes concretizações da reforma da Matemática Moderna. No caso do currículo francês, acentuava-se a vertente mais abstracta e formal, com uma concretização ortodoxa das ideias propostas pelos proponentes da reforma da Matemática Moderna. No caso belga, também na mesma linha, dava-se ênfase à utilização de materiais manipuláveis no ensino elementar – Barras de Cuisenaire, blocos lógicos de Dienes, grafos com o uso da cor e a mini-calculadora de Papy[8]. Em Itália, com o impulso de Emma Castelnuovo[9], deu-se ênfase à utilização de materiais construídos pelos alunos (Servais, 1975).

---

[6] Nicole Picard foi investigadora no Instituto Pedagógico Nacional de França e é autora de diversos livros dedicados ao ensino da Matemática, como o livro *À conquista do número*, traduzido para português pelo professor Santos Heitor.

[7] Projecto de Matemática para as escolas do Ensino Primário integrado no projecto IOWO (Centro Holandês para o Desenvolvimento Curricular em Matemática) (Moon, 1986).

[8] Material desenvolvido por George Papy que foi um educador matemático belga que desenvolveu o seu trabalho no sentido de aproximar a Matemática escolar da Matemática ensinada na universidade, incrementando um programa rigoroso, com enfoque em Espaços Vectoriais e Geometria das Transformações (Duarte e Silva citando D'Ambrosio, 1987, p.78) recuperado em 26 de Dezembro, de http://www.uepg.br/praxiseducativa/v1n1Artigo_8.pdf

Em Portugal parece haver poucas informações sistematizadas sobre as influências que o Movimento da Matemática Moderna teve ao nível do Ensino Primário. No entanto, existiram algumas iniciativas tendo em vista a divulgação de metodologias ligadas à Matemática Moderna neste nível de ensino (Matos, 2004a). Destas iniciativas destacam-se os trabalhos desenvolvidos nalguns colégios particulares, o trabalho desenvolvido pelos professores de Didáctica Especial, nas Escolas do Magistério Primário e o projecto de Iniciação das matemáticas no Ensino Primário, desenvolvido pelo Centro de Investigação Pedagógica da Fundação Calouste Gulbenkian.

Em 1974 são aprovados pelo Ministério da Educação e Cultura os novos Programas do Ensino Primário para o ano lectivo 1974-1975, sendo renovada a Matemática. Nestes Programas do Ensino Primário, são apresentados dois programas de Matemática para a 1ª classe. O programa **A** é resultante de uma adaptação realizada no programa do Ensino Primário anterior, enquanto o programa **B**, é elaborado na linha das Matemáticas Modernas. (Programas do Ensino Primário 1974-1975).

Críticas à Matemática Moderna

Para Huete e Bravo (2006) a proposta curricular associada à Matemática Moderna construiu metodologias que não relacionavam a Matemática com o mundo real, facto que terá sido reconhecido pelo próprio Beberman, considerado o pai da reforma nos Estados Unidos da América, ao considerar que no programa que ajudou a implementar, eram muitas vezes feitas propostas que não vinham dos alunos, mas sim de adultos e professores.

Nos Estados Unidos da América, ainda no início dos anos sessenta, Morris Kline critica a estrutura formal da reforma curricular. Já em 1973, no seu livro *Why Jonhy can´t add – The failure of the New Math (O Fracasso da Matemática Moderna)*, Kline critica não só a introdução da Matemática Moderna nos currículos de Matemática, à custa de conteúdos tradicionais, como o próprio desenvolvimento que se deu aos conteúdos da Matemática Moderna.

---

[9] Emma Castelnuovo, professora do Ensino Secundário italiana, que desenvolveu trabalho sobre o ensino da Geometria no Ensino Primário e Secundário.

Guimarães (2003), refere que a par do movimento de reacção à Matemática Moderna, intitulado "Back to Basics", surgem outros posicionamentos que se opõem a esta reacção mais conservadora, criticando as tendências que consideram redutoras para o ensino da matemática (aptidões básicas). Surgem assim durante os anos setenta, alguns movimentos que produzem documentos que tentam contrariar a lógica do "Back to Basics": Overview and analysis of school mathematics: Grades K-12, do National Advisory Committee on Mathematic Education, documento de recomendações do National Council of Teachers of Mathematics, entre outros.

Também em Portugal surgem algumas vozes discordantes do Movimento da Matemática Moderna. De acordo com Ponte (1993) no final dos anos 70 realizam-se no GEP[10], no âmbito de um acordo Luso-Sueco, um conjunto de estudos de avaliação do ensino unificado, tendo sido dada uma atenção específica à disciplina de Matemática (Leal e Fägerlind, 1981; Leal e Kilborn, 1981 citados em Ponte, 1993). Estes estudos terão concluído que os alunos tinham níveis de desempenho muito baixos nesta disciplina, muito inferiores às expectativas dos autores dos programas. Os estudos apontavam ainda as deficiências no cálculo como a razão para o fraco aproveitamento dos alunos, recomendando o reforço do ensino da aritmética para além do 4º ano de escolaridade, numa posição alinhada com o movimento do "Back to Basics" que já então se vivia em diversos países, em reacção à Matemática Moderna (Ponte, 1993).

Em 1988 realiza-se em Vila Nova de Milfontes um seminário sobre a renovação do currículo de Matemática, organizado pela Associação de Professores de Matemática. No documento produzido a partir dos trabalhos deste seminário, ao fazer-se uma pequena retrospectiva do passado recente do ensino da Matemática, apontam-se como razões para o fracasso da Matemática Moderna o facto de ela ter uma tendência mecanicista, tal como a orientação da Matemática tradicional, ao aceitar que a aprendizagem se desenvolve por transmissão e absorção, e não por construção (APM, 1995).

Desenvolvimento e divulgação de materiais didácticos

[10] GEP – Gabinete de Estudos Pedagógicos – Estes estudos são integrados numa avaliação da reforma do Ensino Secundário unificado (Matos, 2004a).

É a partir da importância dada à concretização no ensino da Matemática, que Nabais inicia, desde 1960, o trabalho de experimentação do material Cuisenaire no Centro de Psicologia Aplicada à Educação. Em 1961 é feita uma primeira experiência de aplicação no Colégio Vasco da Gama, em Meleças, com alunos da 4ª classe (Nabais, 1965).

Estes primeiros trabalhos desenvolvidos com o material Cuisenaire parecem ter causado um impacto muito positivo, sendo este material apresentado como um notável progresso pedagógico (Nabais, 1965).

Com estas primeiras experiências na utilização do material Cuisenaire, também parece haver uma reflexão sobre o papel do professor no ensino da Matemática, sendo destacado o papel de orientador das aprendizagens (Nabais, 1965).

Assim, realiza-se o primeiro Curso Cuisenaire de 23 a 28 de Abril de 1962, no Colégio Vasco da Gama, em Meleças, no qual participam 135 professores de todos os pontos do país. Este curso é dirigido por Caleb Gattegno e decorre ao longo de seis dias (Nabais, 1965, p. 159).

Este primeiro Curso Cuisenaire recebe o apoio do Ministério da Educação Nacional, que dispensa do serviço os professores que nele queiram participar (Ofício – Circular nº 48, de 7 de Março de 1962).

No que diz respeito a este primeiro curso de iniciação ao método Cuisenaire, Francelino Gomes (depoimento oral, 2007, 14 de Novembro), membro da equipa do projecto de Modernização da Iniciação Matemática no Ensino Primário, do Centro de Investigação Pedagógica da fundação Calouste Gulbenkian, salienta o papel de Nabais na divulgação e implementação deste material em Portugal.

Em relação aos cursos e à formação de professores, a professora Maria de Lourdes Tavares[11] (depoimento oral, 2007, 14 de Maio) salienta a importância que Nabais dava à formação dos professores do Ensino Primário, nomeadamente na área da Matemática.

Ainda em 1962, no período compreendido entre o dia 1 e o dia 5 de Outubro, realiza-se o segundo Curso Cuisenaire nas instalações do Colégio Brotero no Porto,

[11] A professora Maria de Lourdes Silvério Tavares, leccionou no Colégio Vasco da Gama, no Ensino Primário, desde a inauguração do Colégio no ano lectivo de 1959/1960, tendo acompanhado toda a implementação das novas metodologias no Ensino Primário na instituição.

sendo dirigido por António Augusto Lopes[12] e por João António Nabais.. Até 1964 realizam-se mais cinco cursos de iniciação ao método Cuisenaire, em diversos pontos de Portugal Continental. Nestes primeiros sete cursos são iniciados na manipulação deste material mais de meio milhar de professores (Nabais, 1965).

Também em relação ao início da divulgação do material Cuisenaire em Portugal, o professor Moreirinhas Pinheiro, antigo professor de Didáctica Especial no Magistério de Lisboa, destaca o trabalho desempenhado por Nabais na divulgação do material em Portugal (Pinheiro, depoimento oral, 2007, 31 de Maio, pp. 3-4).

Em 1963 é publicada a 1ª edição do livro *O Zeca já pode aprender aritmética: guia para o método dos números em cor*, cuja revisão é feita por João António Nabais. Neste livro, editado no nosso país por Cuisenaire de Portugal, Centro de Psicologia Aplicada à Educação, Caleb Gattegno expõe o método de ensino da Matemática de Georges Cuisenaire.

Entre 1965 e 1967 realizam-se doze cursos em diversos pontos de Portugal Continental, no arquipélago da Madeira e no arquipélago dos Açores, passando a denominar-se *Cursos de Iniciação no método Cuisenaire e de Introdução à Matemática Moderna*. Para além de João António Nabais, participa na orientação de um destes cursos Madeleine Goutard[13] (Nabais, 1968).

Nestes doze cursos, realizados entre 1965 e 1967[14], participam cerca de 750 professores que, juntos com os cerca de 500 dos cursos anteriores, perfazem um total de cerca de 1250 professores dos vários graus de ensino. Na crónica publicada por Nabais em 1968, salienta-se a elevada participação de professores nestes cursos como demonstração da ansiedade que estes tinham em actualizar a sua preparação matemática (Nabais, 1968).

Entre 1965 e 1977 são referidas, no Relatório e Contas da Associação de Jardins-Escolas João de Deus, diversas Conferências Pedagógicas orientadas por Nabais e dirigidas a estudantes da instituição. A professora Leonida Faria, actual coordenadora

---

[12] Professor metodólogo do Liceu D. Manuel II, do Porto, membro da Comissão de Revisão do Programa do 3º Ciclo do Ensino Liceal (actuais 10º e 11º anos), que em 1962 elabora um programa experimental. (Matos, 2004).

[13] Pedagoga que desenvolveu trabalho no âmbito do ensino da Matemática com crianças. Autora de várias obras, entre as quais *Les Mathématiques et les Enfants*, editada pela editora Delachaux et Niestlé (Nabais, 1968).

[14] Estes cursos estão descritos numa crónica intitulada *Cursos de Iniciação no método Cuisenaire e de Introdução à Matemática Moderna*, publicada na revista *Cadernos de Pedagogia e Psicologia* de 1968,

do 1º ciclo do ensino básico no Colégio Campo de Flores, onde também foram desenvolvidos os Programas Próprios organizados por Nabais, salienta a relação existente com os cursos de formação inicial de professores e educadores das escolas João de Deus (Faria, depoimento oral, 2007, 14 de Novembro)

O desenvolvimento dos materiais didácticos e a organização das metodologias

De acordo com Nabais (1990, Junho 14) é no ano de 1966 que se faz a introdução da "Matemática dita Moderna" nas classes do Ensino Primário do Colégio Vasco da Gama, nomeadamente com a adaptação do material Cuisenaire à Matemática Moderna e a criação do material Cubos – Barras de Cor em 1967. Esta adaptação do material Cuisenaire à Matemática Moderna é justificada mais tarde por Nabais, em anotações produzidas para uma edição sem data do livro *O Zeca já pode aprender aritmética: guia para o método dos números em cor*[15], cujo título é alterado apenas na contracapa para *O Zeca já pode aprender aritmética: guia para o método dos cubos – barras de cor (Cores Cuisenaire)*. Nestas anotações, para além dos elogios feitos ao material Cuisenaire, Nabais aponta-lhe algumas desvantagens e falta de adequação à fundamentação da Matemática Moderna[16].

Estas alterações feitas ao material Cuisenaire, com o desenvolvimento do material Cubos – Cor[17] e mais tarde os Cubos – Barras de cor, parecem influenciar as alterações que são introduzidas na denominação dos cursos.

Em 1968[18], Nabais refere-se à utilização dos materiais no ensino da Matemática, mas já em relação ao material didáctico desenvolvido, a que dá o nome de Cubos – Cor, em vez de material Cuisenaire. Para Nabais (1968), com estes materiais a criança pode

[15] Esta edição do livro é apresentada sem data. Numa das anotações, Nabais refere-se a Sebastião e Silva como o "saudoso Prof. Dr. Sebastião e Silva" (Em Gattegno, s.d.b, p. 42). A morte de Sebastião e Silva ocorre em 25 de Maio de 1972, estas anotações devem portanto situar-se numa data posterior e, como consequência, também a data desta edição deve ser posterior.
[16] As adaptações efectuadas por Nabais ao material Cuisenaire serão discutidas adiante no presente artigo.
[17] Através da leitura da metodologia dos Cubos – Cor, publicada na revista número 5 dos *Cadernos de Psicologia e Pedagogia* de 1968, e também numa edição sem data, do número 1 da colecção *Constrói a tua* Matemática, ambas da autoria de Nabais, é possível verificar através da descrição deste material Cubos – Cor, as diferenças que existem entre este e o material Cubos – Barras de cor, desenvolvido posteriormente e que ainda hoje é comercializado.
[18] No artigo *Para construir as Matemáticas,* publicado na revista *Cadernos de Psicologia e Pedagogia* de 1968.

"criar situações variadas e ricas em elementos de intuição. Pode manipulá-las sobre a sua carteira, confrontá-las, relacioná-las, arrancar-lhes a verdade matemática" (p. 61).

Ainda em 1968[19], Nabais apresenta, em 285 passos, a metodologia a utilizar com o material desenvolvido, onde inclui as seguintes secções[20]: *o Material*, *os Conjuntos Singulares e Vazios*, *Conjuntos Iguais e Equivalentes*, *Reunião de Conjuntos (adição)*, *Subtracção de Conjuntos*, *Iteração – Repetição de Conjuntos (multiplicação)*, *Subtracção Iterada de Conjuntos*[21] *(divisão)*, *Factorização e Divisibilidade*, *Fracções de Conjuntos*, *Famílias de Fracções e a Representação de Conjuntos*.

Numa edição sem data, do número 1 da colecção *Constrói a tua Matemática*, com o título *À descoberta da Matemática com os cubos – barras de cor (cores Cuisenaire)* a metodologia exposta já se refere aos Cubos – Barras de cor. Nabais (s.d.a) salienta que este caderno é destinado aos professores e pretende ser um guia orientador, onde os professores encontrem a sequência de passos programados para promover no aluno as aquisições básicas da Matemática. Nabais alerta ainda na introdução deste guia orientador, que certos capítulos da metodologia, bem como o que chama de símbolos da Matemática Moderna[22], só devem ser apresentados aos alunos quando estes revelarem maturidade suficiente para os aprenderem. Neste caderno introduz-se também a *linguagem dos comboios* e *carruagens* para trabalhar com os Cubos – Barras cor, linguagem que também era utilizada por Gattegno com o material Cuisenaire.

Em 1969, através do Centro de Psicologia e Pedagogia, e no âmbito dos *Cursos de Verão para Professores*, Nabais organiza o *VII Seminário de Psicologia e Pedagogia*, que conta com a presença, entre outros, de Georges Papy[23]. Neste

---

[19] Esta metodologia é apresentada na revista *Cadernos de Psicologia e Pedagogia* de 1968, no artigo *À descoberta da Matemática com os Cubos – Cor*.

[20] A terminologia apresentada em itálico, é uma transcrição da terminologia utilizada no original por Nabais, e consta na metodologia apresentada na revista *Cadernos de Psicologia e Pedagogia,* de 1968. Em relação a esta terminologia é conveniente fazer alguns esclarecimentos. Nabais utiliza a expressão *Reunião de Conjuntos* para a adição, em vez de reunião de conjuntos disjuntos. Nabais utiliza por exemplo a terminologia *Subtracção de Conjuntos*, no entanto esta não é uma operação que esteja definida entre conjuntos, devendo-se por isso falar, ou em conjuntos complementares, ou na diferença de cardinais de conjuntos complementares.

[21] De acordo com o original.

[22] Os símbolos da Matemática moderna referidos por Nabais, são aqueles que normalmente estão associados à teoria dos conjuntos.

[23]George Papy que foi um educador matemático belga que desenvolveu o seu trabalho no sentido de aproximar a Matemática escolar da Matemática ensinada na universidade, incrementando um programa rigoroso, com enfoque em Espaços Vectoriais e Geometria das Transformações (Duarte & Silva citando D'Ambrosio, 1987, p.78) recuperado em 26 de Dezembro, de http://www.uepg.br/praxiseducativa/v1n1Artigo_8.pdf

Seminário, Papy apresenta ao longo de dez dias, um curso intitulado *Matemática Moderna e Pedagogia da Matemática*, onde aborda temas como os conjuntos, operações entre conjuntos, álgebra dos conjuntos, relações e propriedades das relações, equivalências, sistema binário, números cardinais, adição, multiplicação, números reais, entre outros. Neste Seminário, para além do curso sobre Tecnologia Educacional e Orientação Escolar, Nabais organiza diversas sessões subordinadas ao tema do ensino da Matemática.

As críticas ao material Cuisenaire e o desenvolvimento dos Cubos – Barras de cor (cores Cuisenaire)

No princípio da década de 1970, é publicada uma nova edição do livro *O Zeca já pode aprender aritmética: guia para o método dos números em cor,* com o título alterado para *O Zeca já pode aprender aritmética: guia para o método dos cubos - barras de cor (Cores Cuisenaire)*. Esta edição é revista e anotada por João António Nabais, que tenta esclarecer o leitor sobre a nova nomenclatura que deve ser utilizada ao longo da leitura do livro.

Logo no início do livro, mesmo antes do índice, surge uma anotação produzida por Nabais com o título "Prevenção ao leitor" a esclarecer que:

> ... o material NÚMEROS EM COR, foi concebido e executado pelo seu genial Autor – o Prof. Georges Cuisenaire - dentro das estruturas da Matemática clássica ou tradicional, não corresponde devidamente às exigências de terminologia e fundamentação da Matemática Moderna, nomeadamente à Teoria dos Conjuntos. (Nabais em Gattegno, edição portuguesa, s.d.b, p. 2, maiúsculas no original)

Por esse motivo, Nabais refere que procuraram dar-lhe uma nova apresentação e designação, Cubos - Barras de Cor. Tendo em conta este esclarecimento, Nabais adverte o leitor sobre a linguagem que deve ser utilizada. (Nabais em Gattegno, edição portuguesa, s.d.b).

Ao longo das diversas anotações que vão surgindo ao longo do livro, Nabais apresenta as limitações que, segundo este pedagogo, o material Cuisenaire tem e as alterações que foram feitas ao material, que são resumidas numa anotação final:

> ... caracter *[sic]* exclusivista do material Cuisenaire, não permitindo variar as situações; o exigir à criança que meça antes mesmo de adquirir a ideia de número para saber contar; o facto de as dez pedras Cuisenaire constituirem *[sic]* outros tantos conjuntos singulares, não apresentando cada um número de elementos que se pretende que a criança neles descubra; designação imprópria, inadequada e deformadora ... (Nabais em Gattegno, edição portuguesa, s.d.b, p. 42)

O Calculador Multibásico

Em 1966 é criado por Nabais e experimentado no ensino da Matemática no Ensino Primário do Colégio Vasco da Gama, o Calculador Multibásico (Nabais, 1990; Ricardio, 1992).

Este material é constituído por três placas, com cinco orifícios cada uma, e 50 elementos em seis cores diferentes: 10 amarelos, 13 verdes, 13 encarnados, 10 azuis, 2 cor-de-rosa e 2 cor de lilás[24]. Estes elementos coloridos encaixam uns nos outros bem como nos orifícios das placas.

Em 1968, expõe a metodologia[25] a utilizar com este material. O ábaco parece estar na origem do seu desenvolvimento (Nabais, 1968).

Para além de ser apontado como um meio de fácil concretização da aritmética na escola primária, é também referido como um material "polivalente para a descoberta da matemática nas escolas secundárias: Ideal para a introdução da criança na numeração (diferentes bases), bem como no algoritmo das operações aritméticas" (Nabais, s.d.b, s.p.).

---

[24] Na metodologia apresentada para trabalhar este material, as cores são representadas por letras minúsculas: amarelo (a), verde (v), encarnado (e), azul (z), cor de rosa (r) e cor de lilás (l).

[25] Esta metodologia é exposta na revista *Cadernos de Psicologia e Pedagogia*, Nabais publica o artigo *Construindo a Matemática com o calculador multibásico*

Desenvolvimento dos diferentes conteúdos matemáticos nas metodologias propostas por Nabais na década de 1960 e nos Programas do Ensino Primário de 1960

No que diz respeito à Teoria dos Conjuntos, Nabais trabalha este tema como forma de introdução ao estudo do número e ao estudo das diferentes operações. A exploração deste tema centra-se nas actividades desenvolvidas com os Cubos – Barras de cor, com o Calculador Multibásico e com os Conjuntos Lógicos. No caso do material Conjuntos Lógicos, este tema é explorado através de um conjunto de jogos. Nos Programas do Ensino de Primário de 1960 não se fala em conjuntos, mas apenas em "grupos de objectos" no contexto da divisão.

No que respeita ao tema do Estudo do Número, destaca-se a importância dada por Nabais à exploração das diferentes bases de numeração, antes de estudar o sistema decimal. Esta exploração das diferentes bases é feita com recurso ao Calculador Multibásico. Simultaneamente, o Estudo do Número é feito a partir das noções de conjuntos, destacando-se a propriedade número. O tema do Estudo do Número, no programa de 1960 assenta no estudo monográfico do número e é tido como base do raciocínio aritmético.

Em relação ao estudo do tema da Adição e Subtracção, destacam-se nas metodologias de Nabais, as propostas de trabalho com estas operações nas diferentes bases, através da exploração do Calculador Multibásico. Este material também é utilizado para fazer a introdução aos algoritmos destas duas operações, explorando-se a técnica do algoritmo da subtracção com trocas e por compensação. Para o estudo deste tema, Nabais introduz três níveis de linguagem na utilização dos Cubos – Barras de cor. Num primeiro nível é utilizada a linguagem dos comboios, em que cada barra pode assumir a função de carruagem, comboio ou estação, num segundo nível a linguagem dos conjuntos e finalmente o destaque para o trabalho com a propriedade número dos conjuntos. É de realçar que, para a subtracção, Nabais trabalha essencialmente dois sentidos nas metodologias dos diferentes materiais. O sentido de tirar, principalmente com os Cubos – Barras de cor, e o sentido de diferença, principalmente com o Calculador Multibásico. No Programa do Ensino Primário de 1960, o tema da Adição e Subtracção é trabalhado a partir de composições e decomposições de números e a sua introdução é feita a partir de problemas. Neste programa destaca-se a utilização do cálculo mental antes do cálculo escrito e distinguem-se para a subtracção dois conceitos, o de retirar e o de diferença. Estas duas operações são trabalhadas essencialmente na 1ª classe, sendo deixadas para as restantes classes apenas a prática do cálculo, tanto mental como escrito, e a realização das provas das operações.

Para o estudo do tema da Multiplicação e Divisão, Nabais volta a ter como referência, o trabalho com os conjuntos. A multiplicação é explorada a partir da "iteração de conjuntos". Tanto com os Cubos – Barras de cor, como com o Calculador Multibásico, o sentido explorado para esta operação é o de adição de parcelas iguais.

Em relação à divisão, esta operação é explorada com a "partição de conjuntos". Na metodologia dos cubos – Barras de cor, Nabais estabelece uma relação entre a divisão e as fracções, com a exploração das partes iguais de uma unidade. Neste tema da multiplicação e Divisão, Nabais destaca o trabalho com as noções de factor, divisor e múltiplo de um número.

No que diz respeito ao programa de 1960, a multiplicação é trabalhada na 1ª classe, a partir do conceito de soma de parcelas iguais. Nas restantes classes, destaca-se a prática das operações e a verificação através das provas. Também se destaca a construção das tábuas de multiplicar. A divisão é trabalhada desde a 1ª classe, tanto no conceito de repartir como no de agrupar, com a divisão de números até 10, pelos divisores 2, 3, 4 e 5. Nas restantes classes sugere-se a prática da operação e a verificação do resultado através das diferentes provas.

No que diz respeito ao tema das Fracções e Decimais, nas metodologias de Nabais, o trabalho é desenvolvido essencialmente com os Cubos – Barras de cor. Nesta metodologia, os decimais são trabalhados em estreita relação com as fracções. Primeiro é feito um trabalho com diferentes partes da unidade, até chegar à décima parte. Em relação ao tema das Fracções e Decimais, no programa de 1960 inicia-se o estudo dos decimais na 3ª classe, a partir de contextos das medidas e grandezas. O estudo das fracções tem início na 4ª classe, sendo aconselhado um estudo restrito, a partir de processos intuitivos e de resolução de problemas. Neste programa é estabelecida uma relação entre o estudo das fracções e o conceito de percentagem.

Apesar das metodologias analisadas não terem qualquer proposta de exploração do tema Grandezas e Medidas, através do depoimento oral de Maria de Lourdes Silvério Tavares, foi possível verificar que desde o início do trabalho com os Cubos – Barras de cor que houve uma exploração deste tema, principalmente das medidas de comprimento e das medidas de área. Em relação ao tema das Grandezas e Medidas, no programa de 1960 os conteúdos dividem-se pela Aritmética e pela Geometria. A iniciação é feita desde a 1ª classe, através da utilização de unidades não estandardizadas e depois com unidades estandardizadas. Para além do estudo das medidas de comprimento, são também estudadas as medidas de peso e de capacidade. Nas restantes classes destaca-se o estudo das unidades de dinheiro e das unidades de tempo, com os números complexos.

No princípio da década de 1960, a Geometria constitui uma disciplina por si só, que é estudada a partir da 3ª classe do Ensino Primário. Na Geometria é destacado o estudo das medidas de área, que incluem as medidas agrárias, e as medidas de volume. Nas metodologias propostas por Nabais na década de 1960, não existem propostas para este tema.

Considerações Finais

Papel de Nabais na introdução e divulgação de ideias ligadas ao MMM no Ensino Primário

- Desenvolvimento, a partir do ano lectivo de 1960/1961, de uma experiência de introdução do material Cuisenaire no ensino da Matemática no Primário.
- Organização, a partir de 1962, de cursos de divulgação e iniciação ao método Cuisenaire e mais tarde de Introdução da Matemática Moderna, com a participação de personalidades relacionadas com o Movimento da Matemática Moderna, como Caleb Gattegno, Georges Papy e Madeleine Goutard.

- Apoio e revisão da tradução de obras relacionadas com o ensino da Matemática, como *O Zeca já pode aprender Aritmética* e *Lições Programadas de Matemática Moderna – Para Compreender e Representar os Conjuntos.*

- Desenvolvimento de material didáctico para o ensino da Matemática.

Papel de Nabais na formação de professores Primário no âmbito do ensino da Matemática

- A formação dos professores do Ensino Primário, nomeadamente no âmbito do ensino da Matemática, é uma área pela qual este pedagogo revela especial interesse.
- Ao longo das décadas de 1960 e 1970, Nabais desenvolve um intenso trabalho de formação de professores no âmbito do ensino da Matemática, com a realização de cursos em diversos locais de Portugal Continental e nos arquipélagos da Madeira e dos Açores.

- Neste trabalho de formação de professores, destaca-se o trabalho realizado com as Escolas João de Deus.

Inovações didácticas e curriculares introduzidas no ensino da Matemática no Colégio Vasco da Gama

- Opção pelos materiais estruturados, nos quais centra muitas das propostas para o ensino desta disciplina.
- Introdução da Teoria dos Conjuntos no âmbito do Estudo do Número e no estudo das diferentes operações.
- Destaque dos diferentes sentidos das operações, nomeadamente na multiplicação, com a utilização do arranjo rectangular e do produto combinatório.
- Decimais trabalhados como mais uma fracção.

- O Estudo do Número e o estudo das diferentes operações é feito nas diferentes bases, começando na Base 2, até à Base 10.

Referências bibliográficas

Documentos consultados

Associação de Jardins de Escolas João de Deus. (1965 a 1980). *Relatório e Contas da Gerência e Parecer do Conselho Fiscal*.

Gattegno, C. (s.d.a). *O Zeca já pode aprender matemática: guia para o método dos números em cor* (1ª ed.). Meleças: Éduca – material didáctico.

Gattegno, C. (s.d.b). *O Zeca já pode aprender matemática: guia para o método dos números em cor* (2ª ed.). Meleças: Éduca – material didáctico.

Nabais, J. A. (ed.) (1965). *Cadernos de Psicologia e de Pedagogia: Revista de Ciências da Educação*. Vol. I, números 3 e 4. Lisboa: Centro de Psicologia Aplicada à Educação.

Nabais, J. A. (1968). *Número especial sobre o Ensino da Matemática*. *Cadernos de Psicologia e de Pedagogia, Revista de Ciências da Educação*. Lisboa: Centro de Psicologia Aplicada à Educação.

Nabais, J. A. (s.d.a). *À descoberta da matemática com os cubos – barras de cor (cores Cuisenaire)*. Colecção – Constrói a tua matemática nº 1. Meleças: Éduca material didáctico.

Nabais, J. A. (s.d.b). *À descoberta da matemática com o calculador multibásico*. Colecção – Constrói a tua matemática nº 2. Meleças: Éduca material didáctico.

Nabais, J. A. (s.d.d). *À descoberta da matemática com os cubos – cor*. Colecção – Constrói a tua matemática nº 1. Lisboa: Centro de Psicologia Aplicada à Educação.

Documentos tridimensionais

Calculador multibásico: material para a descoberta da matemática. Évora: Éduca material didáctico, s/d. 1 jogo: plástico.

Cubos-Barras de Cor (cores Cuisenaire): material para a descoberta da matemática. Évora: Éduca, material didáctico, s/d. 1 jogo (tipo lego): plástico.

Bibliografia Geral

Burns, R. B. (2000). *Introduction to research methods*. (4ª edição). Londres: Sage Publications.

Candeias, R. (2007). *Contributo para a história das inovações no ensino da matemática no primário: João António Nabais e o ensino da matemática no Colégio Vasco da Gama.* (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa)

Guimarães, H. M. (2003). *Concepções sobre a matemática e a actividade matemática: um estudo com matemáticos e professores do ensino básico e secundário*. Colecção Teses. Lisboa: APM.

Jeronnez, L. (ed.). (1964). *Bulletin Cuisenaire: les Réglettes en Coulers*. Bruxelles: Editions Calozet.

Matos, J. M. (2004a). *Cronologias: Cronologia do ensino da matemática (1940-1980) – Portugal.* Recuperado em 2007, Janeiro 15, de http://phoenix.sce.fct.unl.pt/jmmatos/clivros/CLVRSHTM/ CRONOL/CRONEST.HTM

Matos, J. M. (2007). História do ensino da matemática em Portugal: a constituição de um campo de investigação. Em *A matemática moderna nas escolas do Brasil e de Portugal: primeiros estudos*. Matos, J. M. & Valente, W. (org.). São Paulo: CAPES – GRICES

Moon, B. (1986). *The"New Maths" curriculum controversy. An International story*. London: The Falmer Press.

Nóvoa, A. (1993). Perspectivas de renovação da história da educação em Portugal. Em Nóvoa, A.; Berrio, J.R. (eds.) (1993). *A história da educação em Espanha e Portugal*. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação

Nóvoa, A. (dir.) (2003). *Dicionário de pedagogos portugueses* (1ª ed.). Porto: Edições Asa

Servais, W. (1975). Continental traditions and reforms. Em *International Journal of Mathematical Education in Science and Techonology*. vol. 6. nº 1. pp. 37-58. Recuperado em 2007, Agosto 15, de http://moodle.fct.unl.pt.

Viñao, A. (2007). *Sistemas educativos, culturas escolares e reformas*. Mangualde: Edições Pedago.

Legislação Consultada

Ministério da Educação Nacional (1964). *Programas do Ensino Primário – Aprovados pelo Decreto-Lei nº 42 994, publicado no «Diário do Governo» nº 125, 1ª série, de 28 de Maio de 1960.* Lisboa: Imprensa Nacional.

Ministério da Educação e Cultura (1974). *Ensino primário. Programas para o ano lectivo 1974 – 1975*. Lisboa: Secretaria-geral Divisão de Documentação.

Ofício – Circular nº 48, de 7 de Março de 1962

Anexo

Quadro I - Quadro comparativo do desenvolvimento dos diferentes conteúdos matemáticos nas metodologias propostas por Nabais na década de 1960 e nos Programas do Ensino Primário de 1960.

Temas Matemáticos	**Programas do Ensino Primário de 1960**	**Metodologias propostas por Nabais**
Teoria dos Conjuntos	Não se fala em conjuntos, mas apenas em “grupos de objectos” no contexto da divisão	Conjuntos utilizados na introdução do estudo do número, adição e subtracção e multiplicação e divisão.
Estudo do Número	Estudo monográfico do número. Base do raciocínio aritmético.	Estudo a partir das noções de conjuntos, destacando a propriedade número e a partir das diferentes bases de numeração.
Adição e Subtracção	Composições e decomposições de números. Introdução com problemas. Na subtracção destaca-se o conceito de “tirar” e o de “diferença”	Estudo das operações tendo como referência o trabalho com os conjuntos. “Reunião de Conjuntos” para a adição e “Diferença de Conjuntos” para a subtracção. É feito nas diferentes bases de numeração com o Calculador Multibásico.
Multiplicação e Divisão	Multiplicação trabalhada na 1ª classe, conceito de soma de parcelas iguais. Divisão desde a 1ª classe, conceito de repartir e agrupar.	Estudo das operações tendo como referência o trabalho com os conjuntos. “Iteração de conjuntos” para a multiplicação e “Partição de conjuntos” para a divisão. Também é explorado o arranjo rectangular e o produto combinatório para a multiplicação.

Quadro I - Quadro comparativo do desenvolvimento dos diferentes conteúdos matemáticos nas metodologias propostas por Nabais na década de 1960 e nos Programas do Ensino Primário de 1960 (cont.)

Temas Matemáticos	**Programas do Ensino Primário de 1960**	**Metodologias propostas por Nabais**
Fracções e Decimais	Decimais trabalhados a partir das medidas. Estudo das fracções inicia-se na 4ª classe. Estudo restrito, a partir de processos intuitivos e de resolução de problemas. Relação com percentagens.	As fracções são estudadas a partir do trabalho com os Cubos – Barras de cor. Os decimais são trabalhados em estreita relação com as fracções.
Grandezas e Medidas	Medidas não estandardizadas e medidas estandardizadas: comprimento, capacidade, volume peso ou massa, dinheiro, tempo. Números complexos nas unidades de tempo e operações com números complexos.	
Geometria	Estudo inicia-se na 3ª classe. Recomenda-se ensino intuitivo, devido à idade das crianças, mas devidamente ordenado. Relação com trabalhos manuais e desenho.	
Materiais	Materiais não estruturados no âmbito das contagens. Instrumentos de medida.	Cubos – Barras de Cor (cores Cuisenaire) Calculador Multibásico

22 MÁGICO

Ana Caseiro
Escola Superior de Educação de Lisboa
anac@eselx.ipl.pt

Resumo

No 1º encontro, em 2005-2006, para professores do 1º ciclo do ensino básico, desenvolvido pelo programa de formação contínua em matemática da Escola Superior de Educação de Lisboa, foi facultado um panfleto aos professores do 1º ciclo que participaram no encontro onde era proposto que os mesmos resolvessem um desafio denominado "22 Mágico".

Alguns anos mais tarde, tive acesso a esse desafio e pareceu-me mesmo desafiante tentar resolvê-lo.

O desafio era:

Escreva um número natural com três algarismos todos diferentes, isto é, não pode ter nenhum algarismo repetido nem o zero, por exemplo, 342. Forme todos os números de 2 algarismos com os algarismos desse número: 34,43,23,32,24,42. Adicione esses seis números e divida essa soma pela soma dos três algarismos do número que escolheu. Que número obteve?

Repita com outro número. Que número obteve?

Parece-lhe que o resultado será sempre o mesmo? Porque será?

Depois de dar resposta às questões do desafio resolvi investigar um pouco mais e compreender o que se passava fazendo o mesmo desafio com um número natural com diferente número de algarismos (com 2, 4, 5, …). Será que o número total de algarismos do número influencia o resultado final? Como? E será que o número de algarismos com que se têm de formar os restantes números também influencia o resultado final? De que modo?

Foram estas as questões levantadas que permitiram uma progressiva formalização na investigação.

Sem dúvida que uma investigação realizada através da abordagem experimental é um excelente suporte para o estabelecimento de conjecturas e demonstrações.

Texto da comunicação

No 1º encontro, em 2005-2006, para professores do 1º ciclo do ensino básico, desenvolvido pelo Programa de Formação Contínua em Matemática, PFCM, da Escola Superior de Educação de Lisboa, foi facultado um panfleto aos professores do 1º ciclo que participaram no encontro onde era proposto que os mesmos resolvessem um desafio denominado "22 Mágico".

Passado uns anos, tive acesso a esse desafio e pareceu-me mesmo desafiante tentar resolvê-lo, pois para ter sido este o desafio proposto pelos formadores do programa de Formação Contínua da Matemática no decorrer do 1º encontro entre formandos, de certo seria um desafio a quem o tentasse solucionar.

O desafio era:

Escreva um número natural com três algarismos todos diferentes, isto é, não pode ter nenhum algarismo repetido nem o zero, por exemplo, 342. Forme todos os números de 2 algarismos com os *algarismos desse número: 34,43,23,32,24,42. Adicione esses seis números e divida essa soma pela soma dos três algarismos do número que escolheu. Que número obteve?*

Repita com outro número. Que número obteve?

Parece-lhe que o resultado será sempre o mesmo? Porque será?

Para tentar dar resposta ao desafio apresentado resolvi a tarefa utilizando o exemplo proposto. Deste modo cheguei a:

34 + 43 + 23 + 32 + 24 + 42 = 198

Soma dos algarismos do número inicial: 3 + 4 + 2 = 9

198 : 9 = 22

Como seria de esperar, devido ao nome do desafio, o resultado obtido foi 22. De seguida pensei que com qualquer número que eu escolha, segundo as condições fornecidas, o resultado iria ser sempre 22, mas decidi confirmar com mais um exemplo:

Ex 1:

321

32 + 31 + 23 + 21 + 13 + 12 = 132

3 + 2 + 1 = 6

132 : 6 = 22

Depois de fazer com mais este exemplo, questionei-me devido ao porquê de ser frisado que o número não possa ser constituído por nenhum zero. Para tentar perceber resolvi escolher um número com um zero e outro com dois zeros e ver o que obteria como resultado:

Ex 2:

302

30 + 32 + 03 + 02 + 23 + 20 = 110

3 + 0 + 2 = 5

110 : 5 = 22

Ex 3:

400

40 + 40 + 04 + 00 + 04 + 00 = 88

4 + 0 + 0 = 4

88 : 4 = 22

Sem dúvida que ao resolver o desafio tendo os números formados com zeros é preciso ter mais atenção aos números que se formam, uma vez que alguns são simplesmente zero e outros compostos por apenas um algarismo (no qual eu coloquei o zero à esquerda, como se de outro qualquer algarismo se tratasse), tendo sido, talvez, por este motivo que no enunciado é frisado que não se formem números com zeros.

Depois de dar resposta à questão que me surgiu, apareceu-me outra que me pareceu pertinente: mas não funcionará com números constituídos por algarismos iguais ou será pelo mesmo motivo do zero, somente porque cria um pouco mais confusão na construção dos números? Foi para dar resposta a esta questão que escolhi mais um número com o qual experimentar:

Ex 4:

222

22 + 22 + 22 + 22 + 22 + 22 = 132

2 + 2 + 2 = 6

132 : 6 = 22

Com o 222 também obtemos o mesmo resultado, mas ainda se torna mais complicado de colocarmos todas as combinações de dois algarismos possíveis de fazer uma vez que são todas iguais e podemos perder a noção de quantas vezes o número se repetirá.

Mas porque será que o resultado obtido é sempre o mesmo e porque será que é sempre 22? Foram estas as questões que me levaram a utilizar variáveis para simbolizar o valor de cada algarismo:

abc → 100 a + 10 b + c

$$\frac{(10a+b)+(10a+c)+(10b+a)+(10b+c)+(10c+a)+(10c+b)}{a+b+c} = \frac{22a+22b+22c}{a+b+c} =$$

$$= \frac{22(a+b+c)}{a+b+c} = 22$$

Deste modo se comprova que utilizando qualquer número de três algarismos na resolução deste desafio o resultado obtido será sempre o mesmo: 22.

A curiosidade falou mais alto e depois de dar resposta às questões do desafio resolvi investigar um pouco mais e compreender o que se passava fazendo o mesmo desafio com um número natural composto por diferente número de algarismos (com 2, 4, 5, …). Será que o número total de algarismos do número influencia o resultado final? Como? E será que o número de algarismos com que se têm de formar os restantes números também influencia o resultado final? De que modo?

Para dar resposta a estas questões comecei por utilizar alguns exemplos de números compostos apenas por 2 algarismos, tendo chegado a:

Ex 1:

12

12 + 21 = 33

1 + 2 = 3

33 : 3 = 11

Ex 2:

36

36 + 63 = 99

3 + 6 = 9

99 : 9 = 11

Ex 3:

30

30 + 03 = 33

3 + 0 = 3

33 : 3 = 11

O resultado obtido parece ser sempre 11. Mas porque será que o resultado obtido é sempre 11? Novamente com o raciocínio realizado anteriormente, temos que:

ab → 10 a + b

$$\frac{(10\,a + b) + (10\,b + a)}{a + b} = \frac{11\,a + 11\,b}{a + b} = \frac{11\,(a + b)}{a + b} = 11$$

Deste modo se comprova que utilizando qualquer número de dois algarismos na resolução deste desafio o resultado obtido será sempre o mesmo: 11.

E se for com um número de 4 algarismos? Será 33?

Ex 1:

4321

43 + 42 + 41 + 34 + 32 + 31 + 24 + 23 + 21 + 14 + 13 + 12 = 330

4 + 3 + 2 + 1 = 10

330 : 10 = 33

Ex 2:

1029

10 + 12 + 19 + 01 + 02 + 09 + 21 + 20 + 29 + 91 + 90 + 92 = 396

1 + 0 + 2 + 9 = 12

396 : 12 = 33

abcd → 1000 a + 100 b + 10 c + d

$$\frac{(10a + b) + (10a + c) + (10a + d) + (10b + a) + (10b + c) + (10b + d) + (10c + a) + (10c + b) + (10c + d) + (10d + a) + (10d + b) + (10d + c)}{a + b + c + d} =$$

$$= \frac{33a + 33b + 33c + 33d}{a + b + c + d} = \frac{33(a + b + c + d)}{a + b + c} = 33$$

Deste modo se comprova que utilizando qualquer número de quatro algarismos na resolução deste desafio o resultado obtido será sempre o mesmo: 33.

Com números compostos por até 10 algarismos, a regularidade mantém-se, ou seja:

Número de algarismos do número escolhido	**Número obtido**
2	11
3	22
4	33
5	44
6	55
7	66
8	77
9	88
10	99

Tabela 1 – Número obtido consoante o número de algarismos do número escolhido

Ao analisar a tabela percebe-se que o número obtido é múltiplo de 11. Além disto também é possível conjecturar que este múltiplo se obtém multiplicando 11 pelo número de algarismos do número menos um, ou seja:

Número obtido = 11 x (n -1), $n \geq 2$, sendo n o número de algarismos que constituem o número escolhido

Depois deste desafio outra questão se colocava: e se as parcelas que se têm de constituir com os números não tiverem apenas dois algarismos? Se for constituída cada uma por três algarismos? E por 4?

Depois de explorar alguns exemplos, como nos casos anteriores, percebi que existe uma relação entre o número total de algarismos que compõem o número escolhido, o número de algarismos com que se formam as parcelas e o resultado obtido, tendo, deste modo, chegado às expressões algébricas que nos indicam, tendo apenas conhecimento dessas duas características (número de algarismos do número e número de algarismos das parcelas a formar) qual o resultado final que iremos obter:

Nº total de algarismos do nº (n)	Nº de algarismos de cada parcela	Resultado obtido	Expressão
2	2	11	11 x (n – 1)
3	2	22	11 x (n – 1)
3	3	222	111 x (n – 1) x (n – 2)
4	2	33	11 x (n – 1)
4	3	666	111 x (n – 1) x (n – 2)
4	4	6666	1111 x (n – 1) x (n – 2) x (n-3)
5	2	44	11 x (n – 1)
5	3	1332	111 x (n – 1) x (n – 2)
5	4	26664	1111 x (n – 1) x (n – 2) x (n-3)
5	5	266664	11111 x (n – 1) x (n – 2) x (n-3) x (n-4)

Tabela 2 – Expressões algébricas consoante o número de algarismos do número escolhido e do número de algarismos de cada parcela a formar

Como é possível verificar, a expressão obtida está estritamente dependente do número de algarismos com que se pretende formar cada parcela, existindo para cada caso uma expressão distinta. Deste modo se percebe que a expressão anteriormente demonstrada apenas funciona quando se trabalha com parcelas constituídas por apenas 2 algarismos (os únicos casos estudados anteriormente), sendo essa a expressão apresentada nas linhas assim sombreadas a

Os exemplos, na tabela, com o sombreado referem-se aos casos em que as parcelas a formar são constituídas por 3 algarismos, sendo que a expressão dos números nesta situação difere da fórmula descoberta anteriormente no facto de um dos factores ser o número 111, em vez do 11, e ter sido acrescido de mais um factor (n -2).

Para o caso das parcelas a formar com 4 algarismos, o factor 11 do primeiro caso, passa a 1111, e para além do acréscimo do factor (n-2) como no exemplo anterior, também é acrescentado o factor (n-3).

Ao analisarmos estas regularidades percebe-se que existe uma maneira de descobrir qual o resultado final sabendo apenas o número de algarismos do número com o qual queremos trabalhar, e o número de algarismos de cada parcela, uma vez que, independentemente da situação, seguem as mesmas regras. Para a obtenção da expressão geradora basta apenas saber qual o número de algarismos de cada parcela que se vai formar, sendo que o número de algarismos do número com o qual se quer trabalhar apenas serve para resolver a fórmula e chegar ao resultado final:

1º - Para saber qual o primeiro factor da expressão, basta saber que o número de algarismos das parcelas a formar é igual ao número de vezes que o algarismo 1 se repete, formando deste modo o primeiro factor da fórmula;

2º - De seguida, tem que se multiplicar o número obtido no ponto anterior por (n-x), sendo que o n representa o número total de algarismos do número inicial e x representa todos os números naturais de 1 até n-1, inclusive.

3º - Por fim, basta substituir os valores e resolver a operação.

Por exemplo, para o caso de se querer formar parcelas com 3 algarismos:

1º - O primeiro factor será 111, uma vez que o algarismo 1 escreve-se 3 vezes (número de algarismos de cada parcela a formar);

2º - Multiplica-se o 111 por (n-1) e (n-2), já que se se formam parcelas com 3 algarismos os restantes factores terão de ser n menos os números naturais inferiores a 3, ou seja, 1 e 2;

3º – Neste caso chegou-se à fórmula 111 x (n – 1) x (n – 2). Agora sabendo o número de algarismos do número com o qual pretendemos resolver o desafio, basta substituir o n por esse valor e resolver a operação.

Deste modo parece que o desafio proposto inicialmente, e que foi um grande desafio aquando da sua resolução, se encontra resolvido para qualquer situação que seja proposta.

Este é um exemplo de um desafio que pode ser realizado com alunos, desde os mais pequenos, para os quais será um desafio interessante e provavelmente diferente dos que costumam realizar, até aos alunos da formação inicial com os quais já é possível chegar a várias generalizações.

SAPOS E ÁLGEBRA

Ana Caseiro
Escola Superior de Educação de Lisboa
anac@eselx.ipl.pt

Resumo

Quando procurava uma tarefa de álgebra para colocar aos meus alunos da formação inicial de professores lembrei-me de uma que já tinha realizado com alunos de 1º ciclo e que poderia ser também realizada por estes alunos. A tarefa consistia em descobrir qual o menor número de movimentos necessários para trocar as posições de dois sapos e duas rãs entre si:

Dois sapos e duas rãs precisam atravessar um lago e têm cinco pedrinhas para não ter de mergulhar na água fria.

Podem avançar para a pedra seguinte (que tem de estar vaga) ou saltar por cima de um sapo de outro género, nunca podendo voltar para trás.

Aos alunos da formação inicial foi acrescentada uma questão que consistia na descoberta de uma expressão geral de modo a chegar a descobrir o menor número de movimentos possível, independentemente do número de sapos e rãs, sendo que primeiro foi solicitado que fizessem a investigação com número igual de sapos e rãs, e posteriormente foi alargada para qualquer número de sapos e qualquer número de rãs, devendo os alunos chegar a uma expressão geral, como eles referiram "a uma fórmula das fórmulas".

Ao resolverem a tarefa, por tentativa e erro, os alunos chegaram a um resultado que se julgou ser o menor número de movimentos possível. Mas como garantir que não é possível obter menor número de movimentos independentemente do número de sapos e de rãs?

Foi esta a questão levantada que permitiu uma progressiva formalização por parte dos alunos, tendo sido esta trajectória de aprendizagem realizada e pensada devido à importância da abordagem experimental como suporte para o estabelecimento de conjecturas e demonstrações.

Texto da comunicação

Quando procurava uma tarefa de álgebra para colocar aos meus alunos da formação inicial de professores lembrei-me de uma que já tinha realizado com alunos de 1º ciclo e que poderia ser também realizada por estes alunos. A tarefa consistia em descobrir qual o menor número de movimentos necessários para trocar as posições de dois sapos e duas rãs entre si:

Dois sapos e duas rãs precisam atravessar um lago e têm cinco pedrinhas para não ter de mergulhar na água fria.

Podem avançar para a pedra seguinte (que tem de estar vaga) ou saltar por cima de um animal de outro género, nunca podendo voltar para trás.

Aos alunos da formação inicial foi acrescentada uma questão que consistia na descoberta de uma expressão geral de modo a chegar a descobrir o menor número de movimentos possível, independentemente do número de sapos e rãs, sendo que primeiro foi solicitado que fizessem a investigação com número igual de sapos e rãs, e posteriormente foi alargada para qualquer número de sapos e qualquer número de rãs, devendo os alunos chegar a uma expressão geral, como eles referiram "a uma fórmula das fórmulas".

No 1º ciclo a tarefa foi realizada por alunos do 3º ano de escolaridade, sendo que desde o início se mostrou uma tarefa motivante para eles. A proposta foi feita para ser realizada a pares de modo a se conseguirem ajudar, tendo sido a comunicação fulcral nesta resolução.

Os alunos resolveram a tarefa recorrendo a material manipulável, tendo simulado os sapos e rãs, assim como as pedrinhas, o que facilitou a sua compreensão e a resolução da mesma. A competição "saudável" também foi um factor importante na resolução desta tarefa onde cada par tentava resolvê-la utilizando menos movimentos do que os restantes colegas.

Quanto à formação inicial, a tarefa foi realizada numa turma do 3º ano (32 alunos) da licenciatura em Educação Básica, aquando das últimas aulas da Unidade Curricular (UC) de "Lógica e Padrões", uma UC de 28 horas. Os alunos tiveram uma aula (duas horas) para resolver a tarefa a pares (dois grupos foram constituídos por 3 elementos), sendo que no final da aula a teriam de entregar para eu ver até onde conseguiram chegar na sua investigação.

Depois de analisar as respostas dos alunos, preenchi a seguinte tabela, onde os vistos (v) representam respostas correctas dadas pelos alunos, as cruzes (x) respostas erradas dadas pelos alunos, e os espaços em branco a falta de respostas dadas pelos alunos:

Par	Apresentação das sequências		Generalização consoante a diferença entre o número de sapos e o número de rãs				
	Correctas	**Incorrectas**	**Diferença de 0**	**Diferença de 1**	**Diferença de 2**	**Diferença de 3**	**Diferença de k**
1			✓	✓	✓	✓	✗
2	✓		✓	✓			
3			✓	✓	✓		
4	✓		✓	✓	✓		
5			✓	✓			
6			✓	✓			
7	✓		✓	✓			
8			✓	✓	✓	✓	✓
9	✓	✓	✓				
10	✓		✗	✓			
11	✓		✓	✓	✓		✓
12	✓		✓	✓			
13	✓		✓	✓			
14			✓	✓			
15	✓		✓	✓			

Tabela 1 – Avaliação das descobertas dos alunos

Através da análise da tabela verifica-se que apenas três pares conseguiram concluir a tarefa, sendo que apenas dois a concluíram acertadamente. Verifica-se, também, que a maioria dos grupos apenas conseguiu chegar à generalização nas situações em que o número de sapos e de rãs é igual, e nas situações em que o número de sapos e de rãs difere apenas num valor.

Na discussão da primeira questão da tarefa, igual número de animais de cada lado do lago, foi explorado um processo mais formal de generalização:

Nº de animais de cada lado	Nº mínimo de movimentos
1	3
2	8
3	15
4	24
5	35
6	48
7	63

Tabela 2 – Número mínimo de movimentos

Com os valores obtidos foi possível calcular as diferenças entre os mesmos, tendo chegado à seguinte conclusão utilizando o método das diferenças finitas:

3 8 15 24 35 48 63

5 7 9 11 13 15

2 2 2 2 2

Através da análise deste esquema apercebemo-nos que a segunda diferença entre os diversos números mínimos de movimentos é sempre constante: 2.

Pegando, então, na fórmula das diferenças finitas, temos que:

Termos	1ª diferença	2ª diferença
a + b + c		
	3 a + b	
4a + 2b + c		2a
	5 a + b	
9a +3b + c		

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathbf{an^2 + bn + c} \\ \\ a, b, c \in IR, a \neq 0 \end{array}}$$

Assim sendo aplicando a fórmula anterior aos nossos valores temos:

$$\begin{cases} 2\,a = 2 \\ 3\,a + b = 5 \\ a + b + c = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\mathbf{n^2 + 2n = n\,(n + 2)}}$$

n - número de animais de cada lado

Aquando do seguimento da tarefa (número diferente de sapos e rãs) surgiu o seguinte processo de resolução:

Nº de animais de cada lado	Nº mínimo de movimentos
1 - 2	5
2 – 3	11
3 – 4	19
4 – 5	29
5 – 6	41
6 – 7	55
7 - 8	71

Tabela 3 – Número mínimo de movimentos

Ao olharmos para estes valores calculámos as diferenças entre os mesmos, tendo chegado à seguinte conclusão:

5 11 19 29 41 55 71

6 8 10 12 14 16

2 2 2 2 2

Através da análise deste esquema apercebemo-nos que a segunda diferença entre os diversos números mínimos de movimentos é sempre constante: 2.

Utilizando, novamente, a fórmula das diferenças finitas, quando a segunda diferença é constante: temos que:

$$\begin{cases} 2a = 2 \\ 3a + b = 6 \\ a + b + c = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{\mathbf{n^2 + 3n + 1}}$$

n – número de animais do lado onde há menos

De seguida resolvemos realizar da mesma forma a actividade, mas com a variante da diferença entre o número de animais dos dois lados ir aumentando.

Começámos por realizar as actividades por tentativas, construindo desse modo as seguintes tabelas e chegando às respectivas expressões gerais através do método das diferenças finitas:

1. Diferença entre o número de animais dos dois lados: 2

Nº de animais de cada lado	Nº mínimo de movimentos
1 – 3	7
2 – 4	14
3 – 5	23
4 – 6	34
5 – 7	47

Tabela 4 – Número mínimo de movimentos

Assim, temos que:

$$\begin{cases} 2a = 2 \\ 3a + b = 7 \\ a + b + c = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 2 \end{cases}$$

$$\boxed{\mathbf{n^2 + 4n + 2}}$$

n – número de animais do lado onde há menos

2. Diferença entre o número de animais dos dois lados: 3

Nº de animais de cada lado	Nº mínimo de movimentos
1 – 4	9
2 – 5	17
3 – 6	27
4 – 7	39
5 – 8	53

Tabela 5 – Número mínimo de movimentos

Assim, temos que:

$$\begin{cases} 2a = 2 \\ 3a + b = 8 \\ a + b + c = 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \\ c = 3 \end{cases}$$

$\mathbf{n^2 + 5n + 3}$ **n** – número de animais do lado onde há menos

Ao analisarmos as expressões gerais obtidas verificamos que existem algumas semelhanças entre as mesmas, o que talvez possibilite a construção de uma expressão geral para determinar as expressões gerais do número mínimo de movimentos a realizar:

$n^2 + 2n$	$n^2 + 3n + 1$	$n^2 + 4n + 2$	$n^2 + 5n + 3$
Igual número de animais nos dois lados	**Diferença entre o número de animais nos dois lados:** 1	**Diferença entre o número de animais nos dois lados:** 2	**Diferença entre o número de animais nos dois lados:** 3

Através da visualização pormenorizada das expressões gerais obtidas verificamos que:

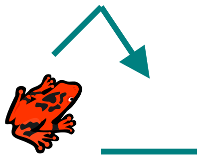
- ✓ Todas as fórmulas se iniciam por n^2 (tal facto tem razão de ser, já que na descoberta das expressões verificámos que é sempre a segunda diferença entre os valores obtidos que é constante, sendo sempre 2.
- ✓ O valor que é multiplicado por “n” representa a diferença entre o número de sapos dos dois lados somada a 2 (ex.: quando a diferença entre o número de sapos é 1 vai ser 1+2 ou seja 3, tal como se verifica na expressão).
- ✓ O valor que se vai somar à expressão que estamos a obter é sempre o valor da diferença entre o número de sapos dos dois lados (ex.: quando a diferença entre o número de sapos é 2 vai ser 2, tal como se verifica na expressão).

Assim, podemos representar as cojecturas retiradas anteriormente do seguinte modo:

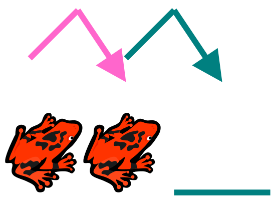
$$\mathbf{n^2 + (k + 2)n + k}$$

sendo k o valor da diferença entre o número de animais dos dois lados e n o número de animais do lado com menor quantidade

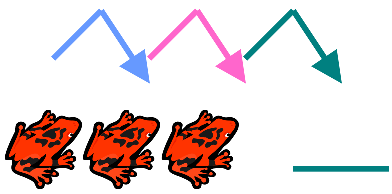
De seguida e para verificar se a expressão encontrada se encontra funciona em mais algumas situações vou realizar o mesmo raciocínio (ir acrescentando sapos), mas somente a um dos lados, pois vou considerar o outro sem sapos:



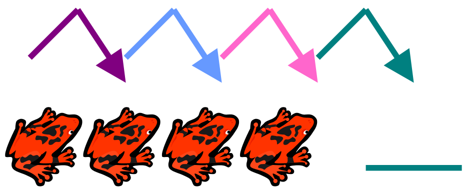
1 sapo → 1 movimento



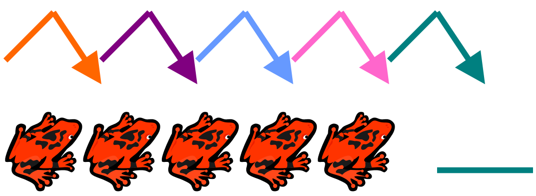
2 sapos → 2 movimentos



3 sapos → 3 movimentos



4 sapos → 4 movimentos



5 sapos → 5 movimentos

Nº de animais de cada lado	Nº mínimo de movimentos
0 – 1	1
0 – 2	2
0 – 3	3
0 – 4	4
0 – 5	5

Aplicando a expressão:

$$\mathbf{n^2 + (k + 2)n + k}$$

sendo k o valor da diferença entre o número de animais dos dois lados e n o número de animais do lado com menor quantidade

Para 0 - 1 sapos:

$$\mathbf{0^2 + (1 + 2) \times 0 + 1 = 0 + 0 + 1 = 1}$$

Para 0 - 2 sapos:

$$\mathbf{0^2 + (2 + 2) \times 0 + 2 = 0 + 0 + 2 = 2}$$

Para 0 - 3 sapos:

$$\mathbf{0^2 + (3 + 2) \times 0 + 3 = 0 + 0 + 3 = 3}$$

Para 0 - 4 sapos:

$$\mathbf{0^2 + (4 + 2) \times 0 + 4 = 0 + 0 + 4 = 4}$$

Para 0 - 5 sapos:

$$\mathbf{0^2 + (5 + 2) \times 0 + 5 = 0 + 0 + 5 = 5}$$

Assim, podemos verificar que também nestes casos a expressão encontrada para determinar as expressões gerais do número mínimo de movimentos a realizar se encontra correcta.

Deste modo é possível conjecturar que a expressão obtida é válida para qualquer número de animais a deslocar.

Mini – curso de geometria -ENSINANDO GEOMETRIA ESPACIAL e SÓLIDOS DE PLATÃO

Professor Marcio Buzato.

- Especialista em Educação Matemática

Pontífícia Universidade Católica de Campinas – Campinas – São Paulo – Brasil

- Graduado em Licenciatura Plena em Matemática

Universidade São Francisco Itatiba – São Paulo – Brasil
marciobuzato@hotmail.com

Resumo: Podemos dizer que hoje, o ensino da geometria plana, e, principalmente da geometria espacial, está em segundo plano na educação matemática do ensino fundamental II.

Isso se deve por alguns fatos, entre eles estão:

1- A maioria dos alunos não gostam de geometria, pois não recebem estímulos suficientes dos professores para desenvolverem o raciocínio lógico geométrico;
2- Muitos professores sentem dificuldades em ensiná-la, pois não dominam alguns conceitos.

Com isso, a geometria é sempre “ensinada” ao fim do ano letivo quando não se tem tempo para mais nada.

Sendo assim, pretendo com esse trabalho levar a outros colegas professores uma experiência do ensino da geometria plana e espacial que pode ser ensinada de uma forma divertida e prazerosa, levando em consideração a vivência do aluno dentro e fora da sala de aula, assim como a mostrar que os conhecimentos adquiridos na escola podem transformar sua vida e até mesmo sua comunidade.

Palavras-chaves: vivência, aprendizagem e socialização.

Novembro de 2008.

1. OBJETIVOS GERAIS:

Espero que com esse mini-curso, os alunos desenvolvam a:
• Visualização das figuras planas e espaciais;
• Investigação e descoberta dos conceitos de geometria plana e espacial;
• Descrever relações geométricas, métricas e volumétricas
• Comunicação oral e escrita.

2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Identificar objetos do dia-a-dia que representam formas de sólidos geométricos;
- Identificar vértices, arestas e faces de sólidos geométricos;
- Identificar os poliedros de Platão;
- Nomear figuras planas e espaciais;
- Determinar o perímetro de figuras planas e espaciais;
- Diferenciar prisma de pirâmide;
- Determinar a área de figuras planas e espaciais (com quadriculados e com formulação);
- Calcular o volume de alguns sólidos geométricos utilizando cubinho como unidade de medida e com formulação;

3. COMO TRABALHAR COM OS ALUNOS:

Todos os alunos do grupo devem:
• Saber e compreender o que o grupo está fazendo;
• Fazer perguntas ao professor se não perceberem;
• Participar ativamente na realização das tarefas;
• Ajudar uns aos outros;
• Respeitar-se.

Os alunos só devem chamar o professor quando:
• Estiverem todos de acordo sobre o processo para resolver a atividade;
• No grupo, não tiverem chegado a um acordo depois de terem esgotado todos os argumentos;
• Tiverem acabado a atividade.

Ao final de cada atividade, os alunos devem:
• Ler o que foi escrito;
•Organizar a apresentação à turma;
• Elaborar um relatório.

4. MATERIAL NECESSÁRIO:

- Papel cartão de várias cores, papel quadriculado e papel sulfite;
- Elástico;
- Compasso;
- Régua;
- Folhas para relatório;
- Cubos de madeira (material dourado);
- 90 palitos de churrasco com 12 cm de comprimento;
- 2 metros de garrote cortados em pedaços de 2,5 cm.

5. AVALIAÇÃO DO TRABALHO:

Os alunos serão avaliados em 3 etapas.

5.1.INÍCIO DO PROJETO:

- Qual o conhecimento prévio que eles trazem quanto às figuras planas que utilizaremos - (triângulo eqüilátero, quadrado, pentágono e hexágono – para os poliedros de Platão – triângulo isóscele, retângulo e hexágono para outros sólidos geométrico).
- O que eles entendem por perímetro, área e volume;
- Qual a diferença entre figuras planas e espaciais.

5.2.DURANTE O PROJETO:

Verificaremos o desempenho de cada grupo relativamente aos itens:
- Compreensão e interpretação do enunciado
- Capacidade de encontrar uma estratégia para a resolução dos problemas propostos;
- Facilidade / dificuldade na resolução das questões propostas, verificando sua autonomia.
- Capacidade de encontrar uma estratégia para a resolução das questões propostas.

5.3.AO FINAL DO PROJETO:

Avaliação do relatório;
Avaliação da apresentação oral;
Avaliação dissertativa sobre os conteúdos estudados.

6. DESENVOLVIMENTO DO PROJETO:

Inicialmente devemos trabalhar com o triângulo eqüilátero, mostrando aos alunos como montá-lo com os palitos e construindo com régua e compasso um molde para ser utilizado mais tarde e assim trabalhar todos os conceitos dessa figura plana, calculando perímetro e área fazendo o aluno chegar ao resultado final utilizando vários métodos para isso, principalmente as fórmulas utilizando base e altura além da fórmula de Heron.
Posteriormente, devemos mostrar aos alunos um quadrilátero (não um quadrado, um retângulo e outros quadriláteros e perguntamos a eles o que eles estão vendo). Após as suas falas, que serão anotadas na lousa, devemos intervir e mostrar que aquele quadrilátero não tem algumas características que eles disseram por isso não poderá ser classificado como um quadrado. Enumeramos agora as características do quadrado. Construímos com régua e compasso um quadrado no papel sulfite - depois que estiver correto - construiremos com régua e compasso no papel cartão. Confeccionando um modelo.
Vamos agora apresentar ou reapresentar o conceito de perímetro. Devemos verificar qual o conhecimento que eles trazem sobre esse conceito para posteriormente apresentarmos o conceito matemático de perímetro ou utilizar uma linguagem que eles entendam. Faremos o mesmo procedimento para o conceito de área. Após esses cálculos devemos junto com os alunos começarmos a trabalhar com o pentágono e o hexágono, da mesma forma que as anteriores. Assim ao termos as bases formadas, vamos começar a trabalhar as estruturas dos sólidos de Platão e dos sólidos geométricos (prismas e pirâmide).
Nessa fase do projeto, vamos trabalhar com os alunos área total e volume, utilizando os palitos e as folhas de papel cartão para podermos mostrar aos alunos de forma lúdica e prazerosa os conceitos que cercam esses conteúdos.

Ao final, os alunos deverão montar uma tabela onde aparecerão:

- Nome do poliedro ou do sólido geométrico;
- Quantidade de vértices, arestas e faces;
- Por qual(is) figura(s) plana (s) é formada;
- Valor do perímetro e da área de cada figura plana utilizada para montar as figuras espaciais.
- O perímetro e a área de cada uma das planificações;
- As diagonais das faces ou do sólido geométrico;
- As fórmulas utilizadas para esses cálculos.

Caso o professor esteja trabalhando com 8^a. série ou ensino médio (alunos entre 14 e 16 anos), talvez possa expor o conceito de altura do tetraedro regular e assim calcular seu volume, além da altura da pirâmide de base quadrada.

Após a montagem e os cálculos de perímetro e área do tetraedro regular, o professor pode agrupá-los para a montagem do octaedro regular efetuando os seus cálculos baseados agora em conceitos do tetraedro regular.

Obs.: não se esqueça de ir preenchendo a tabela, sempre antes de passar para o próximo sólido geométrico. Ver abaixo.
Ao final da tabela, poderemos verifica com os alunos a relação de Euler.

Se V é o número de vértices, F é o número de faces, A é o número de arestas de um poliedro convexo, então:

$$\mathbf{V + F = A + 2}$$

6.1.Faces, Vértices, Arestas nos Poliedros regulares convexos.

Nome do poliedro	**Número de faces**	**Poligonal regular**	**No. de vértices**	**No. de arestas**
Tetraedro	4	Triangular	4	6
Hexaedro	6	Quadrada	8	12
Octaedro	8	Triangular	6	12
Dodecaedro	12	Pentagonal	20	30
Icosaedro	20	Triangular	12	30

Com Geometria Também Se Brinca parte II – Geometria Na Pipa

Professor Marcio Buzato.

- Especialista em Educação Matemática

Pontíficia Universidade Católica de Campinas – Campinas – São Paulo – Brasil

- Graduado em Licenciatura Plena em Matemática

Universidade São Francisco Itatiba – São Paulo – Brasil

marciobuzato@hotmail.com

Resumo:

Podemos dizer que hoje, o ensino da geometria, e, principalmente da geometria plana, está sendo deixada para trás na educação matemática do ensino fundamental II.

Isso se deve por alguns fatos, entre eles estão:

1- A maioria dos alunos não gostam de geometria, pois não recebem estímulos suficientes dos professores para desenvolverem o raciocínio lógico geométrico;
2- Muitos professores sentem dificuldades em ensiná-la, pois não dominam alguns conceitos.

Com isso, a geometria é sempre "ensinada" ao fim do ano letivo quando não se tem tempo para mais nada.

Sendo assim, pretendo com esse trabalho levar a outros colegas professores uma experiência do ensino da geometria plana que pode ser ensinada de uma forma divertida e prazerosa, levando em consideração a vivência do aluno dentro e fora da sala de aula. Assim como, mostrar que os conhecimentos adquiridos na escola podem transformar sua vida e até mesmo sua comunidade.

Palavras-chaves: vivência, aprendizagem, socialização e projetos.

COM GEOMETRIA TAMBÉM SE BRINCA

PARTE II – GEOMETRIA NA PIPA

1. JUSTIFICATIVA:

Durante meus anos como professor, tenho notado que a geometria, plana e espacial, é um dos conteúdos de difícil assimilação para alunos do ensino fundamental II (5ª – 8ª. Séries/ 6º. – 9º. ano). Refletindo sobre isso pesquisando e estudando sobre o assunto, elaborei um projeto educacional chamado "Com Geometria Também se Brinca", onde trabalho com dois subprojetos:

* Geometria espacial e os Sólidos de Platão – (A fim de desenvolver no aluno a percepção espacial dos poliedros: prismas, pirâmides, blocos retangulares, e, principalmente, dos Sólidos de Platão).

* Geometria nas Pipas – (Privilegiando o desenvolvimento do raciocínio lógico geométrico, uma melhor visualização das figuras planas e a geometria descritiva).

Este projeto foi desenvolvido em uma escola municipal da cidade de Itatiba-SP-Brasil, durante o segundo e terceiro bimestres de 2005 e posteriormente em 2007.

Sendo que eles se tornaram uma capacitação para os professores da rede municipal de ensino de Itatiba-SP-Brasil.

2. OBJETIVOS GERAIS:

Tendo em vista que os alunos do ensino fundamental, ciclo II (5ª. e 6ª. Séries/6º. e 7º. ano) não dominam os conceitos de geometria plana, espero com esse projeto levá-los a desenvolver:

* A visualização das figuras planas em um determinado contexto;
* Um espírito investigativo, o gosto pela pesquisa e pela leitura;
* As interações entre as relações geométricas e métricas;
* A comunicação oral e escrita;
* A interdisciplinaridade, entre Educação Artística, Ciências e Língua Portuguesa.
* Uma pipa para que voe melhor.

3. OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Identificar figuras planas na pipa;
- Identificar vértices e lados das figuras planas;
- Classificar as figuras planas quanto aos lados e aos ângulos;
- Verificar a relação entre o número de vértices e a soma dos ângulos internos de uma figura plana;
- Determinar o perímetro de figuras planas;
- Determinar a área de figuras;
- Construir com régua e compasso as figuras planas estuda;

4. OBJETIVOS COMPORTAMENTAIS:

* Despertar o espírito de amizade e de companheirismo;

* Desenvolver uma consciência crítica quanto aos perigos da brincadeira de "soltar pipa";

* Possibilitar que esse trabalho possa se tornar um elo entre os alunos fora da escola para que assim consigam ficar longe da marginalidade que os cerca.

5. CONTEÚDOS CURRICULARES:

Foram lecionados os seguintes conteúdos durante o projeto:

- Geometria descritiva;
- Cálculo de perímetro e área;
- Classificação de figuras planas;
- Unidades de medida;
- Soma dos ângulos internos de figuras planas;
- Porcentagem e estimativa.
- Frações e números decimais.

6. MATERIAL NECESSÁRIO:

- Papel de seda - várias cores, papel quadriculado e papel sulfite;
- Varetas de madeira ou de bambu com 50 cm de comprimento;
- Compasso;
- Régua;
- Folhas para relatório;
- Linha número 10;
- Cola liquida;
- Transferidor.

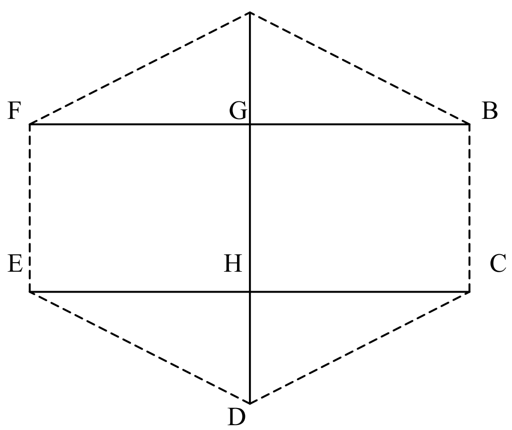
7. COMO TRABALHEI COM OS ALUNOS:
Ao iniciar o projeto, propus algumas normas de convivência e pedagógicas entre os grupos e entre eles, pois as classes de 5as. séries têm em média 35 alunos.
As regras foram:

a) Todos os alunos do grupo devem:
- Saber e compreender o que o grupo está fazendo;
- Fazer perguntas ao professor se não perceberem;
- Participar ativamente na realização das tarefas;
- Ajudar uns aos outros;
- Respeitar uns a outros.

b) Os alunos só devem chamar o professor quando:
- Estiver todos de acordo sobre o processo para resolver a atividade;
- O grupo, não chegar a um acordo depois de terem esgotado todos os argumentos;
- Tiver acabado a atividade.

c) Ao final de cada atividade, os grupos deverão:
- Ler o que foi escrito;
- Organizar a apresentação para a turma;
- Elaborar um relatório.

8. DESENVOLVIMENTO DO PROJETO:
Ao iniciarmos o projeto, perguntei aos alunos que trabalhos poderíamos desenvolver com algo que eles pudessem depois dos estudos, estarem brincando com o que foi confeccionado em sala de aula. Foram várias as idéias, mas a que prevaleceu foi montarmos uma pipa. Assim apresentei a idéia de trabalharmos com a pipa de 3 varetas.



Partimos então para a formação dos grupos e a definição do dia da semana que seria ideal para que os trabalhos fossem executados. Como a escola em que leciono utiliza sempre uma aula de matemática para informática, eu fico com metade dos alunos, entendemos que essa seria a melhor aula, trabalhando quinzenalmente com eles. Posto isso, partimos para os trabalhos. Ao desenhar as varetas na lousa, pedi para que observassem quais as figuras planas eles podiam ver. Começou então uma "explosão" de palavras: triângulos, quadrados, retângulos, quadriláteros entre outras.
Neste momento interrompi e disse que deveríamos nomear as figuras, pois havia mais de uma classificação para algumas figuras. Porém antes de nomeá-las, perguntei qual deveria ser o ângulo entre as varetas e porque seria esse ângulo.
De pronto o aluno Orlando (5ª.B) disse que deveria ser de 90 graus pois senão a pipa ficaria pensa para um lado. Partimos então para a definição das medidas das varetas. Depois de longa discussão os alunos definiram que a vareta representada pelos segmentos AD, FB e EC deveriam ter 50 cm. Além disso, outros valores foram anotados: AG com 15cm, GH com 20cm e HD com 15cm.
Assim pudemos redefinir o desenho e começar a nomear as figuras. Mostrei então que não eram qualquer triângulo ou quadrilátero que havia na figura e que poderíamos encontrar 18 figuras planas no total. Nas aulas seguintes fui mostrando figura por figura, estudando com eles suas propriedades e construindo com régua e compasso cada uma delas, abaixo mostro quais são os triângulos.

* Triângulo isósceles ABF;
* Triângulo isósceles DCE;
* Triângulo retângulo AGB;
* Triângulo retângulo AGF;
* Triângulo retângulo DHC;

Aqui expliquei o conceito de altura e como ela aparece em diferentes lugares dependendo da classificação do triângulo, note que no triângulo ABF, por exemplo, a altura é interna ao triângulo, isto é, é o segmento de reta AG. Já no triângulo AGB, a altura é o próprio lado do triângulo, isto é, o lado AG.

* Triângulo retângulo DHE.[1]

Pudemos então construir com régua e compasso os dois triângulos – isósceles e retângulo. Após, passamos para os quadriláteros começando com o retângulo FBCE.
No início alguns alunos teimavam em dizer que parecia um quadrado, mas após verificarmos as propriedades do retângulo e do quadrado, não houve mais dúvidas sobre qual figura era. Além disso, eles notaram que o retângulo FBCE era formado por outros dois retângulos GBCH e FGHE. Construímos com régua e compasso os retângulos estudados e seguimos para outro quadrilátero, o trapézio isósceles ABCD.
Nesse momento, expliquei todas as propriedades do trapézio, calculamos perímetro e a área (por decomposição de figuras), mostrei também que existe outro tipo de trapézio, o trapézio retângulo ABCH.
Para a penúltima figura, dei algumas dicas, entre elas que a figura tem 5 lados e 2 ângulos retos. Em alguns minutos eles disseram ser o pentágono ABCEF. Após iniciei os estudos desse pentágono retângulo.
Partimos então para a finalização do projeto, cálculo da área total (quanto de papel iremos gastar?) e do perímetro (quanto de linha iremos precisar?). Alguns alunos disseram que para o calculo da área total bastaria somar as áreas já calculada, porém precisaríamos de um pouco a mais de papel para podermos colar as folhas nas linhas.
O mesmo acontecendo com o perímetro, pois a quantidade de linha a ser utilizada não seria suficiente, pois teríamos as amarrações no "esqueleto" da pipa. Sendo assim aproveitei e introduzi o conceito de porcentagem, ensinando como deveriam calcular "essa parte a mais de linha". Quando já tínhamos estudado todas as figuras que compõem a pipa, partimos para a confecção do "esqueleto".
Utilizamos duas aulas onde os alunos se divertiram muito tentando fazer da melhor forma possível a montagem da pipa. O empenho foi tanto que alguns alunos conseguiram terminar a montagem e encapar a pipa no mesmo dia.
Foi interessante notar como agora eles colocavam em prática os conhecimentos adquiridos durante os estudos anteriores. Os alunos discutiam qual seria a melhor maneira de cortar o papel para não haver desperdício, de amarrar as varetas, de fazer a rabiola. Ao término, vendo a alegria deles pude ter a certeza de que a maioria dos conteúdos trabalhados foram assimilados. Assim os conhecimentos adquiridos na escola aliados aos conhecimentos não escolares fizeram com que eles confeccionassem uma pipa de melhor desempenho.

9. Duração do Projeto:

Aproximadamente 20 aulas. Utilizando uma aula por semana, quinzenalmente, sendo que metade da turma ficava na aula de matemática e metade da turma na aula de informática.

10. AVALIAÇÃO DO ALUNO:

Os alunos foram avaliados em três etapas.

10.1. INÍCIO DO PROJETO:

- Qual o conhecimento prévio que eles trazem quanto às figuras planas que utilizaremos: triângulo (eqüilátero, isósceles e retângulo), quadriláteros (quadrado, retângulo e trapézio), pentágono e hexágono.
- O que eles entendem por perímetro e área;
- Como era confeccionada a pipa.

10.2. DURANTE O PROJETO:

Verificaremos o desempenho de cada grupo relativamente aos itens:
- Compreensão e interpretação do enunciado;
- Capacidade de encontrar uma estratégia para a resolução dos problemas propostos;
- Facilidade / dificuldade na resolução das questões propostas, verificando sua autonomia.

10.3 AO FINAL DO PROJETO:

Avaliação do relatório;
Avaliação da apresentação oral;
Avaliação dissertativa sobre os conteúdos estudados.
Essas três fases deram-me condições de verificar o grau de conhecimento adquirido pelo aluno, pois durante todo o processo de construção do saber eles precisaram ser participativos e questionadores.

10.4. AVALIAÇÃO DO TRABALHO PEDAGÓGICO:

Posso dizer que 80% do que foi planejado, consegui executar e dentro desse percentual creio que os alunos conseguiram assimilar quase tudo. Fiz com que os conceitos de perímetro e área fossem assimilados, assim como classificação e as propriedades das figuras planas usadas. Os alunos se

[1] As outras figuras são: Quadriláteros (retângulo BCHG, GHEF e FBCE), Trapézios (ABCD, AFED, ABCH, AFEH, DGFE e DGBC) Pentágonos (ABCEF e DCBFE) e Hexágono (ABCDEF)

empenharam muito no começo, houve muitas dificuldades para desenvolver o raciocínio lógico geométrico, mas ao final o ganho de conhecimento superou as expectativas.

Em relação ao tempo de duração é importante que ele não se estenda ao previsto, pois percebi que ao final os alunos demonstravam sinais de cansaço. É importante também, que o material fique com o professor, pois assim evita-se que os alunos acabem desperdiçando qualquer tipo de material.

10.5. AUTO-AVALIAÇÃO:

Não foi um projeto feito ao acaso. Desde 1995 quando fiz minha primeira pós-graduação venho estudando e pesquisando como posso melhorar minhas aulas e o mais importante, como posso ajudar o aluno que tem dificuldade na área de exatas. Isso fez com que em 2000 durante minha segunda pós-graduação, meus horizontes se abrissem, pois, lendo e pesquisando sobre metodologia de ensino da matemática, sobre currículos e etnomatemática, minhas aulas passaram de uma mera transmissão de conhecimentos para uma troca de experiências com os alunos.

Sei que tenho muito que estudar e pesquisar ainda sei que todo esse tempo não foi em vão e que com certeza quem ganha com todo esse meu esforço é o aluno, pois crio para ele uma oportunidade de desenvolvimento de suas potencialidades dentro de um sistema educacional arcaico. Com isso posso valorizar seu conhecimento extraclasse o qual enriquece muito as aulas, pois ele deixa de ser "uma tábua rasa" e passa a ser um cidadão que usa os conhecimentos adquiridos para poder mudar a sua vida e a vida da comunidade que o cerca.

11. BIBLIOGRAFIA:

BUZATO, Marcio, **Modelagem Matemática na Cerveja**,Momografia de especialização.PUCCAMP,1994.

Ciência Hoje na Escola, 8: Matemática-Por quê e Para quê.Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência.RJ.Ciência Hoje.1999

D´AMBROSIO, Ubiratan.**Etnomatemática**. Ática,4ª Edição,SP,1998.

_____________. **Etnomatemática, elo entre as tradições e a modernidade.**autêntica editora.2ª. edição,2ª. Reimpressão,Belo Horizonte,2005.

_____________.**Da Realidade à Ação – Reflexões Sobre Educação e Matemática**.Summus editorial,4ª Edição,Campinas,SP,1986.

_____________. **Educação Matemática da Teoria a Prática**.Papirus,4ª Edição,SP,1998.

_____________.**Educação Para uma Sociedade em Transição.**Papirus,Campinas,SP,1998.

GUERDES, Paulus,**Sobre o despertar do pensamento geométrico,**Editora da UFPR,PR,1992.

HERNÁNDEZ, Fernando e VENTURA, Montserrat.**A Organização do Currículo por Projeto de Trabalhos**.Artmed,5ª Edição,RS,1998.

_______________, Fernando.**Transgressão e Mudança na Educação: Os Projetos de Trabalho**,trad.Jussara Haubert Rodrigues,Porto Alegre,Artmed, São Paulo.1998.

KNIJNIK, Gelsa, WANDER, Fernanda e Oliveira, Cláudio José de – Organizadores.**Etnomatemática – currículo e formação de professores.**Santa Cruz do Sul. EDUNISC, 2004.

LINDQUIST, Mary Montgomery e Shult,Albert P.-Organizadores**.Aprendendo e Ensinando Geometria**.Atual Editora,SP,1994.

MONTEIRO, Alexandrina, POMPEU JR, Geraldo.**A Matemática e os Temas Transversais**.São Paulo,Moderna.2001

MORENO,Montserrat,SASTRE, Genoveva, LEAL, Aurora e BUSQUETS, Maria Dolores, **Falemos de sentimentos – A Afetividade como um tema transversal**,São Paulo,Moderna,1999.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO.Secretaria da Educação Fundamental.**PCN – Introdução aos Parâmetros Curriculares Nacionais**.,3ª Edição,2001.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO.Secretaria da Educação Fundamental.**PCN – Matemática**., 3ª Edição,2001.

SANTOMÉ, Jurjo Torres,**Globalização e Interdisciplinaridade – O currículo Integrado,**Artmed,1ª.reimpressão,RS,1998.

(DES)CONHECIMENTO MATEMÁTICO PARA ENSINAR OTD QUE POSSUEM FUTUROS PROFESSORES DOS PRIMEIROS ANOS

C. Miguel Ribeiro, Fernando Martins[1]
Universidade do Algarve, CIEO; ESE do Instituto Politécnico de Coimbra
cmribeiro@ualg.pt; fmlmartins@esec.pt

Resumo

O tema de Organização e tratamento de dados foi um dos que, quando comparado com os documentos oficiais anteriores, maior visibilidade assumiu no novo Programa de Matemática do Ensino Básico. Por esse motivo, e também por ser um dos temas a que, tradicionalmente, não é atribuída grande importância na formação de professores (e em geral ao longo de toda a escolaridade), é de sobeja importância averiguar que "conhecimentos" estes possuem de modo a podermos, não só abordar com um maior foco as suas carências – a fim de as colmatar – mas também a discutir, desde logo, que conhecimento é esse que, enquanto professores, necessitarão de possuir de modo a tornarem os conteúdos que terão de abordar compreensíveis para os seus alunos.

Neste texto iremos discutir alguns aspectos/dimensões que consideramos fundamentais possuirmos, enquanto professores (actuais e futuros) relativamente ao conhecimento matemático suficiente para ensinar Otd de modo a estarmos/estarem capacitados a abordar esta temática tornando-a compreensível para os alunos. Essa discussão será fundamentada no (des)conhecimento revelado por futuros professores dos primeiros anos de escolaridade (estudantes do 2.º ano do Curso de Educação Básica) relativamente a alguns dos aspectos constantes no Programa do Ensino Básico que terão, expectavelmente, de leccionar.

Palavras-chave: Conhecimento Matemático para o Ensino; Recolha de Dados; Organização e Tratamento de Dados.

Introdução

Nas últimas décadas tem-se assistido a um aumento de tópicos de Probabilidade e Estatística nos currículos de matemática, sendo que, de forma explícita, e com a designação de Organização e tratamento de dados (Otd), aparecem no novo Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte, et al., 2007), o que não acontecia no anterior Programa do 1.º Ciclo (DEB, 1991). Este novo (reestruturação) Programa vai mais longe que o anterior na complexidade dos conjuntos de dados a analisar, nas medidas de tendência central e de dispersão a usar, nas formas de representação de dados a aprender e no trabalho de planeamento, concretização e análise de resultados de estudos estatísticos.

[1] Membro do Instituto de Telecomunicações, Pólo de Coimbra, Delegação da Covilhã.

A este acréscimo do peso de tópicos de Otd nos diferentes ciclos, deverá associar-se uma mais intensa/profunda preparação dos professores, de modo a abordarem, com êxito, os objectivos educativos correspondentes, com o intuito de concretizar a visão teórica fornecida pelo Programa que terão, expectavelmente, de leccionar pois, tal como refere Batanero (2001), muitos professores precisam de aumentar o seu conhecimento (em termos de Otd), não só acerca do conteúdo, mas também sobre a sua didáctica.

É, portanto, de extrema importância que logo na formação de (futuros) professores dos primeiros anos[2], os conteúdos das Unidades Curriculares (UC) não assumam como exclusivos temas puramente científicos abordados apenas na perspectiva de saber fazer, e que, apesar de envolverem um conhecimento necessário para o exercício da profissão que vão exercer futuramente, não são, de todo, suficientes (conteúdos abordados muitas vezes de igual modo – na génese – nas UC da formação inicial de, por exemplo, futuros enfermeiros ou educadores sociais –, ou seja, uma abordagem essencialmente técnica, desperdiçando a oportunidade de iniciar a discussão/abordagem a "outro" tipo de conhecimento matemático de que também vão necessitar na sua prática futura.

Entendemos que a discussão e abordagem precoce (nos Cursos de Formação) do tipo de conhecimento matemático de que, enquanto professores, virão a necessitar – para além do que se assume que os Enfermeiros ou Educadores Sociais devem ter – poderá contribuir para que comecem a levantar a ponta do icebergue de que conhecimento do conteúdo é esse de que necessitarão possuir de modo a estarem aptos a tornarem os conteúdos compreensíveis para os seus alunos (saber não só para si mas também de modo a poder ensinar a fazer).

Neste texto iremos centrar-nos no conhecimento do conteúdo que demonstram, ou nas carências que revelam, possíveis futuros professores dos primeiros anos de escolaridade (estudantes[3] do 2.º ano do Curso de Educação Básica) tendo por intuito, sempre, a obtenção de um maior conhecimento sobre esses pontos forte e fracos, no sentido de podermos ir contribuindo para a promoção de uma discussão conducente a uma melhoria dos próprios processos de formação e, consequentemente, espera-se, das futuras aprendizagens matemáticas dos alunos. Iniciamos com a clarificação dos conceitos teóricos a que recorremos nesta análise (domínios da conceptualização do

[2] O mesmo se poderá referir acerca da formação dos professores para outros níveis de escolaridade, porém, aqui, cingir-nos-emos apenas aos Primeiros Anos.
[3] Sempre que nos referirmos à Formação Inicial de professores utilizo estudantes, correspondendo a expressão aluno aqueles que frequentam o Ensino Básico/Secundário.

conhecimento para ensinar) apresentando, posteriormente, alguns exemplos de (des)conhecimento matemático para o ensino revelado pelos estudantes (através das respostas a um questionário/ficha de trabalho). Terminamos com alguns comentários e reflexões sobre a importância e papel deste conhecimento no exercício da acção docente, e da importância de conhecermos quais os pontos "mais" críticos nesse conhecimento, de modo a que possamos contribuir para a sua erradicação.

Algumas notas teóricas

Aos professores, para além de um conhecimento sobre como fazer algo ou simplesmente corrigir uma determinada actividade (no sentido avaliativo tradicional, sem fornecer um *feedback* que permita regular as aprendizagens (Santos & Pinto, 2009)), compete possuírem um conhecimento que os capacite a saber ensinar a fazer (com compreensão e não como uma mera repetição de processos) e de como cada conteúdo evolui ao longo do ano lectivo e da escolaridade com o intuito de que sejam conscientes dos tipos de generalizações que efectuam (locais ou globais). Estas são três componentes do conhecimento do conteúdo matemático que Ball, Thames e Phelps (2008) incluem no *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) (Ball, 2002; Ball & Bass, 2003; Ball, Hill & Bass, 2005; Ball, et al., 2008; Hill, Rowan & Ball, 2005) e que corresponde a um conjunto de conhecimentos do conteúdo e didácticos do conteúdo envolvidos no levar a cabo, com êxito, a tarefa de ensinar matemática. Ball et al. (2008), na sua conceptualização, consideram o conhecimento do conteúdo do MKT (subject Matter Knowledge) dividido em *Common Content Knowledge* (CCK), *Specialized Content Knowledge* (SCK) and *Horizon Content Knowledge* (HCK), no qual não incluem, portanto, o Conhecimento Didáctico do Conteúdo (Pedagogical Content Knowledge) – que faz parte da outra componente do MKT.

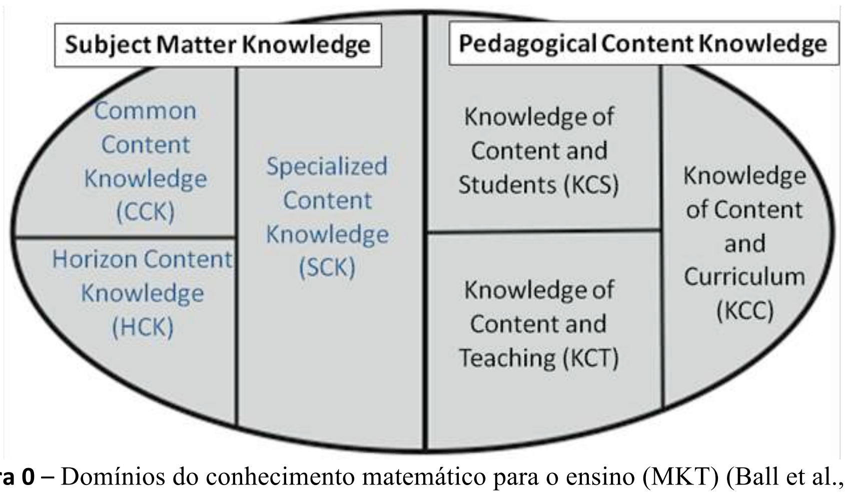


Figura 0 – Domínios do conhecimento matemático para o ensino (MKT) (Ball et al., 2008)

O *Common Content Knowledge* (CCK) é o conhecimento do conteúdo que se assume possuir qualquer pessoa com formação matemática, mas encarada como ferramenta e sem que saiba, necessariamente, explicar o porquê ou origem do que faz (*conhecimento sobre como fazer*). Como exemplo podemos referir o facto de saber o que é um pictograma ou um gráfico de barras; ou também as definições (no sentido de conhecer o que se pode encontrar em qualquer livro "científico" sobre o tema) de média, moda, mediana e quartis.

Relativamente ao *Specialized Content Knowledge* (SCK), é entendido como o conhecimento que o professor terá de possuir de forma a poder *ensinar a fazer*, e para que os alunos entendam verdadeiramente o que fazem, não o executando meramente como um conjunto de procedimentos. Não se esgota no conhecimento do porquê dos procedimentos, possuindo um sentido mais lato, envolvendo também os necessários conceitos. Nesta componente do conhecimento do conteúdo inclui-se, por exemplo, a compreensão do papel de cada variável nos pictogramas e um conhecimento relativo à influência provocada na representação do pictograma aquando das mudanças de escala.

Ainda em relação ao conhecimento do conteúdo matemático, o professor deverá possuir um *Horizon Content Knowledge* (HCK), competindo-lhe possuir um conhecimento das relações existentes entre os distintos tópicos matemáticos e de que forma as aprendizagens de um mesmo tópico vão evoluindo ao longo da escolaridade. Centrando-nos no 1.º Ciclo, o professor deverá possuir assim um conhecimento que lhe permita, por exemplo, conhecer de que forma os conteúdos relacionados com a construção e propriedades de gráficos circulares vão evoluindo ao longo da escolaridade de modo a permitir deixar uma porta aberta para a compreensão das relações entre cada um dos sectores, a frequência absoluta dos seus elementos, a amplitude do ângulo correspondente e relações com outros tipos de gráficos.

Aspectos do contexto, opções tomadas e dados analisados

Este texto é parte de um estudo que iniciámos recentemente no sentido de obter mais informações sobre que MKT possuem futuros professores dos Primeiros Anos (que podem vir a leccionar desde o Pré-Escolar até ao actual 2.º Ciclo). Aqui focamo-nos em concreto nesse conhecimento relativo ao tema matemático de Otd e no domínio do conhecimento do conteúdo.

As informações a que recorremos para discutir neste texto focam-se exclusivamente nas respostas fornecidas por estudantes do 2.º ano do Curso de Educação Básica numa das Instituições onde leccionamos. A elaboração dos questionários baseou-se, essencialmente, em discussões ocorridas com professores no âmbito do PFCM, nas reflexões ocorridas aquando da preparação e implementação de um conjunto de tarefas aplicadas numa turma do 2.º ano de escolaridade[4] em que se está a implementar o novo Programa. Estes questionários incluíam questões onde se pretendia aceder ao MKT relativo a diferentes formas de registo da informação recolhida, à construção de pictogramas, gráficos de barras e gráficos circulares, bem como a um conhecimento relativo à possibilidade de efectuar, ou não, uma transformação entre essas distintas representações, e ainda sobre histogramas e medidas de localização (média, mediana, moda e quartis) – tanto na perspectiva de CCK como de SCK.

Responderam trinta e um estudantes, tendo a primeira parte sido efectuada em grupos (de modo a efectuarem o registo da "melhor" forma de representar um conjunto de respostas fornecidas por alunos do 2.º ano sobre os seus gostos – frutos, tempos livres e cores – e sobre o número de calçado de cada um deles). A segunda parte, onde foram abordados os restantes tópicos, foi respondida individualmente.

Aqui iremos discutir alguns dos aspectos que assumimos como mais críticos e que revelam uma falta de conhecimento (grande parte dele comum) sobre os conteúdos que estes futuros professores poderão ter de vir a abordar no exercício da sua profissão (pressupomos que estes conteúdos devem ser abordados logo desde o Pré-Escolar)[5]. Por assumirmos que apenas podemos melhorar a Formação de professores se soubermos, efectivamente, quais as situações críticas com que se defrontam, focámo-nos nas carências em termos de conhecimentos do conteúdo evidenciadas, não pelas carências em si, mas fundamentalmente pela informação que esse tipo de (des)conhecimento nos pode fornecer.

Abordaremos em concreto alguns aspectos do (des)conhecimento apresentados quanto aos pictogramas, à possibilidade de efectuar uma transposição (expectavelmente eficaz)

[4] Essa tarefa e sua discussão resultaram também numa comunicação efectuada no ProfMat2010, encontrando-se o texto nas actas do encontro (Ribeiro & Joaquim, 2010). Um percurso construtivo de recolha, organização e tratamento de dados numa turma do 2.º Ano).

[5] Nas Orientações Curriculares para o Pré-Escolar (DEB, 1997) é referido explicitamente que os distintos domínios devem ser abordados de forma integrada, dai que cumpra, aos Educadores, possuir também um conhecimento sobre cada um dos temas que pretendem abordar de modo a poderem torná-los perceptível aos seus alunos.

entre diferentes formas de representação da informação (tabelas, pictograma, gráfico de barras e circular) e quanto ao conhecimento e forma como interpretam o que significa definir média, moda e mediana. Escolhemos estes aspectos, de entre muitos outros, pois consideramos que estão entre os fundamentais e o seu não correcto entendimento está na base de muitas dificuldades demonstradas pelos estudantes na compreensão e relação de conceitos.

Após a realização dos questionários, discutiram-se, com os estudantes, algumas das questões, com o intuito de que estes pudessem iniciar, nessa altura, o processo de consciencialização e uma primeira reflexão quanto à necessidade de saberem/conhecerem os diferentes tópicos/conteúdos que fazem parte do Programa do Ensino Básico que estará em vigor quando eles forem leccionar (tanto durante a introdução à prática profissional (no âmbito da formação inicial) como posteriormente enquanto docentes) (Ponte et al., 2007).

Alguns exemplos de (des)conhecimento matemático para o ensino

Previamente à apresentação, discussão e reflexão sobre alguns dos aspectos em que os estudantes revelam maiores dificuldades de conhecimento (em termos dos tópicos incluídos no questionário), temos de notar que, as respostas obtidas na primeira parte desse questionário (em grupo), sobre qual a "melhor" forma de registo de um conjunto de respostas, são semelhantes às fornecidas por alunos do 2.º ano de escolaridade, o que, só por si, é já um indicador (que nos preocupa e que urge, quanto antes, alterar) do hábito destes estudantes organizarem a informação – e subjacentemente, de resolverem problemas.

Algo aparentemente tão simples como seja a construção de um pictograma a partir de um conjunto de dados já registados em tabela (aqui as respostas de vinte alunos de uma turma do 2.º ano sobre as suas actividades preferidas – de entre quatro possíveis) poderá ser revelador de concepções erróneas aquando da (posterior) elaboração de gráficos de barras ou circulares. Para estes estudantes, estes conteúdos fazem parte de conjuntos disjuntos (em termos das suas características) pois assumem que apenas é possível obter uns a partir de outros se, por exemplo: *estiverem a trabalhar com números inteiros* (associando aqui números inteiros a valores exactos)[6]; *o número de dados for grande,* ou *for conhecida a frequência relativa de cada observação*.

Para se estar capacitado a ensinar este tópico, é necessário possuir um conhecimento básico sobre o que é um pictograma e como este se pode construir. É assim necessário saber que é, também, um gráfico (apesar de ser frequentemente considerado como parte de outro conjunto), e que para a sua obtenção têm de se considerar figuras ou símbolos alusivos à variável em estudo (*pictu* – pintado + *graphe* – caracter, letra). Porém, este conhecimento não é suficiente, uma vez que aos professores (actuais ou futuros) cumpre possuir também, por exemplo, um conhecimento matemático relacionado com o facto de saber/conhecer: os motivos matemáticos (e não estéticos) que levam a que as figuras tenham de estar alinhadas para que seja possível posteriormente efectuar uma correcta interpretação (e não apenas para facilitar a contagem); o porquê de as figuras para a construção do pictograma terem de ser todas do mesmo tamanho; o porquê de, em cada pictograma, cada símbolo ter de corresponder sempre a um mesmo valor; que pictogramas e tabelas (de frequência ou com "*bonecos*"), polígonos de frequências e gráficos de pontos não correspondem exactamente ao mesmo.

Estas são alguns dos aspectos que a grande maioria destes hipotéticos futuros professores dos Primeiros Anos desconhecem (cf. Imagem 1, abaixo) – apenas um estudante teve isso em conta, mas ainda assim sentiu necessidade de colocar, como facilitador, um eixo vertical com a frequência de cada opção.

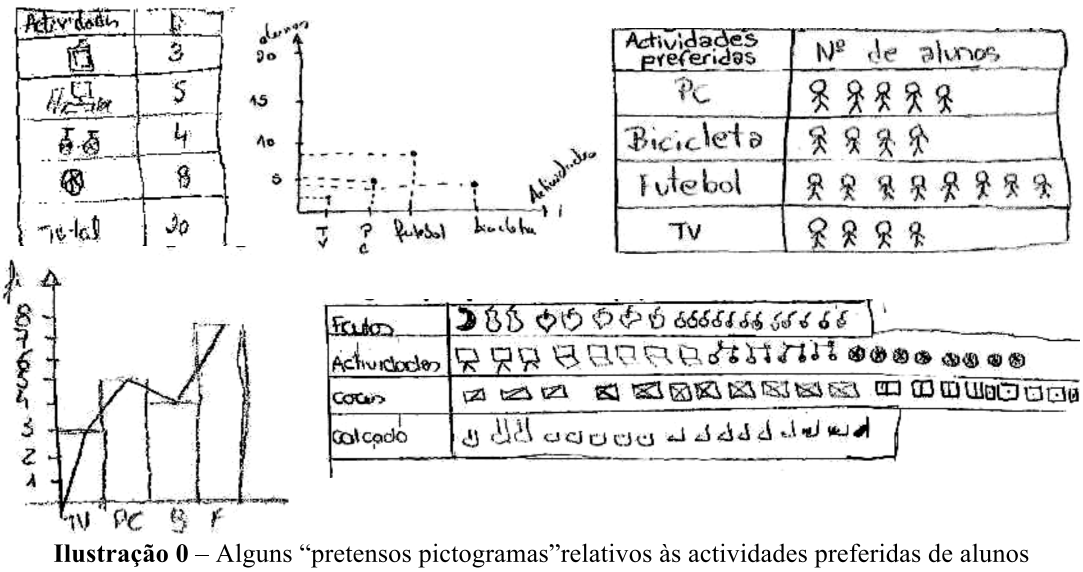


Ilustração 0 – Alguns "pretensos pictogramas"relativos às actividades preferidas de alunos

[6] O que nos levanta também a questão da forma como encaram os números e o próprio sistema de numeração. Esta carência transformar-se-á também, expectavelmente, num obstáculo para que possam, eles próprios, entender claramente as relações de inclusão dos conjuntos numéricos e da expressão dos elementos de um conjunto como elementos de outro que o inclui de modo imediato.

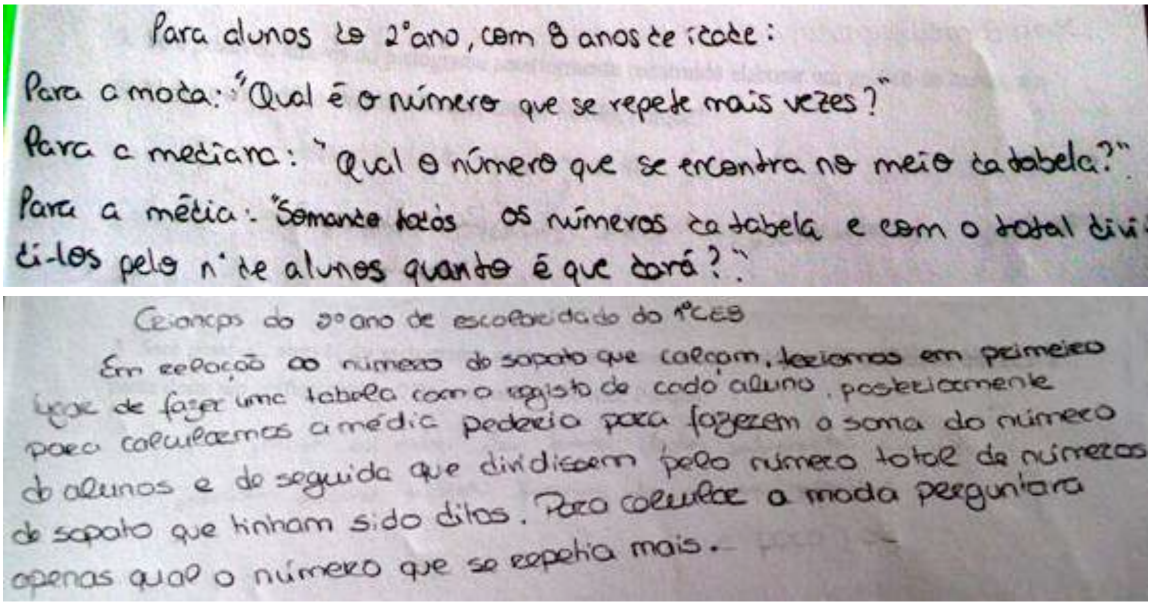
Estes (des)conhecimentos impossibilitam o "ensinar os seus alunos a fazer", com compreensão, uma vez que não possuem, eles próprios um saber "como fazer".

Um outro aspecto em que nos centramos (e que nos levou a reflectir sobre o MKT e o foco a considerar na nossa própria prática), prende-se com o papel e a forma como são encaradas as definições pois, os estudantes e alunos confundem frequentemente enumeração de propriedades ou descrição do cálculo com o que é definir algo. Uma vez que não é, ainda, uma prática comum a abordagem, discussão e reflexão sobre o sentido das definições, e sobre o que é isso de definir, urge iniciar, quanto antes, o processo de capacitação dos (futuros) professores de modo a que essas situações passem a ser uma realidade.

Focamos em concreto as definições de média, moda e mediana. Tal como qualquer outra definição matemática é fundamental que, as definições de média, moda e mediana, sejam sintéticas e matematicamente válidas. Porém, ao professor é necessário algo mais que conhecer essas definições, pois cumpre-lhe possuir um conhecimento sobre cada uma dessas definições de modo a torná-las compreensíveis para os seus alunos – e essa compreensibilidade depende, como é evidente, do nível cognitivo desses alunos, daí que as questões de linguagem e de generalizações locais sejam fundamentais.

Ao serem solicitados para fornecerem as definições referidas anteriormente, uma grande parte destes estudantes apresenta um exemplo, explica o processo de cálculo, ou define o conceito com recurso a esse mesmo termo (e.g. a média é o valor médio da distribuição; é a soma das respostas divididas pelo número total dessas respostas; moda é o valor que se verifica mais vezes numa tabela). Este desconhecimento do conteúdo (CCK) implica, obviamente, também uma incapacidade em formular questões que permitam abordar estes conteúdos com alunos dos Primeiros Anos, de modo a que tenham, para eles, significado e não se limitem a replicar o *pseudo-conhecimento* que lhes seria transmitido (cf. Ilustração 2).

É de salientar que, com estas questões relacionadas com o tipo de perguntas que se poderiam efectuar a alunos do 1.º Ciclo pretendíamos aceder apenas ao conhecimento do conteúdo (SCK) e não à forma como esses conteúdos seriam explorados – no sentido da componente didáctica do conteúdo.


Para alunos do 2.º ano, com 8 anos de idade:
Para a moda: "Qual é o número que se repete mais vezes?"
Para a mediana: "Qual o número que se encontra no meio da tabela?"
Para a média: "Somando todos os números da tabela e com o total dividi-los pelo n.º de alunos quanto é que dará?"

Crianças do 2º ano de escolaridade do 1ºCEB
Em relação ao número do sapato que calçam, teríamos em primeiro lugar de fazer uma tabela com o registo de cada aluno, posteriormente para calcularmos a média pediria para fazerem a soma do número dos alunos e de seguida que dividissem pelo número total de números de sapato que tinham sido ditos. Para calcular a moda perguntaria apenas qual o número que se repetia mais.

Ilustração 0 – Perspectivas de futuros professores para abordar a moda, média e mediana com alunos do 2.º Ano de escolaridade

Alguns comentários

Consideramos que o desconhecimento de conceitos básicos (tanto na perspectiva do CCK, como também, consequentemente, de SCK) e a não identificação e colmatação dessas lacunas atempadamente limitarão a actuação do professor a uma mera reprodução de conhecimentos e em que aos alunos apenas será exigido replicar o que foi dito, respondendo a questões que correspondem a meros exercícios.

Um tal conhecimento profundo dos conteúdos que se pretende ensinar – conhecimento esse na perspectiva que temos vindo a apresentar, e que não é sinónimo da frequência num grande número de UC de uma área científica, vista de forma "tradicional", associada exclusivamente ao saber fazer – possibilitará não apenas a preparação de tarefas ricas, estruturadas, matematicamente desafiadoras e de um nível cognitivo elevado, bem como a manutenção desse nível cognitivo aquando da sua implementação. Tal como refere Charalambous (2008), o MKT que os professores possuem é um dos factores determinantes para que estes mantenham ou reduzam a exigência matemática da tarefa, daí também a necessidade de conhecermos mais sobre esse conhecimento, de quais as suas especificidades e pontos críticos, de modo a que se possa, posteriormente, discutir, reflectir e melhorar esses aspectos mais problemáticos.

O facto de nos centrarmos nas lacunas de conhecimento evidenciadas – tanto em termos de CCK como de SCK – tem a pretensão de iniciar o "*mapeamento*" e identificação da diversidade de situações que possam ser mais problemáticas de abordar (em termos de conhecimentos para o professor), de modo a que e possam delinear estratégias para ultrapassar essa problemática. As carências evidenciadas irão também contribuir, seguramente, para que nos alertar quanto ao tipo de lacunas, que muito provavelmente muitos outros futuros professores possuirão – o que nos poderá servir de guia aquando da preparação das UC que leccionamos.

Este tipo de trabalho e reflexão sobre a matemática envolvida no processo de ensino, e sobre o conhecimento que nos cumpre possuir, leva a que nos consciencializemos, nós próprios, da nossa própria prática e conhecimentos, enriquecendo-os. As discussões e reflexões, para além de uma consciencialização sobre a prática e necessidades formativas concretas dos estudantes, conduziram(zem) a um aprofundamento e enriquecimento do nosso próprio MKT.

Referências

Ball, D. L. (2002). Knowing Mathematics for Teaching: Relations between Research and Practice. *Mathematics and Education Reform Newsletter, 14*(3), 1-5.

Ball, D. L., & Bass, H. (2003). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In B. Davis & E. Simmt (Eds.), *Proceedings of the 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* (pp. 3-14). Edmonton, AB: CMESG/GCEDM.

Ball, D. L., Hill, H. C., & Bass, H. (2005). Knowing Mathematics for Teaching. Who knows Mathematics Well Enough to Teach Third Grade, and How Can We Decide? *American Educator, Fall 2005*, 14-46.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística*. Granada: GEEUG, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Charalambous, C. Y. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the unfolding of tasks in mathematics lessons: Integrating two lines of research. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepulveda (Eds.), *Proceedings of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 281-288). Morelia, Mexico: PME.

Departamento de Educação Básica (DEB). (1991). *Organização Curricular e Programas - Ensino Básico - 1.º Ciclo*. Lisboa: Ministério da Educação.

Departamento de Educação Básica (DEB). (1997). *Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar*. Lisboa: Ministério da Educação.

Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematics knowledge for teaching on student achievement. *American Education Research Journal, 42*(2), 371-406.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E. & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação – DGIDC.

Santos, L., & Pinto, J. (2009). Auto-avaliação Regulada em Matemática: Dizer antes de Fazer. *Bolema, 22*(33), 51-68.

O QUE NECESSITAMOS SABER PARA "ENSINAR" GEOMETRIA? O CASO DOS RECTÂNGULOS

C. Miguel Ribeiro, Helena Gomes
Universidade do Algarve, CIEO; ESE Viseu
cmribeiro@ualg.pt; hgomes@esev.ipv.ppt

Resumo

A Geometria tem sido um tema em que os alunos revelam maiores dificuldades, algumas das quais são frequentemente associadas a razões que se assumem advirem das suas "supostas dificuldades inatas" face à Matemática. Como professores, cumpre-nos a obrigação de nos questionarmos sobre esse facto e de assumirmos um papel participativo na promoção do desenvolvimento de um "conhecimento geométrico" e, consequentemente, de uma maior compreensão, pelos alunos, dos conceitos envolvidos.

Cumpre-nos então possuir e dominar, entre outros, um conhecimento que vá mais além de conhecermos os conteúdos para nós próprios (um *saber fazer* ou *saber identificar o erro*), devendo possuir também um conhecimento que nos permita tornar os conteúdos perceptíveis aos nossos alunos (*saber ensinar a fazer*), ou um conhecimento que nos facilite antever e colmatar as suas dúvidas relativamente a cada um dos conteúdos que abordamos.

Neste texto iremos discutir alguns aspectos do conhecimento matemático para ensinar no âmbito da Geometria, nomeadamente na abordagem aos rectângulos, revelados por potenciais (hipotéticos) futuros professores que frequentam o 1.º ano de um curso de Educação Básica. Alguns dos aspectos abordados foram identificados como sendo problemáticos para os alunos do 1.º Ciclo do Ensino Básico e portanto constituíram uma motivação para a investigação, análise e discussão do conhecimento matemático para ensinar que necessitamos possuir, de modo a poder atenuar essas dificuldades.

Palavras-chave: Definições em Geometria; Rectângulos; Conhecimento do Conteúdo; Futuros Professores.

Introdução

O tema da Geometria tem vindo a ser um daqueles em que os alunos[1] revelam maiores dificuldades. Uma vez que os conteúdos matemáticos se vão interligando e complexificando progressivamente, tornando-se numa teia complexa, a erradicação destas dificuldades tenderá a efectuar-se fundamentada no estudo das componentes nucleares, tais como sejam as figuras geométricas, de modo a iniciar a génese do sentido espacial. Nesse sentido, é referido no (novo) Programa de Matemática do Ensino Básico

[1] Sempre que nos referirmos à Formação Inicial de professores utilizamos estudantes, correspondendo a expressão aluno àqueles que frequentam o Ensino Básico/Secundário.

(Ponte et al., 2007) que o estudo das figuras geométricas *bi* e *tri*dimensionais "deverá" iniciar-se no 1.º ciclo, sendo que, no 2.º ciclo, os alunos são já chamados a relacionar propriedades geométricas (p. 7). É referido ainda, como sendo um dos objectivos específicos do tema de Geometria, logo nos dois primeiros anos de escolaridade, que os alunos devem ser capazes de reconhecer propriedades de figuras no plano e fazer classificações (p. 22). Nesse sentido, é também chamada a atenção para a necessidade de salientar que o quadrado pode ser visto como um caso particular do rectângulo.

No nosso entender, esse alerta surge explicitamente no documento por o tema em questão ser um que, consideramos nós, pode conduzir a diversas concepções erróneas, por parte dos alunos, não apenas sobre os rectângulos em si mas, mais amplamente, sobre os quadriláteros e os polígonos em geral. Para que essas concepções erróneas possam ser erradicadas e, consequentemente, substituídas por um conhecimento rico e relacional sobre o tema (quadriláteros, em particular rectângulos) é fundamental que os alunos sejam confrontados com diferentes perspectivas de encarar os quadriláteros, trabalhando com distintas definições matematicamente válidas, abordando-as explicitamente, bem como com a sua construção e génese. Todo este processo de aprofundamento de conhecimento matemático, por parte dos alunos, apenas será possível se o professor for detentor de um conhecimento que lhe permita abordar os conteúdos, de modo a conseguir torná-los perceptíveis para os seus alunos, antevendo as suas possíveis dúvidas e/ou dificuldades.

Enquanto formadores de professores, cumpre-nos confrontar os nossos estudantes (futuros hipotéticos professores dos primeiros anos) com situações que lhes permitam desenvolver um conhecimento (e o hábito de questionamento e reflexão) que vá mais além de saberem/conhecerem os conteúdos na óptica do utilizador (saber fazer mas sem saber porquê). Devemos incutir-lhes a percepção de que para ensinar é necessário um conhecimento complementar desse, tanto em profundidade como em expansão, e também a percepção de que, para levar a bom porto as tarefas de ensinar Matemática[2] se devem ir consciencializando de que ensinar envolve mais do que conhecer e saber resolver um conjunto diversificado de problemas ou possuir um conhecimento

[2] Ball, Thames e Phelps (2008, p. 400) referem como tarefas de ensinar, por exemplo: apresentar ideias matemáticas; responder aos alunos a questões de "porquê"; reconhecer o que está envolvido na utilização de determinada representação; relacionar representações de forma a relacionar ideias ou com outras representações; escolher e desenvolver definições utilizáveis; utilizar notação matemática e linguagem correcta, criticando a sua utilização ou seleccionar representações para fins específicos e analisar equivalências.

matemático mínimo que o permita fazer. Não é, portanto, suficiente um professor saber dar resposta a uma determinada situação se depois não consegue analisar o pensamento dos alunos e tomá-lo, se for caso disso, como ponto de partida para a discussão. É então desejável que o professor possua um conhecimento amplo, rico e profundo sobre o conteúdo de modo a poder levar a cabo o ensino da Matemática (é necessário saber mais do que o que se ensina)[3], que corresponde ao que Hill, Rowan e Ball (2005, p. 373) consideram como *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT)[4].

Tendo por finalidade última a melhoria da nossa própria prática (e, por essa, uma busca continuada da melhoria da formação dos nossos estudantes) e por a Geometria ser um dos temas em que mais marcadamente os alunos possuem dificuldades, unimos esforços no sentido de obter mais informações sobre que MKT (de Geometria) possuem hipotéticos futuros professores dos Primeiros Anos (que frequentam o curso de Educação Básica).

Neste texto iremos referir-nos em concreto ao caso dos quadriláteros, em particular aos rectângulos, apresentando e discutindo alguns dos aspectos e especificidades que este tema, aparentemente simples, possui quando o encaramos no sentido do que necessitamos saber para o poder ensinar. Alguns dos aspectos abordados foram identificados como sendo problemáticos para os alunos do 1.º Ciclo do Ensino Básico, daí que uma sua discussão e aprofundamento serão, certamente, benéficos de modo a que possamos contribuir para colmatar essas dificuldades.

Conhecimento matemático do conteúdo para o ensino: algumas notas teóricas

Iremos, aqui, discutir alguns dos pressupostos teóricos que guiam a forma como encaramos "a Matemática que necessitamos saber enquanto professores". O conhecimento matemático (encarado de forma ampla) é comum a um conjunto diversificado de profissões. No entanto, em cada uma delas, verificam-se algumas especificidades. Assim, por exemplo, engenheiros, arquitectos ou enfermeiros deverão possuir uma formação matemática que lhes permite conhecer os conteúdos, de modo a saberem utilizá-los no decurso da sua actuação (saber para si próprios). No entanto, aos professores, a par desse tipo de conhecimento, cumpre possuir também um

[3] Este é um dos aspectos que é fundamental discutir-se, desde logo, com os estudantes na Formação Inicial, sendo, para além disso, necessário conhecer o(s) conteúdos sob distintas perspectivas que lhes permitam, por exemplo, responder a questões de porquê ou entender os motivos subjacentes aos distintos tipos de erros.

[4] Optámos por utilizar a nomenclatura original numa tentativa de uniformizar a escrita e leitura.

conhecimento do conteúdo que lhes permita torná-lo perceptível aos seus alunos (*saber ensinar a fazer*).

Esta diferenciação do conhecimento do conteúdo específico para ensinar é parte da conceptualização do MKT, conhecimento esse que requer, por parte do professor, um conhecimento substancial da Matemática que se vai ensinar bem como uma capacidade de tornar acessíveis as ideias matemáticas ao ensino e um conhecimento do percurso escolar dos alunos, numa lógica de conexão com os conhecimentos matemáticos anteriores e com as aprendizagens futuras. Esse MKT, seguindo a conceptualização de Ball et al. (2008), que por sua vez se baseia nas ideias de Shulman (1986), encontra-se dividido em duas grandes componentes (conhecimento do conteúdo e conhecimento didáctico do conteúdo), que são, por sua vez, subdivididas em três dimensões cada.

No âmbito deste texto interessam-nos, fundamentalmente, as dimensões relativas ao conhecimento do conteúdo que envolvem o saber fazer para si próprio (*Common Content Knowledge – CCK*); o saber ensinar a fazer (*Specialized Content Knowledge – SCK*), que abarca, por exemplo, todo o saber necessário a que seja possível mais do que apenas dizer se algo está correcto ou incorrecto, estando apto também a saber o porquê, ou também a conhecer distintas representações para um mesmo conteúdo e possuir a capacidade de efectuar uma "eficaz navegação entre elas".

Para além disso, e apenas respeitante ao conhecimento do conteúdo, cumpre-nos, como professores, possuir também um conhecimento de como os diversos conteúdos evoluem ao longo da escolaridade (*Horizon Content Knowledge* – HCK) (não apenas no nível/ciclo de ensino que leccionamos) de modo a possibilitar facultar aos alunos um conjunto rico de experiências e vivências que lhes permitam irem construindo o seu conhecimento, não apenas por sobreposição mas, fundamentalmente, por integração e adequação. Nesta dimensão incluímos também o conhecimento da longevidade das generalizações, considerando que o professor deverá possuir um conhecimento de até que ponto devem ser efectuadas generalizações (e de que tipos) pois pode assumir que, em determinado momento, para um certo conteúdo, é suficiente efectuar uma generalização local (adequada ao ano curricular em que os alunos se encontram, mas também ao seu nível cognitivo podendo, assim, ser-se um pouco mais exigente, indo-se mais além do que o referido no(s) Programa(s) ou Orientações Curriculares – no caso particular do Pré-Escolar (e.g. DEB (1991; 1997) e Ponte et al. (2007)) deixando, ainda assim uma porta aberta para uma generalização global que poderá ocorrer nos anos posteriores. Um exemplo disso poderá ser a “distinção” entre quadrado e rectângulo apresentada “normalmente” em que, tradicionalmente, é efectuada uma generalização local, considerando-os parte de conjuntos distintos (talvez pela assunção de que dessa forma estarão a facilitar algum tipo de aprendizagens aos alunos). No entanto, devem possuir um conhecimento de que isso não corresponde a uma generalização global, não incutindo portanto essa ideia errónea nos alunos.

De forma a preparar tarefas matematicamente ricas e desafiadoras, e a manter o seu nível cognitivo aquando da sua implementação (no sentido do referido por Stein, Smith, Henningsen e Silver (2000)), é preponderante um sólido e rico MKT. É expectável que esse tipo de conhecimento e capacidade vá sendo adquirido pelo professor (actual ou futuro), quanto antes, daí também a opção de focar o MKT de futuros professores.

Contexto e opções tomadas

Neste texto apresentamos algumas situações colhidas de um estudo exploratório que tem como um dos seus objectivos obter informações sobre que MKT possuem hipotéticos futuros professores que frequentam o Curso de Educação Básica. Aqui referir-nos-emos ao conhecimento do conteúdo relativo ao tema dos rectângulos e, de modo a aceder a esse conhecimento, optámos por preparar um questionário contemplando questões que tiveram origem em situações identificadas e discutidas com professores no âmbito do Programa de Formação Contínua em Matemática para professores dos 1.º e 2.º Ciclos, na análise do Programa do Ensino Básico (Ponte et al., 2007) e, ainda, em algumas questões levantadas pela investigação (e.g. Fujita e Jones (2006) e MKT (2009)).

Neste texto discutimos algumas das questões desse questionário que se relacionam, em concreto, com a definição e representação de rectângulos (numa perspectiva de CCK e de SCK) e com as propriedades fundamentais que permitem diferenciar quadrados e paralelogramos. Abordamos, essencialmente, as carências reveladas pois, dessa forma, poderemos identificar quais as situações mais críticas e sobre as quais é mais urgente focar a atenção, no sentido de melhorar o processo de Formação de professores e, espera-se, as aprendizagens matemáticas dos alunos (assumimos que um MKT mais rico contribuirá para um maior à-vontade, por parte do professor, na preparação e implementação das tarefas mantendo, aquando da implementação, o elevado nível cognitivo das mesmas).

A especificidade (ou talvez não) dos rectângulos

De entre as várias questões do questionário, optámos por discutir aqui apenas algumas das que se centram no conhecimento do conteúdo (tanto em termos de CCK como de SCK).

As questões iniciais do questionário relacionavam-se com o conhecimento relativo à apresentação de uma definição de rectângulo e ao desenho de dois diferentes. A propriedade desse polígono ser um quadrilátero com ângulos internos de 90º (ou outras equivalentes) parece ser uma condição praticamente universal. No entanto, independentemente da definição que se use, é fundamental que se apresente uma que seja clara (para quem a ouve/trabalha) e que não permita qualquer tipo de ambiguidade. O papel das definições, a sua natureza e a abordagem no ensino da Geometria têm sido frequentemente debatidos (mas nem tanto implementadas as discussões), sendo inquestionável a sua importância na organização e consistência dos sistemas axiomáticos. É, também por isso, importante obter um maior entendimento relativo ao conhecimento que os estudantes possuem e que dificuldades, eventualmente, revelam.

Essas carências de conhecimento tornam-se patentes quando, ao definirem rectângulo, apresentam uma ideia incompleta, não se referindo a qualquer propriedade dos seus ângulos internos ou à posição relativa dos seus lados (confundem definição com enumeração de propriedades)[5]. Adicionalmente, parece existir alguma confusão no uso de expressões que são reservadas ao estudo de figuras no espaço ou no plano.

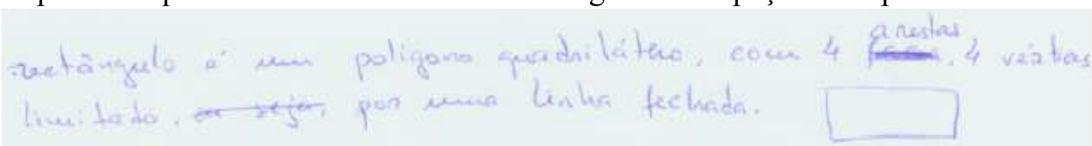


Ilustração 0 – Uma "*pseudo*definição" de rectângulo

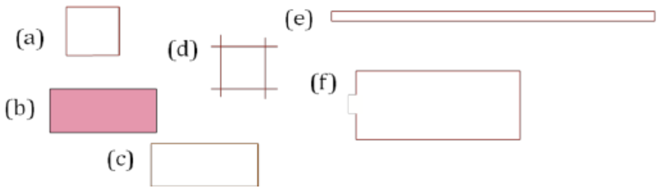
Este é um dos aspectos fundamentais a ser trabalhado, "mais" aprofundadamente, na formação de professores (tanto Inicial como Contínua), confrontando os estudantes com a análise de diferentes definições para o mesmo elemento (pelo professor ou pela sugestão dos próprios colegas), abordando-se as implicações que a tomada de diferentes perspectivas pode ter ao nível da classificação ou da análise de outros elementos do mesmo sistema.

[5] Este é um factor comum também aos professores em exercício (Ribeiro, Carrillo & Monteiro, 2009), daí que seja refutável a possível ideia de que, estas carências são observáveis por serem estudantes dos anos iniciais da sua formação.

Ao serem confrontados com a necessidade de desenharem dois rectângulos diferentes, a maioria dos estudantes desenhou um rectângulo com determinadas dimensões e o mesmo mas posicionado no plano de forma diferente. É pois importante que a capacidade espacial designada por Del Grande (1990) como *constância perceptual*[6], assim como outras competências associadas à visualização espacial sejam aprofundadas com os estudantes/professores, de modo a enriquecer o seu conhecimento sobre os temas e a que, por via desse enriquecimento, possam abordá-los de forma a possibilitarem um efectivo entendimento nos alunos. A forma como as figuras geométricas são representadas pode ter influência no seu reconhecimento posterior e, por isso, é também fundamental diversificar e relacionar modos de representação, alertando para o facto de a posição não ser sinónimo de representação de figuras diferentes.

Uma outra questão com que os alunos foram confrontados envolvia o averiguar do seu próprio conhecimento sobre o que é um rectângulo, mas aqui numa perspectiva de SCK. Com esse fim, foi-lhes colocada a situação:

> *Quais das seguintes figuras serão, para si, adequadas para apresentar aos alunos, com o intuito de averiguar o seu entendimento sobre o que é um rectângulo? Porquê?*



Os estudantes, salvo honrosas excepções (um exemplo dessas excepções é apresentado na Ilustração 2), focam essencialmente as hipóteses a) e b).

As respostas obtidas revelam uma prevalência da ideia de que a melhor, e única, forma para se

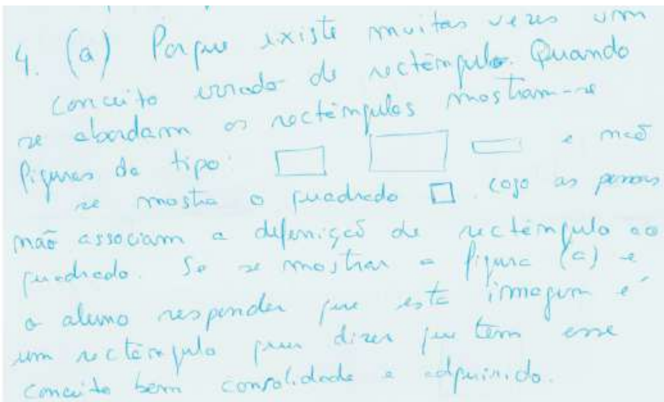

4. (a) Porque existe muitas vezes um conceito errado de rectângulo. Quando se abordam os rectângulos mostram-se figuras do tipo: e não se mostra o quadrado, logo as pessoas não associam a definição de rectângulo ao quadrado. Se se mostrar a figura (a) e o aluno responder que esta imagem é um rectângulo quer dizer que tem esse conceito bem consolidado e adquirido.

Ilustração 2

[6] Del Grande (1990) define esta capacidade de visualização espacial como a "capacidade de reconhecer figuras geométricas apresentadas numa variedade de tamanhos, tonalidades, texturas e posições no espaço e de discriminar figuras geométricas".

averiguar o conhecimento dos alunos sobre um determinado aspecto não é confrontá-los com casos que se aproximem (ou não) do que queremos mas sim, apresentar os conteúdos na sua versão final, não possibilitando um qualquer confronto cognitivo, levando os alunos a assumirem, como suas, as representações do professor. Esta opção de apresentar as figuras que são rectângulos, em vez de os confrontar com outras figuras que se afastam desses quadriláteros, não alimenta uma discussão e uma construção matemática da definição de rectângulo mais ricas. Os estudantes reproduzem, assim, as ideias que possuem sobre as experiências que tiveram nesse nível de escolaridade, não se sentindo (ainda) capacitados/conhecedores a assumir e pensar nas tarefas, para que estas sejam matematicamente ricas e desafiadoras, construindo assim o que Doyle (1988) denomina de tarefas do tipo novo. Mantendo esta forma de encarar o ensino (pelas experiências que tentam replicar o conhecimento que possuem) terá, expectavelmente, um efeito directo nas aprendizagens matemáticas dos seus futuros alunos pois não lhes será permitido desenvolver aprendizagens de forma autónoma (Corno, 1988).

Com o intuito de percebermos até que ponto estes futuros professores possuem conhecimentos que lhes permitam relacionar distintos tipos de quadriláteros (no sentido de possuírem um conhecimento relacional que se pode enquadrar no SCK), foram confrontados com a seguinte situação:

> *O professor António pretende que os seus alunos saibam distinguir quadrados de paralelogramos. Quais as propriedades que um aluno poderá fornecer na sua resposta, de modo a evidenciar que conhece as propriedades dos quadrados que não são propriedades dos paralelogramos?*

As respostas fornecidas (e.g. listar as propriedades dos dois e ver se alguma é diferente) levam-nos a considerar a importância de um reforço na exploração e discussão do facto de, por uma figura geométrica obedecer a determinadas condições, diferentes de outra, não implica que a primeira não pertença a um subconjunto da segunda, como aliás é o caso, pelas classificações mais comuns dos quadriláteros. Dessa forma poderemos contribuir para que se construa um conhecimento sólido sobre quadriláteros, e particularmente sobre rectângulos – tanto em termos de CCK como de SCK e HCK.

Pelas classificações mais frequentes nas respostas, os estudantes indicam algumas propriedades dos quadrados que não são propriedades dos paralelogramos, não referindo sequer as que são indicadas mais comummente como caracterizadoras dos quadrados como casos particulares dos paralelogramos (cf. Ilustração 3 – carência em termos de CCK e SCK). Apenas um estudante indicou uma possível resposta (correcta) por parte dos alunos (cf. Ilustração 4).

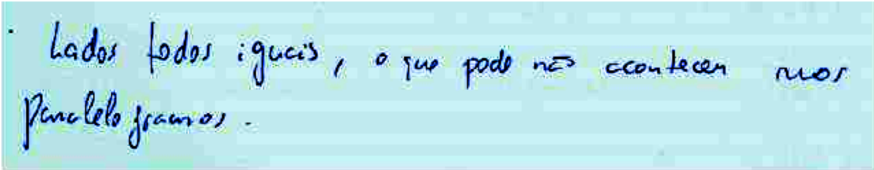

· Lados todos iguais, o que pode não acontecer nos paralelogramos.

Ilustração 3 – Quadrados versus paralelogramos

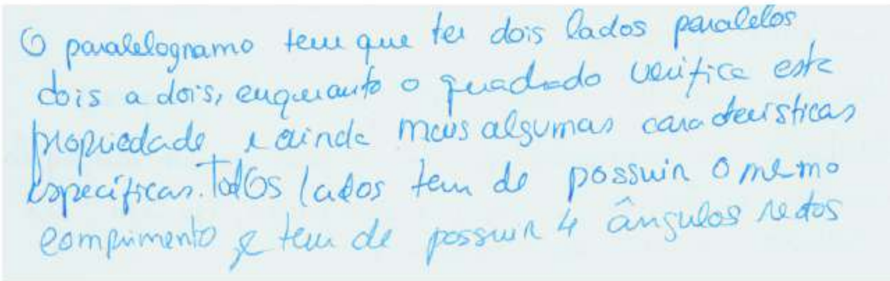

O paralelogramo tem que ter dois lados paralelos dois a dois, enquanto o quadrado verifica esta propriedade e ainda mais algumas características específicas. Todos lados tem de possuir o mesmo comprimento e tem de possuir 4 ângulos retos

Ilustração 4 – Possível resposta correcta na diferenciação entre quadrados e paralelogramos

Com o fito de colmatar estas carências (e outras que observámos mas que, por falta de espaço, não referimos) é importante que na formação (inicial) de professores se explorem também diferentes sistemas axiomáticos para a Geometria e que, em cada um, se discutam e analisem as relações entre os seus elementos, de acordo com as classificações fixadas.

Alguns comentários

Este trabalho que iniciámos permite constatar algumas das carências e dificuldades que os estudantes evidenciam na análise de relações lógicas (aqui particularmente no conjunto dos quadriláteros) daí que seja premente um trabalho mais aprofundado nesse âmbito. Um outro aspecto, intrinsecamente relacionado com o conhecimento e percepção lógica, que urge melhorar na formação de professores, e consequentemente na nossa própria prática, prende-se com o papel e uso das definições (em particular ao longo de toda a escolaridade o que só será possível, obviamente, se possuirmos, nós próprios e enquanto professores, um conhecimento – em todas as dimensões – que nos permita fazê-lo).

Estes resultados preliminares (em termos das situações críticas identificadas) contribuem para a génese de uma primeira "base de dados", ainda que rudimentar, contendo situações que poderão servir de exemplo para discussão na Formação, tanto a nível das carências identificadas (de modo a que possam deixar de pertencer a esse domínio) como respeitante aos saberes instituídos de forma a contribuir para um maior enriquecimento e profícua discussão do MKT respeitante àqueles temas matemáticos específicos. Com a discussão dessas situações pretendemos possibilitar aos nossos estudantes (futuros professores) a oportunidade de reflectirem, enriquecerem o seu MKT e se tornarem críticos sobre o que fazem e vêem fazer, de modo ao reproduzirem o mesmo tipo de práticas centradas em si a que possam ter sido sujeitos e a ensinar como possam julgar terem eles próprios sido ensinados (na linha do que refere Lortie, 1975).

Referências

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Corno, L. (1988). The study of teaching for mathematics learning: views through two lenses. *Educational Psychologist, 23*(2), 181-202.

Departamento de Educação Básica (DEB). (1991). *Organização Curricular e Programas - Ensino Básico - 1.º Ciclo*. Lisboa: Ministério da Educação.

Departamento de Educação Básica (DEB). (1997). *Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar*. Lisboa: Ministério da Educação.

De1 Grande, J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic Teacher*, 37, 14-20.

Doyle, W. (1988). Work in mathematics classes: the context of students' thinking during instruction. *Educational Psychologist, 23*(2), 167-180.

Fujita, T., & Jones, K. (2006). *Primary trainee teachers' understanding of basic geometrical figures in Scotland.* Paper presented at the Conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education – Mathematics in the center, Charles University, Faculty of Education, Prague, Czech Republic.

Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematics knowledge for teaching on student achievement. *American Education Research Journal, 42*(2), 371-406.

Lortie, D. C. (1975). *Schoolteacher: a sociological study*. Chicago: The University of Chicago Press.

Mathematical Knowledge for Teaching Group (MKT) (2009). Mathematical task of teaching (work document). University of Michigan.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., et al. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação – DGIDC.

Ribeiro, C. M., Carrillo, J., & Monteiro, R. (2009). We teach what we know, but do we know what we teach? The practical "distinction" between squares and rectangles in a primary school class. In J. Novotná & H. Moraová (Eds.), *International Symposium Elementary Maths Teaching (SEMT 09)* (pp. 204-212). Prague, Czech Republic: Charles University, Faculty of Education.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15 (2)*, 4-14.

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A., & Silver, E. A. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction: a Casebook for Professional Development*. New York: Teachers College Press.

O PAPEL DO ERRO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS. A PRÁTICA DE UMA PROFESSORA DO 1º CICLO

Sandra Correia[*], C. Miguel Ribeiro*, José Carrillo*
EB2/3 D. Dinis (Quarteira); Universidade do Algarve, CIEO; Universidade de Huelva
sandra-gc@sapo.pt; carrillo@uhu.es; cmribeiro@ualg.pt

Resumo

Para se ser professor é preciso um conhecimento profissional que possibilite, entre outros, saber/conhecer os conteúdos que pretendemos ensinar e como o fazer, para que os alunos vão adquirindo/construindo o seu conhecimento e ultrapassando as suas dificuldades, assumindo nesse processo a resolução de problemas, em paralelo com a comunicação, um lugar de destaque. Nessa resolução de problemas, e no processo de construção dos distintos conteúdos, o papel atribuído ao erro pode assumir um lugar de destaque tanto nas aprendizagens "imediatas" dos alunos, como na forma como estes passam a encarar a matemática.

A partir de uma situação de resolução de um problema numa aula do 1.º Ciclo envolvendo o algoritmo da divisão iremos, nesta comunicação, discutir alguns aspectos relacionados com a exploração/papel do erro no processo de ensino e na(s) relação(ões) intrínsecas entre a(s) forma(s) como esse erro é explorado e o conhecimento matemático para ensinar que possui a professora Olívia acerca desse conteúdo concreto.

Palavras-chave: papel do erro; resolução de problemas; 1.º Ciclo.

Introdução

O conhecimento profissional que possuímos, enquanto professores, é um dos factores que rege a nossa actuação no processo de ensino. Este conhecimento poderá ser encarado sob distintas perspectivas (e.g. Azcarate (1999) e Ponte (1998)), considerando essas perspectivas uma diversidade de componentes do conhecimento envolvido no processo de ensino. Assumimos que uma maior compreensão desse conhecimento, por parte do professor, e um mais profícuo reflectir sobre o mesmo, podem promover, em última instância, a aprendizagem dos alunos e uma maior compreensão dos factores que a potenciam/condicionam, contribuindo para auxiliar a ultrapassar possíveis dificuldades dos alunos no seu processo de aprendizagem.

Assim, a nossa actuação, e conhecimento profissional associado, pode condicionar ou potenciar o tipo de aprendizagens que facultamos aos nossos alunos. De entre as

[*] Correia, Ribeiro e Carrillo são membros do Projecto "Conocimiento matemático para la enseñanza respecto a la resolución de problemas y el razonamiento" (EDU2009-09789), Dirección General de Investigación y Gestión del Plan Nacional de I+D+i. Ministerio de Ciencia e Innovación (Espanha).

distintas conceptualizações de conhecimento profissional, baseamos o nosso trabalho no marco desenvolvido por Ball, Thames e Phelps (2008): conhecimento matemático para o ensino (*Mathematical Knowledge for Teaching* – MKT) (Hill, Rowan & Ball, 2005). Este é o conhecimento matemático que cumpre aos professores possuírem para o exercício das suas funções. Com o intuito de obtermos uma maior compreensão sobre o papel e impacto desse MKT no processo de ensino desenvolvemos uma investigação subordinada ao estudo e à busca de elementos que permitam obter um perfil sobre esse conhecimento de professores de Andaluzia e Algarve.

Neste texto iremos abordar, em particular o MKT relativo à antecipação e supressão das dúvidas e dificuldades dos alunos, focando, em concreto, a prática de uma das professoras participantes (Olívia, professora do 4.º ano do 1.º Ciclo), numa situação de resolução de um problema (de divisão), em que os alunos revelam algumas dificuldades tanto na elaboração do plano como na posterior justificação e argumentação do raciocínio conducente à resposta apresentada.

Referências Teóricas

Diversos são os investigadores que assinalam diferentes domínios de conhecimento profissional que um professor de matemática deve possuir para exercer a sua profissão docente (e.g. Ball, Thames e Phelps (2008) e Rowland, Huckstep e Thwaites (2005)). De entre essas várias perspectivas, fundamentadas no trabalho de Shulman (1986), sobressai a ideia que o professor (de matemática) possui um conhecimento profissional que é específico para a sua actuação. Das diversas formas de conceptualizar o conhecimento profissional dos professores optámos pela apresentada pelo grupo de Ball (Ball et al., 2008). Nessa sua proposta, que se encontra ainda em elaboração, este grupo divide o conhecimento do conteúdo e o conhecimento didáctico do conteúdo (tal como o encara Shulman (1986)) em três componentes.

O *conhecimento comum do conteúdo* (*Common Content Knowledge – CCK*), refere-se ao conhecimento do conteúdo que possui qualquer indivíduo matematicamente escolarizado. Neste inclui-se simplesmente o saber calcular o resultado de uma operação ou, mais geralmente, resolver problemas de matemática correctamente ou identificar respostas incorrectas. Porém, para o exercício da profissão docente, esse tipo de conhecimento não é suficiente, cumprindo ao professor possuir também um conhecimento que lhe permita ensinar a fazer, conhecimento esse que está intrinsecamente relacionado com a necessidade de tornar o conteúdo perceptível aos alunos – C*onhecimento Especializado do Conteúdo* (*Specialized Content Knowledge* – SCK). Assim, por exemplo necessita possuir um conhecimento que facilmente permita perceber e identificar não apenas o erro – que qualquer indivíduo apto a efectuar o algoritmo o faz – mas, sobretudo, a sua fonte (saber porque está bem ou está mal).

Por sua vez, o *Conhecimento do Horizonte Matemático* (*Horizon Content Knowledge* – HCK) inclui o conhecimento que os professores devem possuir das relações existentes entre os distintos tópicos matemáticos e de que forma as aprendizagens de um mesmo tópico vão evoluindo ao longo da escolaridade.

Também o conhecimento didáctico do conteúdo é considerado sub-dividido em três domínios. O *conhecimento do conteúdo e do ensino* (*Knowledge of Content and Teaching* – KCT), é um conhecimento combinado sobre o ensino e o conteúdo – matemática. Este é um tipo de conhecimento que o professor utiliza na aula mesmo em situações que podem não ser consideradas especificamente de exploração de conteúdos, estando relacionadas com os mesmos (e.g. decidir a sequência das tarefas; com que exemplo iniciar, escolher apropriadamente as representações mais adequadas a cada situação; quando parar para mais clarificação; ouvir um aluno para dar uma opinião matemática). Cada uma destas tarefas requer uma interacção entre a compreensão do conteúdo específico e de como o ensinar.

No que se refere ao *conhecimento do conteúdo e dos alunos* (*Knowledge of Content and Students* – KCS), definem-no como um misto de conhecimento sobre matemática (conhecimento do conteúdo) e um conhecimento dos seus alunos. Foca-se no entendimento de como os alunos aprendem um determinado conteúdo e, relaciona-se com a necessidade de antecipar o que os alunos pensam, quais as suas dificuldades, facilidades e motivações.

O *conhecimento do conteúdo e do currículo* (*Knowledge of Content and Curriculum* – KCC) refere-se ao conhecimento das finalidades, objectivos, conteúdos, orientações curriculares, dos materiais e recursos disponíveis para o ensino, assim como formas diversificadas de avaliação – que o professor orienta a sua prática e selecciona as tarefas adequadas à aprendizagem.

Contexto e metodologia

Este texto é baseado numa investigação mais ampla onde se pretende desenvolver uma compreensão do MKT, subjacente na prática de duas professoras de Andaluzia e duas professoras do Algarve de modo a promover a aprendizagem durante a resolução de problemas. Procuramos, assim, extrair algumas conclusões sobre as necessidades formativas dos professores em relação à resolução de problemas, argumentação, raciocínio e comunicação matemática, a fim de se construírem instrumentos para práticas de formação inicial e contínua mais ricas e produtivas.

Considerando esta a finalidade, recorremos a um estudo de caso com uma metodologia de cariz interpretativo (Stake, 2000), tendo os dados sido recolhidos em dois momentos distintos (de resolução de problemas envolvendo o algoritmo da divisão e o perímetro de um polígono) através de gravações áudio e vídeo, centradas nas professoras, e de entrevistas semi-estruturadas antes e após cada uma das aulas. Com as entrevistas anteriores à aula pretendia-se aceder à imagem da lição (antecipação do que o professor considera que vai ocorrer) e com as posteriores obter a percepção da professora sobre o que tinha ocorrido.

Com base nas gravações e subsequentes transcrições, e com o intuito de identificar e analisar as dimensões do MKT, as aulas foram divididas em episódios tendo estes como denominador comum o tipo de objectivo que as professoras perseguiam.[1] Após a divisão em episódios identificaram-se as dimensões do MKT evidenciadas (seguindo Ball et al., 2008). Nas situações em que se verificavam algumas lacunas nestas, discutiu-se também, o conhecimento envolvido para que essas lacunas não ocorressem.

Aqui iremos discutir, em concreto, uma situação em que uma dessas professoras (Olívia) tem por intuito introduzir os graus de relação entre divisor e quociente, a partir da resolução de um problema:

> *Para arrumas melhor as suas laranjas D. Clementina vai comprar caixas [rectangulares] de 8, 16 e de 4. Com 144 laranjas, quantas caixas de cada um dos tipos vai precisar. Qual a relação que existe entre os divisores e os quocientes?"*

[1] Para mais informações sobre a divisão das aulas em episódios (e o processo de modelação da prática, associado) consultar, por exemplo, Ribeiro (2009).

Apresentação e análise dos resultados

De modo a facultar uma contextualização a partir de um trecho de um episódio (onde Olívia pretendia proceder à exploração da apresentação do método de resolução do problema de um grupo de trabalho) abordamos e discutimos os sub-domínios do MKT evidenciados e/ou em falta.

L		Transcrição
277	P	Em relação à 1.ª parte, fizeram assim (como os outros), ou de maneira diferente?
278	A	Fizemos de maneira diferente.
279	P	Como?
280		Qual foi a maneira?
281	A	Nós contámos as laranjas de cada caixa e descobrimos que são precisas 4 caixas…
282	P	(Interrompe o aluno) Fizeram conta? Não foi necessário fazer conta?
283		Como é que foi?
284	A	Não foi necessário fazer a conta, contámos.
285	P	Não foi necessário fazer conta.
286		Como é que contaram?
287	A	Contámos em cada caixa as laranjas, fomos sempre assim até descobrir…
288	P	(Interrompe o aluno) Por exemplo, na caixa de 4 laranjas, como fizeram?
289	A	Contámos … essa e contámos mais…
290	P	(interrompe o aluno) Faz lá um exemplo no quadro.
291		Desenha lá uma caixa com 4 laranjas.
292		(Aluno desenha uma caixa com 4 laranjas)
293	P	Por exemplo, nessa como é que tu chegaste?
294	A	Nós tínhamos mais, contamos uma de cada até chegar ao resultado.
295	P	E qual era o resultado?
296	A	144 laranjas.
297	P	Conseguiram ver quantas caixas é que precisavam?
298	A	Sim.
299	P	Então, escreve lá as respostas no quadro.
300	A	(Aluno escreve no quadro: *4 laranjas, caixas de 4 laranjas - 5 caixas*)
301	P	(P lê, a resposta do aluno) 4 laranjas, caixas de 4 laranjas são 5 caixas.
302		Tinha que arrumar as 144 laranjas em caixas de 4 laranjas, precisavas só
303		de 5 caixas?
304		Era?
305	A	Sim.
306	P	Então, quanto é 5x4=?
307	A	Nós pusemos…
308	P	Não te esqueças das laranjas, que ela tinha para arrumar, eram 144 laranjas.
309	P	Quantas eram?
310	A	144 laranjas.
311	P	A D. Clementina tem 144 laranjas para arrumar em caixas de 8 laranjas, em
312		caixas de 16 em caixas de 4 laranjas, e tu tens que descobrir o número de caixas.
313	P	Tu foste o único do grupo que não percebeu.
314		Alguém do grupo percebeu o problema?
315		Ou todos fizeram o problema como ele?
316	A	(Aluna do grupo) Não professora.
317		Nós fizemos como está no quadro.
318	P	Silêncio.
319	A	Depois tínhamos que encontrar a resposta, para sabermos aquelas caixas todas.

Nós fomos ver as caixas todas para as laranjas todas.
P Está bem.
Está bem, agora, percebeste como é?
A maneira como fizeste, se calhar, até podia dar certo, só que
começaste…
P Não é?
A Não.
P Então?
A Arrumámos as laranjas nas caixas, depois contamos as laranjas e as caixas, para ver as respostas.
P E então o que é que concluíram?
A Podemos concluir que o quociente pode aumentar o dobro ou o quádruplo
ou diminuir.
P Escreve lá no quadro a tua conclusão.
A (Aluno escreve no quadro: O quociente aumenta, que pode aumentar o
dobro ou o quádruplo, ou diminuir).
P OK, podes sentar-te.

Ilustração 1 – Transcrição relativa a uma situação de apresentação dos métodos de resolução de um problema à turma pelo porta-voz de um dos grupos (P – professora; A(s) – aluno(s))

Olívia, neste trecho de episódio, evidencia um KCT concretizado na apresentação pelo porta-voz dos seus métodos de resolução do problema à turma, deixando-os assumir um maior protagonismo na aprendizagem, considerando adequado um questionamento muito dirigido, sem solicitar grandes explicações e/ou não invocando o raciocínio do aluno de modo a clarificá-lo. Pese embora encoraje o porta-voz a explicitar as estratégias e raciocínios utilizados, não lhes proporciona efectivas oportunidades para que promovam uma tomada de consciência sobre as suas acções e desenvolvam a capacidade de resolução de problemas bem como de argumentação.

Revela um CCK ao reconhecer uma resposta incorrecta (301-303). A resposta fornecida mostra que a aluna apresenta dificuldades em compreender que ao adicionar cinco conjuntos com quatro laranjas nunca obtém 144 laranjas, e que uma soma de parcelas iguais (4 + 4 +… + 4 (36 vezes)) se pode transformar num produto de dois factores (36x4) – o que permitiria responder à questão recorrendo à operação inversa. Apresenta também dificuldade aquando da enunciação da relação entre divisor e quociente, referindo as duas hipóteses para o quociente (aumentar ou diminuir), mas não efectuando qualquer relação entre o divisor e o quociente (330-336).

Ao ouvir a resposta incorrecta, Olívia adopta uma postura não correctiva, mas interrogativa (304-312) (não lhe facultando, no entanto, tempo para responder) perguntas essas que não permitiram explorar o raciocínio da aluna nem potenciaram que a mesma parasse para reflectir sobre as suas ideias, colocando para esse efeito algumas questões que levasse o(s) aluno (s) a questionar-se onde estava o erro, e por quê, assim como porque é que a resposta do grupo estava diferente dos restantes grupos.

Apesar de reconhecer que as respostas ao problema estão incorrectas, Olívia não revela outros um MKT que lhe permita tornar os significados matemáticos compreensíveis aos seus alunos. Para colmatar essas dificuldades poderia ter recorrido a um KCT subjacente à validação pelos alunos para desenvolver os significados matemáticos que se estavam a trabalhar, possibilitando o acesso do aluno e dos seus colegas a um significado construído socialmente. Isso poderia ter sido alcançado se tivesse ajudado os alunos a defender as suas ideias quanto ao método de resolução do problema problematizando as respostas erradas, de forma a transformá-las numa situação de aprendizagem, colocando para esse efeito algumas questões genuínas ou provocatórias (Ainley, 1988) que o(s) levasse(m) a questionar-se onde estava o erro, e por quê, assim como porque é que a resposta do grupo estava diferente da dos restantes grupos. A colocação de questões mobilizadoras do raciocínio, que permitam desmontar mal entendidos, provar afirmações, progredir na compreensão dos conceitos é uma tarefa que exige um rico MKT e uma consciência muito clara do que se deseja que os seus alunos aprendam.

O exemplo anterior (erro da aluna), leva-nos a considerar outras nuances pertinentes. Ao professor cumpre ser capaz de medir o erro matemático questionando-se que linha de pensamento o poderá ter originado; que passos foram dados, ou que suposições fizeram os alunos. As respostas a este tipo de indagações, bem como os processos alternativos de apresentação /resolução dos conteúdos (para que, sem dificuldade, se possa colmatar as lacunas dos alunos), requerem um conhecimento matemático que são cruciais e exclusivas para a função de ensinar.

Por outro lado, ao perceber as dificuldades dos alunos em entender a relação entre a adição, multiplicação, divisão e entre divisores e quocientes, procurando generalizar propriedades num determinado conjunto de dados (332-333), Olívia exterioriza carências em termos de KCS pois não interpreta as respostas/raciocínios dos alunos e, subsequentemente, o(s) seu(s) pensamento(s), de modo a antecipar as suas dificuldades, que se encontra também, necessariamente relacionado como facto de não revelar um SCK relativa ao mesmo tema (poderá indiciar uma carência).

Após as apresentações de todos os grupos de trabalho, Olívia organiza uma discussão final em grande grupo para analisar/comparar os resultados de todos os grupos e avançar para a reelaboração dos conteúdos no sentido da sua institucionalização, revelando assumir a participação matemática dos alunos, ao nível da sua argumentação na construção de significados (Rojas, 2009) como uma estratégia de clarificação sobre as relações entre os divisores e os quocientes.

Algumas notas finais e implicações

A identificação dos domínios do MKT, ou das carências evidenciadas, deve ser encarada como uma forma de obtenção de um nível mais profundo em relação ao conhecimento matemático envolvido no processo de ensino. Cada uma destas evidencias devem ser, portanto, encaradas, como uma fonte de reflexão e crítica sobre o nosso próprio MKT, e não no sentido de avaliar a professora analisada, ou a sua prática.

A análise do trecho deste episódio evidencia algumas dimensões de subdomínios de MKT de uma professora do 1º Ciclo durante a exploração das dificuldades dos alunos, na resolução de um problema que se focava, em concreta em permitir alcançar uma compreensão entre as relações entre os diferentes algoritmos (adições sucessivas, multiplicação e divisão) e ao generalizar as propriedades num determinado conjunto de dados. Embora se detectem momentos em que há uma preocupação por parte de Olívia em ajudar os alunos na institucionalização dos conceitos, estes sentiram dificuldades no que se prende com o saber que a multiplicação é uma simplificação da adição sucessiva de parcelas iguais, assim como da divisão ser a operação inversa da multiplicação e nas relações entre os divisores e os quocientes. Estas dificuldades persistiram devido ao facto da professora não solicitar grandes explicações (através de questões), não abordar explicitamente a ideia do erro nas contribuições dos alunos, e não potenciar que estes "parassem para reflectir" sobre as suas ideias nem que desenvolvessem estratégias de auto-correcção das mesmas. Este facto faz-nos reflectir que pelas dificuldades demonstradas pelos alunos e subsequentes conhecimentos revelados pela professora, torna-se evidente que, no decurso da prática não basta possuir apenas um conhecimento do conteúdo e do ensino relacionado com a selecção de tarefas e apresentação pelo porta-voz dos seus métodos de resolução à turma, é preciso possuir também um conhecimento (restantes dimensões do MKT) que permita promover efectivas oportunidades de aprender de modo a explorar o erro como fonte de aprendizagens.

Para que a mediação entre a selecção das tarefas, sua implementação e exploração construtiva do erro seja bem sucedida, é capital que o professor seja portador de um MKT que facilite a criação de um ambiente de trabalho estimulante, onde o estabelecimento de uma adequada comunicação e negociação de significados é um aspecto fundamental ao serviço da construção de saberes pelos alunos.

Em síntese, os resultados mostram que, de um modo geral, a complexidade das situações em que se desenvolve o processo de ensino/aprendizagem é condicionado ou potenciado também pelo MKT do professor e pela forma como o utiliza na/para a sua actividade profissional.

Referências

Azcarate, P. (1999a). El conocimiento profesional: naturaleza, fuentes, organización y desarrollo. *Quadrante, 8*, 111-138.

Ball, D., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Estepa, J. (2000). El conocimiento professional de los profesores de Ciencias Sociales. In J. Pagés, J. Estepa & G. Travé (Eds.), *Modelos, contenidos y experiencias en la formación profesional del profesorado de Ciencias Sociales*. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Ponte, J. P. (1998). Da formação ao desenvolvimento profissional. In APM (Ed.), *Actas do ProfMat 98* (pp. 27-44). Lisboa: APM.

Ribeiro, C. M. (2009). Possíveis contributos da elaboração de um modelo da prática lectiva para a formação de professores. *X Congresso da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação*. Bragança: Série Estudos do Instituto Politécnico de Bragança.

Rojas, F. (2009). Participación en el aula de matemáticas: indicadores discursivos para caracterizar su gestión. Treball de Recerca, Tesis Doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona (UAB), Barcelona

Rowland, T., Thwaites, A., & Huckstep, P. (2003, September 2003). *Novices' choice of examples in the teaching of elementary mathematics.* Paper presented at the The Mathematics Education into the 21st Century Project, Proceedings of the International Conference,The Decidable and the Undecidable in Mathematics Education, Brno, Czech Republic.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15 (2)*, 4-14.

Stake, R. E. (2000). Qualitative case studies. In N. K. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 435-454). Thousand Oaks: Sage.

A IMPORTÂNCIA DA AFECTIVIDADE NA APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

Sandra Correia, C. Miguel Ribeiro
EB2/3 D. Dinis (Quarteira); Universidade do Algarve, CIEO
sandra-gc@sapo.pt; cmribeiro@ualg.pt

Resumo

O professor pode desempenhar um papel crucial no processo de ensino aprendizagem da Matemática e deve, de acordo com o currículo, promover atitudes positivas dos alunos em relação à Matemática podendo, para isso, ter de alterar representações sociais que os alunos têm desta disciplina. Assim, no processo educativo, o professor deve assumir um duplo papel, tanto de natureza intelectual como de natureza afectiva.

Tomando esses pressupostos como ponto de partida elaborámos um pequeno estudo que tinha, por intuito conhecer e analisar as representações sociais e as reacções de alunos, do 6.º ano de escolaridade, aquando da resolução de um problema envolvendo volumes e com os alunos englobados numa equipa cooperativa. Neste texto, e partindo dessas representações sociais e resoluções, iremos discutir e reflectir sobre como os aspectos afectivos podem desempenhar um papel primordial no sucesso escolar dos alunos e, consequentemente na aprendizagem da Matemática**.**

Palavras-chave: afectividade, representações sociais, emoções, aprendizagem, matemática.

Introdução

A investigação em Educação Matemática tem estado principalmente centrada nos aspectos cognitivos, deixando um pouco de lado os aspectos afectivos. Em grande parte, possivelmente isto se deva ao popular mito de que as Matemáticas são algo puramente intelectual, onde o comportamento relativo às emoções não tem um papel essencial.

Actualmente, após inúmeros estudos, sabe-se que a aprendizagem é facilitada quando o indivíduo trabalha com prazer e quando os seus esforços são alcançados com êxito. Isto significa que o êxito escolar depende tanto dos aspectos intelectuais como dos afectivos. Por essa razão, torna-se fundamental aprender a gerir, adequadamente as emoções dos alunos. Assim, no processo educativo, o papel do professor, deve ser de natureza intelectual e de natureza afectiva, cumprindo-lhe, nesse sentido, motivar também os alunos para que sintam prazer em estar nas aulas e aprendam mais, aumentando a sua auto-confiança e auto-estima.

Neste texto iremos apresentar, discutir e reflectir sobre as representações sociais que possuem duas alunas de uma turma do 6.º ano face à matemática, sendo essa apresentação, discussão e reflexão efectuada associada à resolução de um problema sobre o volume do cilindro. Focaremos quais as suas reacções perante a actividade, nomeadamente o seu processo de resolução e o tipo de emoções que experimentam durante a tarefa.

A Dimensão afectiva na Educação Matemática

O novo Programa do Ensino Básico (Ponte et al., 2007) defende a necessidade de criar atitudes mais positivas dos alunos em relação à disciplina de Matemática, sendo as capacidades transversais (resolução de problemas, raciocínio e comunicação matemática) normas do processo para darem "ênfase às maneiras de adquirir e utilizar os conhecimentos sobre os conteúdos" (NCTM, 2000, p. 29).

Diversos investigadores (e.g. Gomez-Chacón, 1997; Mandler, 1984) manifestam que os afectos dos alunos são factores chaves do seu comportamento e compreensão da Matemática. Por exemplo, Mandler (1984) refere que existem três factores principais relacionados à afectividade que devem ser aprofundados e discutidos na educação matemática: as crenças que os alunos possuem sobre a matemática; as *emoções* que ocasionam perturbações e bloqueios fazendo com que os alunos experimentem sentimentos positivos e negativos ao aprender matemática e, finalmente, as *atitudes* desenvolvidas pelos alunos diante da disciplina.

A experiência do aluno ao aprender Matemática provoca distintas reacções e influi na formação das suas crenças. Por outro lado, as crenças[1] que o aluno sustém têm uma consequência directa no seu comportamento em situações de aprendizagem e na sua capacidade de aprender. O estudante ao aprender Matemática recebe contínuos estímulos associados com a Matemática (e.g. problemas, actuações do professor, mensagens sociais) que geram certa tensão. Perante esses estímulos reacciona emocionalmente de forma positiva ou negativa. Esta reacção está condicionada pelas crenças que possui sobre si mesmo e sobre a Matemática. Se o aluno se encontra com situações similares repetidamente, produz-se a mesma classe de reacções afectivas, então a activação da reacção emocional (satisfação, frustração,…) pode ser

[1] McLeod, 1992, refere três tipos de crenças: as crenças dos alunos sobre a Educação matemática, as crenças dos alunos sobre si mesmos e as crenças dos alunos sobre o seu contexto específico da turma.

automatizada, e estas solidificam-se em atitudes. Estas atitudes e emoções a influem nas crenças e colaboram na sua formação (Gomez-Chacón, 1997).

Com a teoria de Vygotsky (1962, 1978), o conhecimento passou a ser concebido de uma outra forma. Os alunos têm de dar significado ao conhecimento que vão apropriar, ou seja, o conhecimento passou a ser visto como social, antes de se tornar pessoal (Wertsch, 1991). Assim, as representações sociais[2] passam a ter um papel de relevo no processo de apropriação de conhecimentos, bem como na mobilização e desenvolvimento de competências (César, 2000). E se a representação social é preparação para a acção (Benavente, 1999), também a representação social que os alunos têm da Matemática influenciará os desempenhos nesta disciplina.

Quando os alunos chegam à escola, já trazem uma representação social da Matemática, que pode vir a ser alterada pelas práticas de sala de aula, ou por outros elementos, uma vez que as representações sociais são dinâmicas e os alunos ainda se encontram numa fase onde a sua forma de pensar pode ainda sofrer profundas alterações (Piscarreta, 2002), cumprindo-nos, a nós, professores, levar a que essas representações sociais sejam de índole positiva e associadas a um rico e amplo conhecimento do meio que os rodeia e da matemática imbuída neste.

Uma forma de colmatar algumas dificuldades que possam surgir neste processo é a valorização da interacções sociais entre os alunos e entre estes e os professores (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999) que, tal como César (2000) refere, facilitam o processo de apropriação de conhecimentos, tornando-o mais rápido e eficiente, motiva os alunos, ajuda-os a ter atitudes mais positivas face à Matemática e maior autonomia, levando-os a alcançar um maior sucesso escolar nesta disciplina. Assim, o papel do professor torna-se crucial e as práticas de sala de aula contribuem significativamente para que os alunos construam atitudes positivas face à Matemática (César, 2000).

Em termos de atitudes, Morissette e Gingras (1999, p. 53), assume-as como "*uma disposição interior da pessoa que se traduz em reacções emotivas moderadas que são assimiladas e, depois experimentadas sempre que a pessoa é posta perante um objecto (ideia ou actividade). Estas reacções positivas levam-na a aproximar-se desse objecto*

[2] Moscovici (2000) define-as como: "um sistema de valores, ideias e práticas que desempenham uma dupla função: primeiro, estabelecer uma ordem que irá permitir aos indivíduos orientarem-se eles próprios no seu mundo material e social e governá-lo; e em segundo proporcionar que a comunicação exista entre os membros de uma comunidade fornecendo-lhes um código para permuta social e um código para nomear e classificar claramente os vários aspectos do seu mundo e a sua história individual e do grupo." (p. 12)

(a ser favorável) ou a afastar-se dele (a ser desfavorável)". Assim, o termo atitude significa a disposição natural (positiva ou negativa) para realizar determinadas tarefas. As atitudes dos alunos para a Matemática põem de manifesto a forma como se envolvem nas tarefas (seja com confiança, desejo de explorar caminhos alternativos, perseverança ou interesse) e a tendência que demonstram ao reflectir as suas próprias ideias (Gómez-Chacón, 2000),

O terceiro factor relacionado com a afectividade refere-se às emoções e podem ter, também, grande influência na aprendizagem e no rendimento. Umas são claramente favoráveis à aprendizagem (sensações de divertimento e prazer, mistério curiosidade, experiências de conforto, o sentido de desafio e persistência), e outras são-lhe desfavoráveis (a incerteza prolongada, a falta de auto-confiança, a resignação, o medo e a confusão persistentes, insatisfação, níveis altos de ansiedade, o aborrecimento)

Assim, coloca-se a questão de saber o que faz (causas) com que os alunos sintam emoções favoráveis e desfavoráveis. Quando um aluno realiza uma actividade, geram-se emoções positivas agradáveis que vão criando confiança, motivação e vontade de persistir em direcção à meta, ou o contrário, emoções desagradáveis que geram a desmotivação e a frustração. O tipo de emoção (e de facilidade ou dificuldade) que um aluno experimenta na realização de uma tarefa pode ser determinado pelas características da própria tarefa, pelo conteúdo da mesma ou dever-se ao momento concreto em que a tenta resolver (Agre, 1982). Vygotsky (1978) refere que para o aluno estar motivado para aprender é necessária a existência de uma distância óptima entre o que o aluno já sabe e o novo conteúdo de aprendizagem.

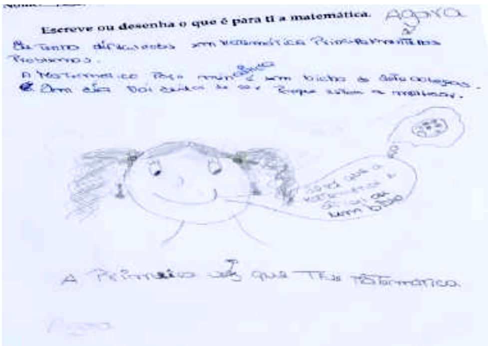
O contexto

Na tentativa de conhecer e analisar as crenças dos alunos de uma turma do 6.º ano elaborou-se um questionário: " O que penso da Matemática". Com a sua apresentação pretendeu-se facilitar a expressão de sentimentos, valores, motivos e crenças, ou seja, que os alunos projectassem no papel traços da sua personalidade.

Aqui referir-nos-emos, somente às representações sociais de duas alunas em extremos distantes em termos de sucesso na disciplina (Marta e Tatiana) de modo a ilustrar algumas relações entre estes resultados académicos e as reacções emocionais que possuem face à matemática, em concreto, na resolução de um problema envolvendo volumes. Marta tem 11 anos e tem nível 3, enquanto Tatiana tem 13 anos, é a segunda vez que repete o sexto ano e tem tido sempre avaliações negativas a matemática.

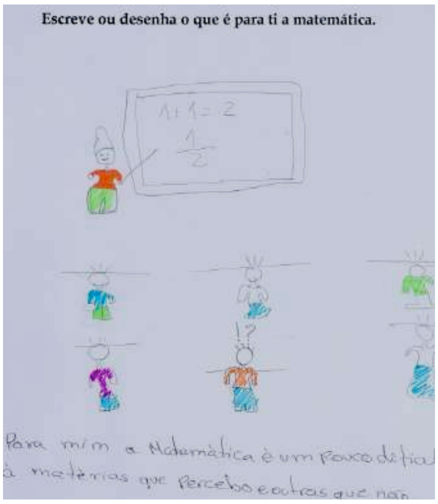
O que penso da Matemática

Marta: A aluna desenhou-se interrogando-se se *a Matemática será difícil ou será um bicho-de-sete-cabeças*, referindo que, com o tempo, tem esperança que assim deixe de ser *pois está a melhorar.*



Revela, assim, encarar a Matemática como uma disciplina difícil, mas que é, ao mesmo tempo, um desafio (*...mas um dia vai deixar de ser...).* Por outro lado, esta afirmação também leva a assumir que a Marta gosta "alguma coisa" de Matemática, revelando uma auto-estima académica positiva. Salienta-se ainda que a expressão facial da boneca revela que está alegre, entusiasmada, o que revela que *os alunos* quando *percebem* a Matemática, pensam que o bicho não é assim tão mau. Apesar de tudo, Marta possui, assim, uma representação social positiva face à Matemática.

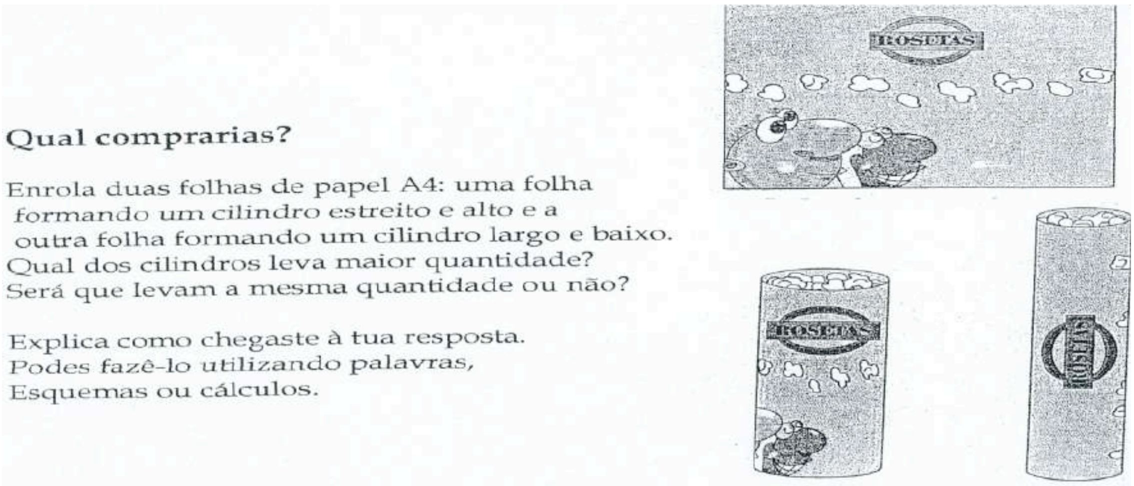
Tatiana: O desenho feito pela Tatiana (aluna que demonstra mais dificuldades e menos conhecimentos na disciplina de Matemática) é muito expressivo e revelador dos seus sentimentos negativos. Representa os alunos nas carteiras viradas para o quadro a



aprender o que o professor *ensina*, retratando uma aula expositiva, o que revela uma associação em Matemática de cálculo e memorização, uma visão tradicional da Matemática, em que o professor parece estar a cumprir aquilo em que acredita (provavelmente o tipo de experiências que tem vivenciado). É clara a insegurança que sente face à Matemática, expressando-a através do desenho dos alunos com os cabelos em pé, ou com dúvidas (ponto de interrogação) sinal que ela própria tem medo da matemática e pensa que, esta é complicada, confusa e difícil. Tatiana revela, assim, possuir uma representação social negativa face à Matemática.

A tarefa apresentada e processos de resolução

Após o registo das suas representações face à matemática, os alunos foram confrontados com um problema onde teriam de decidir qual das embalagens de pipocas comprariam (entre duas possíveis) de modo a maximizar o volume.



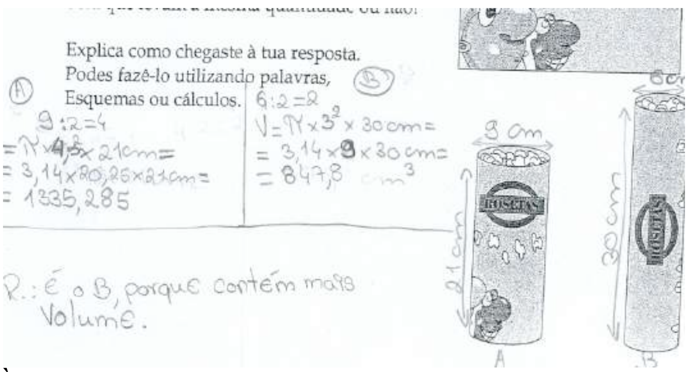
Apresentamos o processo de resolução dos alunos, focando as suas reacções perante a actividade e o tipo de emoções que experimentam durante a tarefa. O problema apresentado pretendeu contribuir para o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas, proporcionar conexões entre ideias matemáticas de diferentes temas de matemática e aprofundar o conceito de volume e formas de o determinar. Os alunos tinham que combinar conhecimentos que já possuíam e usá-los na busca da solução do problema. Esta tarefa simultaneamente favoreceu a participação dos alunos numa situação relevante, baseada na experimentação e na manipulação para a qual não possuem um processo de resolução imediato, mas que considerem como um desafio e desenvolve a capacidade de raciocínio, de comunicação e capacidade de resolver problemas.

A tarefa foi resolvida em grupos de 3 ou 4 elementos por considera-se que o trabalho de grupo possibilita aos alunos mais motivação, autonomia, pois são eles que assumem o papel de mediador do processo educativo e possibilita-lhes que considerem que a aprendizagem é algo que se pode controlar por eles mesmos, tornando-se elas mais significativas. Para a concretização da tarefa, os alunos possuíam, para além do enunciado do problema, duas folhas A4, fita-cola e calculadora.

Os alunos começaram por se apropriarem da tarefa proposta, com entusiasmo e curiosidade e, assim que compreenderam o problema todos os grupos reconheceram, com facilidade, que tinham de calcular o volume dos cilindros, para saber qual deles levava maior quantidade de pipocas. A sua primeira reacção foi registar a fórmula do volume do cilindro na ficha de trabalho, sem se darem conta (sem qualquer preocupação) que tinham de efectuar medições para a resolução do problema.

Seguiu-se uma fase de experimentação com o enrolar as folhas, formando os diferentes cilindros, ainda sem estarem a pensar numa estratégia em concreto. Nesse momento, alguns dos grupos revelaram alguma incompreensão, quando verificaram que o problema não lhes fornecia dados, e como modo de tentar ultrapassar essas dificuldades, retomaram o que tinham escrito (a fórmula do volume do cilindro) e verificaram que tinham que efectuar as medições, respectivas à altura do cilindro e ao raio do círculo, uma vez que o problema não lhes fornecia esses dados.

Através da experimentação com as folhas A4 verificaram que a largura da folha, correspondia à altura do cilindro e efectuaram a respectiva medição, com a folha desdobrada. Nesse momento, a maior parte dos grupos constata que para poderem calcular o volume dos dois cilindros faltava-lhes a medida do raio do círculo e que para isso tinham de formar os dois cilindros – um estreito e alto e outro largo e baixo, com o auxílio da fita-cola, para descobrirem a medida do diâmetro e posteriormente a medida do raio.[3] Após a formação dos cilindros, alguns grupos de trabalho, tentaram desenhar no caderno os círculos, para posteriormente medirem o diâmetro, mas não era fácil, em virtude da folha se dobrar. Por esse motivo decidiram medir o diâmetro directamente a partir dos cilindros construídos. A partir do momento que descobriram, todos os dados do problema, calcularam com facilidade o volume dos cilindros e descobriram a solução do problema.



Pode-se ver através da produção de trabalho da aluna Marta, que este grupo, foi registando as medidas da altura e diâmetro na figura, e não teve dificuldade no cálculo do raio.

À excepção de um grupo, que se enganou no cálculo do raio ao quadrado (em vez de

---

[3] Nenhum dos grupos relacionou o comprimento da folha com o perímetro do círculo, o que permitiria a descoberta da medida do diâmetro, através do quociente entre o perímetro e o valor do *pi* e subsequentemente do valor do raio.

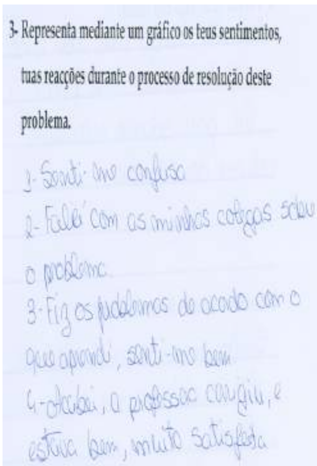
multiplicar a base duas vezes, adicionou-a), todos os grupos conseguiram descobrir, com facilidade, a solução ao problema.

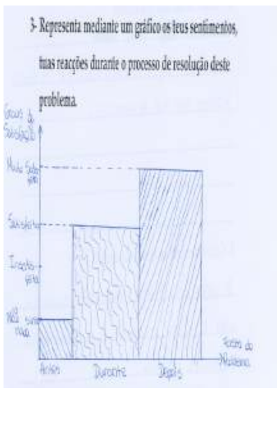
Reacções/sentimentos dos alunos durante o processo de resolução do problema

Quando os alunos se encontram perante um problema de matemática, geram-se determinadas reacções emocionais e, nesse sentido foi solicitado a todos os grupos, após terminarem a tarefa que representassem mediante um gráfico os seus sentimentos, reacções durante o processo de resolução deste problema.

As representações dos alunos revelam que, ao associar a resolução de problemas a um trabalho de grupo gerou-se um processo afectivo e social de interacções que deram lugar a aprendizagens matemáticas únicas e efectivas, tal como o expressa a aluna Tatiana "*Eu gostei muito da aula de Matemática, não gosto de fazer os exercícios sozinha, gosto mais de fazer em grupo para partilharmos as dúvidas ou juntar o que pensamos uns com os outros*. *Assim é bem melhor*" e a aluna Marta "*Eu gostei muito da aula de Matemática, porque é muito engraçado o trabalho de grupo e porque o problema era muito difícil e foi um grande desafio para todos".*

As respostas das alunas revelam um assumir do trabalho de grupo na aula de matemática como um contexto rico, motivador e desafiador de aprendizagem ao longo da resolução de problemas. A Marta menciona que comecou por se sentir confusa - emoção negativa (quando sente que bloqueou), mas depois falou com os colegas (reflectiu e analisou o problema) e gerou-se um processo afectivo e social de interacções no grupo, que possibilitou a resolução de uma estratégia que permitiu a resolução do problema e fê-la sentir bem – emoção positiva (quando sente que progrediu). Desta forma, os alunos podem aprender que a satisfação/alegria que lhes produz a descoberta de uma solução não deve procurar o desinvestimento no trabalho e, nessa situação, é importante continuar sempre com a tarefa. Nesta perspectiva construtivista, a aprendizagem efectiva é uma actividade de resolução de problemas. Como se observa, através das respostas e do gráfico da Marta, os alunos ao conseguirem encontrar a solução ao problema, as reacções emocionais, que





manifestam são a satisfação, interesse, entusiasmo. Se os alunos tiverem a oportunidade de experimentar várias vezes este tipo de emoções, permitir-lhes-á acreditar na sua capacidade intelectual em relação às tarefas matemáticas e reconhecerão os seus esforços úteis. Por outro lado, reforçarão as suas crenças, relativamente à actividade matemática, e possibilitará melhores atitudes (positivas) que vão interferir e determinar a qualidade das aprendizagens. Ou seja, a ideia que os alunos tem acerca de si mesmos relativamente à resolução de problemas a matemática vai moldar os seus comportamentos na disciplina de matemática.

Reflexões finais

É possível melhorar o envolvimento emocional dos alunos na aprendizagem da Matemática (e consequentemente o seu conhecimento matemático) produzindo práticas mais apelativas, inovadoras e eficazes que, a médio longo prazo, podem desempenhar um papel crucial no sucesso académico dos alunos e na alteração ou formação de representações sociais positivas em relação à Matemática. Deste modo, as práticas de sala de aula podem proporcionar um maior envolvimento e consequentemente uma maior motivação dos alunos nas tarefas propostas, seja através de actividades de exploração, seja a partir de resolução de problemas realizadas em grupo. Em suma, determinadas experiências de aulas vão constituir uma excelente oportunidade para estimular o raciocínio e para introduzir ou consolidar conceitos matemáticos e vão contribuir no desenvolvimento de afectos como veículo de conhecimento matemático. A ideia não é nova: ”aprender com a cabeça, o coração e as mãos”.

Concordamos com o autor, (César, 2000) que defende que a inteligência constrói-se, pelo que as nossas capacidades não estão definidas à partida, sendo assim encarada como algo dinâmico e plástico e, portanto, que se desenvolve.

Tentar conhecer antes de agir talvez seja o ponto de partida para se conseguir alterar, ou pelo menos suavizar, a visão negativa que muitos alunos adoptaram da disciplina de Matemática. Assim, propor uma tarefa onde os alunos têm a oportunidade de expressar as suas representações sociais relativamente à Matemática, sem que tal seja avaliado, constitui uma técnica que nos parece contribuir para uma reflexão sobre a prática docente e permitir actuar de forma diferenciada com os alunos que possuem uma maior ou menor apetência (inicial) para a disciplina.

Referências

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A matemática na educação básica.* Lisboa: Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica.

Agre, G. P. (1982). The concept of problem. *Educational studies in mathematics, 13*, 121-142.

Benavente, A. (1999). *Escola, professoras e processos de mudança*. Lisboa: Livros Horizonte.

César, M. (2000). Interagir para aprender: a escola inclusiva e as práticas pedagógicas em matemática. *Actas de ProfMat 2000* (pp. 145-158). Funchal: APM.

Gómez-Chacón, I. M. (1997). La alfabetización emocional en educación matemática: actitudes, emociones y creencias. *Revista de Didáctica de las Matemáticas, UNO*, 13, 7-22.

Gómez-Chacón, I. M. (2000). Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático. Madrid: Narcea.

Morissete, D., & Gingras, N. (1999). *Como ensinar atitudes: Planificar, intervir, valorizar* (2ª ed.). Lisboa: Edições ASA.

Moscovici, S. (2000). *Social representations: Explorations in social psychology.* Oxford: Polity Press.

NCTM. (2000). *Principles and standards for school Mathematics.* Reston: NCTM.

Piscarreta, S. (2002). Malmequer, bem-me-quer, muito, pouco ou nada: representações sociais da matemática em alunos do 9º ano de escolaridade. Lisboa: APM.

Vygotsky, L. S. (1962). *Thought and language.* Cambridge MA: MIT Press. [Original publicado em Russo, em 1934]

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind and society: the development of higher psychological processes.* Cambridge MA: Harvard University Press. [Original publicado em Russo, em 1932]

Wertsch, J. (1991). *Voices of mind: A sociocultural approach to mediated action*. Londres: Harvester Wheatsheaf.

QUE CONHECIMENTO MATEMÁTICO SERÁ SUFICIENTE PARA ENSINAR RECOLHA, ORGANIZAÇÃO E TRATAMENTO DE DADOS?

C. Miguel Ribeiro, Fernando Martins[1]
Universidade do Algarve, CIEO; ESE do Instituto Politécnico de Coimbra
cmribeiro@ualg.pt; fmlmartins@esec.pt.

Resumo

Por ser um tema "novo" que aparece, agora, de forma explícita no novo Programa de Matemática do Ensino Básico, e que não tem sido foco de muita atenção na formação de professores, o tema de Organização e tratamento de dados é um dos que pode oferecer algumas dificuldades à persecução de objectivos associados à filosofia da implementação do próprio Programa.

Para ser professor de matemática necessitamos mais do que apenas saber identificar erros e reproduzir procedimentos, cumprindo-nos possuir também um conhecimento relativo a saber ensinar a fazer/compreender. Esse tipo de *saber* é específico da profissão docente e exige um conhecimento muito próprio dos temas que se abordam. Assim, não nos é suficiente possuir um conhecimento apenas na óptica de utilizador, mas um conhecimento em sentido mais lato, envolvendo os conceitos, relações entre estes e distintas formas de os abordar e representar.

Este conhecimento matemático *suficiente* para o ensino vai sendo adquirido, também, à medida que somos confrontados com perspectivas distintas de abordar um mesmo conteúdo. Com o intuito de abordar esse conhecimento específico do professor, nesta sessão prática iremos consumar uma sequência de tarefas relacionadas com a recolha de dados, selecção da "melhor" forma de registo, organização e interpretação da informação recolhida, bem como a especificidade das questões, e a forma de as efectuar, de modo a promover uma efectiva compreensão dos alunos sobre o tema de Otd.

Palavras-chave: Conhecimento Matemático para Ensinar Otd; Especificidade das Questões; Recolha, Organização e Tratamento de Dados.

O novo programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al., 2007) introduziu diversas alterações face ao que se encontrava explícito nos documentos oficiais em vigor até então. Uma dessas alterações prende-se com o facto de tornar explícito o tema de Organização e tratamento de dados (Otd) – o que não acontecia até então, apesar de, de forma implícita podermos encontrar referência a diversas das suas componentes.

De uma forma muito resumida, pode dizer-se que é pretensão que os conteúdos sejam abordados evolutivamente, não sendo o tema de Otd excepção. Essa evolução de conceitos possui uma ideia central: desenvolver nos alunos a capacidade de recolher, organizar, tratar e interpretar dados a fim de resolver problemas do quotidiano. Também

[1]Membro do Instituto de Telecomunicações, Pólo de Coimbra, Delegação da Covilhã

pelo facto de ser um tema "novo" para os professores, e por possuirmos responsabilidades na sua Formação, levantou-se-nos a questão: Q*ue conhecimento matemático será suficiente para ensinar recolha, organização e tratamentos de dados?*

A resposta a esta questão pode parecer simples, mas não é. Para ensinar não é suficiente saber apenas o conteúdo (é necessário saber mais, e de maneiras distintas, do que o que se ensina). Não é também suficiente saber/conhecer um conjunto de estratégias que permitam manter os alunos ocupados e em silêncio, ou seja, estratégias sobre como ensinar.

Encaramos, assim, o conhecimento profissional do professor como algo complexo e em que estão envolvidas uma panóplia de dimensões, sendo possível diversos ramos de observação. Vemo-lo de forma integrada, mas que pode ser "dividido" em diversas dimensões que, por serem específicas da profissão docente, formam o que Hill, Rowan e Ball (2005) denominam de *Mathematical Knowledge for Teaching*, sendo essa divisão em componentes parte da conceptualização desse tipo de conhecimento elaborada por Ball, Thames e Phelps (2008). Assumimos, portanto, que para além de termos de saber os conteúdos para nós próprios (na perspectiva de saber fazer), temos também de possuir um conhecimento desse conteúdo que nos permita ensinar a fazer (necessitamos saber mais do que apenas dizer se está correcto ou não, é necessário saber o porquê – saber ensinar a fazer). Por outro lado, como professores devemos ter também um conhecimento de como os diversos conteúdos evoluem ao longo da escolaridade (não apenas no nível/ciclo de ensino que leccionamos) de modo a possibilitar facultar aos alunos um conjunto rico de experiências e vivências que lhes permitam irem construindo o seu conhecimento não apenas por sobreposição mas fundamentalmente por integração e adequação.

As tarefas que apresentamos foram concebidas com o intuito de permitirem discutir que tipo de conhecimento será suficiente o professor possuir para levar a bom porto, e com efectiva compreensão por parte dos alunos, uma abordagem a alguns aspectos do tema de Otd. Temos a obrigação, também como professores, de incentivar os alunos a cuidar e proteger o meio ambiente, podendo essa temática ser abordada conjuntamente com a Matemática, em particular, o tema da reciclagem e Otd. Focando o tema da reciclagem, e de modo a desenvolver/promover, também, a capacidade de tomar e justificar as diversas opções/decisões, sob a orientação do professor, devem ser os alunos a planear a recolha dos dados que considerem necessários à obtenção de resposta às questões iniciais, permitindo esses dados, e o seu tratamento, abordar uma panóplia de questões relacionadas com o tema de Otd (independentemente do nível etário/ano de escolaridade dos alunos).

Assim, é pertinente discutir com os alunos a elaboração de algumas questões relacionadas com o tema que se pretende abordar (conjuntamente a reciclagem e Otd), auxiliando-os na construção de um questionário que permita efectuar a recolha de dados úteis[2]. Este auxílio implica que sejamos conhecedores dos aspectos diferenciadores entre efectuar um censo ou uma sondagem, pois dependendo do tipo de estudo a efectuar dependerá o tipo de exploração que poderá ser posteriormente efectuada.

Após a obtenção das respostas a esse questionário, e para uma profícua exploração com os alunos de algumas das dimensões de Otd, com verdadeira compreensão, é importante possuirmos um conhecimento sobre distintas formas de organizar a informação e as implicações que cada uma delas poderão ter na forma como os alunos encaram esta temática (qual a forma mais adequada de apresentar/registar a informação recolhida?; para que dados?; para quem?; em que fase do processo?; em que fase da formação dos alunos?; a ordem pela qual as respostas são apresentadas é importante ou não?; até que ponto se devem associar as respostas obtidas no grupo aos nomes dos respondentes?). Cumpre-nos, assim, possuir um conhecimento suficiente para possibilitar aos alunos um contacto efectivo com as fases/etapas que definem o método estatístico, discutindo o porquê de determinadas decisões durante o tipo de estudo que estes realizem.

Um outro aspecto que tem vindo a provocar algumas dificuldades, particularmente aquando da sua exploração com alunos mais novos, prende-se com a determinação/cálculo da média, moda e mediana. Será então suficiente saber debitar as definições e efectuar as operações conducentes à resposta correcta? Duas questões que envolvem tipos de conhecimentos muito distintos, e modos de encarar o próprio processo de ensino, e que poderão promover ou limitar a compreensão dos alunos podem ser apresentadas por:

1. Define média, moda, mediana e quartis, indicando-as considerando as respostas fornecidas na questão X.

[2] Este será o ponto de partida nesta sessão prática, de modo a fazermos o paralelismo com o que pretendemos efectuar, posteriormente, nas salas de aula pois, tal como referem Tichá e Hošpesová (2006), caso o foco da formação seja a abordagem aos conteúdos em si, dificilmente os professores (nós) alteram as suas práticas de sala de aula.

2. Selecciona uma questão que te permita calcular a média, moda, mediana e quartis, indicando-as.

Discutir a especificidade do conhecimento suficiente para ensinar, a qualquer aluno, independentemente da idade/nível de escolaridade torna-se, assim, uma tarefa fundamental de modo a que possamos discutir a matemática subjacente a cada definição matematicamente válida que seja apresentada para cada uma delas e torná-las compreensíveis para os nossos alunos.

Cumpre-nos, assim, para além de possuir um sólido conhecimento matemático relativamente aos distintos temas que temos de abordar, possuir também um conhecimento que nos permita efectuar questões matematicamente desafiadoras e que permitam aos alunos explorar, intuitivamente, os conceitos abordados (aqui, média, moda, mediana e quartis). Efectuando uma transposição entre "a definição matemática" de cada um dos conceitos anteriores e o conhecimento necessário no processo de ensino, podemos pensar "simplesmente" que a moda está associada à identificação da maior frequência (qual ou quais… são mais frequentes?); que o conceito de média está associado à distribuição em partes iguais, mantendo na totalidade o mesmo valor (se todos os elementos tivessem o mesmo "valor" qual seria "o valor" de cada um?) e que os conceitos de mediana e quartis estão associados à divisão dos dados em partes iguais depois de ordenados (como dividirias os dados em x partes iguais?)

Este "tipo" de conhecimento, e consequentes questões, serão o foco desta sessão prática, tendo como auxilio uma sequência de tarefas, que se inicia com a elaboração de um questionário, prosseguindo com o agrupamento de dados, continuando com a construção e análise de distintas formas de apresentar esses mesmos dados e terminando com uma reflexão sobre o que foi efectuado.

Referências

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematics knowledge for teaching on student achievement. *American Education Research Journal, 42*(2), 371-406.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E. & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação – DGIDC.

Tichá, M., & Hošpesová, A. (2006). Qualified pedagogical reflection as a way to improve mathematics education. *Journal of Mathematics Teacher Education, 9*, 129-156.

DOS CONSTRUCTOS TEÓRICOS À SALA DE AULA: UM OLHAR SOBRE A CALCULADORA GRÁFICA*

Helena Rocha

Bolseira da FCT / ME

hcr@fct.unl.pt

Introdução

Há vários anos que são reconhecidas às calculadoras gráficas diversas potencialidades para o ensino da Matemática. Desde novas tarefas, até novos ambientes de aprendizagem são muitas as vantagens que lhe são atribuídas. A investigação veio a confirmar essas potencialidades, no entanto, com o passar do tempo, começou a tornar-se evidente que os contributos positivos que se esperavam da introdução desta tecnologia nas escolas não estavam a ocorrer (Goos & Bennison, 2008). Diversos autores (Cavanagh & Mitchelmore, 2003; Thomas & Hong, 2005; Waits & Demana, 2000) começaram a apontar falhas à formação que tem vindo a ser disponibilizada aos professores, criticando o foco excessivo na aprendizagem do funcionamento da máquina de um ponto de vista meramente técnico e a reduzida atenção dada à articulação desse conhecimento com a Matemática e com o seu ensino. A tomada de consciência relativamente a estas insuficiências levou a uma preocupação crescente em identificar todo um conjunto de conhecimentos de que os professores necessitariam para conseguir fazer uma integração adequada desta tecnologia nas suas práticas.

Recentemente começou a ser atribuída importância a conhecimentos que se situam na confluência de algumas das áreas do conhecimento profissional geralmente consideradas e onde é dada uma atenção especial à tecnologia (ver, por exemplo, Mishra e Koehler, 2006 e Rocha, 2010). Aqui darei destaque, no âmbito da Matemática e da tecnologia, ao conhecimento da fidelidade matemática, das novas ênfases que a tecnologia coloca sobre os conteúdos, das novas ordenações de conteúdos que requer e de como gerir o acesso a diferentes representações. No âmbito do ensino e aprendizagem com a tecnologia, abordarei o conhecimento relativo à concordância matemática e às implicações sobre a aprendizagem dos alunos do professor privilegiar determinada abordagem ou assumir determinado papel.

* Trabalho desenvolvido com o apoio da FCT e do ME

Matemática e tecnologia

Fidelidade matemática

Este constructo chama a atenção para o facto da Matemática experimentada pelos alunos nem sempre coincidir com aquela que era esperada (Zbiek et al., 2007). O termo propriamente dito não tem sido muito usado pelos investigadores, no entanto a noção é frequentemente referida, sendo que Dick (2008) refere grandes áreas onde a falta de fidelidade matemática tende a ocorrer.

A falta de fidelidade matemática pode ter origem nas limitações inerentes à representação de fenómenos contínuos através de estruturas discretas e à precisão finita dos cálculos numéricos. Esta é uma situação frequente ao representar graficamente uma função numa calculadora gráfica. Consideremos, por exemplo, a representação gráfica das funções *sen(2x)* e *sen(50x)*. Se o fizermos numa TI-83 considerando $x \in [-2\pi, 2\pi]$, uma janela de visualização de utilização bastante frequente na representação gráfica de funções trigonométricas, observamos dois gráficos absolutamente coincidentes. E, no entanto, todos sabemos que estas funções têm períodos muito diferentes e como tal nunca poderão ter representações gráficas coincidentes. Este é pois um dos casos em que a resposta disponibilizada pela tecnologia não é fiel à Matemática.

Uma outra área onde ocorre falta de fidelidade matemática está relacionada com a discrepância entre a ferramenta e as convenções de sintaxe matemática. Estas situações, ao contrário das anteriores, já não decorrem de uma qualquer limitação da tecnologia, sendo antes o resultado de opções conscientemente tomadas pelos responsáveis pelo desenvolvimento da tecnologia, ao privilegiarem a facilidade de utilização. Uma situação onde é frequente ocorrerem discrepâncias a este nível é na prioridade das operações. Em Matemática existe uma hierarquia estabelecida, no entanto, as calculadoras gráficas ao tentarem adoptar um funcionamento mais agradável para o utilizador assumem por vezes regras próprias que acabam por originar situações que podem eventualmente induzir em erro. A confusão pode ocorrer quando então envolvidas fracções e multiplicações implícitas. A questão prende-se com o significado atribuído a uma expressão como, por exemplo, 3/4x. Qual a interpretação que a calculadora gráfica faz desta expressão? Será *34*□ ou *34*□? E o verdadeiro problema é que a resposta depende do modelo de calculadora que estivermos a utilizar, ou seja, pode perfeitamente acontecer que numa turma existam alunos com calculadoras diferentes e que difiram quanto à sintaxe que utilizam.

Para que 3/4x possa ser interpretado como *34*▯ é necessário que a multiplicação implícita tenha prioridade sobre a divisão. E quando isto acontece somos confrontados com situações em que a multiplicação implícita e explícita têm significados diferentes. Ou seja, 3/4x é interpretado como *34*▯ e 3/4×x como *34*▯ e estamos perante uma situação onde a tecnologia não é fiel à Matemática.

E quais as consequências destas discrepâncias? Segundo Zbiek et al. (2007) estudos realizados sugerem que estas têm potencial para gerar uma certa confusão tanto aos alunos como aos professores, no entanto os resultados alcançados até ao momento têm sido inconclusivos relativamente a se se trata de meros transtornos ou se podem surgir consequências mais sérias, com reflexos na aprendizagem dos alunos. Quando estas situações surgem no decorrer de uma aula, a tendência é para que as implicações sobre os alunos sejam fortemente influenciadas pelas reacções do professor e pela interpretação que este lhe dá. Aparentemente o impacto pode eventualmente ser maior sobre o professor do que sobre os alunos. Com efeito, estas situações podem afectar a atitude do professor face à tecnologia e eventualmente interferir com a futura utilização que é feita desta.

Novas ênfases

O facto da calculadora gráfica realizar parte do trabalho que antes só podia ser realizado com papel e lápis, faz surgir a questão relativamente à ênfase que esses procedimentos devem continuar a ter. É precisamente neste sentido que Hooper (1993) questiona a necessidade do professor treinar os seus alunos na utilização mecânica de algoritmos, de ensinar manipulações algébricas e a determinar limites com base em métodos tais como a racionalização do denominador, quando o recurso à visualização do gráfico e a utilização das funcionalidades dos *zooms* no ponto adequado conduziria, segundo a autora, a uma resposta igualmente válida.

Mas se, por um lado, determinados conteúdos parecem poder passar a receber uma menor ênfase, por outro lado, a integração da calculadora gráfica obriga também a ponderar quais os conteúdos que é necessário dominar para que uma utilização efectiva seja possível, ou seja, quais os que devem ser alvo de uma maior ênfase. E, neste sentido, Burril (1992) menciona a importância de incentivar a destreza na utilização da notação algébrica para introduzir a informação na máquina; a necessidade de ser eficiente na escrita e interpretação de números decimais e em notação científica, uma vez que é nesta forma que as calculadoras geralmente apresentam os resultados; e destaca em particular o cálculo mental, considerando que a utilização da calculadora requer um aprofundado domínio da noção de número, relacionado com decimais, erro, precisão e aproximação. No entanto, as alterações introduzidas pela tecnologia relativamente ao que anteriormente era feito envolvem outros aspectos.

Quando a tecnologia não está disponível, as representações gráficas cuja elaboração ou observação os professores propõem aos alunos correspondem sempre a funções cuidadosamente escolhidas, que tendem a apresentar alguns aspectos em comum. Como referem Cavanagh e Mitchelmore (2000), os valores marcados nos eixos são quase sempre simétricos, as escalas utilizadas unitárias, as principais características da função (zeros, pontos de intersecção com os eixos, máximos e mínimos, etc.) encontram-se geralmente próximas da origem e tendem a assumir valores inteiros. A integração da calculadora gráfica no processo de ensino e aprendizagem da Matemática vem permitir a representação gráfica de um conjunto mais amplo de funções, colocando os alunos perante decisões matemáticas com que até então não se deparavam. Com efeito, passa a ser necessário fazer uma escolha adequada da escala e dos valores da janela de visualização, saber lidar com as situações em que não é observado qualquer gráfico ou em que apenas surge uma vista parcial, para além de desenvolver familiaridade com a forma decimal de apresentação dos valores utilizada pela calculadora e saber quando estes correspondem ou não a valores irracionais (Cavanagh & Mitchelmore, 2003). Neste sentido pode-se dizer que a utilização da calculadora gráfica inevitavelmente coloca os alunos perante a necessidade de dominar todo um conjunto de conhecimentos matemáticos que num ensino sem recurso à tecnologia geralmente não era alvo de grande atenção. Ou seja, o recurso a esta tecnologia requer que seja dada maior ênfase a diversos conteúdos matemáticos.

Novas ordenações

A facilidade com que a tecnologia permite aceder a representações gráficas vem permitir abordagens intuitivas o que, por seu turno, torna possível que determinados conteúdos sejam abordados antes dos alunos dominarem todo um conjunto de conhecimentos formais que na ausência da tecnologia seria necessário. Passa assim a ser possível ao professor proporcionar ocasiões para estudar comportamento local, comportamentos escondidos, crescimento, decrescimento, limites, assimptotas, continuidade, tangentes como aproximação a uma curva num ponto e extremos locais (Hooper, 1993).

Esta possibilidade de abordar mais cedo determinados assuntos não consiste contudo numa simples antecipação, uma vez que não se trata de ensinar determinado conteúdo mais cedo, mas antes de decidir como o ensinar, articulando a abordagem gráfica e não gráfica e a intuitiva e formal. Como reconhecem Stroup (2005) e Bosley et al. (2007), a integração da tecnologia tem implicações sobre a ordem por que é possível optar por ensinar. A tecnologia permite, por exemplo, recorrer a uma abordagem gráfica para determinar máximos e mínimos de funções que, sem esta, só mais tarde poderiam ser determinados. Esta possibilidade não consiste verdadeiramente numa antecipação, no sentido em que os alunos já estavam familiarizados com a noção de máximo e mínimo de uma função. Como refere Stroup (2005), tomando por base o ensino do Cálculo, enquanto num ensino sem tecnologia, este era abordado no final do ensino secundário, quando os alunos já tinham estudado todo um conjunto de assuntos que se considerava constituir a base para a sua compreensão, a partir do momento em que esta está disponível não tem que ser necessariamente assim e o cálculo pode ajudar à compreensão de aspectos tradicionalmente considerados básicos. Bosley et al. (2007) vão mesmo um pouco mais longe ao considerar que reordenar a sequência por que os conteúdos são ensinados não é uma possibilidade mas antes uma necessidade. Com efeito, segundo estes autores, a necessidade de articular uma abordagem com tecnologia, com os resultados teóricos e uma abordagem com papel e lápis, não permite a manutenção da sequência de conteúdos como anteriormente.

Fluência representacional

Uma das características da calculadora gráfica é permitir aceder a múltiplas representações de funções (Heid, 1995; Kaput, 1992), o que torna possível estabelecer ou reforçar ligações de uma forma que não seria possível sem o apoio da tecnologia (Cavanagh & Mitchelmore, 2003), articulando as representações numérica ou tabelar, simbólica ou algébrica e gráfica (Goos & Benninson, 2008). Como refere Kaput (1989), a conexão entre diferentes representações cria uma visão global, que é mais do que a junção do conhecimento relativo a cada uma das representações e a tecnologia propícia uma exploração plena das abordagens numérica e gráfica de uma forma que até então não era possível, favorecendo assim uma abordagem integrada das diferentes representações e consequentemente o desenvolvimento de uma compreensão mais profunda.

Apesar da importância de trabalhar com diferentes representações e de esse trabalho ser muito facilitado pela utilização da calculadora gráfica, os alunos têm dificuldade em fazê-lo (Billings & Klanderman, 2000) e os professores não têm dedicado a necessária atenção à flexibilidade necessária para passar de uma representação para outra e para articular a informação veiculada por estas (Even, 1998). Com efeito, embora exista alguma preocupação em articular e equilibrar o recurso a diferentes representações, Molenje e Doerr (2006) constataram que o recurso às representações algébricas e gráficas são dominantes relativamente à representação numérica. Além disso, quando os professores efectivamente recorrem às três representações tende a existir um padrão na forma como o fazem. Assim, uns professores tendem a recorrer primeiro à representação algébrica, passando depois para a gráfica e, por fim, para a numérica, enquanto outros tendem a passar da representação algébrica para a numérica e só depois para a gráfica. Esta sequência rígida adoptada pelo professor tende a ser copiada pelos alunos (Barling, 1994; Rocha, 2000) que, consequentemente, vêem dificultado o desenvolvimento da desejada fluência entre as diferentes representações.

A importância da fluência representacional, segundo Zbiek et al. (2007), reside na sua aptidão para proporcionar o desenvolvimento da compreensão matemática, razão pela qual esta não se restringe à capacidade de passar de uma representação a outra, transportando o conhecimento de uma entidade para a outra e articulando-o com o novo conhecimento disponibilizado pela nova representação. A fluência representacional envolve também o conhecimento de qual a representação mais adequada para em determinadas circunstâncias ilustrar determinado conceito ou explicar determinada noção e de como as interligar de forma relevante para fundamentar determinada afirmação.

Ensino e aprendizagem com a tecnologia

Concordância matemática

A concordância matemática diz respeito ao nível de alinhamento entre quaisquer dos campos matemáticos que interagem no processo de aprendizagem, o que inclui a Matemática do professor, a Matemática dos alunos, a Matemática escrita (duma proposta de trabalho ou do manual) e a Matemática da tecnologia (Zbiek et al., 2007).

Este nível de concordância é visto como um continuo e difere da fidelidade Matemática uma vez que ao contrário desta não respeita a uma concordância face a algo pré-estabelecido (a Matemática).

Alguns estudos que têm dedicado atenção à concordância matemática têm colocado o foco ao nível do alinhamento entre as intenções do professor e a Matemática efectivamente trabalhada pelos alunos. São particularmente referidas situações em que ocorre um baixo nível de concordância entre a Matemática em que os alunos se envolvem e aquela em que o professor pretendia que se envolvessem quando concebeu a tarefa. Dugdale (2008) foi uma das autoras que se deparou com esse baixo nível associado ao conhecido jogo dos globos verdes. O objectivo deste jogo é criar funções cuja representação gráfica passe por globos verdes distribuídos aleatoriamente por um referencial cartesiano. Os globos intersectados pela função explodem e a intenção do jogador será eliminá-los a todos recorrendo ao menor número de funções. Do ponto de vista matemático, as intenções do jogo consistem em levar os alunos a pensar em torno de diferentes famílias de funções, no entanto, o que a autora constatou foi que os alunos subverteram esse objectivo ao descobrir que uma função como $f(x)=10sen(10x)$, tendo em conta a sua periodicidade, intersectaria qualquer globo. Nestas circunstâncias, a concordância entre a Matemática que a tarefa pretendia abordar e a efectivamente abordada pelos alunos tornou-se extremamente baixa, ainda assim, a pouca Matemática envolvida estava relacionada com a que o professor inicialmente pretendia.

Também eu me deparei com uma situação de baixa concordância matemática num estudo que estou a realizar. A professora participante neste estudo pretendia trabalhar com os alunos a resolução gráfica de inequações com módulos como $|x+1|\leq 3$, e pretendia que estes considerassem duas funções, $y_1=|x+1|$ e $y_2=3$, que utilizassem a calculadora gráfica para traçar os gráficos e determinar os pontos de intersecção das duas funções e que, a partir daí, determinassem o conjunto solução da inequação. Os alunos perceberam que se esperava que observassem o gráfico na calculadora e sabiam que para tal precisavam de começar por introduzir uma expressão. Assim, introduziram $y_1=|x+1|\leq 3$, algo que não ocorrera à professora, pois para ela esta não era obviamente uma expressão admissível para uma função. O que a máquina faz é atribuir o valor 0 aos valores de x que não verificam a condição e 1 aos que verificam, como tal a tecla *graph* da calculadora disponibilizava toda a informação necessária para indicar o conjunto solução da inequação e a professora viu-se confrontada com uma situação de baixa concordância matemática e em que a Matemática ainda envolvida nem sequer estava propriamente relacionada com a inicialmente pretendida.

Os exemplos aqui apresentados referem-se a situações em que a concordância matemática é muito baixa e como tal geralmente perceptível para o professor. Contudo tal nem sempre sucede, como alertam Zbiek et al. (2007), podendo surgir casos em que o professor julga que estão a ocorrer aprendizagens sobre conteúdos que na verdade nem sequer estão a ser trabalhados pelos alunos.

Privilegiar

A noção de privilegiar está relacionada com a forma como os professores, intencionalmente ou não, usam com mais frequência ou atribuem prioridade a certas coisas na sua prática (Zbiek et al., 2007). Esta prioridade pode ser relativa a determinado tipo de representação, determinada técnica ou conceito, determinada metodologia ou ainda relativamente à abordagem com ou sem tecnologia.

O privilégio atribuído a algo na prática do professor tem sido alvo da atenção de diversos estudos que têm procurado compreender as suas implicações sobre a aprendizagem dos alunos. Zbiek et al. (2007) fazem referência a situações em que uma abordagem sem tecnologia é privilegiada até que o aluno domine os conhecimentos básicos e passe então a deixá-los a cargo da tecnologia e também a situações em que o professor privilegia uma abordagem expositiva ou uma abordagem de carácter exploratório. As conclusões destes estudos sugerem diferenças nas aprendizagens dos alunos, indiciando que mesmo alunos com idênticas classificações em testes diferem na sua compreensão matemática por formas que espelham as tendências ou as opções privilegiadas pelos respectivos professores.

Kendal e Stacey (2001) conduziram um estudo onde deram atenção às decisões do professor relativamente ao que é ensinado e como é ensinado. Focaram-se nos conteúdos enfatizados, nas representações preferidas e ignoradas, na atenção dada aos procedimentos e aos conceitos, às regras e à compreensão, no que era explicado aos alunos ou deixado para que estes compreendessem por si e no papel atribuído à tecnologia. As conclusões a que chegaram sugerem que as opções privilegiadas pelo professor na sua prática reflectem as concepções e crenças do professor relativamente à natureza da Matemática e à forma como deve ser ensinada e o seu conhecimento profissional e são moderadas pelo seu conhecimento institucional e pelos constrangimentos existentes na escola, tendo uma influência significativa sobre a aprendizagem dos alunos.

Papel do professor

O papel assumido pelo professor ao ensinar Matemática com a tecnologia tem vindo a ser estudado por diversos autores onde se destacam Farrel (1996), Fraser et al. (1988) e Heid et al. (1990). Zbiek e Hollebrands (2008), inspirando-se nas caracterizações previamente existentes, apresentam um conjunto de onze papéis diferentes que o professor pode assumir: assistente técnico, avaliador, colaborador, condutor das actividades da aula, conselheiro, definidor de tarefas, explicador, facilitador, gestor, recurso e regulador do tempo. De todos estes papéis, e de acordo com Farrel (1996), o de gestor é o mais frequentemente assumido pelo professor. Independentemente da presença ou não da tecnologia, a autora constatou que o professor tendia a assumir o papel de um gestor táctico, assumindo uma postura directiva e autoritária durante grande parte das aulas. Ainda assim, a presença da tecnologia foi identificada como proporcionando uma alteração significativa nos papéis assumidos pelo professor, com um incremento significativo no assumir do papel de conselheiro.

Os papéis assumidos pelo professor revelam-se por norma no decorrer da sua prática lectiva, marcando-a de forma significativa e consequentemente influenciando as aprendizagens dos alunos. Neste sentido, Zbiek e Hollebrands (2008) realçam a importância do professor estar ciente dos papéis que tendencialmente assume, conhecendo e reflectindo sobre papéis alternativos, ponderando os seus conhecimentos, crenças e concepções relativamente ao papel do professor e dos alunos no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. As variações e profundidades com que cada um dos diferentes papéis é assumido, são ainda indicadoras dos diferentes níveis do que os autores consideram o necessariamente longo processo de integração da tecnologia.

Conclusão

Os estudos realizados relativamente à forma como os professores integram a calculadora gráfica nas suas práticas apontam para algumas fragilidades no conhecimento profissional dos professores. Apoiando-me num conjunto de constructos teóricos que tem estruturado a literatura existente identifiquei algumas áreas onde um aprofundar de conhecimento parece ser necessário ao desenvolvimento da integração da tecnologia. Dediquei particular atenção a conhecimentos na confluência do conhecimento da tecnologia e da Matemática e também na confluência do conhecimento da tecnologia e do ensino e da aprendizagem. Esta é contudo uma abordagem inicial. Importa agora aprofundar este conjunto de conhecimentos e procurar compreender melhor de que forma marcam as práticas dos professores, bem como em que moldes estes conhecimentos podem ser desenvolvidos e contribuir para uma integração efectiva da tecnologia, e em particular da calculadora gráfica, nas práticas profissionais.

Referências

Barling, C. (1994). Graphical calculators: potential vs practice. In T. Andrews & B. Kissane (Eds.), *Graphics calculators in the classroom* (pp. 123-126). Adelaide: AAMT.

Billings, E. & Klanderman, D. (2000). Graphical representations of speed: obstacles preservice K-8 teachers experience. *School Science and Mathematics*, 100 (8), 440-450.

Bosley, J.; Hong, Y.; Santos, A. & Thomas, M. (2007). Calculators in the Mathemastics classroom: a longitudinal study. In *Proceedings of the Twelfth Asian Technology Conference in Mathematics* (pp. 37-47). ATCM.

Burrill, G. (1992). The graphing calculator: a tool for change. In J. Fey & C. Hirsch (Eds.), *Calculators in Mathematics Education* (pp. 14-22). Reston, Va.: NCTM.

Cavanagh, M. & Mitchelmore, M. (2000). Graphics calculators in mathematics learning: studies of student and teacher understanding. In M. Thomas (ed.), *Proceedings of TIME 2000: an International Conference on Technology in Mathematics Education* (pp. 112-119). Auckland, NZ.

Cavanagh, M. & Mitchelmore, M. (2003). Graphics calculators in the learning of mathematics: teacher understandings and classroom practices. *Mathematics Teacher Education and Development*, 5, 3-18.

Dick, T. (2008). Keeping the faith: fidelity in technological tools for mathematics education. In G. Blume & K. Heid (eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics* (vol.2, pp. 333-340). Charlotte, NC: IAP e NCTM.

Dugdale, S. (2008). From network to microcomputers and fractions to functions: continuity in software research and design. In G. Blume & K. Heid (eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics* (vol.2, pp. 89-112). Charlotte, NC: IAP e NCTM.

Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *Journal of Mathematical Behaviour*, 17 (1), 105-121.

Farrell, A. (1996). Roles and behaviours in technology-integrated precalculus classrooms. *Journal of Mathematical Behavior*, 15, 35-53.

Fraser, R.; Burkhardt, H.; Coupland, J.; Philips, R., Pimm, D. & Ridgway, J. (1988). Learning activities and classroom roles with and without computers. *The Journal of Mathematical Behaviour*, 6, 305-338.

Goos, M. & Bennison, A. (2008). Surveying the technology landscape: teachers' use of technology in secondary mathematics classrooms. *Mathematics Education Research Journal*, 20 (3), 102-130.

Heid, M. (1995). *Algebra in a technological world*. Reston: NCTM.

Heid, M.; Sheets, C. & Matras, M. (1990). Computer-enhanced algebra: new roles and challenges for teachers and students. In T. Cooney (ed.), *Teaching and learning methametics in the 1990s* (pp. 194-204). Reston,VA: NCTM.

Hooper, J. (1993). Issues of Mathematics classroom use of graphing calculators. *The Mathematics Educator*, 4 (2), 45-50.

Kaput, J. (1989). Linking representations in the symbol systems of algebra. In S. Wagner & C. Kieran (eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 167-194). Reston, Va: NCTM.

Kaput, J. (1992). Technology and mathematics education. In D. Grouws (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 515-556). New York: Macmillan.

Kendal, M. & Stacey, K. (2001). Influences on and factors changing technology privileging. In M. Heuvel-Panhuizen (ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol.4, pp.217-224). Utrecht: PME.

Mishra, P. & Koehler, M. (2006). Technological pedagogical content knowledge: a framework for teacher knowledge. *Teachers College Record*, 108 (6), 1017-1054.

Molenje, L. & Doerr, H. (2006). High school mathematics teachers' use of multiple representations when teaching functions in graphing calculator environments. In S. Alatorre, J. Cortina, M. Sáiz & A. Méndez (eds.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.

Rocha, H. (2000). *A utilização da calculadora gráfica por alunos do ensino secundário*. Tese de mestrado. Lisboa: APM.

Rocha, H. (2010). O conhecimento para ensinar Matemática com a tecnologia. *Actas do Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Aveiro: APM. (submetido para publicação)

Stroup, W. (2005). Learning the basics with calculus. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 24 (2), 179-196.

Thomas, M. & Hong, Y. (2005). Teacher factors in integration of graphic calculators into mathematics learning. In H. Chick & J. Vincent (eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 257-264). Melbourne:PME.

Waits, B. & Demana, F. (2000). Calculators in Mathematics teaching and learning: past, present, and future. In M. Burke & F. Curcio (eds.), *Learning Mathematics for a new century* (pp. 51-66). Reston, Va.: NCTM.

Zbiek, R.; Heid, M.; G. Blume & Dick, T. (2007). Research on technology in mathematics education. In F. Lester, Jr. (ed.), *Second Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 1169-1207). Charlotte, NC: IAP e NCTM.

Zbiek, R. & Hollebrands, K. (2008). A research-informed view of the process of incorporating mathematics technology into classroom practice by in-service and prospective teachers. In K. Heid & G. Blume (eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics* (vol.1, pp. 287-344). Charlotte, NC: IAP e NCTM.

A EDUCAÇÃO ALGÉBRICA NO ENSINO FUNDAMENTAL

Mageri Rosa Ramos - Escola Municipal Gabriel Gonçalves da Silva, Juiz de Fora, Minas Gerais, Brasil. mageri@uol.com.br
Marcílio Dias Henriques - Instituto Estadual de Educação de Juiz de Fora, Minas Gerais, Brasil. mdhenriques@oi.com.br
Amarildo Melchiades da Silva - Universidade Federal de Juiz de Fora, Minas Gerais, Brasil. xamcoelho@terra.com.br

Resumo: Nessa sessão prática, dirigida a professores do 2° e do 3° ciclos do Ensino Fundamental, pretendemos trazer-lhes informações sobre o que nossas pesquisas e nossa vivência de sala de aula têm indicado, acerca da maneira como nossos alunos produzem significado para a Álgebra. Para abordar nossa temática, analisaremos situações de sala de aula ligadas à Álgebra Escolar. Também discutiremos as possibilidades que surgem nos processos de ensino e aprendizagem, quando o professor assume a postura de dar voz ao aluno em sala de aula. Nosso objetivo será o de sugerir uma perspectiva que propõe caminhos que possibilitam uma interação do professor com seus alunos, de modo a intervir efetivamente em suas dificuldades de aprendizagem em matemática. A visão e a abordagem que proporemos sugerem, ainda, como uma teoria em Educação Matemática – o Modelo Teórico dos Campos Semânticos – pode auxiliar o trabalho docente em sala de aula.

Palavras-chave: Educação Algébrica, Aprendizagem, Dificuldades de Aprendizagem, Interação e Intervenção.

PROPOSTA DE TRABALHO

A proposta desta sessão prática é discutir alguns aspectos da produção de significados que estão presentes na sala de aula de Matemática. Para isto tomaremos o Modelo Teórico dos Campos Semânticos (MTCS) como elemento de análise de algumas situações didáticas que apresentaremos e discutiremos.

Em particular, focaremos nas questões a cerca da produção de significados dos alunos e as dificuldades de aprendizagem que presenciamos no cotidiano escolar.

A noção de significado será caracterizada nos seguintes termos em nossa discussão: *significado* é aquilo que o sujeito pode e efetivamente diz sobre o objeto numa dada atividade (no sentido proposto por Leontiev). Ele é produzido através da relação do sujeito com o mundo ao qual ele pertence e que lhe coloca a disposição vários modos de produção de significados, que são históricos, sociais e culturais. Em outras palavras, o significado é produzido na relação do sujeito com seus interlocutores. Assim, produzir significados está relacionado a produzir ações enunciativas a respeito de um objeto no interior de uma atividade (SILVA, 2003). E é no processo de produção de significados que os objetos são constituídos. Logo, os objetos da atividade matemática não estão constituídos a não ser que alguém os venha a constituir através de sua enunciação.

Uma outra noção que utilizaremos em nossa discussão será a de núcleo. No processo cognitivo, quando alguém esta produzindo significados, existem algumas afirmações que a pessoa faz e, tomando como localmente válidas, não sente necessidade de justificá-las. A essas crenças-afirmações ele chamou de estipulações locais. Ao conjunto das estipulações locais denominamos núcleo. A noção de núcleo nos permite apresentar outra noção do modelo: chamaremos de Campo Semântico à atividade de produzir significado em relação a um certo núcleo. Alternativamente diremos que uma pessoa está operando em um Campo Semântico toda vez que ele / ela estiver produzindo significado em relação a um núcleo dado. (LINS & GIMENEZ, 1997). Temos assim, as noções básicas do MTCS. Para maior clareza, e para situar o leitor sobre os nossos objetivos, achamos conveniente apresentar um exemplo onde o ambiente é a sala de aula e que pretende sugerir o encaminhamento que daremos no sessão prática. Com isto, esperamos também, introduzir uma noção de dificuldade compatível com o modelo. Assim, a maneira como utilizaremos a teoria para discutir as questões didáticas serão elucidadas.

Considere uma turma de 8º ano que está envolvida na atividade de resolução de equações do 1º grau. Suponhamos que os alunos já tenham tido contato com números negativos. A professora propõe, então, a primeira equação: $3x + 10 = 100$. Sem maiores dificuldades, os alunos atendem prontamente à professora e em poucos minutos eles chegam à resposta $x = 30$. Feliz com o êxito da turma a professora propõe uma nova equação para ser resolvida: $3x + 100 = 10$. E aos poucos ela constata as dificuldades dos alunos em resolver esta equação. Ela observa, ao abordar alguns desses alunos, que nem sequer eles parecem estar diante de uma equação "idêntica" à anterior. O que pode ter acontecido? Esta é a grande questão para a professora.

Sob a ótica do ensino tradicional vigente (ETV), baseado na concepção formalista moderna, não há maneira de enxergar algum problema nesta situação. E também não há maneira de atuar sobre ele, caso seja detectado. Pois, ao professor cabe explicar, repetir a explicação, convencer, mostrar ao aluno o caminho para se resolver a equação. Ao aluno fica a incumbência de ouvir, prestar atenção, buscar entender a explicação dada. Mas, se mesmo assim o aluno continuar não entendendo se instaura o caos, pois não há muito mais o que fazer. Daí, na maioria das vezes, o aluno precisa ceder e o diálogo termina com a fala do aluno – "tudo bem!"

Feito este comentário, vejamos como podemos compreender o acontecido sob a ótica do MTCS. Nosso problema didático é: por que os alunos conseguem resolver a primeira equação e alguns não conseguem resolver a segunda? Poderíamos até questionar o seguinte: caso fosse apresentada uma terceira equação será que os alunos que resolveram a primeira e a segunda equação resolveriam a terceira?

Colocado o problema fica agora a questão: por onde começar? Do que conhecemos do modelo podemos dizer que devemos iniciar pelas justificações dos alunos sobre a resolução da primeira equação. Devemos neste momento identificar os significados que eles estão produzindo; tanto para identificar núcleos quanto para ver como os campos semânticos estão se desenvolvendo. Devemos observar ainda que objetos o aluno está constituindo em relação ao núcleo e que novos objetos estão sendo constituídos por ele.

Nossa estratégia então será a de isolar quatro alunos entre aqueles que resolveram a segunda equação e aqueles que não resolveram e analisar as justificações de cada um em relação à primeira equação. Suponha, então, que as justificações sejam as seguintes:

Pedro: "Ora professora de um lado tem 3x + 10 e do outro tem 100 e eles são iguais, se eu tirar dez de cada lado continua equilibrado aí fica 3x = 90 e dividindo dos dois lados por 3 a resposta é x = 30".

Hugo: "Um todo de valor 100 é igual a três partes iguais de um valor que eu não conheço e de uma parte de valor 10. Seu eu tirar 10 o que sobra de um lado é 3x, e do outro 90..."

Carolina: "Eu sei que x é um número secreto. Multiplico por 3 e somo 10 ao resultado da multiplicação. O resultado final é 100. Então eu tenho 3x = 100 -10 e..."

Amanda: "Eu tenho três vezes x, mais 10 é igual a 100. Eu sei que x é um número. Somando os dois lados da igualdade por -10, continua igual, porque esta é uma propriedade da igualdade numérica. Então fica..."

De imediato podemos constatar que é possível produzir diferentes significados para o texto "3x +10 =100" e que cada uma corresponde a diferentes lógicas das operações. Isto é, este texto foi constituído em objeto em pelo menos quatro modos diferentes e, para cada um deles, as transformações efetuadas na equação foram distintas. Passemos, então, a analisar cada resposta. Antes, porém, formulemos uma nova questão: conhecendo as justificações de cada um dos alunos é possível supor quais deles teriam dificuldade em resolver a segunda equação?

Suponhamos que presenciando as justificações de Pedro, seus gestos, sua fala, viemos a constatar que o que ele estava querendo dizer era que "se retirarmos dez quilos de cada lado continua equilibrado". Neste caso a igualdade para ele tem o significado de equilíbrio. A idéia que está por trás de suas justificações é a de balança. Seus gestos, usando as duas mãos, indicavam que, ao tirar pesos iguais mantém-se o equilíbrio. Esta era a maneira como ele operava.

Assim podemos dizer que a idéia de equação para este aluno está associada à idéia da balança. A atividade de produzir significado em relação ao núcleo acima é chamada de Campo Semântico da Balança.

Operando desta maneira ao olhar a equação $3x + 100 = 10$, este aluno poderia não produzir significados para esse texto. Ele poderia questionar o fato de que de uma lado tem $3x + 100$ e do outro tem 10 e mesmo assim fica equilibrado. Na verdade, essa equação não tem significado para ele.

Estamos, agora, em condições de apresentar mais um conceito que havíamos anteriormente mencionado, dentro de uma das perguntas anteriores: o que significa dificuldade? Que tipo de dificuldade este aluno está apresentando operando no Campo Semântico da balança?

Segundo Lins (1993) uma dificuldade deve ser entendida de duas maneiras excludentes: ou ela caracteriza-se como um obstáculo ou como um limite epistemológico. Um Obstáculo Epistemológico seria o processo no qual um aluno operando dentro de um campo semântico, poderia potencialmente produzir significado para uma afirmação, mas não produz. (Veremos um exemplo a seguir). Já um Limite Epistemológico seria a impossibilidade do aluno em produzir significado para uma afirmação. Este é o caso de Pedro que opera no campo semântico da balança; ao se defrontar com a equação $3x + 100 = 10$, não produz significado para este texto. Caso ele não mude de campo semântico, ele não conseguirá resolver esta equação, o que caracterizaria um limite epistemológico.

É importante deixar claro que o limite para o aluno não existe, pois é algo que se observa de fora. Quando um aluno não produz significado para um certo texto é o professor-pesquisador que está frente a um limite epistemológico (como o que enfrenta a professora em relação a Pedro em nossa situação ficcional). Assim, do ponto de vista do MTCS as dificuldades emergem do diálogo.

Outros modos de produção de significados para o objeto equação do 1° grau serão discutidos e analisados na sessão prática.

Esta situação ficcional que apresentamos mostra também, entre outras coisas, que nossa impotência ou não como professores, frente a problemas didáticos, presentes no dia a dia da sala de aula são dependentes de nossa maneira de ver e conceber os processos de ensino e aprendizagem. E ainda, que através do modelo, foi possível entender as dificuldades dos alunos ao considerarmos os significados produzidos por eles para a equação $3x + 10 = 100$.

REFERÊNCIAS

Baldino, R. R. (1995). *Assimilação solidária.* Grupo de Pesquisa-ação em Educação Matemática – GPA. Rio Claro, Brasil: UNESP.

Leontiev, A. N. (2006): Uma contribuição à teoria do desenvolvimento da psique infantil. In: Lev Semenovich Vigotsky (Dir.), *Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem* (pp. 59-83). São Paulo: Ícone.

Leontiev, A. N. (1978). *Actividad, consciencia y personalidad*. Buenos Aires: Ciencias Del Hombre, 1978.

Lins, R. C. (2001). The production of meaning for algebra: a perspective based on a theoretical model of semantic fields. In: Sutherland, R. et al. (Ed.). *Perspectives on School Algebra* (p. 37-60). Londres: Kluwer Academic Publishers.

Lins, R. C. (1994). Campos Semánticos y el problema del significado en álgebra. In: *UNO - Revista de Didáctica de las Matemáticas* (Vol. 1, n. 1, pp. 45-56). Barcelona: Graó.

Lins, R. C. (1993). Epistemologia, história e educação matemática; tornando mais sólidas as bases da pesquisa. In: *Revista da SBEM de São Paulo* (Vol.1, n.1, pp. 75-91). Campinas, Brasil: SBEM-SP.

Lins, R. C. & Duarte Jr., G. G. (1995). "Algebraic" word problems and the production of meaning: an interpretation based on a theoretical model of semantic fields. In *Proceedings of the XIX Annual Congress of the PME*. Recife, Brasil: PME.

Lins, R. C., & Gimenez, J. (1997). *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI.* Campinas, Brasil: Editora Papirus (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

Silva, A. M. da. (2003). *Sobre a dinâmica da produção de significados para a Matemática.* Tese de Doutorado. Rio Claro, Brasil: UNESP.

CONSTRUINDO O SENTIDO DO NÚMERO – O PAPEL DO CÁLCULO MENTAL

Fernanda Joaquim
Escola do 1.º Ciclo de Lagoa
ferquim@iol.pt

Resumo

Os alunos entram no 1º ciclo possuindo já alguns conhecimentos sobre números e as suas representações. Estes conhecimentos adquiridos informalmente nas vivencias diárias das crianças e na educação pré-escolar não pode ser desprezado no momento em que entram no 1º ano de escolaridade. À luz do novo Programa de Matemática do Ensino Básico os conhecimentos e experiências com que os alunos chegam à escola constitui um forte alicerce no desenvolvimento do sentido de número.

Neste texto serão apresentadas e discutidas um conjunto de tarefas, rotinas e materiais manipuláveis (estruturados e não estruturados) facilitadores dos conceitos e das ideias matemáticas no âmbito do tema de Números e Operações. Será apresentado o trabalho desenvolvido numa turma piloto de experimentação e implementação do Novo Programa. Nesta turma, agora no 2º ano, os alunos desenvolvem o cálculo mental trabalhando diferentes estratégias de cálculo baseadas na utilização de números de referência como 5, 10,100, ou 1/2, na composição e decomposição de números, nas propriedades das operações e nas relações entre números e operações.

Palavras-chave: cálculo; materiais; estratégias de cálculo; comunicação matemática; planificação.

Introdução

O sentido do número é entendido como a capacidade para decompor números, usar como referência números particulares, tais como 5, 10, 100 ou 1/2, usar relações entre operações aritméticas para resolver problemas, estimar, compreender que os números podem assumir vários significados (designação, quantidade, localização, ordenação e medida) e reconhecer a grandeza relativa e absoluta de números (Ponte et al., 2007, p. 13)

Quando os alunos chegam ao primeiro ano possuem já conhecimentos adquiridos informalmente, na experiencia do dia-a-dia e no ensino pré-escolar. O trabalho a desenvolver a partir desta altura deve ser alicerçado nesses conhecimentos, de forma a permitir o desenvolvimento do sentido do número. Neste sentido são propostas situações que envolvem a classificação, a contagem, a ordenação de números e a noção de cardinalidade. Assim, pretende-se que os alunos no início do 1º ano desenvolvam as seguintes ideias e procedimentos:

– Classificar e ordenar de acordo com determinado critério;

– Compor e decompor números;

– Identificar e dar exemplos de diferentes representações para o mesmo número;

– Realizar contagens progressivas e regressivas, representando os números envolvidos;

– Compreender várias utilizações do número e identificar números em contextos do quotidiano;

– Identificar e dar exemplos de números pares e ímpares.

Para que os alunos desenvolvam os procedimentos referidos é necessário que o professor proporcione ambientes de aprendizagem ricos que permitam às crianças um desenvolvimento em várias vertentes construindo percepções e bases onde alicerçar aprendizagens, que se irão, reflectir longo da vida, quer nas aprendizagens, quer na socialização, e mesmo no reconhecimento de algumas regras e procedimentos.

A criança deve ser estimulada e encorajada a compreender os aspectos numéricos do ambiente que a rodeia e a discuti-los com os outros.

É importante que os alunos estabeleçam relações entre os números, através da

Experimentação e da comunicação, utilizando estratégias diversificadas, que levam as crianças a desenvolver o sentido de número.

Neste texto serão apresentados e discutidos um conjunto de tarefas e materiais elaboradas com o intuito de permitir aos alunos de 1º ano de escolaridade construir o sentido do número desenvolvendo o cálculo mental

Alguns apontamentos teóricos

No novo Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte, et al., 2007), o tema Números e Operações ganha uma grande importância. Aí vem referido como propósito principal do ensino deste tema *desenvolver nos alunos o sentido de número, a compreensão dos números e das operações e a capacidade de cálculo mental e escrito, bem como a de utilizar estes conhecimentos e capacidades para resolver problemas em contextos diversos* (p. 13). Refere que o ensino e aprendizagem dos números e operações deve tomar como ponto de partida situações relacionadas com a vida do dia-a-dia. Nas primeiras abordagens ao número, o professor deve proporcionar aos alunos experiências que os levem à contagem. Nestas contagens deve estar incluído o recurso a objectos dispostos em arranjos diversos e a modelos estruturados como por exemplo cartões com pintas organizadas de forma padronizada e não padronizada.

> *Nestas experiências, a exploração dos processos de contagem utilizados pelos alunos, associados a diferentes possibilidades de estruturar e relacionar os números, contribui para a compreensão das primeiras relações numéricas. Estas relações são estruturantes na compreensão das primeiras operações aritméticas e, além disso, são pilares para o desenvolvimento do sentido de número nos seus múltiplos aspectos.* (Ponte, et al., 2007, p.13)

Nos dois primeiros anos, o cálculo numérico na representação horizontal é valorizado, levando a um trabalho bastante importante e consciente com os números e as operações, expondo-os a situações diversas que lhes permitam desenvolver o cálculo mental, permitindo um melhor desenvolvimento do sentido do número.

Para desenvolver o cálculo mental devem ser trabalhadas diferentes estratégias de cálculo baseadas na composição e decomposição dos números, nas propriedades das operações e nas relações entre os números e nas operações. Uma dos aspectos importantes para auxiliar este trabalho, é a prática de rotinas de cálculo mental diárias que permitem ao aluno seleccionar de entre as estratégias de que se tem apoderado, aquela que melhor se adapta à situação que lhe é apresentada naquela rotina. Fazer estimativas é outra actividade bastante rica nesta fase.

Existem outras situações bastante ricas para o desenvolvimento do conceito de número, que antes não eram valorizadas – as regularidades de acontecimentos, formas, desenhos e conjuntos de números.

> *Os alunos devem procurar regularidades em sequências de números finitas ou infinitas (estas usualmente chamadas sucessões), e podem também observar padrões de pontos e representá-los tanto geométrica como numericamente, fazendo conexões entre a geometria e a aritmética. Este trabalho com regularidades generalizáveis, segundo regras que os alunos podem formular por si próprios, ajuda a desenvolver a capacidade de abstracção e contribui para o desenvolvimento do pensamento algébrico.* (Ponte, et al., p.14)

A percepção de valores pequenos sem proceder à contagem *(subitizing)* é um aspecto importante no desenvolvimento do sentido de número, porque permite a construção de relações mentais entre números.

Uma breve contextualização

Os materiais e tarefas referenciados neste texto foram pensadas com o objectivo de permitir aos alunos um trabalho facilitador de um desenvolvimento do sentido do número e do cálculo mental.

Trata-se de um trabalho implementado numa turma do 2.º ano constituída por vinte alunos e na qual está a ser implementado o novo Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al., 2007), As aulas foram sendo registadas em notas que fui tomando e em reportagens fotográficas, o que facilitou uma sua posterior análise.

Tarefas, actividades desenvolvidas e materiais utilizados

Numa turma de primeiro ano, é imprescindível efectuar contagens com recurso a objectos dispostos em arranjos diversos e a modelos estruturados como por exemplo cartões com pintas organizadas de forma padronizada e não padronizada, dominós; dados; cubos de encaixe: colares de contas; ábacos horizontais e rectas graduadas (cf. Figura 1, abaixo). Isso permitirá promover o desenvolvimento do conceito de número e do cálculo mental.

Figura 1 – Modelos estruturados

O cálculo mental caracteriza-se por:

- Trabalhar com números e não com algarismos;
- Usar as propriedades das operações e as relações entre números;
- Implicar um bom desenvolvimento do sentido de número e um saudável conhecimento dos factos numéricos elementares;
- Permitir o uso de registos intermédios de acordo com a situação.
- Trabalhar diferentes estratégias de cálculo baseadas na composição decomposição de números, nas propriedades das operações e nas relações entre números e entre as operações.
- Devem ser também praticadas na aula rotinas de cálculo mental (espaço de aula curto – 10 ou 15 minutos – centrado no desenvolvimento de estratégias de cálculo). (Ponte et al., 2007, p. 10)

Seguem-se algumas tarefas que são valiosos auxiliares para a construção e sistematização das relações mentais entre números.

<u>Contar cubos</u>

Nesta tarefa os alunos são levados a fazer a associação numeral /quantidade e a fazer a composição e decomposição de números.

Inicialmente mostra-se aos alunos um cartão com um número que pode estar compreendido entre 1 e 10 (primeiro até 5 e posteriormente até10). Convidam-se os alunos a levantarem os dedos das mãos correspondentes.

Numa segunda fase, são distribuídos aos alunos alguns cubos de encaixe, de duas cores e é-lhes pedido que construam torres consoante o numeral representado no cartão que o professor mostra. Cada torre será a representação do número de cubos que a constituem.

João - Tenho a torre do 5. Fiz 3 cubos brancos e 2 vermelhos.

Figura 2 – Construção de torres

Contar usando as mãos

Esta tarefa recorre ao uso do material de contagem de que todos dispomos naturalmente – as mãos – para estruturar os números até 10 através da adição e da subtracção.

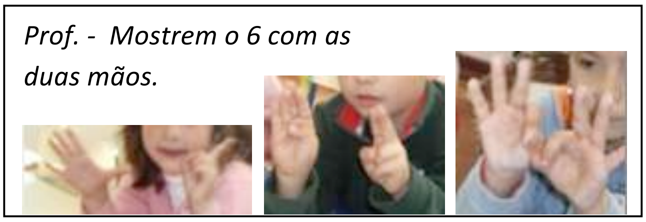


Figura 3 – Uso das mãos para representar quantidades.

Pretende-se que as crianças abandonem progressiv
contagem de 1 em 1 e se sintam mais confiantes nc
para adicionar e subtrair.

Relações parte-parte-todo

Muitas destas relações estabelecem-se através de materiais que permitem e facilitam a apreensão das relações numéricas.

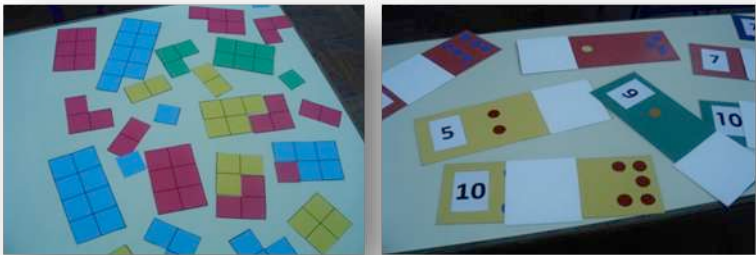


Figura 4 – Modelos para estabelecer relações numéricas

Cri *n 8.*
5
das?

Professora – Que número está escondido?

Figura 5 – Modelos para estabelecer relações numéricas

Jogo da carochinha

Partindo da história da carochinha, os alunos foram convidados a participar neste jogo. Dispunham de um tabuleiro de jogo de 240cm por 180cm, para jogar toda a turma e de um tabuleiro pequeno, para jogar em pequeno grupo.

Figura 3 – Tabuleiros de jogo

Esta tarefa foi desenvolvida em dois momento:A exploração dos tabuleiros e o jogo propriamente dito.

Na exploração dos tabuleiros os alunos tiveram oportunidade de efectuar contagens e de realizar alguns exercícios de cálculo mental (ex. quantas flores amarelas há no tabuleiro?; Quantos animais com pêlo há no tabuleiro?; Se cada animal tem 2 orelhas, quantas orelhas têm eles todos?; Cada flor amarela tem duas folhas. Quantas folhas têm as flores todas?).

Figura 3 – Momento de exploração do tabuleiro de jogo.

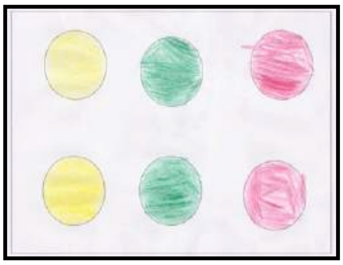
Figura 4 – Desenvolvimento do jogo

Neste jogo foram utilizados 2 dados. As crianças de uma forma lúdica tiveram oportunidade de praticar o cálculo mental e o *subitizing* de pequenas quantidades e contagens progressivas e regressivas.

Cartões para pintar

Os alunos começam por colorir os círculos que estão no cartão, com 4 cores diferentes (encarnado, azul, amarelo e preto) que poderão usar livremente e explicam e registam como pintaram os seus cartões.

Depois de pintados os cartões, os alunos foram fazendo a classificação, contagem, ordenação e cardinalidade falando dos critérios utilizados na pintura dos cartões: 2 círculos verdes e dois amarelos, círculos pintados de 3 cores, …



Beatriz: Eu pintei 2, 2, 2.
Prof.: Explica lá melhor.
Beatriz: Pintei 2 vermelhos, 2 verdes e 2 amarelos. Não pintei de azul.
Prof.: Olha bem para o teu cartão. Queres dizer mais alguma coisa?
Beatriz: De um lado é igual ao outro….

Figura 5 – Cartão pintado

Algumas no

Para que ten professor tem de ter um olhar crítico sobre o seu trabalho, ser ue delineou para a sua turma e planificar as suas aulas cuidad os e das dificuldades diagnosticadas.

É necessário que esse percurso de aprendizagem seja coerente e que permita aos alunos a construção dos conceitos fundamentais em jogo, a compreensão dos procedimentos matemáticos em causa, o domínio da linguagem matemática e das representações relevantes, bem como o estabelecimento de conexões dentro da Matemática e entre esta disciplina e outros domínios. *(Ponte et al., 13,14)*

A planificação do professor deve prever a diversificação de tarefas e de experiências de aprendizagem, deve também contemplar vários momentos /modos de trabalho -

momentos de reflexão, discussão e análise crítica envolvendo os alunos, pois estes aprendem, não só a partir das actividades que realizam, mas sobretudo da reflexão que efectuam sobre essas actividades.

Referências

Brocardo J., Delgado C. & Mendes, F., (2010) *Números e Operações*. Lisboa: Ministério da Educação - DGIDC.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E. & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação – DGIDC.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA SALA DE AULA: UMA EXPERÊNCIA COM ALUNOS DO 6º ANO DA EB2,3 ROBERTO IVENS

Filomena Rebelo [(1)]

[(1)] **Escola Básica 2,3 Roberto Ivens**

[(1)] **menarebelo@gmail.com**

Raquel Dinis [(2)]

[(2)] **Universidade dos Açores/Centro de Estudos da Criança da Universidade do Minho**

[(2)] **raquel.j.dinis @hotmail.com**

Resumo

As investigações motivam os alunos, ajudam a desenvolver capacidades de ordem superior expressas no programa, em particular, o raciocínio e a perspicácia, para além de constituírem um contributo significativo para que os alunos percepcionem a matemática como uma ciência em evolução e construção (Cunha, 1998). A mudança de concepções face à matemática é também destacada por Segurado (1997), que acrescenta ainda o desenvolvimento de um espírito investigativo, de uma maior autonomia no trabalho e a valorização e reconhecimento das interacções entre pares. Segundo Mendes (1997), a realização de investigações é ainda potenciadora do desenvolvimento da capacidade de reflexão dos alunos sobre a sua própria experiência matemática.

A experiência que se apresenta neste artigo, desenvolveu-se no âmbito do Projecto Investigação para um Currículo Relevante (ICR), aplicado numa turma do 6º ano, projecto este que aposta no "envolvimento directo de professores do ensino básico em processos de reflexão sobre determinados problemas profissionais e procura de soluções para os mesmos, numa lógica de investigação-acção" (Sousa e Valadão, 2008).

A metodologia adoptada contemplou a realização de entrevistas aos alunos, cuja análise revelou a existência de grandes dificuldades na resolução de problemas. Assim, optou-se pelo reforço do desenvolvimento de actividades no âmbito de resolução de problemas ligados aos conteúdos curriculares específicos do 6º ano. Atendendo, concomitantemente, ao facto de que os alunos devem aprender a ler matemática, para interpretarem um texto matemático, precisam familiarizar-se com a linguagem e os símbolos próprios desta componente curricular, encontrando sentido naquilo que lêem, e compreendendo o significado das formas escritas (Smole e Diniz 2001).

Com esta turma do 6º ano de escolaridade desenvolveu-se a resolução de problemas numa metodologia situada entre a descoberta guiada e a abordagem investigativa (Quadro 1).

Quadro 1 – Métodos usados na resolução de problemas com a turma do 6º ano.

Método	Papel do Professor	Papel do Aluno
Descoberta Guiada	Escolhe a situação tendo o objectivo em mente. Conduz o aluno para a solução.	Segue a orientação
Resolução de Problemas	Formula o problema deixa o método de resolução em aberto.	Encontra o seu próprio caminho para resolver o problema.
Abordagem investigativa	Dá umas indicações.	Formula o problema.

Ensinar matemática num contexto de situação-problema torna-se algo fascinante pela procura de diferentes tipos de actividades e formas distintas de abordagem, sobretudo, quando se permite aos alunos expressarem os seus pensamentos livremente. Em cada actividade sente-se o envolvimento genuíno dos alunos.

Palavras-chave: Descoberta guiada, Resolução de problemas, Abordagem investigativa.

1. Introdução

O ensino baseado em problemas fundamenta-se na necessidade que a vida impõe de suplantar desafios, e pressupõe proporcionar nos alunos o domínio de procedimentos e a capacidade de utilizar e procurar conhecimentos para responder a um desafio.

É com este pressuposto básico que a solução de problemas procura constituir não só os conteúdos, mas, e principalmente, uma forma de conceber as actividades didácticas. Segundo Echeverría e Pozo (1998: 15):

“O verdadeiro objectivo final da aprendizagem da solução de problemas é fazer com que o aluno adquira o hábito de propor-se problemas e de resolvê-los como forma de aprender.”

No processo de “resolver problemas” a comunicação é uma competência essencial. Quando o aluno lê, escreve ou desenha, revela as capacidades e atitudes que estão em desenvolvimento, os conceitos que domina e as dificuldades que apresenta. Com isso, o professor pode interferir nas dificuldades orientar a evolução positiva das aprendizagens de alunos concretos.

A integração de "resolver problemas" e "comunicação" almeja o desenvolvimento de meta-competências de aprendizagem nos alunos. Salienta-se a confiança no seu modo de pensar, a autonomia para investigar e seleccionar informação, expor ideias e argumentar pontos de vista.

Para Marincek (2001), resolver problemas é o meio para a construção dos conhecimentos matemáticos; é a essência da actividade humana, por isso, o professor deve deixar o aluno pensar por ele próprio, considerar este pensamento com seriedade e atribuir-lhes um lugar. É importante que os alunos busquem suas próprias formas de resolução, tornando-se autónomos.

Segundo Branca (1997) "resolver problemas" é algo abrangente demais, podem-se apontar muitos significados para esta expressão. Dentro as perspectivas apontadas pela referida autora, destaca-se a resolução de problemas como uma meta, ou seja, a resolução de problemas constituída no objectivo para ensinar matemática. Essa perspectiva é complementada pela concepção de Van de Walle (2001), citado em Onuchic & Allevato, (2004) o qual considera que "problema" como "qualquer tarefa ou actividade para a qual os alunos não têm métodos ou regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correcta". O mesmo autor defende, ainda, que o professor desempenha um papel central nesse processo, sendo responsável pela criação de um ambiente favorável que pressupõe três momentos: o antes, o durante e o depois. O primeiro momento pressupõe que o professor se assegure de que a situação problemática a ser proposta aos alunos seja ao mesmo tempo desafiadora, mas sem se tornar demasiado difícil. No momento da resolução da situação proposta – o durante – o professor acompanha o trabalho dos alunos e avalia (para si) se a escolha foi ou não adequada ao contexto. No último momento, o professor aceita a solução dos alunos sem avaliá-las e conduz a discussão enquanto os alunos justificam e avaliam seus resultados e métodos.

2. Metodologia

As actividades desenvolvidas, identificam-se com a perspectiva da resolução de problemas como um meio de ensinar Matemática, sendo o problema gerador do processo de ensino-aprendizagem.

Esta experiência foi desenvolvida numa turma do 6º ano da Escola Básica 2 Roberto Ivens. Esta turma é constituída por vinte e cinco alunos, a sua maioria proveniente de escolas públicas oficiais, apenas três alunos oriundos de colégios particulares.

A metodologia de desenvolvimento do Projecto ICR implicou a realização de entrevistas aos alunos, no sentido de detectar e melhor perceber as dificuldades e os interesses dos alunos. A análise destes registos revelou que 99% dos alunos identificaram a resolução de problemas e a comunicação matemática como os domínios em que sentiam maiores dificuldades.

A reflexão crítica e a investigação-acção colaborativa subjacentes ao desenvolvimento do Projecto ICR orientaram a tomada de decisões e o reequacionamento do desenvolvimento habitual das aulas de matemática de uma das professoras, colocando maior ênfase no desenvolvimento de processos de pensamento matemático, na motivação dos alunos e na significatividade da aprendizagem de novos conceitos matemáticos.

Nesta abordagem, o problema é o ponto de partida e, os professores, através da resolução de problemas, devem privilegiar as conexões entre os diferentes ramos da matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos.

Todas as situações-problemas desenvolvidas em contexto de sala de aula, se identificam com a perspectiva de resolução de problemas como um meio de se ensinar Matemática.

A classificação de problemas relativos a conteúdos curriculares e à natureza ou génese do problema baseou-se em (Garcia Vázquez &Onorbe, 2006; Garrett, 1998; Watts, 1991 e Lopes, 1994). Os processos de resolução do problema, ao nível dos contextos envolvidos fundamentam-se em Watts, 1991).

2.1. Primeira Situação – Problema

Nesta situação usou-se o método por descoberta guiada.

Problema 1

Objectivo: Deduzir o valor de π (Pi).

Material: Latas com forma cilíndrica de vários tamanhos; fita métrica e régua.

O que deves fazer: Com a fita métrica em volta da tampa da lata medir o seu comprimento e registar.

Com a régua medir o diâmetro da tampa da lata e fazer o registo desse valor.

Processo de desenvolvimento da actividade: A turma dividida em cinco grupos (Foto 1).

Cada grupo tem uma lata com forma cilíndrica e de dimensões diferentes.

Calculam o quociente entre o perímetro e o diâmetro de cada lata e discutem os resultados obtidos com os outros grupos.

Problema 2

Objectivo: Fazer a planificação do cilindro.

Material: As latas da actividade anterior, fita métrica, régua compasso, tesoura, cartolina e fita-cola.

O que deves fazer: Os dados da actividade anterior, perímetro e diâmetro da tampa da lata, já estão registados, medir a altura de cada lata.

Processo de desenvolvimento da actividade: A turma dividida em grupos (os mesmo da actividade anterior) (Foto 2.).

Cada grupo mantêm a lata que tinha na actividade anterior e vais fazer a planificação.

Planificou-se a aula de forma a colocar os alunos como agentes do processo ensino-aprendizagem. A professora assumiu o papel de orientadora no decorrer do processo.

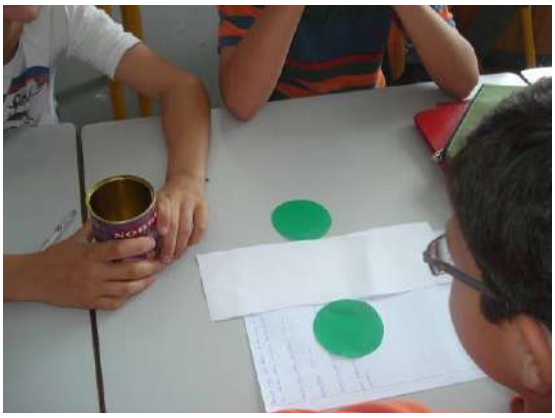
A situação apresentada estava próxima do quotidiano dos alunos, uma vez, que as várias latas, foram trazidas pelos alunos correspondentes a produtos utilizados por eles no dia a dia.

Verificou-se que os alunos participaram no processo de resolução do problema, levantando questões, confrontando resultados e discutindo em grande grupo.

No âmbito da natureza, era um problema de profundidade do conhecimento, com elevado conteúdo semântico. Quanto à possibilidade de solução, um problema aberto.

Relativamente ao tipo de dados necessários à sua resolução, temos dados quantitativos e experimentais. Em relação à origem, considera-se artificial.

Fotografia 1 – Trabalho de grupo (Problema 1).



Fotografia 2 – Trabalho de grupo (Problema 2).

2.2. Segunda situação – Problema

Nesta situação problema, pretende-se diagnosticar e trabalhar o vocabulário utilizado na operação Divisão com números inteiros e sua aplicação.

Para tal facultaram-se orientações a partir das quais os alunos elaboravam o problema, resolviam-no e faziam a crítica.

Objectivo: Trabalhar o vocabulário utilizado no conceito de divisibilidade, sua aplicação e estimular a criatividade.
Desenvolvimento: Pedir a cada aluno para inventar três problemas que envolvam a divisão (Foto 3).
No primeiro problema, a divisão não pode ter resto.

No segundo problema, deve ter resto mas a solução do problema deve estar relacionada com o quociente.

No terceiro problema, a divisão não pode ser exacta e a resposta do problema deve estar relacionada com o resto.

Depois de cada aluno ter elaborado os seus problemas, são trocados entre eles e pedido para resolverem.

Finalmente os alunos apresentam os problemas que resolveram e comentam as dificuldades encontradas, fazendo uma crítica ao enunciado.

Fotografia 3 – Planificação individual dos problemas.

Os alunos foram levados a planificar, executar e criticar os problemas elaborados e resolvidos por eles próprios.

Quando o problema não estava bem formulado, o aluno que o resolvia reformulava, fazia a sua crítica e a respectiva discussão com a turma.

Ao nível dos contextos envolvidos, uma vez que os alunos elaboravam o problema, cada aluno tratou o problema dando-lhe o significado que lhe interessou, logo classifica-se como problema apropriado.

Todos os problemas elaborados, implicaram uma resolução com base nos conteúdos já adquiridos relativamente à operação divisão.

2.3. Terceira situação – Problema

Nesta situação problema, pretende-se diagnosticar os conhecimentos sobre potências de números naturais a fim de introduzir as potências com fracções.

Objectivo: Definir potência de expoente natural
Actividade:
As notícias correm depressa….

Ao meio-dia, a Sara disse às amigas Rute e Inês: «Trago novidades. O 5º ano vai fazer uma visita de estudo.»

Ao meio-dia e cinco, a Rute e a Inês tinham contado a novidade ao Joel, ao Pedro, à Tânia e à Maria João.

E assim se espalhou a notícia: cada aluno encarregou-se de avisar dois colegas no espaço de 5 minutos.

1.Quantos alunos souberam a notícia:

1.1. às 12h10?

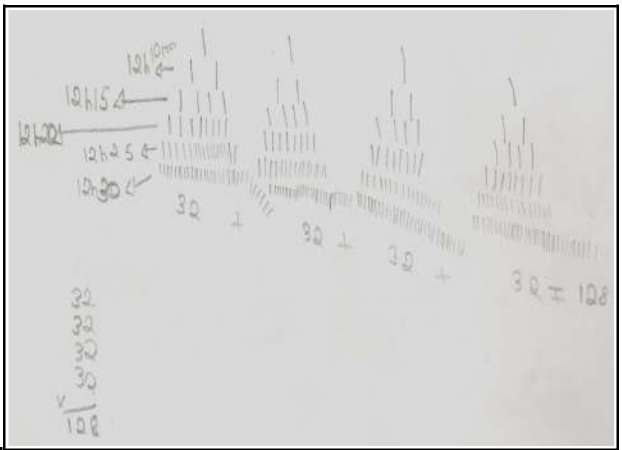
1.2. às 12h15?

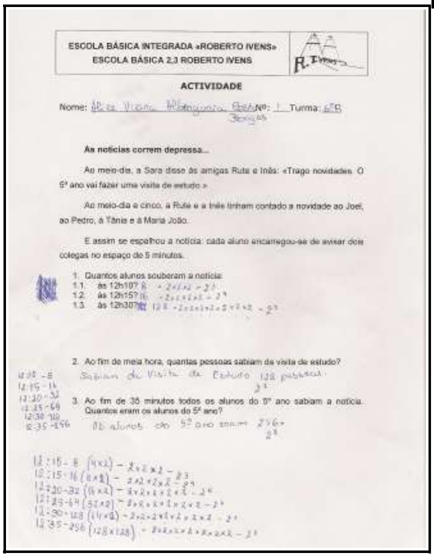
1.3. às 12h30?

2.Ao fim de meia hora, quantas pessoas sabiam da visita de estudo?

3.Ao fim de 35 minutos todos os alunos do 5º ano sabiam a notícia. Quantos eram os alunos do 5º ano?

Cada aluno resolveu individualmente, em seguida explicou á turma a sua estratégia (Foto 4).





ESCOLA BÁSICA INTEGRADA «ROBERTO IVENS»
ESCOLA BÁSICA 2,3 ROBERTO IVENS

ACTIVIDADE

Nome: ______ Nº: ___ Turma: ___

As notícias correm depressa...

Ao meio-dia, a Sara disse às amigas Ruta e Inês: «Trago novidades. O 5º ano vai fazer uma visita de estudo.»

Ao meio-dia e cinco, a Ruta e a Inês tinham contado a novidade ao Joel, ao Pedro, à Tânia e à Maria João.

E assim se espalhou a notícia: cada aluno encarregou-se de avisar dois colegas no espaço de 5 minutos.

1. Quantos alunos souberam a notícia:
1.1. às 12h10?
1.2. às 12h15?
1.3. às 12h30?

2. Ao fim de meia hora, quantas pessoas sabiam da visita de estudo?

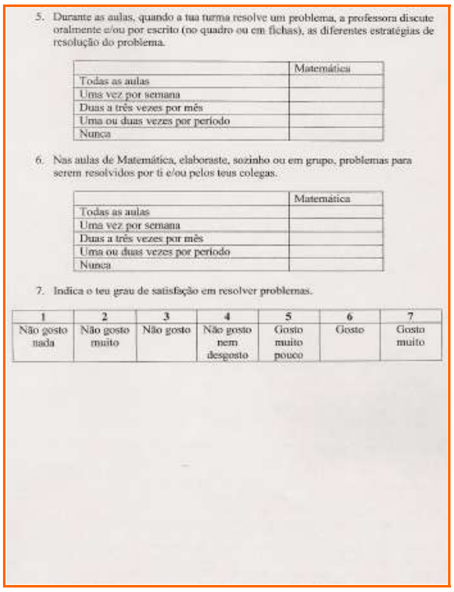
3. Ao fim de 35 minutos todos os alunos do 5º ano sabiam a notícia. Quantos eram os alunos do 5º ano?

Fotografia 4 – Exemplos de resolução dos alunos.

Em relação aos processos de resolução do problema, uma vez que não foi proposto qualquer tipo de abordagem ou dada qualquer sugestão para a sua realização, consideram-se livres.

Ao nível dos contextos envolvidos, uma vez que se tratava de uma situação que se passa muita vez entre os alunos, foi um problema com significado para os alunos, logo classifica-se como problema apropriado.

No final do ano lectivo os alunos responderam a um questionário sobre a resolução de problemas (Foto 5).



5. Durante as aulas, quando a tua turma resolve um problema, a professora discute oralmente e/ou por escrito (no quadro ou em fichas), as diferentes estratégias de resolução do problema.

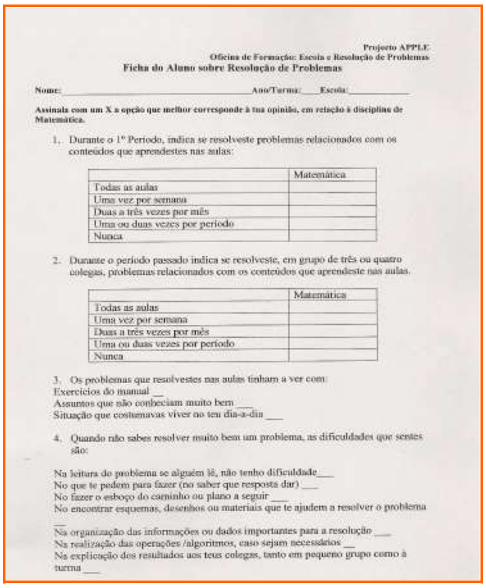
	Matemática
Todas as aulas	
Uma vez por semana	
Duas a três vezes por mês	
Uma ou duas vezes por período	
Nunca	

6. Nas aulas de Matemática, elaboraste, sozinho ou em grupo, problemas para serem resolvidos por ti e/ou pelos teus colegas.

	Matemática
Todas as aulas	
Uma vez por semana	
Duas a três vezes por mês	
Uma ou duas vezes por período	
Nunca	

7. Indica o teu grau de satisfação em resolver problemas.

1	2	3	4	5	6	7
Não gosto nada	Não gosto muito	Não gosto	Não gosto nem desgosto	Gosto muito pouco	Gosto	Gosto muito



Projecto APPLE
Oficina de Formação: Escola e Resolução de Problemas
Ficha do Aluno sobre Resolução de Problemas

Nome: ________________ **Ano/Turma:** ___ **Escola:** ________

Assinala com um X a opção que melhor corresponde à tua opinião, em relação à disciplina de Matemática.

1. Durante o 1º Período, indica se resolveste problemas relacionados com os conteúdos que aprendestes nas aulas:

	Matemática
Todas as aulas	
Uma vez por semana	
Duas a três vezes por mês	
Uma ou duas vezes por período	
Nunca	

2. Durante o período passado indica se resolveste, em grupo de três ou quatro colegas, problemas relacionados com os conteúdos que aprendeste nas aulas.

	Matemática
Todas as aulas	
Uma vez por semana	
Duas a três vezes por mês	
Uma ou duas vezes por período	
Nunca	

3. Os problemas que resolvestes nas aulas tinham a ver com:
Exercícios do manual __
Assuntos que não conheciam muito bem ___
Situação que costumavas viver no teu dia-a-dia ___

4. Quando não sabes resolver muito bem um problema, as dificuldades que sentes são:

Na leitura do problema se alguém lê, não tenho dificuldade___
No que te pedem para fazer (no saber que resposta dar) ___
No fazer o esboço do caminho ou plano a seguir ___
No encontrar esquemas, desenhos ou materiais que te ajudem a resolver o problema ___
Na organização das informações ou dados importantes para a resolução ___
Na realização das operações /algoritmos, caso sejam necessários __
Na explicação dos resultados aos teus colegas, tanto em pequeno grupo como à turma ___

Fotografia 5 – Questionário feito aos alunos.

Da análise dos questionários é de realçar os resultados quanto à satisfação dos alunos em resolver problemas. Dos 25 alunos da turma 56% responderam que gostam, 32% gostam muito, 8% não gostam, nem desgostam e apenas 4% não gosto muito.

3. Considerações Finais

O trabalho realizado no âmbito da resolução de problemas na sala de aula, foi muito interessante, motivador e gratificante, devido à partilha de experiências ao nível da Resolução de Problemas entre os alunos e a professora. O debate gerado nas aulas, que foi extremamente rico e conduziu a uma reflexão profunda nas estratégias implementadas pelos alunos.

As reflexões nas aulas, a partilha dos problemas e a busca colectiva de soluções permitiram o desenvolvimento nos alunos de um a maior auto-confiança nas aprendizagens. A análise crítica por parte dos alunos aos processos implicados na Resolução de Problemas, despertou nestes uma maior motivação e persistência na procura de soluções e a vontade de abordar e resolver problemas do dia-adia, na sala de aula.

O sucesso desta abordagem na motivação e promoção da autonomia dos alunos na prossecução das aprendizagens justificou um reforço da aplicação de problemas na introdução dos conteúdos matemáticos.

A vivência desta experiência teve, para a professora de matemática, implicações que atravessam as práticas pedagógicas quotidianas, influenciando o próprio desenvolvimento profissional. A cada actividade realizada e analisada, as ideias renovam-se, aprofundam-se e expandem-se. Ensinar matemática é uma arte, arte esta que seduz, basta comprometer-se.

Referências Bibliográficas

BARCA LOZANO, A. (1997). *Processos de aprendizaje en ambientem educativos*. Madrid: Editorial Centro de Estúdios Ramón Areces.

BRANCA, N. (1997) A. Resolução de problemas como meta, processos e habilidade básica. In KRULIK, Stephen; REYS, Robert E.; tradução: Hygino H. Domingues, Olga Corbo. *A resolução de problemas na matemática escolar*. São Paulo p. 5-12.

CUNHA, M.H. (1998) Saberes profissionais de professores de matemática: Dilemas e dificuldades na realização de tarefas de investigação (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

ECHEVERRÍA, M.P.P. e Pozo, J.I. (1998). Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. Em: Pozo, J.I. (Ed.). *A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender* (pp. 13-42). Porto Alegre: Artmed.

GARCIA VÁZQUEZ, R. M.; OÑORBE, A. (2006): "*Resolución de problemas*", en. Alambique. Didáctica de las Ciencias, Experimentales nº 48.

GARRET, R.M. (1998). Resolución de problemas y creatividad: implicaciones para el currículo de ciências. Enseñanza de las Ciencias, 6 (3). 224-230.

GAZIRE, E.S. (2001) *Resolução de Problemas: Perspectivas em Educação Matemática.* Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Rio Claro: UNES

LOPES, J. (1994): *Resolução de Problemas em Física e Química*. Lisboa: Texto Editora.

MARINCEK, Vânia. (2001) *Aprender Matemática Resolvendo Problemas*. Série Cadernos da Escola da Vida; 5. Porto Alegre: Artmed.

MENDES, E.J. (1997). A actividade matemática escolar numa perspectiva investigativa e exploratória na sala de aula (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO, Norma S. G. (2004) Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In BICUDO, Maria Aparecida V.; BORBA, Marcelo de Carvalho (orgs.). *Educação matemática: pesquisa em movimento*. São Paulo: Cortez, p.213-231.

SEGURADO, M.I. (1997). A investigação como parte da experiência matemática dos alunos do 2º ciclo (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

SMOLE, K. S. e DINIZ. M. I. (2001) **Ler, escrever e resolver problemas**. Porto Alegre. Artmed.

SOUSA, F. e VALADÃO, F. (2008). Que relevância reconhecem as crianças no currículo: Trilhando um percurso de investigação-acção. In C. Cunka, C. Antunes, F. Viana, J. Machado, J. Formosinho e P. C.Martins (orgs.) *Infâncias Possíveis, Mundos Reais: Actas do 1º Congresso Internacional Em Estudos da Criança*. Braga: Universidade do Minho.

VAN DE WALLE, J. A.(2001) *Elementary and Middle School Mathematics*. New York: Logman.

WATTS, M. (1991): *The science of problem-solving*. Londres: Cassell Education.

EDUCAR MATEMATICAMENTE PARA QUESTIONAR O MUNDO...PORQUÊ?

Helena Gerardo, Escola Secundária Sá da Bandeira
Bolseira de Doutoramento da Fundação para a Ciência e a tecnologia

Introdução

Na sociedade em que vivemos, as aplicações da matemática são uma constante na vida do cidadão, regulando as suas vidas e tendo implicações sobre as mesmas. Importa educar matematicamente os alunos para participarem activamente numa sociedade formatada pela matemática. É necessário que os professores estejam conscientes do poder da matemática escolar e não escolar e que consigam passar da intenção à acção, levando para a sala de aula propostas que incluam o social e o político.

Como educadores e investigadores não podemos ficar pela intenção de educar os alunos para conseguirem questionar o mundo com a Matemática. Mas o que significa questionar o mundo com a Matemática? Que factores contribuem para a necessidade de conseguirmos fazer o questionamento do que nos rodeia usando a Matemática como uma ferramenta de análise? Pensando na escola e na sala de aula, como passar da intencionalidade à acção? Que vantagens e constrangimentos são observados quando levamos para a sala de aula tarefas de natureza social e política? E valerá mesmo a pena?

Questionar o Mundo...

Começando por desmontar o significado do verbo questionar, podemos por exemplo pensar em fazer perguntas a alguém sobre um assunto, contestar, discutir, interpelar e discordar. O que significa questionar o mundo com a Matemática? Que factores contribuem para a necessidade de conseguirmos fazer o questionamento do que nos rodeia usando a Matemática como uma ferramenta de análise?

Questionar o mundo com a Matemática pode significar usar o conhecimento matemático para contestar, discutir e descodificar informações e outras representações, para analisar fenómenos e identificar relações e estabelecer conexões entre eles. Trata-se de problematizar para interpretar o que nos rodeia. Esta interpretação é o que Gutsein (2006a) considera necessário para que cada cidadão compreenda as condições sociopolíticas, históricas e culturais da sua vida, bem como da sua comunidade, da sociedade e do mundo. Esta compreensão resultará da leitura do mundo com a

Matemática que ele caracteriza por usar a Matemática para entender as relações de poder, as desigualdades nos recursos, as diferenças nas oportunidades entre grupos sociais, a discriminação baseada na raça ou género ou linguagem. A leitura do mundo com a Matemática é uma condição para a redução de desigualdades e para a justiça social.

Em Frankenstein (2006), o questionarmos e lermos o mundo com a Matemática é uma necessidade para interpretarmos, transformarmos e desafiarmos as desigualdades sociais. Este questionar e ler é o que ela designa por literacia crítica em Matemática e que contempla quatro objectivos: 1) compreender a Matemática; 2) compreender a Matemática do conhecimento político; 3) compreender a política do conhecimento matemático e 4) compreender a política do conhecimento.

A compreensão dos conceitos e conhecimentos matemáticos é necessária para a aplicação dos mesmos como por exemplo no cálculo de percentagens e de razões. Frankenstein (2006) considera que esta compreensão poderá resultar se criarmos oportunidades para os alunos problematizarem e questionarem várias situações. Eles aprendem melhor a resolver problemas se puderem experimentar a criação de problemas.

Compreender a matemática do conhecimento político é perceber como é que as capacidades e os conceitos matemáticos são usados para entender as estruturas institucionais da sociedade através da compreensão dos diferentes tipos de descrições numéricas no mundo (como fracções e gráficos) e o significado da dimensão dos números. Trata-se de entender melhor as informações e os argumentos e ser capaz de questionar as decisões envolvidas em escolher certos números e operações.

A compreensão da política do conhecimento matemático está relacionada com as lutas de poder manifestadas ao longo da nossa história. Por exemplo, os mapas utilizados transmitirão imagens fiéis dos vários continentes ou uns estarão aumentados intencionalmente em relação a outros? Esta lutas de poder associadas a lutas políticas envolvem escolhas como o tipo de dados a recolher, que números representam os dados de forma credível e fiel, que definições devem orientar a contagem dos dados, quais os métodos de recolha dos dados, quais as variáveis a valorizar e como tornar públicos os resultados.

Pensando na Educação Matemática Escolar...

Freire (1987) considera que a educação não pode ser o depósito de conhecimentos, como preconiza a educação bancária, mas sim a problematização dos homens em suas relações com o mundo para descodificar e conhecer as representações das situações. Mais do que conseguir resolver problemas, importa que a educação contemple a problematização e o questionamento.

Problematizar e questionar de forma sistemática é uma forma de analisar criticamente a realidade. O conhecimento matemático constitui uma ferramenta de análise. Mas que conhecimento matemático? Que saber matemática contribui para este questionar do mundo?

Para questionarmos o mundo usando a Matemática como ferramenta de análise, torna-se pertinente repensar o saber Matemática. Freire (1987) recorre aos termos literacia e materacia crítica para referir que o saber matemática não consiste em promover o ensino do pensamento nos alunos porque eles sabem pensar, mas sim partilhar as nossas formas de pensar, uns com os outros, e juntos procurar o melhor caminho para descodificar o objecto.

Outros investigadores usam termos diferentes para descrever este saber Matemática. Zevenbergen (2002) utiliza o termo numeracia, para se referir ao saber matemático, e que inclui uma numeracia técnica relacionada com processos de cálculo e de medida, um conhecimento prático que consiste no ser capaz de aplicar o conhecimento técnico, e um conhecimento crítico e emancipatório relacionado com a utilização dos conhecimentos técnico e prático no desenvolvimento da crítica social e ideológica.

Skovsmose (1994) utiliza o termo literacia e que engloba três formas de consciência: matemática, tecnológica e reflexiva. A matemática diz respeito às competências relacionadas com a capacidade de reproduzir pensamentos, teoremas e demonstrações, aplicar algoritmos, inventar e descobrir novas teorias. A tecnológica refere-se à aplicação de métodos formais matemáticos para concretizar objectivos claramente tecnológicos. A reflexiva relaciona-se com a avaliação e discussão do que é considerado um objectivo tecnológico, das consequências sociais e éticas resultantes da concretização de um objectivo através dos métodos formais matemáticos seleccionados. O saber Matemática para a sociedade actual resultará da conjugação equilibrada entre estas formas de consciência. Cada uma por si só não é condição suficiente para lermos o mundo e reagirmos enquanto cidadãos pertencentes a uma determinada sociedade.

A aprendizagem para este questionar e ler o mundo recorrendo à Matemática é um processo social com exigências para os professores como novas competências relacionadas com aspectos sociais, económicos, políticos; nova identidade profissional porque além de ser professor de uma disciplina específica também será um educador; engajamento diferente na profissão e prática profissional na escola e na sala de aula; e nova relação com o saber e com os alunos através das preocupações com questões e situações reais do contexto sócio – económico e político da sociedade e do meio em que está inserida a escola.

Se os professores estiverem conscientes do papel da Matemática na sociedade, da importância de auxiliar os alunos no reconhecimento, compreensão e crítica das aplicações matemáticas, e tiverem intencionalidade de exercer uma prática que promova a justiça social Matemática escolar, então, mesmo com o actual currículo, podem pensar em práticas pedagógicas, metodologias, materiais, tarefas e formas de usar os manuais que vá ao encontro da leitura do mundo com a Matemática.

A problematização e o questionamento são práticas pedagógicas que para Freire (1987) promovem a consciência de intervenção crítica na sociedade, mostra aos alunos que podem se mudadas e melhoradas as suas condições iniciais de vida. Gutstein (2006a) considera que estas práticas partem do presente e existente, reflectindo as expectativas de cada um. Abre-se um espaço de debate onde os alunos colocam questões sobre aspectos sociopolíticos, justiça e igualdade. Aos alunos é proporcionada oportunidade para analisarem e questionarem múltiplas perspectivas com a finalidade de construírem as suas opiniões e compreenderem as opiniões de outros.

Poucos são os educadores que ainda preconizam o ensino tradicional de exposição de conteúdos e mecanização. Mas, em algumas salas de aula ainda prevalece o paradigma do exercício. Como alternativa a este paradigma, Bishop (2001) sugere metodologias diversas: trabalhos em pequenos grupos, que promovem a entreajuda e o progresso entre os alunos; trabalhos de projecto porque ajudam a perceber que existem fortes relações entre a matemática e a sociedade; investigações matemáticas para promover a criatividade, trabalho exploratório e ideias matemáticas; e discussão em grande grupo ou debate.

Os projectos surgem com grande relevância em Ernest (2001), que considera ser uma oportunidade para os alunos questionarem, tomarem decisões, discutirem e argumentarem perante conflitos de opiniões e pontos de vista divergentes, sugerindo projectos socialmente relevantes, actuais e autênticos, contrariando a ideia de trabalhar na semi-realidade mencionada em Dowling (2001) e que Skovsmose (2005) designa por realidade virtual. Esta realidade encontra-se nos tradicionais exercícios de matemática sobre situações artificiais, desvalorizando variáveis que os torne menos exactos, relacionadas com compras, preços, dinheiro, pagamentos, trocos, velocidades, acelerações e distâncias. Se os alunos colocarem questões com intenção de introduzir aspectos reais, os professores tentarão levá-los a ignorar esses aspectos dado que pode constituir uma obstrução à actividade. É uma realidade que não corresponde à matemática do dia-a-dia com a qual nos deparamos.

Skovsmose (1992) propõe um conjunto de cenários para a sala de aula, e considera que os professores não poderão ficar limitados a um único cenário, devendo recorrer ao cenário que mais se adequará aos objectivos de aprendizagem. Pretendendo uma aprendizagem da Matemática relacionada com a realidade social, política, económica e cultural da sociedade, e com objectivo de formar futuros cidadãos mais críticos, reflexivos, interventivos e participativos na vida democrática da sociedade, os cenários de investigação baseados em projectos e na modelação matemática parecem ser os que melhor contribuirão para se atingir aquele objectivo e promover aquela aprendizagem em Matemática.

Tanto os projectos como a modelação, para favorecerem a compreensão da relação entre Matemática e sociedade, serão baseados em situações problemáticas reais, actuais e com significado para o contexto de um determinado grupo de alunos, havendo concordância em Skovsmose (1994) quanto à possibilidade da modelação matemática e dos projectos estabelecerem a ligação entre os conceitos matemáticos e a realidade empírica.

Através destas metodologias, o professor encoraja os seus alunos a argumentarem, promove e orienta discussões ou debates em grande grupo, dá liberdade aos alunos para criarem representações simbólicas e terminologias diferentes das formais, sensibiliza para a necessidade de se simplificar a escrita, as tentativas e o erro são considerados processos necessários e importantes para o trabalho, ajuda a conhecer e compreender as bases de certos algoritmos, estabelece relação entre a realidade da sociedade e as ideias matemáticas envolvidas, promove a análise de soluções alternativas e diferentes, pode recorrer a aspectos da história da matemática para mostrar que outros passaram por trabalhos semelhantes, incentiva os alunos a apresentarem os seus resultados perante a turma e estimula a imaginação matemática quando leva os alunos a recorrerem a figuras ou esquemas na sistematização de ideias.

A modelação constitui uma oportunidade para resolver problemas orientados em torno de um tema que é proposto aos alunos. Estes terão de passar pelas diferentes fases do processo de modelação, tomando decisões e fazendo escolhas, por exemplo sobre as variáveis a considerar e sobre os pressupostos fundamentais para o modelo. A modelação faz descobrir a relação que existe entre a Matemática e o poder de decisão, promove a imaginação através da liberdade que os alunos têm para criarem situações hipotéticas e conjecturas alternativas sobre a situação ou problema em estudo, favorece a identificação e compreensão da forma como a Matemática modela um extenso número de fenómenos sociais, e fundamentalmente leva os alunos a reconhecerem o importante papel formatador da Matemática dado que há um elevado número de modelos matemáticos que são uma realidade na sociedade.

Para Matos e Santos (2002), as práticas escolares em Matemática têm de ser compreendidas e desenvolvidas em termos de pessoas em acção numa sociedade global que está em transformação, ideia que é partilhada por Popkewitz (2002). Os projectos e a modelação, quando baseados em problemas e temas reais, parecem caminhar para essa prática escolar.

Perrenoud (2005) analisa as competências e conclui que saber analisar e assumir a complexidade é uma competência essencial dado que se não compreendermos a realidade social pode surgir perturbação, medo, retracção e desinteresse. Para desenvolver esta competência, sugere que se recorra a métodos activos, projectos, problemas abertos e situações problemáticas reais, como a modelação. Trata-se de formas que colocam os alunos perante situações que exercitam a mobilização de saberes adquiridos e a assimilação de outros saberes.

Além das práticas pedagógicas de questionamento e problematização, dos trabalhos de projecto e modelação, e de propostas de tarefas baseadas em materiais reais para analisar aspectos sociopolíticos da sociedade, os manuais escolares constituem outro material para a sala de aula e que são elaborados seguindo orientações e respeitando tanto quanto possível o currículo, legitimando os conhecimentos oficiais, como refere Apple (1997).

Embora exista uma aceitação do papel dominante dos manuais na sala de aula, pouco se questiona e se crítica sobre as fontes ideológicas, políticas, económicas e culturais em que assentam os conteúdos dos manuais. Skovsmose (1994) compara a utilização dos manuais com o papel de guia turístico, onde os alunos são guiados pelo professor e manual como os turistas são guiados pelo seu guia. É uma utilização irreflectida do manual, com preocupação única de chegar ao fim do manual para sentir que a tarefa por aquele ano lectivo foi cumprida. Este facto é o que Zabalza (2000) designa por efeito de hipertrofia funcional porque os livros de texto ultrapassam a sua função, condicionando o quê, o como e o quando de cada passo da planificação, usando e abusando dos manuais.

Concluindo...

Na sociedade actual não é suficiente saber ler, escrever e ter boas capacidades matemáticas descontextualizadas. Frankenstein (2006) considera que a aprendizagem sobre o mundo, sobre filosofia e psicologia, sobre justiça social e igualdade é necessária para um melhor entendimento da nossa vida com outros no mundo e sobre o mundo.

Como diz Frankenstein (2006), todas as pessoas têm conhecimento, continuamente criam novos conhecimentos e realizam trabalho intelectual mas todos temos muito para aprender. Para ajudarmos os alunos a ler o mundo com a Matemática é urgente aprendermos a ultrapassar constrangimentos como os receios de não cumprir as planificações, a preparação dos alunos para o exame nacional, as pressões dos órgãos de gestão da escola e dos pais, e os assuntos que o professor não domina tão fluentemente. Ultrapassando estes e outros constrangimentos é possível que a intencionalidade de promover o questionamento, a transformação, participação e intervenção social pela

Matemática escolar se torne acção e reflexão para uma leitura plena do mundo e para a redução das desigualdades sociais.

Gutstein (2006b) propõe que os professores usem uma abordagem que procure desenvolver uma profunda compreensão da sociedade e que prepare os alunos para serem reflexivos e críticos, participantes e transformadores na vida no mundo e com o mundo. Sugere também que se comece sem receio e pouco a pouco, fundamentado as intenções e acções com base nos documentos oficiais, procurando referências ao pensamento crítico e reflexivo e à participação plena na sociedade.

Com o actual currículo podemos começar a dar alguns passos no sentido de uma mudança de prática. Havendo intencionalidade de trabalhar uma educação matemática numa perspectiva de integração de futuros cidadãos mais participativos na sociedade, a partir de uma abordagem mais crítica e reflexiva de determinados conteúdos, é possível promover uma aprendizagem mais significativa desses conteúdos, incutir nos alunos o interesse por questionar, reflectir, analisar, criticar e propor transformações em torno de assuntos do seu contexto, e estabelecer elos de ligação entre os conteúdos matemáticos que se trabalham dentro da sala de aula com os problemas económicos, sociais, políticos e culturais actuais.

Mudar para uma prática profissional de educação matemática com a perspectiva de incluir o social, o económico e o político, não é fácil, demora o seu tempo, com tensões e contradições, com avanços e retrocessos. Se pensarmos nas vantagens desta mudança quer para os professores, quer para os alunos e para a sociedade, parece valer a pena tentar enfrentar os riscos e receios que essa mudança envolve e começar desde já a dar os primeiros passos.

Referências Bibliográficas:

Bishop, A. (2001). What values do you teach when you teach mathematics? In P. Gates (Ed.) *Issues in Mathematics Teaching.* London: Routledge.

Dowling, P. (2001). Reading mathematics texts. ? In P. Gates (Ed.) *Issues in Mathematics Teaching.* London: Routledge.

Ernest, P. (2001). Critical mathematics education. ? In P. Gates (Ed.) *Issues in Mathematics Teaching.* London: Routledge.

Frankenstein, M. (2006). Reading the world with math. In Gutstein, E., Peterson, B. (Eds) *Rethinking mathematics: teaching social justice by the numbers*. Wisconsin: Rethinking Schools, LTD

Freire, P. (1987). *Pedagogia do Oprimido.* Rio de Janeiro: Paz e Terra.

Gutstein, E. (2006a). *Reading and writing the world with mathematics: Toward a pedagogy for social justice.* New York: Routledge

Gutstein, E. (2006b). Teaching math across the curriculum. In Gutstein, E., Peterson, B. (Eds) *Rethinking mathematics: teaching social justice by the numbers*. Wisconsin: Rethinking Schools, LTD

Matos, J. F., Santos, M. (2002). Educação Matemática e (in) justiça social: uma agenda de investigação necessária. *Actas do XIII Seminário de Investigação em Educação Matemática.* Lisboa: APM/Fundação Calouste Gulbenkian.

Perrenoud, P. (2005). *Escola e Cidadania: O Papel da Escola na Formação para a Democracia.* Porto Alegre: Artes Médicas. (Trabalho original publicado em Francês em 2003.)

Popkewitz, T. (2002). Whose heaven and whose redemption? The alchemy of the mathematics curriculum to save. *Proceedings of the Third International Mathematics Education and Society Conference.* Denmark: Centre for Research in Learning Mathematics.

Skovsmose, O. (1992). Democratic competence and reflective knowing in mathematics. *For the Learning of Mathematics, 12 (2).*

Skovsmose, O. (1994). *Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education.* Dordrecht: Kluwer.

Skovsmose, O. (2005). *Travelling Through Education: Uncertainty, Mathematics, Responsibility.* Rotterdam: Sense Publishers.

Zabalza, M. (2000). *Planificação e Desenvolvimento Curricular na Escola.* Lisboa: Edições Asa.

Zevenbergen, R. (2002). Citizenship and numeracy: implications for youth, employment and life beyond school yard. *Quadrante, XI (1),* 29-39.

PENSAR A FAMÍLIA NA AULA DE MATEMÁTICA

Helena Gerardo, Escola Secundária Sa da Bandeira
Bolseira de Doutoramento da Fundação para a Ciência e a tecnologia

Educando para a Participação Social

A escola é uma instituição social que visa promover conhecimento. A justiça social está relacionada com um poder social a que o cidadão deverá ter acesso para participar de forma activa na sociedade (Cotton, 2001). A educação escolar constituirá um caminho para obter esse poder?

Segundo Ernest (2002), a educação proporcionada nas escolas deve desenvolver uma atitude crítica nos alunos caracterizada por fazer juízos cuidadosos, usar todas as evidências disponíveis, fazer raciocínios e argumentações equilibrados para avaliar situações e chegar a conclusões, apresentar desafios e questões que desafiem explicações e pontos de vista tradicionais e pensar de forma independente. A atitude crítica surgiu com o crescimento do conhecimento científico, com o rápido e grande desenvolvimento tecnológico e da informação, exigindo preparação e abertura para a mudança de ideias e conhecimentos existentes considerados válidos.

Bourdieu (citado em Skovsmose, 1994) considera que a educação tem um poder simbólico manifestado através da linguagem oficial e das normas impostas nos currículos que obrigam a eliminar as linguagens individuais, tornando os alunos num colectivo com a mesma linguagem. Com este poder, a educação perde a sua inocência e neutralidade porque são impostos e uniformizados valores e culturas, condicionando os projectos de vida de cada um ao nível da elaboração e da concretização e contribuindo para a não inclusão na sociedade.

Ambrósio (1999) considera urgente reinventar a educação porque esta é um campo de intervenção social que contribui para a construção de uma sociedade, e argumenta que a educação básica não se pode resumir a saberes descontextualizados necessários para o prosseguimento de estudos ou para uma profissão específica. A educação básica terá de desenvolver capacidades de inserção social, de intervenção na transformação social de forma participada e reflexiva e de compreensão de tudo o que rodeia os alunos.

De que forma poderá a Matemática escolar contribuir para responder às necessidades da realidade social, de formação de cidadãos livres capazes de julgarem com espírito crítico o meio social em que estão integrados e de o transformarem, conforme preconiza o artigo 2º na Lei nº 49/2005 (Lei de Bases do Sistema Educativo)?

Participação Social pela Educação Matemática

A relevância da Matemática foi aumentando de forma significativa pelo crescente número das suas aplicações em áreas diversas como a medicina, biologia, economia, arquitectura, engenharia, astronomia, geografia e artes. O cálculo do índice de massa corporal é um exemplo de uma aplicação da Matemática na medicina que surge com frequência em meios de informação como revistas e jornais generalistas.

A biologia recorre a modelos matemáticos para efectuar previsões relativas à evolução das espécies e aos efeitos dos vários tipos de poluição, no cálculo das condições ideais de ambiente para criarem espécies em cativeiro ou até para manter os golfinhos e leões-marinhos em tanques para demonstrarem as suas habilidades ao público ou fazerem parte da terapêutica de certas enfermidades. Em economia existem modelos para determinar valores de taxas e portagens, preços de água e luz, impostos, bem como para prever e analisar a situação económica de um país.

Os modelos, muitas vezes, são respostas a pedidos de um governo com intencionalidade de ir ao encontro das suas ideologias que, nem sempre, favorecerão certas classes sociais. O imposto sobre o valor acrescentado é um exemplo de uma injustiça porque todos pagam o mesmo valor quando adquirem um bem, independentemente da sua condição social e económica. Porém, trata-se de um imposto que só é pago pelo utilizador ou consumidor. No entanto, os responsáveis pela sua introdução na sociedade não o fizeram com neutralidade, tinham uma intenção bem definida e sabiam que a sua aplicação era injusta, contrariando a bondade de ajudar os que mais precisam.

A presença dos modelos matemáticos no nosso quotidiano nem sempre está explícita nem evidente de forma que muitos não são reconhecidos ou identificados pelo cidadão. A construção de um modelo é feita por etapas, baseada em interpretações da realidade e assenta em determinados pressupostos que tipicamente não são clarificados no resultado final. O modelo pode ser usado ou aplicado directamente por alguns cidadãos e ter uma aplicação indirecta através das suas implicações na vida de outros cidadãos. Uns constroem, outros aplicam e outros estão sujeitos aos seus resultados sem qualquer intervenção directa no modelo.

O utilizador do modelo poderá não conhecer os pressupostos que deram origem ao modelo, mas aplica-o confiando que o modelo será justo e que representará da melhor forma possível a realidade em estudo. Ora, a realidade é complexa e há variáveis que são consideradas significativas e valorizadas enquanto outras são desprezadas na construção do modelo. Será que o utilizador conhece quais as variáveis que foram ignoradas e porquê? Como são tomadas as decisões necessárias? Quais os seus argumentos e fundamentos? Será que faz uma reflexão crítica dos resultados obtidos?

Há decisões a tomar durante a construção do modelo que envolvem conhecimentos científicos, factores sociais, culturais, económicos e políticos. Skovsmose (1994) considerou que o processo de modelação passa pela identificação do problema, estrutura da argumentação, bases sociais para criticar e corrigir, e possível alcance das acções resultantes. A identificação de um problema, por um lado, depende do desenvolvimento da sociedade ou região a que se reporta. Em algumas situações o traçado de uma nova auto-estrada ou ponte pode constituir um problema, e em outras situações poderá estar em análise a simples instalação de redes de saneamento básico. Por outro lado, a sensibilidade para determinadas questões sociais não se manifesta de forma equitativa nos cidadãos e nos responsáveis pela identificação dos problemas, como tal, o que constitui problema para uns pode não o ser para outros.

Na estrutura da argumentação, os responsáveis pelo modelo fazem uma interpretação da realidade e determinam quais os aspectos que irão valorizar ou desprezar, dado que não é viável considerar todas as variáveis. Um modelo não é a realidade, é apenas uma aproximação da realidade em estudo. Esta interpretação do real é influenciada pelo background e foreground de cada elemento envolvido no processo e pelos interesses políticos para uma sociedade. As bases sociais que servirão para a reformulação do modelo poderão ser determinadas em função de interesses políticos ou económicos, já que os custos relacionados com a sua aplicação irão influenciar a necessidade de ser corrigido ou não, no sentido de melhorar o modelo com minimização de custos.

Enquanto a aplicação de um algoritmo existente não apresenta grandes dificuldades e exige competências ao nível da linguagem simbólica e da utilização de meios tecnológicos, a desformatação dos modelos com o desocultar das intenções associadas às decisões, já exige conhecimentos que vão além do saber aplicar um algoritmo.

A Matemática não escolar tem um poder social, económico e político que está associado ao elevado número de aplicações matemáticas na sociedade que regulam a vida de cada um de nós mas que nem todos estão conscientes que essas aplicações têm implicações ao nível das suas vidas e da participação plena na sociedade.

A relevância da Matemática na sociedade leva-nos a pensar que a Matemática escolar deve auxiliar os alunos a verem a Matemática como uma ferramenta que lhes permitirá identificar, compreender, avaliar e criticar vários modelos usados no quotidiano. Peterson (2006) refere que as crianças necessitam de todas as ferramentas possíveis para ajudarem a construir um mundo melhor, sendo a Matemática uma dessas ferramentas que promove a compreensão e a interacção com o mundo e com outras disciplinas.

O Abono de Família na Aula de Matemática

Durante o ano lectivo de 2008/2009, foi desenvolvida uma investigação-acção como participação, no âmbito de um estudo de doutoramento tendo como problema: identificar e caracterizar formas possíveis de intervenção na educação matemática numa perspectiva de cidadania e inclusão social com o actual currículo. Envolveu 2 turmas de 9º ano de escolaridade e duas professoras. Durante o processo de investigação foram implementadas algumas tarefas na sala de aula. Uma sobre a floresta tropical sobre o abono de família.

O abono de família, como assunto a estudar na aula de Matemática, surgiu após sessões de discussão e reflexão com as professoras participantes, onde foram pensados vários assuntos como o IRS e o desemprego. Nestas sessões de trabalho foram olhados materiais para a sala de aula que incluíam o social e o político para promover um olhar crítico face aos assuntos abordados e, com isso, despertar nos alunos a curiosidade epistemológica (Freire, 1987) para questionarem e problematizarem o que os rodeia, para lerem e interpretarem o mundo com a Matemática e assim participarem de forma mais activa como cidadãos. Também foram analisados os manuais adoptados na escola com a finalidade de neles procurar ideias a partir das quais fosse possível trabalhar este questionar do mundo com a Matemática.

O assunto abono de família foi então um dos seleccionados para um pequeno trabalho de projecto nas duas turmas do 9º ano. Este trabalho incluiu quatro tarefas. Na primeira tarefa os alunos tinham duas notícias reais, um comunicado de imprensa onde a CGTP criticava as alterações ao modelo de atribuição do abono de família, e uma notícia da agência Lusa onde a Associação Portuguesa das famílias numerosas criticava a atribuição de certos benefícios às famílias monoparentais. Após a leitura destas notícias tinham de pensar e responder a três questões: 1) Que problemas consegues identificar após a leitura que efectuaste?; 2) Que argumentos são usados para justificar os problemas referidos?,e 3) Concordas com os argumentos usados?

Na segunda tarefa foi proposto aos alunos que consultassem o portal do cidadão como forma de conseguirem aprender mais sobre o assunto e para melhor entenderem as críticas apresentadas nas notícias. Esta consulta foi orientada com sugestões de procurarem informação sobre o que é o abono de família e a quem se destina,variáveis em função das quais o valor do abono é determinado, escalões, como identificar o escalão para uma família qualquer e conceitos importantes. Ainda nesta tarefa, foi pedido que usassem o simulador incluído no portal, para realizarem simulações fazendo variar o agregado familiar e o rendimento, usando uma tabela para preencherem com os resultados obtidos. Depois das simulações realizadas, solicitou-se que observassem os valores obtidos e reflectissem em torno de certas questões: Quando o rendimento mensal duplica, mantendo o número de filhos, o valor do abono também duplica? O que sucede? Se dividíssemos o rendimento do agregado pelo número de crianças adicionado de dois em vez de adicionado de um como está no modelo, haveria alteração dos escalões? Em que situações? Consideras que este modelo é justo para todas as famílias? Porquê?

A terceira e última tarefa consistiu na discussão, em cada grupo de alunos e depois na turma, sobre possíveis alterações a este modelo de atribuição do abono de família tendo em vista a resolução dos problemas referidos nas notícias e outros que eles identificaram, bem como a apresentação de sugestões para que o modelo se tornasse mais adequado às desigualdades económicas e sociais da nossa sociedade e mais justo. Esta discussão também foi orientada com aspectos a pensarem como novas variáveis a incluir, aumentar ou reduzir o número de escalões, rever as idades, modificar a fórmula de cálculo usada para definir o escalão a que uma família pertence e outras que considerassem importantes e necessárias.

Na turma A o trabalho foi desenvolvido em duas aulas de 90 minutos, uma de Matemática e outra de Área de Projecto. Na turma B a tarefa foi realizada em três aulas, uma de Matemática com 90 minutos e duas de Formação Cívica com 45 minutos cada.

Na primeira tarefa, os alunos mostraram muita dificuldade na leitura e interpretação das notícias que resultou da muita informação numérica incluída na primeira notícia e de existirem termos do vocabulário que os alunos desconheciam. A professora foi orientando a leitura e esclarecendo os termos desconhecidos dos alunos sempre que estes o solicitavam ou que ela suspeitava que eles não conheciam mas que por alguma razão não pediam esclarecimento. No entanto, os alunos revelaram muita dificuldade em identificar os problemas, em darem opinião e argumentarem os seus posicionamentos.

No início da segunda tarefa, já com recurso ao computador, os alunos começaram por consultar o portal do cidadão e em seguir as orientações dadas. Sobre o conceito de abono de família e a quem se destina não mostraram dificuldades porque estava muito explícito. Revelaram dificuldade em identificar as variáveis envolvidas porque no portal não aparece um tópico com as variáveis, eles é que tinham de identificar alguns aspectos lá referidos como variáveis. Não conseguiram fazer a ponte de ligação entre o conceito de variável, trabalhado nas aulas de matemática, e as variáveis ali referidas de forma implícita. A identificação da fórmula matemática usada para determinar o escalão do abono também não foi um processo fácil. Conseguiram ver quais os escalões mas demonstraram estar confusos sobre onde e qual seria a fórmula. Os conceitos foram identificados mas copiaram a definição sem mostrarem grande entendimento sobre o significado dos mesmos.

Na simulação foi necessário esclarecer que o rendimento era anual e que para o calcularem deveriam multiplicar o rendimento mensal por 14. Este facto foi novidade para muitos alunos que consideravam que o rendimento anual seriam apenas 12 meses. A partir deste esclarecimento, iniciaram a aplicação do simulador sem qualquer dificuldade e foram comentando entre eles os resultados obtidos, umas vezes manifestando admiração pelo valor encontrado, outras por repararem que as famílias ganhando muito mais acabavam por receber o mesmo ou um pouco menos que outras.

Na última tarefa, discussão entre os elementos do grupo e na turma, observou-se um grande engajamento dos alunos no debate, quer manifestando as suas opiniões sobre os resultados e as conclusões a que foram chegando, quer apresentando sugestões. Sugeriram que os sinais exteriores de riqueza deveriam ser incluídos como uma nova variável a incluir. Os escalões também teriam de ser revistos, talvez acrescentando mais escalões fosse possível corrigir as injustiças que identifcaram. Surgiu uma proposta para alteração das idades, em lugar da distinção ser apenas nos 12 meses, consideraram que deveria ser dos 0 aos 12 meses, dos 13 meses até aos 4 anos, dos 5 aos 14 anos e por fim dos 15 aos 18 anos. Estas divisões por idades foram sempre acompanhadas de argumentação muito pertinente. A modificação da fórmula usada só foi referida depois de serem alertados e questionados sobre o assunto mais directamente.

Reflexões Finais

Pensando nos professores, foi necessária muita disponibilidade para participação nas sessões de trabalho, bem como para lerem os artigos sugeridos durante a investigação para a conscientizaçao do papel formatador da matemática na sociedade e da importância de se levarem estas questões sociais reais para a sala de aula. As leituras realizadas também permitiram olhar para conceitos como a cidadania, a participação social e a emancipação, de uma outra forma mais interventiva e crítica, bem como pensar um pouco em torno do saber Matemática.

Surgiram constrangimentos ao longo da investigação, para a própria investigação e para um trabalho continuado com os alunos. A organização curricular foi um dos constrangimentos identificado nas entrevistas com as participantes, levando-as a não inovarem muito as suas práticas nesta vertente do social e político. A dificuldade de consenso sobre várias questões como o que é ter sucesso em Matemática ou o que deve ser saber Matemática foi outro constrangimento. O maior constrangimento identificado foi a falta de tempo o que Hargreaves considera ser uma consequência da intensificação de tarefas na escola e que é confundida com profissionalismo. As características das turmas foi outro factor referido pelas participantes como condicionante de um trabalho inovador, de reflexão e questionamento.

Além de constrangimentos, podemos falar em riscos e receios como as culpas persecutória e depressiva (Hargreaves, 1998), o cumprimento das planificações, os exames nacionais, as pressões e a insegurança. A culpa depressiva quando se faz algo diferente e somos criticados pelos nossos pares, a depressiva quando abdicamos de fazer o que acreditamos ser o melhor e sofremos um descontentamento profissional.

Apesar dos constrangimentos, riscos e receios observados, concordamos com Gutstein (2006) quando considera que levar para a sala de aula de Matemática propostas de trabalho sobre modelos matemáticos reais, actuais, significativos e problemáticos promove o reconhecimento do poder da Matemática como uma ferramenta de análise e mudança, a compreensão de aspectos sociais, económicos e políticos, do próprio poder na construção de uma sociedade mais justa, ser capaz de desempenhar um papel mais activo na sociedade e mais motivação pela aprendizagem da Matemática.

Frankenstein (2006) refere como vantagem deste tipo de propostas o aprender como a Matemática pode ser usada na compreensão das estruturas institucionais da sociedade. Ideia que é partilhada por Gutstein (2006) quando considera que é uma forma de usar a Matemática para entender as relações de poder, as desigualdades nos recursos, as diferenças nas oportunidades entre grupos sociais, a discriminação baseada na raça ou género ou linguagem.

Como professores e investigadores, sensíveis às desigualdades sociais e tendo intenção clara de as minimizar, recorrendo a cenários de aprendizagem baseados em questões sociais, económicas e políticas da sociedade actual, podemos ter um papel importante na construção de um mundo mais justo.

Referências Bibliográficas:

Ambrósio, M. (1999). Educação para o desenvolvimento: os currículos da educação básica. *Fórum Escola, Diversidade e Currículo.* Lisboa: Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica (DEB).

Cotton, T. (2001). Mathematics teaching in the real world. ? In P. Gates (Ed.) *Issues in Mathematics Teaching.* London: Routledge.

Ernest, P. (2002). What is empowerment in mathematics education? *Proceedings of the Third International Mathematics Education and Society Conference.* Denmark: Centre for Research in Learning Mathematics.

Frankenstein, M. (2006). Reading the world with math. In Gutstein, E., Peterson, B. (Eds) *Rethinking mathematics: teaching social justice by the numbers*. Wisconsin: Rethinking Schools, LTD

Freire, P. (1987). *Pedagogia do Oprimido.* Rio de Janeiro: Paz e Terra.

Gutstein, E. (2006). *Reading and writing the world with mathematics: Toward a pedagogy for social justice.* New York: Routledge

Hargreaves, A. (1998). *Os Professores em Tempos de Mudança: O Trabalho e a Cultura dos Professores na Idade Pós – Moderna.* Lisboa: Mc Graw – Hill. (Trabalho original publicado em Inglês em 1994.)

Peterson, B. (2006). Teaching math across the curriculum. In Gutstein, E., Peterson, B. (Eds) *Rethinking mathematics: teaching social justice by the numbers*. Wisconsin: Rethinking Schools, LTD

Skovsmose, O. (1994). *Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education.* Dordrecht: Kluwer.

PROJECTO E RESULTADOS ESTATÍSTICOS SOBRE A FELICIDADE NA ESTH/IPG

José Alexandre dos Santos Vaz Martins
Escola Superior de Turismo e Hotelaria – Instituto Politécnico da Guarda
jasvm@ipg.pt
Pedro Nuno Oliveira Figueiredo Ramalhete Carvalho
Escola Superior de Turismo e Hotelaria – Instituto Politécnico da Guarda
ramalhete_pedro@hotmail.com

Resumo

No âmbito da avaliação da unidade curricular de Métodos Quantitativos, 1º semestre do 1º ano da licenciatura em Turismo e Lazer, foi definido 1 trabalho de grupo com peso 7,5%, tendo sido escolhido o tema "A felicidade na ESTH". Tendo por base o artigo "Afinal somos felizes" (Visão de 26 de Fevereiro de 2009, p. 76-83), os grupos elaboraram uma sequência de perguntas relativas ao tema, validadas pelo docente, formando o questionário final que foi distribuído. Finalmente, houve a apresentação de uma proposta formal e a entrega de um relatório final.

Os objectivos deste trabalho foram: Desenvolver competências de trabalho em grupo; Aprofundar e pôr em prática complementos aos conteúdos programáticos; Aplicar estatística descritiva e outros conhecimentos a dados reais recolhidos pelos alunos; Desenvolver a capacidade para investigar, para interligar conteúdos e para tomar decisões na análise dos dados; Desenvolver competências na comunicação estatística; Tornar tangível e compreensível a utilidade e o interesse dos conteúdos através de uma aplicação ao mundo real.

Assim, no trabalho aqui proposto pretende-se apresentar o enquadramento, a estrutura, a evolução e a análise metodológica final do trabalho de grupo mencionado. Além disso, serão apresentados os resultados globais dos vários trabalhos, que foram tratados com a ajuda da folha de cálculo EXCEL, e será feita uma comparação com os resultados nacionais apresentados no artigo da Visão mencionado.

Palavras-chave: Ensino, Estatística, Trabalho de grupo, Organização e tratamento de dados

Apresentação do projecto

No âmbito da avaliação contínua[1] da unidade curricular de Métodos Quantitativos, 1º semestre, do 1º ano da licenciatura em Turismo e Lazer da Escola Superior de Turismo e Hotelaria (ESTH) do Instituto Politécnico da Guarda (IPG), foi definido, entre outros elementos de avaliação, um trabalho de grupo com peso 7,5% na avaliação final. Cada grupo deveria ter entre três a cinco elementos e o trabalho deveria seguir um

[1] Os alunos no início do semestre puderam escolher entre avaliação contínua ou só por exame.

acompanhamento mais “individualizado” e discutido através de tutorias (com um mínimo de duas tutorias).

Os principais objectivos deste trabalho foram:

- Desenvolver competências de trabalho em grupo (o que é fundamental numa área como a do Turismo);
- Aprofundar e pôr em prática uma componente que complementa conteúdos programáticos da unidade curricular, nomeadamente as primeiras fases de um estudo estatístico, as quais são abordadas de uma forma menos aprofundada;
- Proporcionar uma oportunidade de aplicar estatística descritiva e outros conhecimentos constantes do programa da unidade curricular a dados reais recolhidos pelos próprios alunos;
- Desenvolver a capacidade de investigação para a recolha de informação referente ao assunto em estudo, de interligação dos vários conteúdos programáticos e de decisão e discernimento na escolha das várias opções de abordagem da análise dos dados;
- Desenvolver competências ao nível da comunicação estatística através da elaboração de um relatório final com todas as componentes e vertentes do trabalho;

Esta unidade curricular é do 1º semestre do 1º ano do curso, tendo tido início o ano lectivo a 21 de Setembro de 2009. No entanto, deve referir-se que existem duas fases de candidatura (e consequentemente de entrada), a que se juntam posteriormente os alunos da candidatura de maiores de 23 anos, razão pela qual a data de entrega das propostas iniciais tenha sido marcada para 27 de Outubro.

Assim, o processo de definição do trabalho de grupo começou a ser delineado em três tutorias iniciais, onde os vinte e dois alunos que optaram pela avaliação contínua escolheram, entre vários temas propostos pelo professor, o tema geral do trabalho “Perspectivas sobre a felicidade por parte dos alunos da ESTH”. Os referidos alunos formaram então seis grupos, tendo cada grupo ficado responsável pela recolha e análise da informação referente a uma ou duas turmas da escola, distribuição essa feita por sorteio (Tabela 1). Além disso, definiram-se no grupo alargado o cabeçalho do questionário, as questões de caracterização geral da amostra e as questões recolhidas com base no artigo “Afinal somos felizes” (Visão de 26 de Fevereiro de 2009, p. 76-83), que serviriam para todos os grupos. Estipulou-se, ainda, que cada grupo faria uma sequência de perguntas relativas à relação entre a felicidade e a ESTH. Estes contributos, validados pelo docente, formaram o questionário final que foi distribuído nas turmas da escola, seguindo regras estabelecidas pelo grupo global, ou seja, distribuição no final de uma aula a todos os alunos presentes e estivessem matriculados no ano e curso em causa.

Tabela 1: Elementos iniciais dos grupos e turma para entrega e recolha dos questionários

Grupo	**Elementos do grupo**	**Turma de distribuição do inquérito**
Grupo 1	Carina Sousa Lúcia Marçal Raquel Jesus Teresa Martins	Restauração e Catering 1º Ano + 2º Ano
Grupo 2	Cristiana Daniel José Carlos Susana Serra Telma Marques	Turismo e Lazer 1ª Ano + Informática para o Turismo 3º Ano
Grupo 3	Ana Pinto António Santos Patrícia Santos Pedro Ramalhete	Turismo e Lazer 2º Ano + 3º Ano
Grupo 4	Ana Lebre Cláudia Rodrigues José Marques	Gestão Hoteleira 1º Ano
Grupo 5	Ana Almeida Luís Esteves Paulo Paiva	Gestão Hoteleira 3º Ano
Grupo 6	Márcia Martins Marta Costa Thalita Araújo	Gestão Hoteleira 2º Ano

O trabalho implicou a apresentação formal de uma proposta inicial e a entrega de um relatório final, dentro das regras de elaboração de trabalhos definidos na ESTH. Na proposta inicial, com entrega até 27 de Outubro, teriam que ser identificados obrigatoriamente: o número do grupo, os elementos do grupo, o título, a forma de trabalho interno, a população alvo, a técnica de amostragem e a técnica de recolha de dados, bem como uma planificação do trabalho, seguindo as fases de um estudo estatístico como foram definidas nas aulas. A definição desta proposta de trabalho inicial foi também acompanhada em tutorias.

O acompanhamento realizado para ajudar no tratamento de dados foi muito importante, pois, não havendo, no âmbito da unidade curricular, formação sistematizada sobre softwares estatísticos e não tendo todos os alunos sólidos conhecimentos de utilização de folha de cálculo, foi necessária, por parte do docente, alguma orientação no sentido de ser feito um tratamento de dados eficaz e adequado.

Deve-se, no entanto, realçar que, por vários motivos, é usual haver desistências da avaliação contínua e, consequentemente, também dos trabalhos de grupo, mas isso não aconteceu neste caso. Desta forma, finalizaram o trabalho vinte e dois alunos, inseridos em seis grupos.

A análise da realização do trabalho nas suas fases e dos resultados obtidos tinha que ser apresentada num relatório, em formato papel e em formato digital. Este relatório final teve como data de entrega o dia 8 de Janeiro de 2010. Por falta de tempo, não foi possível, como estava previsto e era desejável, fazer o acompanhamento para todos os grupos da fase de análise e interpretação dos resultados, bem como da elaboração do referido relatório. Consequentemente os relatórios entregues apresentaram, regra geral, bastantes lacunas e falhas, mostrando sérias dificuldades em comunicar tecnicamente estatística e em escolher adequadamente o tipo de apresentação dos vários dados e coerentemente as estatísticas necessárias, ficando-se muitas vezes por uma abordagem básica e superficial. Felizmente houve algumas excepções que apresentaram relatórios já com alguma qualidade.

Análise global do projecto

Considerando o facto dos alunos envolvidos serem do 1º ano (maioritariamente de primeira matrícula) e a unidade curricular do 1º semestre do curso, este trabalho de grupo foi um dos primeiros contactos que os alunos tiveram com uma experiência que globalmente lhes proporcionou uma abordagem de várias componentes do perfil preconizado pelos Descritores de Dublin - conhecimento e capacidade de compreensão; aplicação de conhecimentos e compreensão; realização de julgamento/tomada de decisões; comunicação; e competências de auto-aprendizagem, tanto no âmbito restrito da Estatística (conteúdo da unidade curricular) como no âmbito do curso.

No entanto, deve referir-se que, devido à falta de tempo e dificuldade de acompanhamento, as fases de análise e de interpretação dos dados foram pouco exploradas, tendo este facto ficado patente nos relatórios finais dos grupos. A qualidade dos referidos relatórios revelou lacunas na consistência, tendo ficado patente a dificuldade em comunicar, não só em termos estatísticos, mas também no campo das ideias e da sua estruturação. Em todo o caso, e apesar disso, julgamos que a experiência deste trabalho de grupo foi um factor de aprendizagem e um elemento de crescimento dos alunos no sentido das competências inerentes ao 1º Ciclo do Processo de Bolonha, fundamentadas nos respectivos Descritores de Dublin, bem como um agente diferenciador relativamente ao modelo de ensino-aprendizagem a que alguns dos alunos estavam habituados, contribuindo para a sua literacia estatística que Wallman (1993, citado por Watson, 2006, p. 10[2]) definiu como "a capacidade para compreender e avaliar de forma crítica os resultados estatísticos que nos aparecem no dia-a-dia, em conjunto com a capacidade para considerar as contribuições que o raciocínio estatístico pode ter, para as decisões tomadas nos domínios público ou privado, profissional e pessoal.", e que Gal (2002, citado por Watson, 2006, p. 10[3]) reforça afirmando que "os adultos estatisticamente letrados terão que apresentar dois requisitos (a) a capacidade para interpretar e avaliar de forma crítica a informação estatística, os argumentos relacionados com os dados ou fenómenos aleatórios que as pessoas poderão encontrar em diferentes contextos e (b) a sua capacidade para discutir e comunicar as suas opiniões sobre essas informações estatísticas, sempre que tal for relevante".

A não apresentação oral foi também um ponto fraco da implementação do trabalho este ano. No entanto, é de referir que se pretendeu que alguns dos alunos participantes tivessem oportunidade de, num trabalho extra curricular, compilarem os resultados globais obtidos pelos vários grupos e fazerem, em conjunto com o docente, uma apresentação na Tarde da Matemática[4] da ESTH. Este ano houve apenas um aluno, Pedro Ramalhete Carvalho, que se disponibilizou para tal.

Apresentação dos resultados do estudo

O conceito de felicidade é bastante subjectivo e envolve questões delicadas e complexas. Por isso, a opção foi basear o estudo nas questões analisadas no artigo da revista Visão "Afinal somos felizes" e acrescentar a ligação da felicidade dos alunos com a própria escola. Assim, definiram-se seis focos para essa caracterização, nomeadamente: "passado, presente e futuro", "quando?", "Portugal versus outros países", "qual o segredo?", "sorte ou esforço? E o dinheiro…?" e "a ESTH entra nesta equação?".

[2] Tradução livre
[3] Tradução livre
[4] Evento de promoção da Matemática na ESTH aberto à comunidade escolar e à comunidade envolvente.

Com esta motivação, e considerando apenas os cursos de Turismo e Lazer e de Gestão Hoteleira, uma vez que os cursos de Informática para o Turismo e de Restauração e Catering apresentavam um número de alunos reduzido, o questionário foi distribuído a 132 alunos, 89 (67%) do sexo feminino e 43 (33%) do sexo masculino, numa proporção que se apresenta semelhante à da escola. Em termos de idades, os inquiridos apresentam valores dos 18 até aos 45 anos, com uma média de idades de 22 anos e um desvio padrão de 5, mas onde cerca de 85% têm menos de 24 anos, como era espectável numa escola do ensino superior, apresentando uma distribuição como a que se pode observar no gráfico 1.

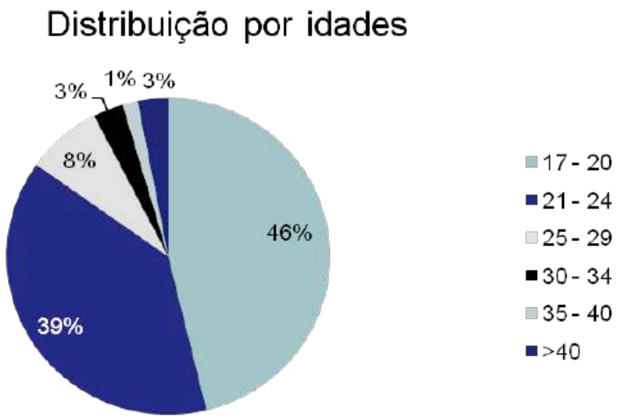


Gráfico 1: Distribuição das idades dos inquiridos

A distribuição relativa aos cursos dos inquiridos apresenta uma ligeira predominância do curso de Gestão hoteleira (56%) em relação ao curso de Turismo e Lazer (44%).

Relativamente à distribuição por ano constata-se que o 2º ano é o que apresenta um maior número de elementos (42%), seguido do 3º ano (30%) e do 1º ano (28%). Os grupos responsáveis pela recolha de informação nas turmas do 1º ano não conseguiram um número de respondentes do primeiro ano próximo da proporção real.

Da análise dos dados obtidos pode ainda referir-se que os distritos de origem dos alunos inquiridos mais representativos são, por ordem decrescente de frequência, Aveiro (25), Viseu (24), Guarda (17), Aveiro (16), Braga (13) e Coimbra (10).

Relativamente ao estatuto praticamente 90% dos inquiridos indicaram ter estatuto de aluno ordinário, havendo 3 não respostas e os restantes trabalhadores estudantes.

Dada a amostra obtida, as suas características, bem como os objectivos iniciais do projecto, decidiu-se considerar como variáveis independentes para a análise as variáveis género e curso. Assim, para cada um dos focos referidos anteriormente apresentam-se de seguida os resultados obtidos, cruzando, quando julgado interessante, com as variáveis independentes mencionadas, bem como comparando com os resultados obtidos a nível nacional apresentados na revista Visão.

Passado, presente e futuro

No que diz respeito aos portugueses serem hoje mais ou menos felizes que há 50 anos maioritariamente (53%) os alunos indicam que os portugueses são hoje mais ou muito mais felizes que há 50 anos. No entanto, é de realçar que a percentagem no caso do estudo apresentado na revista Visão é bastante superior, 69%. Essa diferença é consubstanciada de forma significativa na diferença de percentagem naqueles que julgam os portugueses como menos felizes agora, eventualmente já fruto e influência da época difícil que a sociedade atravessa. Além disso, deve-se referenciar que, apesar do grupo ser maioritariamente jovem, apresentam uma percentagem de não respostas menor do que o do estudo nacional.

É claro também que os alunos maioritariamente (77%) se sentem felizes. Regra geral não parece haver diferenças significativas entre o nosso estudo e o estudo nacional, nem entre géneros nem entre cursos. No entanto, pode também salientar-se que existe uma diferença de 11 pontos percentuais entre as percentagens de alunas e de alunos que dizem ser felizes, com maior percentagem para as alunas, que só alunas indicaram serem infelizes e nenhuma deixou de responder, enquanto no sexo masculino as não respostas representam 7%.

Relativamente ao sentimento de felicidade daqui a 10 anos os alunos indicaram maioritariamente (67%) que acreditam virem a ser mais ou muito mais felizes daqui a 10 anos, numa percentagem idêntica à do estudo nacional. No entanto, é de sublinhar que a percentagem das respostas correspondente a “Mais felizes” é muito mais significativa no estudo na ESTH, enquanto a percentagem das respostas correspondente a “Muito mais felizes” é muito mais significativa no caso do estudo nacional. Essa diferença é realçada ainda, no caso da ESTH, por uma maior percentagem dos que indicaram pensarem vir a ser menos felizes. Além disso, deve-se referenciar que na

ESTH a percentagem de não respostas foi bastante menor que no estudo da revista Visão, apesar de ter um valor ainda considerável.

Quando?

Relativamente à existência de uma idade em que se é mais feliz os alunos apresentam claramente uma ideia de que realmente existe essa idade, com uma percentagem esmagadora de 85% de respostas positivas e apenas 14% de respostas negativas. Estes valores contrastam com os 50% de respostas positivas e os 39% de respostas negativas do estudo a nível nacional. Nesse estudo salienta-se também o facto de haver 11% de não respostas enquanto na ESTH apenas 2% não responderam.

Além disso, e procurando a idade em que se é mais feliz, percepciona-se da análise dos resultados que essa idade seria a infância. Parece que esta opção parece ser mais significativa nas alunas do que nos alunos, mais representativa nos alunos de Turismo e Lazer do que mos de Gestão Hoteleira. Para além da infância parece que apenas a adolescência e a faixa etária 20/30 anos parecem poder ser idades de felicidade. Curioso é o nível relativamente alto de não repostas, indicando eventualmente dificuldade em definir uma idade em que se é mais feliz.

Portugal versus outros países

Em termos de comparação entre Portugal e a América do Sul e a Europa do Norte existe uma taxa razoável de não respostas, apesar de esta ser inferior à do estudo nacional, denotando eventualmente algum desconhecimento, em especial sobre a América do Sul. Parece também que os alunos da ESTH julgam maioritariamente que os portugueses são mais felizes ou muito mais felizes que os habitantes da Europa do Norte. Além disso, relativamente aos habitantes da América do Sul parece haver uma divisão quanto a se nós portugueses somos, ou não, mais felizes com ligeira prevalência no sermos mais ou muito mais felizes (37% vs 41%). Em todo caso, para os alunos da ESTH a percentagem dos que responderam que os portugueses são menos felizes, tanto em relação à América do Sul como da Europa do Norte, é muito mais significativa do que as percentagens respectivas no estudo a nível nacional.

Qual o segredo?

Já no que se refere ao aspecto que contribui para a felicidade de uma pessoa surgem destacados a família e o amor seguidos, no caso da ESTH, da amizade e, no caso do estudo nacional, da saúde do próprio, sendo esta discrepância talvez devida à diferença das idades dos inquiridos em ambos estudos.

Já quanto aos três aspectos em que se sente mais feliz surgem, tal como na questão anterior, a família, o amor, a amizade e a saúde do próprio. Apesar de esta lista não diferir muito entre alunos e alunas e entre os alunos de Turismo e Lazer e Gestão Hoteleira, parece haver diferenças nas respectivas percentagens, havendo, por exemplo, um predomínio mais acentuado da família, do amor e da amizade nas alunas e da família e do amor nos alunos de Turismo e Lazer, acontecendo o inverso, por exemplo, relativamente à saúde do próprio.

Sorte ou esforço? E o dinheiro…?

Os alunos inquiridos foram unânimes em considerar a felicidade se deve ao esforço (67%) e não tanto à sorte (20%). Esta ideia parece estar mais vincada nos alunos da ESTH do que nos respondentes do estudo a nível nacional e também mais nas alunas do que nos alunos e mais nos alunos de Gestão Hoteleira do que nos de Turismo e Lazer.

Quanto à questão se os portugueses com mais dinheiro são mais felizes, 45% dos alunos da ESTH responderam negativamente, enquanto 36% responderam afirmativamente, havendo 19% de não respostas. Estas percentagens são bastante semelhantes com as do estudo a nível nacional (46%, 40% e 14%). Relativamente à felicidade que o ter mais dinheiro poderia trazer, e um bocado em contradição com o afirmado anteriormente, o sim predominou, tanto na ESTH como a nível nacional, e foi mais acentuada nos alunos do que nas alunas.

A ESTH entra nesta equação?

Finalmente, e tal como está evidenciado nos dados da Tabela 2, os alunos da ESTH (tanto as alunas como os alunos e tanto os alunos de Turismo e Lazer como os alunos de Gestão Hoteleira) demonstram nas suas repostas que a Escola Superior de Turismo e Hotelaria do Instituto Politécnico da Guarda não é indiferente para a sua felicidade, apresentando uma larga maioria de respostas “Mais ou menos” e “Bastante”.

Tabela 2: Felicidade e ESTH (ESTH vs Portugal; feminino vs masculino; Turismo e Lazer vs Gestão Hoteleira)

	ESTH	F	M	TL	GH
Nada	7%	5%	9%	5%	8%
Pouco	9%	6%	16%	5%	12%
Mais ou Menos	44%	47%	37%	55%	35%
Bastante	35%	36%	33%	33%	37%
Muitissimo	5%	6%	5%	2%	8%

Conclusão

O balanço final do projecto não deixou de ser positivo, pois este trabalho permitiu aos alunos desenvolver competências de trabalho em grupo, aplicar Estatística Descritiva e outros conhecimentos a dados reais recolhidos pelos próprios e referentes a um assunto que era do seu interesse, percepcionar as fases de um estudo estatístico, proporcionar situações de decisão e de discernimento na escolha das várias opções e também desenvolver competências ao nível da comunicação estatística.

Os resultados obtidos, depois de compilados e resumidos num trabalho conjunto do docente e do aluno, permitiram obter um primeiro quadro sobre a ideia de "felicidade" dos alunos da ESTT, realçando a importância da Estatística e deste tipo de trabalho para descrever e compreender algumas realidades envolventes. Para além disso, neste caso específico, serviu também para pôr a reflectir os alunos e a própria escola sobre o objectivo principal de todos nós enquanto indivíduos e enquanto elementos de uma organização e da sociedade globalmente.

Referências bibliográficas

Direcção Geral do Ensino Superior, (2009). Descritores Dublin. Retirado de: http://www.dges.mctes.pt/DGES/pt/Estudantes/Processo+de+Bolonha/Objectivos/Descritores+Dublin/

Watson, J. (2006). Statistical Literacy at School. Growth and Goals. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

UTILIZAÇÃO DE MATERIAIS MANIPULÁVEIS: A DESCOBERTA DE NOVAS POTENCIALIDADES NUM CONTEXTO DE FORMAÇÃO CONTÍNUA

Cristina Martins[1], Leonor Santos [2]

[1] Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Bragança

[2] Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

mcesm@ipb.pt, leonordsantos@sapo.pt

Resumo

Os documentos orientadores do 1.º ciclo do ensino básico indicam a importância da utilização de materiais manipuláveis para a representação de certos conceitos.

Aida participou no Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1.º ciclo do Ensino Básico. Foram vários os ganhos que considera ter feito com esta participação, mas dá particular relevância ao conhecimento de novos materiais manipuláveis e à descoberta de novas potencialidades intrínsecas a estes. Nesta comunicação apresentamos o que Aida pensava da utilização de materiais na aula de Matemática antes de frequentar o programa de formação, as tarefas que experimentou com materiais durante o programa, os conhecimentos adquiridos, e as implicações para a sua prática profissional.

Palavras-chave: materiais manipuláveis, programa de formação contínua, desenvolvimento profissional

Introdução

Este artigo insere-se num trabalho de investigação mais amplo que pretende estudar o desenvolvimento profissional de professores do 1.º ciclo no contexto do Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1.º Ciclo (PFCM). Entre outros, um dos conteúdos a trabalhar no âmbito do PFCM é "os recursos para a aula", sendo os materiais manipuláveis, as tecnologias e os manuais escolares "os recursos privilegiados para os alunos utilizarem, na medida em que são os adequados como suporte às tarefas desenvolvidas na sala de aula" (Serrazina *et al.*, 2006, p. 19). Mas para os professores poderem utilizar correcta e adequadamente materiais manipuláveis na sua prática lectiva precisam eles próprios de os conhecer, utilizar e descobrir a sua utilidade e potencialidades.

Nesta comunicação pretendemos apresentar o que Aida pensava da utilização de materiais na aula de Matemática antes de frequentar o programa de formação, as tarefas que experimentou com materiais durante o programa, os conhecimentos adquiridos, bem como as suas práticas actuais em relação a este aspecto. Os dados foram recolhidos através de entrevistas semi-estruturadas, recolha documental, notas de campo e observação participante de sessões de formação em grupo (SFG) e de acompanhamento de sala de aula (SAS).

Os materiais manipuláveis no ensino e aprendizagem da Matemática

No horizonte específico deste artigo, destacamos, por um lado, que o desenvolvimento profissional dos professores em exercício deve incidir não apenas sobre como melhorar os seus conhecimentos em matemática, mas também em questões pedagógicas (Sowder, 2007) e que, por outro lado, quando os professores frequentam programas de desenvolvimento profissional, esperam ganhar ideias específicas, concretas, e práticas que se relacionam directamente com a prática do dia-a-dia de sala de aula (Guskey, 2002). Concretamente, a selecção das tarefas a propor aos alunos é, pois, o aspecto central do processo de ensino e aprendizagem (Ponte, 2005), cabendo ao professor a responsabilidade da sua elaboração e condução, tendo em conta três preocupações: o conteúdo matemático, os alunos e as suas formas de aprendizagem (NCTM, 1994, 2007). A escolha das tarefas têm obviamente reflexos nos modos de trabalho na aula (trabalho individual, em pequeno grupo e no grande grupo), no ambiente de aprendizagem, concretamente no discurso na sala de aula, em que o professor tem um papel fundamental, gerindo a participação dos alunos e a sua própria participação (Serrazina *et al.*, 2006).

Os documentos orientadores do ensino básico indicam a utilização de materiais manipuláveis como recursos importantes para o ensino e aprendizagem da Matemática. Em particular, no Programa do 1.º ciclo do ensino básico (ME, 1990/2004), os materiais manipuláveis são apresentados como um apoio à construção de certos conceitos, que pelo seu nível de abstracção, precisam de um suporte físico, podendo também servir para representar os conceitos ajudando na sua estruturação.

No Currículo nacional do ensino básico: Competências essenciais (DEB, 2001) pode ler-se: “Materiais manipuláveis de diversos tipos são, ao longo de toda a escolaridade, um recurso privilegiado como ponto de partida ou suporte de muitas tarefas escolares, em particular das que visam promover actividades de investigação e a comunicação matemática entre os alunos" (p. 71). Este documento salienta ainda que sendo o essencial a natureza da actividade intelectual dos alunos, a utilização de materiais manipuláveis constitui um meio e não um fim.

Também o novo Programa de Matemática do ensino básico (Ponte *et al.*, 2007) refere que "os alunos devem utilizar materiais manipuláveis na aprendizagem de diversos conceitos, principalmente no 1.º ciclo" (p. 9). Por exemplo, particulariza que "o ensino e a aprendizagem da Geometria deve, neste ciclo, privilegiar a exploração, a manipulação e a experimentação, utilizando objectos do mundo real e materiais específicos, de modo a desenvolver o sentido espacial" (p. 20). Os materiais manipuláveis (estruturados e não estruturados) "permitem estabelecer relações e tirar conclusões, facilitando a compreensão de conceitos". (p. 21).

Aida e os materiais manipuláveis

Aida é uma professora do 1.º ciclo com cerca de quarenta e cinco anos de idade e vinte e cinco de serviço. As suas habilitações académicas são o Curso do Magistério Primário (bacharelato), o Curso de Estudos Superiores Especializados na área do Ensino do Francês (licenciatura) e o Mestrado em História da Educação. Sobre o processo de ensino e aprendizagem da Matemática, tal como nas outras áreas, valoriza a participação dos alunos nas actividades e o trabalho experimental, salientando a importância da memorização de conceitos, da sua compreensão e do gosto pela disciplina

Ideias acerca da utilização de materiais antes de frequentar o programa

Na entrevista inicial, afirma valorizar a utilização de materiais principalmente quando lecciona nos primeiros anos, despendendo muito tempo na concepção dos mesmos, considerando serem feitos "de acordo com as temáticas e com as características dos alunos" [Aida, entrevista inicial] e revelando gosto pela sua concepção: "gosto de ser eu a fazer, tipo lotos ou dominós" [Aida, entrevista inicial]. Além disso, assinala também: "As nossas escolas são muito pobres em materiais, por isso é que temos que fazer em casa alguma coisa." [Aida, entrevista inicial]. No processo de ensino e aprendizagem da Matemática, considera "a manipulação de material para começo e depois também há a abstracção" [Aida, entrevista inicial].

Tarefas experimentadas durante o programa de formação

No âmbito o PFCM, Aida experimentou quatro tarefas em sala de aula, sendo duas delas dedicadas à utilização de materiais manipuláveis. As tarefas experimentadas foram trabalhadas nas sessões de formação em grupo, embora Aida lhe tenha colocando sempre um cunho pessoal . A primeira, a que fazemos referência neste texto, consistiu na utilização do *tangram* para a descoberta de figuras geométricas e medição da área de algumas delas.

Conforme o previsto na planificação realizada, no que respeita à condução das aulas, Aida respeitou a estrutura delineada na planificação: introdução da tarefa, desenvolvimento, apresentação e discussão dos resultados em grande grupo e avaliação do trabalho desenvolvido.

Assim, na introdução da tarefa, desafiou os alunos, organizados em dois grupos de trabalho, a construírem um *puzzle* com as setes peças do *tangram* construídas em cartolina, em tamanho grande, tendo o cuidado de ir relembrando o conceito de quadrado:

> **Aida:** A primeira actividade que eu vos vou propor é uma competição entre dois grupos, está bem? Eu vou dar a cada grupo uma cartolina que tem esta forma, já vos vou mostrar. Vou dar uma cartolina destas aqui ao grupo, grupo?... Vamos escolher um nome para este grupo?
> **Alunos:** A.
> **Alunos:** B.
> **Aida:** Então A e B. Pronto está bem. Agora os meninos vão todos olhar para esta cartolina e dizer-me qual é a forma que tem esta cartolina. Quem é que sabe dizer? Carolina, diz lá.
> **Carolina:** Tem a forma de um quadrado.
> **Viviana:** Está certo.
> **Aida:** Está certo, Viviana? Porque dizes que é um quadrado? Diz-me lá. Porque é que dizes? A Carolina disse que era um quadrado e tu disseste está certo, porquê?
> **Viviana:** É uma superfície plana.
> **Aida:** É uma superfície plana, mas o que te faz dizer que é mesmo um quadrado? Tu sabes, tu sabes? … Mas nós estamos a trabalhar em grupo e vai haver cooperação entre todos os elementos e a Flávia quer dar uma ajuda. Diz lá Flávia.
> **Flávia:** Porque tem quatro lados e são todos iguais.
> **Aida:** São todos iguais. E ainda tem mais qualquer coisa que nos diga que é um quadrado. O que é que tem? Aqui, isto. Como se chama esta superfície aqui? Exactamente Sandra. Diz lá.
> **Sandra:** Só tem ângulos rectos.
> **Aida:** Só tem ângulos rectos, quantos?
> **Aluna:** Quatro.
> **Aida:** Tem quatro ângulos rectos. Ela disse que eram rectos. Quem é que me sabe dizer porque são rectos.

Aluna: Porque têm noventa graus.
Aida: Muito bem. Agora não vimos, mas já sabemos isso. Então agora o desafio que eu vos vou lançar é o seguinte: eu vou dar estas peçazinhas a cada um dos grupos, vou pôr aqui, ainda ninguém mexe e vou pôr estas aqui e ainda ninguém mexe. Isto são as peças de um puzzle e os meninos, em grupo, vão tentar, quando eu disser, quando eu der um sinal, vão tentar resolver esse puzzle. [3.ª SAS]

Após a construção do *tangram*, foi, também, pedido aos alunos para recordarem o nome e algumas propriedades das figuras geométricas que constituem o *Tangram*. Segundo a professora, esta actividade de introdução tinha a finalidade de “motivar as crianças” para as tarefas seguintes e “introduzir os conteúdos”, bem como “potenciar o trabalho colaborativo, despoletar o interesse e desenvolver a capacidade de utilização deste recurso didáctico” [portefólio de Aida, descrição da 3.ª tarefa experimentada].

No desenvolvimento da tarefa, distribuiu uma ficha de trabalho estruturada em três actividades:

ACTIVIDADE 1 – As peças do *Tangram*
Lê e completa o seguinte texto:
O *tangram* é um puzzle muito antigo de origem chinesa (figura 1). O *tangram* original, o ____________ chinês, é constituído por ______ peças: um ____________, um paralelogramo, dois triângulos grandes, dois triângulos pequenos, e um ______________ médio.
Vais ver que te permite fazer construções muito interessantes.

ACTIVIDADE 2 – Comparação das peças do *Tangram* e medição da sua área
2.1 – Constrói o quadrado, o paralelogramo e o triângulo médio a partir dos triângulos pequenos. Utiliza as peças do *Tangram*.
2.2 – O que podes concluir acerca da área das figuras construídas na pergunta anterior?
2.3 – Tomando como unidade de medida o triângulo médio, indica a medida de área:
a) do triângulo grande
b) do quadrado
2.4 – Qual é a relação entre a área do triângulo grande e a área do triângulo pequeno?

ACTIVIDADE 3 - Construção de quadrados e medição da sua área.
As sete peças do *Tangram* podem formar um quadrado.
3.1. Constrói outros quadrados utilizando apenas:
a) três peças; b) quatro peças; c) cinco peças
3.2. Tomando como unidade de medida o triângulo pequeno, indica a área dos quadrados construídos na resposta à pergunta anterior.
3.3. Tomando como unidade de medida o triângulo pequeno, indica a área dos quadrados construídos na resposta à pergunta anterior.

Aida considera que a tarefa, no geral, implicava o manuseamento do *tangram* e o registo das conclusões: "Penso que é um tipo de aula um pouco diferente das anteriores, uma vez que é centrada mesmo no material e todas as descobertas são feitas a partir da experimentação e depois do registo [12.ª SFG].

A metodologia seguida nesta fase da aula foi: leitura de uma questão, seguida da resolução em grupo. Os alunos tentaram fazer o que lhes era proposto, sempre sob o olhar atento da professora que circulava por entre os dois grupos.

Os alunos fizeram rapidamente a actividade 1 da ficha – preenchimento dos espaços vazios do texto sobre as características do *tangram*. Aida orientou o trabalho dos alunos como se pode ver pelas suas intervenções, quer aquando da introdução da tarefa (fala 1), quer aquando da sua posterior correcção (fala 2):

> (1) **Aida:** Então eu vou ler a primeira actividade que é muito simples e muito rápida. Então diz assim (…). Vamos lá fazer, todos os elementos do grupo, um pode ir lendo e depois todos escrevem o que acharem correcto. [3.ª SAS]
> (2) **Aida:** Ana, acabaste? Grupo B, toda a gente acabou? Então agora vamos corrigir, vamos ver se fizeram certo. Então diz assim: o *tangram* original, o…? O que pôs a Maria?
> **Maria:** Puzzle.
> **Aida:** Ou? O que seria mais correcto ainda? Que expressão?
> **Alunos:** *Tangram*
> **Aida:** *Tangram* chinês. Vamos corrigir isso. Vamos por por cima . Que efectivamente é um puzzle, mas tem um nome específico. Põe em cima: *tangram*. O que é que leva no fim? Querem que escreva aqui a palavra?
> **Aluno:** Está na ficha. [3.ª SAS]

Na actividade 2, os alunos começaram por construir as figuras que lhe eram pedidas na pergunta 2.1. Aida foi circulando pelos grupos e questionando os alunos de forma a continuar a orientar o trabalho destes:

> **Aida:** Primeiro a partir dos triângulos pequenos como é que se faz o quadrado? Como é que conseguem fazer?
> [Uma aluna mostra o que fez: um quadrado feito com dois triângulos pequenos]
> **Aida:** Toda a gente concorda? É um quadrado?
> **Alunos:** Sim.
> **Aida:** Pronto. Um já está.
> **Aluno:** Também dava assim. [O aluno mostra um quadrado feito com dois triângulos grandes.]
> **Aida:** Exacto, mas o que diz a pergunta?... Constrói a partir dos triângulos pequenos. Este é que é o quadrado a partir dos triângulos pequenos. [Mostra o primeiro quadrado construído.] Agora o que é que têm que fazer? Vejam lá na folha de trabalho.

(…)
Aida: Então agora tentem, sem desfazer estas figuras, responder à pergunta 2.2. Discutam antes de escrever, está bem? Qual será maior? Qual será mais pequeno? Vamos lá pensar. Construíram um quadrado, um triângulo médio e paralelogramo a partir de quantos triângulos pequenos?
Aluno: Dois.
Aida: Então o que podem concluir acerca da área destas figuras? [3.ª SAS]

De uma forma geral, conseguiram responder correctamente às questões, unicamente na pergunta 2.3.b) houve alguma dificuldade na resolução, pelo que Aida incentivou à experimentação:

[Junto a um grupo.]
Aida: Qual é o triângulo médio? [Os alunos apontam para o triângulo médio.] Então este é a unidade de medida. Então têm de a partir deste comparar as duas áreas. E onde é que está o triângulo grande? Este é a unidade de medida. [Aida mostra o triângulo médio.] Então quantos triângulos serão necessários para perfazer a área do triângulo grande?
Alunos: Dois.
Aida: Mas façam a experiência. Façam lá para ver quantos são precisos.
[Foi dado tempo aos alunos para experimentarem.] [3.ª SAS]

Aida foi sempre insistindo com os alunos para fazerem os registos correctamente na ficha de trabalho. Foi frequente ouvir Aida dizer: "Vamos lá dar a resposta."; "Então, vamos lá construir a resposta."; "Desde que esteja correcta, bem construída."; "Discutam antes de escrever bem." [3.ª SAS].

Na actividade 3, os alunos foram individualmente tentando descobrir os quadrados e trocando ideias e ajudando os colegas de grupo. A correcção foi igualmente feita em grande grupo com a moderação da professora.

No final, Aida informou: "Vamos pensar se aprendemos alguma coisa ou se só brincámos" [3.ª SAS]. Assim, pediu aos alunos, para fazerem a avaliação da actividade realizada através da resposta a três questões constantes numa ficha:

1. Descreve a actividade que realizaste nesta aula de Matemática.
2. O que aprendeste com a actividade realizada?
3. Consideras útil trabalhar com materiais, por exemplo com o *Tangram*? Porquê?

Aprendizagens efectuadas

Na entrevista final indica a utilização de materiais como uma forma de contribuir para a construção do conhecimento matemático pelos alunos, com a orientação e moderação do professor:

> Uma coisa que eu aprendi com esta formação é a importância que pode ter o material na aula de Matemática. Eu penso que os alunos irão ganhar bastante se nós conseguirmos levar materiais para a sala de aula que proporcionem às crianças oportunidade de agirem sobre o material e serem elas próprias a construírem o conhecimento a partir desse material, embora orientados e moderados pela professora. [Aida, entrevista final]

Aida aponta o contributo do programa para o conhecimento de novos materiais manipuláveis e para a descoberta de novas potencialidades da utilização de outros já conhecidos, ligando claramente o conhecimento matemático e o conhecimento didáctico:

> Além disso, possibilitou-me o conhecimento de materiais, alguns deles que eu não conhecia, por exemplo o Polydron. Que eu não conhecia! Consegui ficar a saber outras formas de os utilizar e utilizá-los constituindo uma mais-valia para o desenvolvimento dos conteúdos. Estou-me a lembrar por exemplo do *Tangram*, do Geoplano para o conceito de área e de perímetro. Outras potencialidades! (...) Nós explorávamos na sala de aula, mas não retirávamos o potencial todo que eles comportam. [Aida, entrevista final]

Também na conclusão do portefólio, refere ter tido oportunidade de verificar possibilidades de utilização dos materiais que desconhecia, a possibilidade de "explorar conteúdos que fazem parte do programa curricular do ensino básico", por exemplo "a utilização do geoplano ou o *Tangram* no conceito de área" [portefólio de Aida, conclusão].

Práticas actuais envolvendo a utilização de materiais manipuláveis

Como elemento da direcção do seu agrupamento, Aida teve um papel interventivo no seu agrupamento a nível da Matemática, diz: "Incentivei os colegas a desenvolver o dia da Matemática, ou seja, a semana da Matemática no Agrupamento. Já vamos para o 3.º ano que vamos fazer a semana da Matemática. Tem corrido bastante bem, com o apoio da Cristina e da ESE [Escola Superior de Educação], claro" [Aida, entrevista após dois anos]. Assim, Aida sugeriu a introdução no Plano Anual de Actividades a desenvolver, nos anos lectivos 2007/2008 e 2008/2009, no agrupamento de escolas a que pertence a realização da Semana da Matemática dirigida a alunos do 1º ciclo do ensino básico. No plano pode ler-se:

> Esta actividade, proposta pelo Conselho de Docentes, nasceu da necessidade de colocar em uso as competências adquiridas pelos docentes que frequentam ou frequentaram a Formação nessa área facultada pelo Ministério da Educação e implementar, de forma lúdica, a

> aprendizagem da matemática nos nossos alunos. [plano de actividades do agrupamento de Aida]

No mesmo é apresentado de forma sucinta o que se pretende com esta realização:

> Queremos que esta seja simples, divertida e ilustrada por diversas actividades aliciantes que tenham por função cimentar conhecimentos adquiridos de maneira mais formal no dia-a-dia das nossas escolas. Pretende, também, incentivar o desenvolvimento de métodos de ensino e abordagens pedagógicas inovadoras para o ensino da Matemática, garantindo um papel activo dos alunos no desenvolvimento dessas mesmas actividades. [plano de actividades do agrupamento de Aida]

Diz que esta sua ideia nasceu devido à sua participação no programa de formação: “foi outra das consequências do facto de eu ter estado na formação de Matemática” [Aida, entrevista após dois anos].

Descreve esta actividade dizendo: “Cada dia dessa semana uma escola [do agrupamento] desenvolve o dia da Matemática, que se traduz no desenvolvimento de oficinas com exploração de materiais, com actividades matemáticas” [Aida, entrevista após dois anos]. Sobre a planificação desta semana diz ser “feita de acordo com o plano anual de actividades, normalmente orientada pela coordenadora do Conselho de Docentes” e descreve como é feita a sua preparação:

> Há várias reuniões preliminares onde se faz uma recolha das actividades que é possível desenvolver nesses dias. Depois, cada escola vai desenvolver aquelas que acha que são mais interessantes. E depois faz-se a avaliação, que tem sido muito positiva. [Aida, entrevista após dois anos]

Considera que os alunos nesta actividade fazem aprendizagens ao nível da Matemática, pois “Eles estão a descobrir, são actividades de descoberta, estão a manusear o próprio material, estão a fazer os registos também. Os *ateliers* que temos desenvolvido também passa pela resolução de problemas, estão a adquirir conhecimentos e a aplicá-los” [Aida, entrevista após dois anos].

Considerações finais

A utilização de materiais fazia parte das práticas de Aida. Contudo, a participação no programa propiciou-lhe a experimentação de novas tarefas com a utilização de materiais manipuláveis e a verificação da sua utilidade para a aprendizagem matemática dos alunos. A experimentação destas tarefas teve reflexos no ambiente de aprendizagem criado na sala de aula, nomeadamente no discurso da sala de aula e no seu papel (Serrazina *et al.*, 2006). Aida orientou o trabalho dos alunos e incentivou-os à experimentação. Teve, também, o cuidado de questionar os alunos, pedir justificações e incentivar o registo escrito das conclusões (NCTM, 1994, 2007).

O trabalho realizado proporcionou a Aida conhecer novos materiais e descobrir a potencialidades de outros que já conhecia, concretamente o *tangram* e a sua importância no estudo do conceito de área (Ponte *et al.*, 2007). Após frequentar o PFCM e como elemento da direcção do seu agrupamento, Aida tomou a iniciativa de organizar a Semana da Matemática, proporcionando que cada escola dedique um dia completo à realização de actividades matemáticas. Desta forma, a participação no PFCM contribuiu para que Aida se desenvolvesse profissionalmente (Sowder, 2007), alterando a sua prática profissional.

Referências bibliográficas

Departamento da Educação Básica (2001). *Currículo nacional do ensino básico – Competências essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação.

Guskey, T. R. (2002). Professional Development and Teacher Change. *Teachers and Teaching: theory and practice*, *8*(3/4), 381-391.

Ministério da Educação (1990/2004) (4.ª ed.). *Organização curricular e programas. Ensino Básico – 1.º ciclo*. Lisboa: Departamento da Educação Básica.

NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da matemática*.). Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional. (obra original em inglês, publicada em 1991)

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemáticas Escolar* Lisboa: Associação de Professores de Matemática. (obra original em inglês, publicada em 2000).

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. G., & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. (disponível em http://sitio.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf)

Serrazina, L., Canavarro, A., Guerreiro, A., Rocha, I., Portela, J., & Gouveia, M. J. (2006). *Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1.º Ciclo.* (documento não publicado)

Sowder, J. T. (2007). The Mathematical Education and Development of Teachers. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (1.ª ed., Vol. I, pp. 157-223). Charlotte: Information Age Publishing.

Estudo combinado gráfico e algébrico de polinómios de grau 3 e superior

Jaime Carvalho e Silva (Univ. Coimbra) [jaimecs@mat.uc.pt]

Joaquim Pinto (Esc. Sec. Marques de Castilho, Águeda) [prof.joaquimpinto@gmail.com]

Vladimiro Machado (Esc. Sec. Valongo) [vladimiro.machado@gmail.com]

Resumo:

O estudo tradicional de polinómios reduz-se aos polinómios do segundo grau e a polinómios de grau superior de que se conhece um número suficientemente grande de raízes. Já Sebastião e Silva clamava contra o facto de os alunos saírem do Ensino Secundário sem fazerem ideia de como se resolve uma equação polinomial geral de ordem superior à segunda. Actualmente, com o uso das calculadoras gráficas e computadores, poder-se-ia pensar que esta questão estaria ultrapassada. Infelizmente não é assim pois se continua a privilegiar a resolução algébrica e, quando se usa a calculadora, normalmente é como uma caixa negra milagrosa.

Nós entendemos que deve haver uma maior integração entre o estudo algébrico e o estudo gráfico (tal como determina o programa oficial) e que teoremas como o de Cauchy de localização das raízes de um polinómio e o da obtenção de todas as raízes inteiras de polinómios de coeficientes inteiros são indispensáveis num estudo elementar mas minimamente eficaz.

Iremos apresentar uma proposta de metodologia de trabalho que nos parece a mais adequada ao 10º ano de escolaridade.

Palavras-chave:

Programa de Matemática; Polinómios; Calculadora gráfica; Raízes de um polinómio; Teorema de Cauchy.

Introdução:

No seu “Guia para a utilização do Compêndio de Matemática”, Sebastião e Silva defendia a importância do cálculo numérico de todas as raízes de uma equação algébrica, com a ajuda de “computadores electrónicos”. E criticava o ensino de então, escrevendo que “os alunos aprendem teorias, mais ou menos profundas, relativas a equações algébricas; mas se alguém lhes perguntar como se calculam todas as raízes de uma dada equação algébrica, de grau arbitrário, com a aproximação que se queira, terão de reconhecer que não sabem. Isto dá bem nota de como o ensino tradicional tem sido afastado da realidade” ([4], pg. 70).

Os “computadores electrónicos” dos anos sessenta do século passado são suplantados pelas mais simples calculadoras gráficas de hoje. O Programa de Matemática para o Ensino Secundário de 1995 tem inúmeras referências ao uso da calculadora gráfica. Destacamos:

> “A calculadora vai permitir que se trabalhe com um muito maior número de funções em que diversas características, como os zeros e os extremos, não se podem determinar de forma

exacta; estas funções são importantes pois aparecem no contexto da resolução de problemas aplicados."[3]

Efectivamente, ao se utilizarem problemas aplicados envolvendo funções polinomiais, dificilmente os zeros aparecerão todos "certinhos", sendo indispensável recorrer a uma calculadora ou computador.

O programa de Matemática A retoma este mesmo tema. E enumera detalhadamente as recomendações metodológicas a ter em conta no estudo das equações e inequações polinomiais. Por exemplo, refere:

> "Na resolução de problemas deve ser dada ênfase especial à Modelação Matemática (por exemplo, usando dados concretos recolhidos por calculadoras gráficas ou computadores acoplados a sensores adequados). Deve ser dada ênfase especial à resolução de problemas usando métodos numéricos e gráficos, nomeadamente quando forem usadas inequações. A resolução numérica ou gráfica deve ser sempre confrontada com conhecimentos teóricos. Deve ser usada a resolução analítica sempre que a natureza do problema o aconselhar, por exemplo quando for conveniente decompor um polinómio em factores. O estudo analítico dos polinómios deve ser suscitado pela resolução de problemas e aí integrado. A resolução analítica de problemas deve ser sempre acompanhada da verificação numérica ou gráfica."[1]

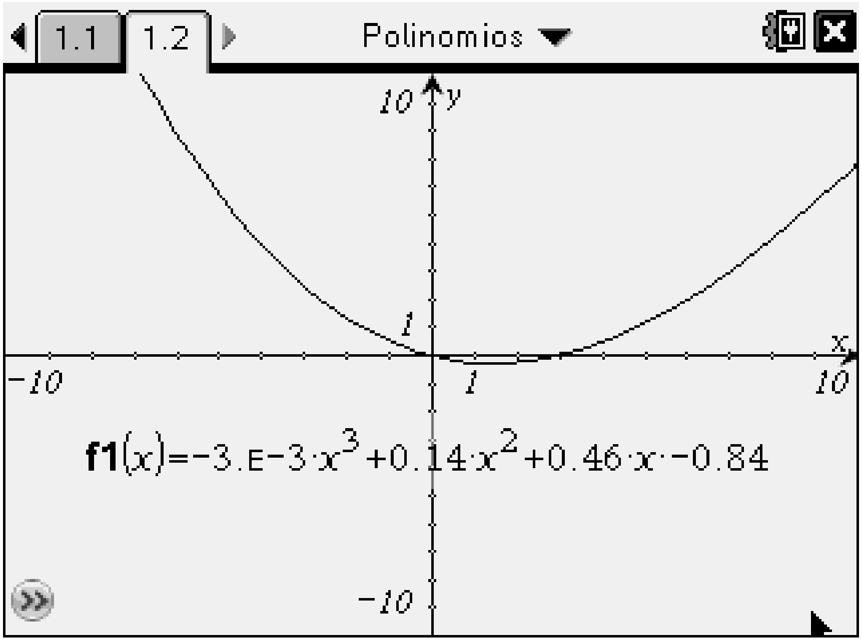
Infelizmente a "ênfase especial à resolução de problemas usando métodos numéricos e gráficos, nomeadamente quando forem usadas inequações" não se observa e a "verificação numérica ou gráfica" é rara. Os manuais escolares privilegiam quase exclusivamente as resoluções algébricas e assim os alunos ficam com uma competência restrita na resolução de problemas e no uso da calculadora.

Problema de modelação

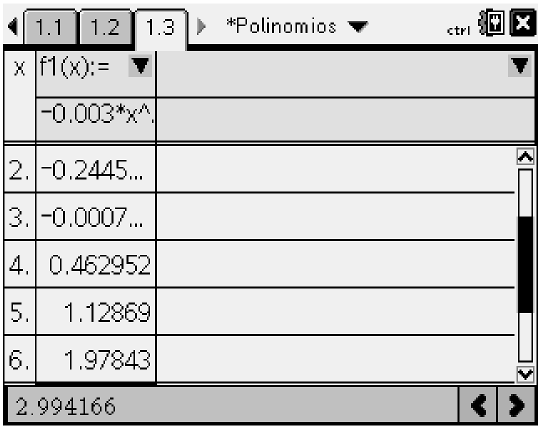
Comecemos com um exemplo concreto. No manual escolar americano [2] aparece a seguinte questão:

> O crescimento do carvalho vermelho é aproximado pela função
>
> $$C(t) = -0.003t^3 + 0.137t^2 + 0.458t - 0.839$$
>
> onde C é a altura da árvore (em pés) e t é a sua idade em anos $(2 \leq t \leq 34)$. Use uma aplicação gráfica para traçar o gráfico da função e estimar a idade da árvore quando está a crescer mais rapidamente. Este ponto é o chamado ponto de diminuição dos retornos porque o aumento do crescimento será menor em cada ano que se segue.

Para trabalhar este problema temos de começar por traçar um gráfico da função. Se o fizermos na janela de visualização por defeito da máquina (normalmente $[-10,10]\times[-10,10]$) o que nos aparece é muito parecido com uma parábola. Será o gráfico adequado?

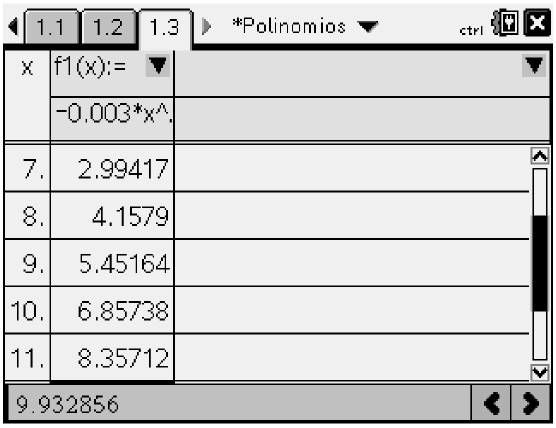


O enunciado do problema facilita-nos a tarefa ao indicar que apenas interessa o intervalo $[2, 24]$ para a variável independente. E para a variável dependente? Neste caso basta traçar uma tabela de valores neste intervalo para saber que intervalo será adequado para a variável dependente.



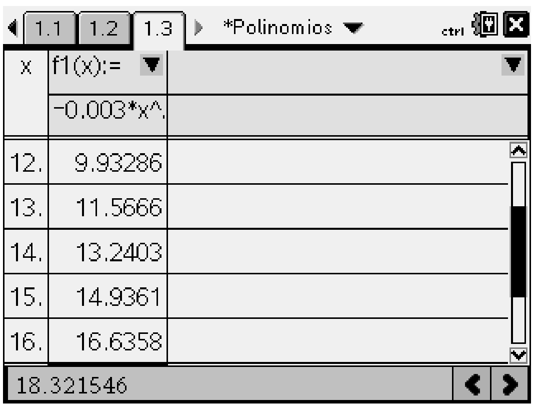
x	f1(x):=
	−0.003*x^
2.	−0.2445...
3.	−0.0007...
4.	0.462952
5.	1.12869
6.	1.97843

2.994166



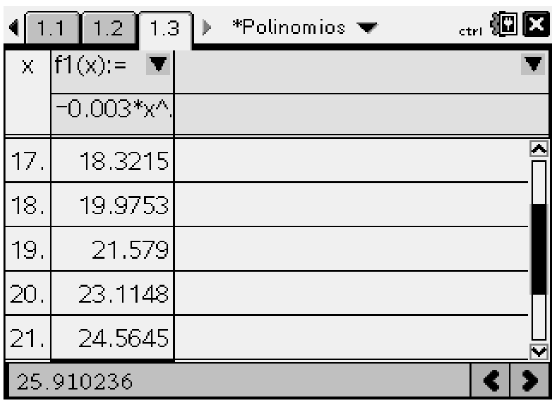
x	f1(x):=
	−0.003*x^
7.	2.99417
8.	4.1579
9.	5.45164
10.	6.85738
11.	8.35712

9.932856



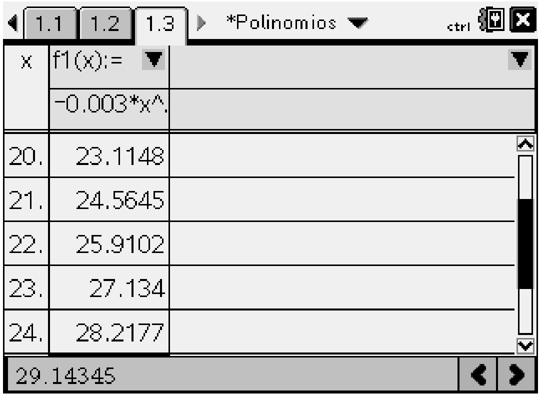
x	f1(x):=
	−0.003*x^
12.	9.93286
13.	11.5666
14.	13.2403
15.	14.9361
16.	16.6358

18.321546

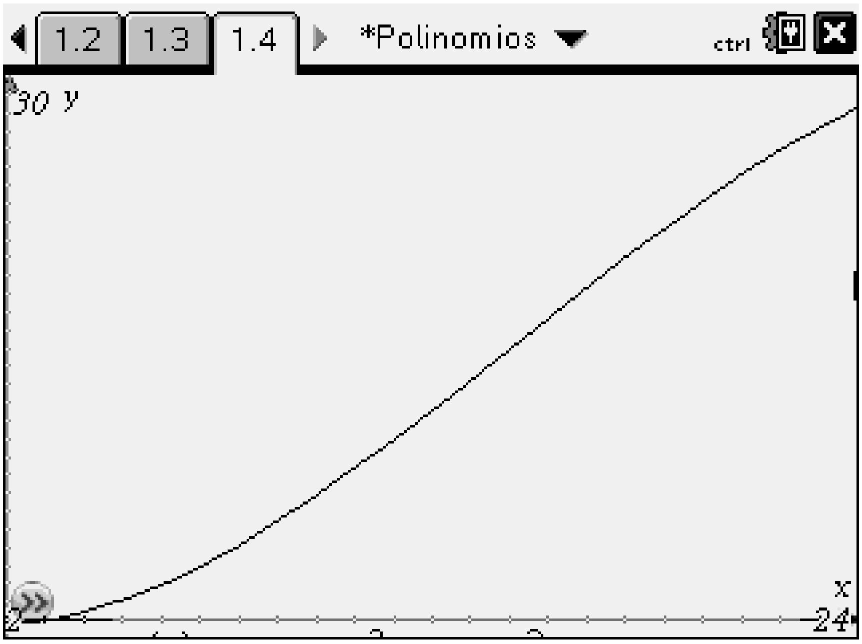


x	f1(x):=
	−0.003*x^
17.	18.3215
18.	19.9753
19.	21.579
20.	23.1148
21.	24.5645

25.910236



O intervalo $[-1, 30]$ parece ser suficiente. Traçando então o gráfico na janela de visualização $[2, 24]\times[-1, 30]$ obtemos



que parece ser suficiente para responder ao problema colocado. Se estivermos no 12º ano a resposta pode ser obtida através da tangente à curva. Se estivermos no 10º podemos obter o resultado por estimativa a partir do gráfico (ampliando na zona onde parece que a função cresce mais, entre os pontos de abcissa 10 e 18, e depois escolhendo um ponto onde parecer que a curva começa a "perder inclinação", algures entre os pontos 12 e 16, sendo aceitáveis como resposta quaisquer valores entre 12 e 16).

Estando este problema concreto resolvido podemos sempre interrogar-nos qual será exactamente o comportamento da função dada em toda a recta real. Como proceder? Temos de saber algo sobre a função polinomial em causa para poder traçar o seu gráfico sem ser por tentativas mais ou menos ao acaso. Que sabemos sobre as funções polinomiais?

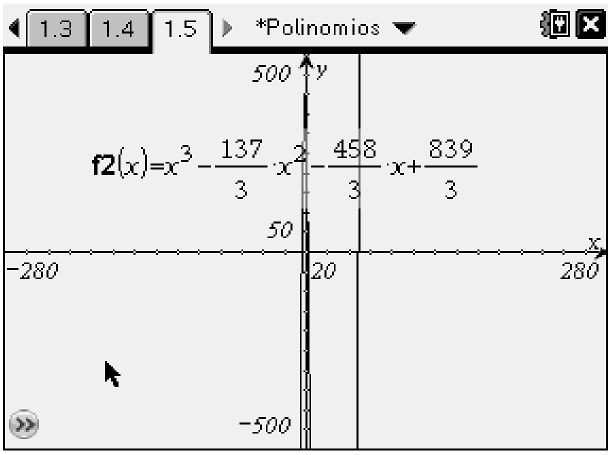
1 – **Corolário do Teorema Fundamental da Álgebra**: O número máximo de zeros reais de uma função polinomial de grau n é exactamente igual a n.

2 – **Teorema de Cauchy**: todas as raízes reais de um polinómio mónico (em que o coeficiente do termo de grau mais elevado é igual a 1) estão contidas no intervalo $\left[-M-1, M+1\right]$ onde M é o maior dos valores absolutos dos coeficientes do polinómio.

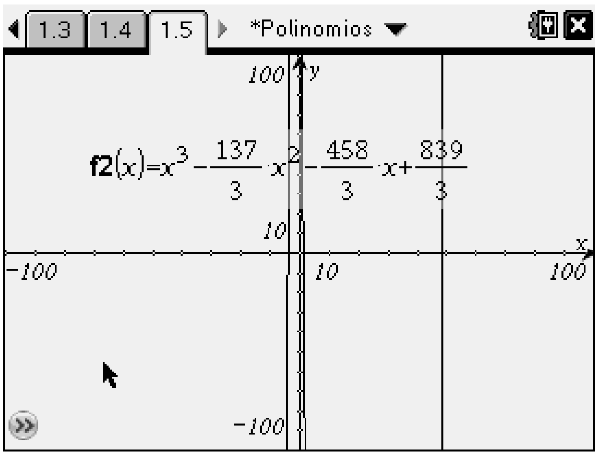
Para aplicar estes princípios à função polinomial em causa, temos de transformar primeiro o polinómio num polinómio mónico $C_1(t)$, que terá obviamente os mesmos zeros:

$$-\frac{1000}{3}C(t)=t^3-\frac{137}{3}t^2-\frac{458}{3}t+\frac{839}{3}=C_1(t)$$

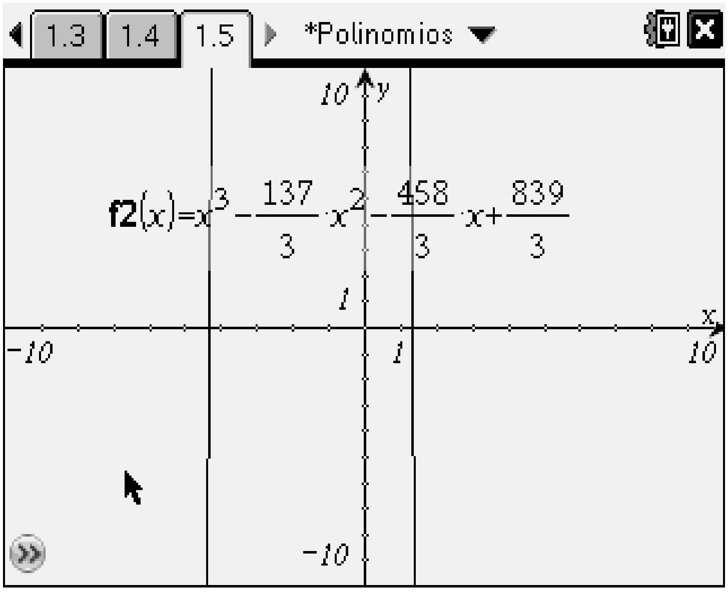
A partir daqui podemos concluir que os zeros estão todos no intervalo $\left[-280, 280\right]$. Recorrendo a uma tabela de valores podemos tentar obter o gráfico na janela de visualização $\left[-280, 280\right]\times\left[-500, 500\right]$.



Observando este gráfico (percorrendo o gráfico com o cursor) concluímos que a janela de visualização $\left[-100, 100\right]\times\left[-100, 100\right]$ será mais do que suficiente para ter uma boa ideia do gráfico desta função.



O que se passa perto da origem fica contudo pouco claro. Então exploremos o que se passa na janela de visualização $[-10,10]\times[-10,10]$:



Observamos claramente dois zeros. Analisando este gráfico e o anterior concluímos pela existência de três zeros reais. Pelo corolário do Teorema Fundamental da Álgebra concluímos que não haverá mais zeros reais. Podemos agora determinar valores aproximados dos zeros, percorrendo o gráfico, ampliando sucessivamente o gráfico ou usando as opções de cálculo da calculadora.

Claro que poderíamos ter usado um software qualquer para determinar rapidamente os zeros, como o poderoso programa Mathematica:

```
In[1]:= Roots[-0.003 t^3 + 0.137 t^2 + 0.458 t - 0.839 == 0, t]
Out[1]= t == -4.34111 || t == 1.32327 || t == 48.6845
```

Também podemos usar um software gratuito que se pode encontrar na internet (e com versão portuguesa) em: http://xrjunque.nom.es/

Mas estas abordagens, tipo caixa negra, nada explicam sobre o seu modo de funcionamento, nem capacitam o utilizador a lidar com situações inesperadas, erros de aproximação ou novas opções que o software possa vir a oferecer. A abordagem proposta neste trabalho não só é formativa como ajuda o estudante a encarar devidamente o novo mundo do estudo de funções com auxílio da tecnologia.

O caso das raízes inteiras

No caso em que o polinómio tenha raízes inteiras, temos um critério de divisibilidade que nos permite listar todos os candidatos a raízes inteiras:

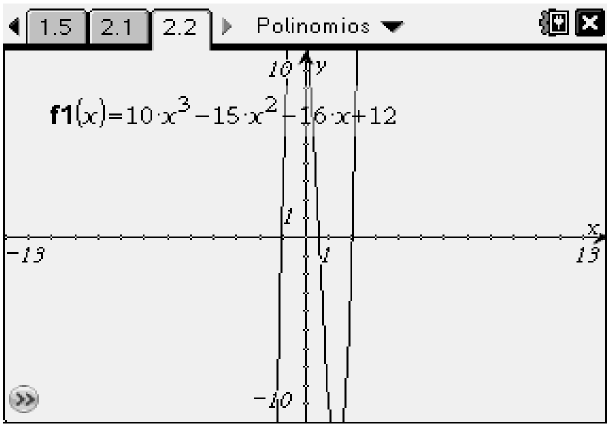
Critério de divisibilidade: Se um polinómio tem coeficientes inteiros, para que seja divisível por $x-a$ é necessário que o termo independente seja um múltiplo de a.

Dito por outras palavras, os possíveis zeros inteiros de um polinómio de coeficientes inteiros são os divisores (positivos e negativos obviamente) do termo independente. Mas uma dificuldade que pode surgir é a de termos muitos valores para experimentar e o processo se tornar muito moroso.

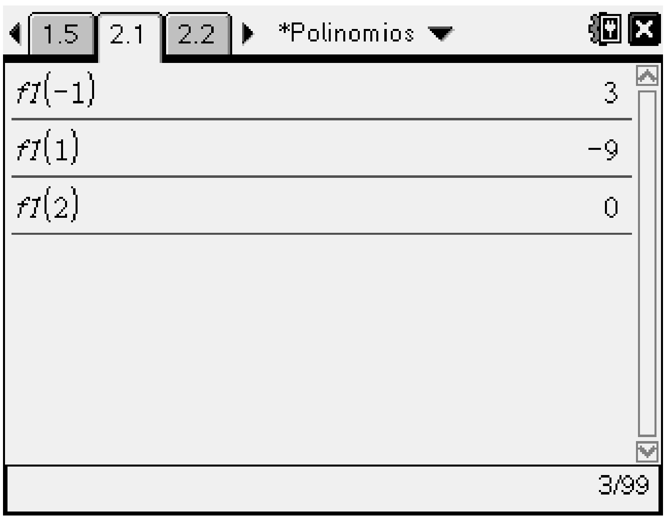
Consideremos então o polinómio

$$f(x) = 10x^3 - 15x^2 - 16x + 12$$

O critério de divisibilidade diz-nos que os possíveis zeros inteiros são 1, 2, 3, 4, 6, 12 e os seus simétricos. Experimentar 12 possibilidades? Será mesmo necessário? Um modo fácil de ultrapassar esta dificuldade é de traçar o gráfico da função polinomial e ver qual das hipóteses parece ser um zero da função polinomial. Como só queremos testar valores entre -12 e 12, o intervalo $[-13, 13]$ é suficiente para a variável independente. Como só queremos determinar os zeros, basta considerar para a variável dependente um intervalo do tipo $[-10, 10]$.



Observando e percorrendo o gráfico excluímos logo os zeros -12, -6, -4, -3, -2, 4, 6 e 12. Sobram os candidatos -1, 1 e 2. Calculando o valor da função nesses 3 pontos concluímos que 2 é um zero da função.



Também poderíamos ter determinado uma tabela de valores entre -13 e 13 para chegar rapidamente a esta conclusão.

Factorizando o polinómio dado usando a regra de Ruffini concluímos que

$$f(x) = (x-2)(10x^2+5x-6)$$

o que nos permite determinar facilmente os restantes zeros.

Mais exemplos

Como desafio propomos um novo problema do mesmo livro já citado [2]:

> O lucro total L, em milhões de dólares, para uma companhia, está relacionado com os seus gastos de publicidade x, em dezenas de milhares de dólares, através da função
>
> $$L(x) = 0.00001(-x^3+600x^2), \quad 0 \le x \le 400$$
>
> Trace o gráfico da função para estimar o ponto do gráfico em que a função está a crescer mais rapidamente. Este ponto é chamado o ponto de diminuição de retornos porque qualquer despesa acima deste valor dará menos retorno por dólar investido na publicidade.

Eis mais exemplos de funções polinomiais onde é útil procurar raízes inteiras:

a) $f(x) = x^4 - x^3 - 29x^2 - x - 30$

b) $g(y) = y^4 - y^3 - 2y - 4$

c) $h(z) = 4z^4 - 43z^2 - 9z + 90$

d) $f(y) = 4y^4 - 55y^2 - 45y + 36$

A combinação dos dois métodos expostos pode permitir resolver eficazmente problemas de modelação em que as soluções sejam números inteiros.

Referências

[1] Carvalho e Silva, J. (coord.), Fonseca, M.G., Martins, A.A., Fonseca, C.M.C., Lopes, I.M.C. - MATEMÁTICA - 10º, 11º e 12º ANOS - Programa, ME-DES, 2003.

[2] Larson, R., Hostetler. R.P., Edwards B.H., College Algebra: A Graphing Approach, Houghton Mifflin; 5th edition (February 21, 2007).

[3] ME-DES, MATEMÁTICA - 10º, 11º e 12º ANOS - Programa, 1995.

[4] Sebastião e Silva, José - Guia para a utilização do compêndio de Matemática - 2º e 3º volumes, 1964-66.

[5] Teixeira, P. (coord.), Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C. e Nápoles, S. (1997) - Funções: Matemática – 10º ano de escolaridade. Lisboa: ME – DES.

Gráficos e representações gráficas

Jaime Carvalho e Silva (Univ. Coimbra) [jaimecs@mat.uc.pt]

Joaquim Pinto (Esc. Sec. Marques de Castilho, Águeda) [prof.joaquimpinto@gmail.com]

Vladimiro Machado (Esc. Sec. Valongo) [vladimiro.machado@gmail.com]

Resumo

A distinção entre gráfico e representação gráfica faz parte do programa de Matemática do 10º ano de escolaridade desde 1995 mas ainda hoje causa algumas dificuldades entre alunos e professores. Apesar de ser um tema bem tratado nas brochuras de apoio ao programa de Matemática do Secundário ([4]), a maioria dos manuais escolares trata o tema de forma pouco adequada ou ignora mesmo o tema. Iremos apresentar as questões básicas que, na nossa opinião, um aluno deve trabalhar e saber no 10º ano.

Palavras-chave: Programa de Matemática; Gráfico; Representação gráfica.

Introdução

O Ajustamento do Programa de Matemática para o Ensino Secundário de 1995 tem inúmeras referências ao uso da calculadora gráfica. Destacamos:

> "As calculadoras gráficas" são de uso "obrigatório neste programa... há vantagens em que se explorem com a calculadora gráfica os seguintes tipos de actividade matemática:
>
> • abordagem numérica de problemas;
>
> • uso de manipulações algébricas para resolver equações e inequações e posterior confirmação usando métodos gráficos;
>
> • uso de métodos gráficos para resolver equações e inequações e posterior confirmação usando métodos algébricos;"

O programa de Matemática A de 2003 retoma este mesmo tema. E o primeiro item do tema de Funções em ambos os programas é exactamente "**Definição de função, gráfico e representação gráfica de uma função.**"

Para que distinguem os programas o gráfico da representação gráfica?

Há muitos anos atrás, o traçado de representações gráficas era muito limitado, os manuais escolares traziam poucos gráficos (ver [1]) e os alunos podiam facilmente confundir os gráficos de funções diferentes (como as funções polinomiais e a função exponencial). Na realidade os alunos tinham dificuldade até em aprender a traçar gráficos pois não existiam ainda calculadoras gráficas e o acesso a computadores era muito limitado. Actualmente tal já não deveria acontecer, mas são os próprios manuais escolares a criar novas dificuldades com os erros que cometem e com as insuficiências de certas abordagens. E não nos esqueçamos que as questões envolvendo calculadoras gráficas são as segundas mais difíceis para os alunos nos exames nacionais do 12º ano (ver [3]).

O gráfico

O que é o gráfico de uma função?

Dada uma função real de variável real f de domínio D, o gráfico G da função f é um conjunto de pares ordenados (x, y) em que x percorre o domínio da função f e y é exactamente o transformado do x correspondente por meio de f. Ou seja

$$G = \{x \in \mathbb{R} : x \in D \quad \text{e} \quad y = f(x)\}$$

Como a brochura de apoio ao programa de Matemática do Ensino Secundário ([4]) pontua, "o gráfico de uma função é um conceito puramente matemático". Ou seja, é um conceito abstracto, importante, mas que como tal é passível de representações que podem não traduzir completamente toda a abrangência da definição.

Que dizemos nós quando traçamos o gráfico de uma função? Em sentido estrito não podemos fazer tal afirmação pois o gráfico é uma entidade abstracta nem ligada, nem dependente, de referenciais ou unidades. Se $f(1) = 2$ tem um sentido preciso já o ponto de coordenadas $(1, 2)$ tem um sentido que depende do referencial que for escolhido. O mesmo ponto do plano pode representar pontos de gráficos diferentes, conforme as unidades escolhidas.

A representação gráfica

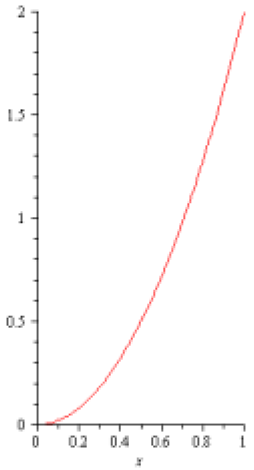
Toda a imagem que se faça relativa a um dado gráfico é uma representação gráfica (mesmo que se use o nome "gráfico" recorrendo a um abuso de linguagem comum). Retomando a brochura citada: "Esta representação tanto pode ser um esboço em papel ou num quadro, como uma representação mais precisa em papel milimétrico, uma imagem num ecrã de uma calculadora ou computador ou uma impressão de alta resolução. As representações gráficas dependem quer dos meios físicos que as suportam quer dos métodos e convenções usados para as construir."

Podemos usar métodos mais ou menos rigorosos para fazer a representação gráfica mas estamos sempre dependentes das convenções usadas para a representação: o "alto" numa representação pode ser "baixo" na outra.

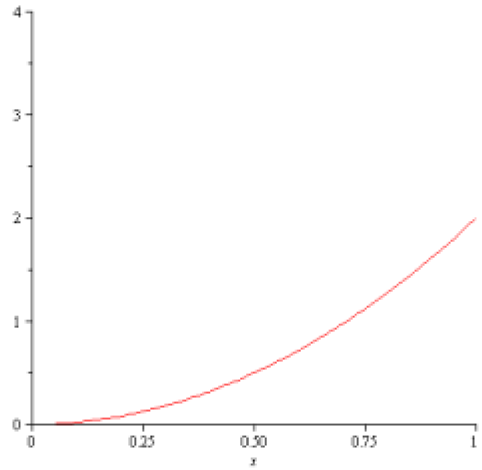
Ouve-se por vezes dizer que só não é possível traçar o gráfico de funções cujo domínio seja ilimitado ou cujo contradomínio seja ilimitado. Tal não pode ser mais errado, pois mesmo que o domínio seja um intervalo limitado, como $[0,1]$ e o conjunto de chegada outro intervalo limitado, como $[0, 2]$, o que se "traçar" é sempre uma representação gráfica dependente de escalas e referenciais (podemos até escolher referenciais não ortogonais).

Observemos por exemplo o que se passa com a função $f(x) = 2x^2$ em que o domínio é o intervalo limitado $[0,1]$ e o conjunto de chegada o intervalo limitado, $[0, 2]$, quando fazemos a representação deste gráfico em diferentes referenciais:

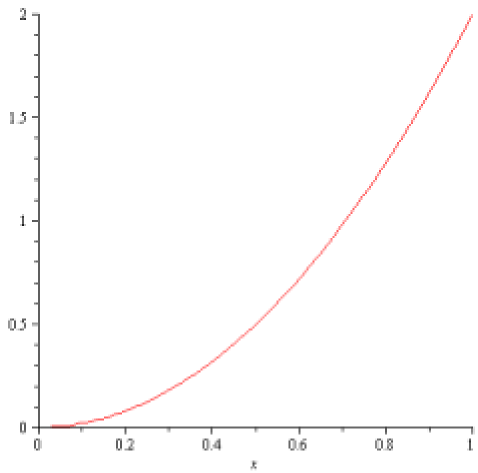
i. Num referencial monométrico obtemos:



ii. Num referencial dimétrico (eixo dos yy "encolhido") obtemos:

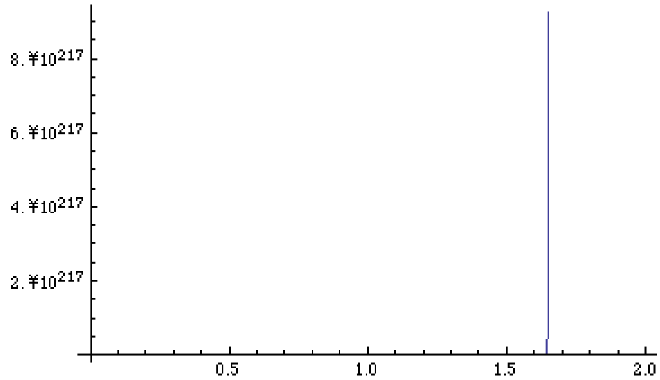


iii. Num referencial dimétrico (eixo dos yy "esticado") obtemos:

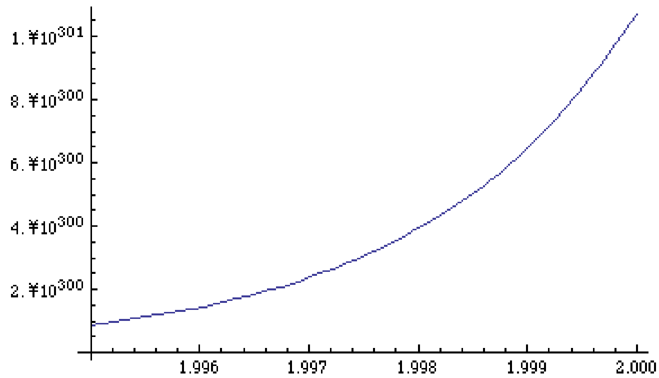


Qual o "verdadeiro" gráfico da função f dada? A questão não tem sentido, pois o gráfico é uma entidade abstracta que não é posta em causa pelas 3 representações gráficas diferentes que obtivemos. Cada representação gráfica (mesmo que lhe chamemos gráfico) não passa disso mesmo, uma "representação"!

Outros dizem que os problemas surgem por as calculadoras gráficas serem limitadas e que tais problemas não surgem com os computadores. Nada mais errado. Por exemplo, se pretendermos traçar o gráfico de x^{1000} no intervalo $[0, 2]$, usando o poderosíssimo software "Mathematica" num computador MacBook Pro com um processador de 2.26 GHz Intel Core 2 Duo, o que obtemos é desmoralizador para o menos prevenido:

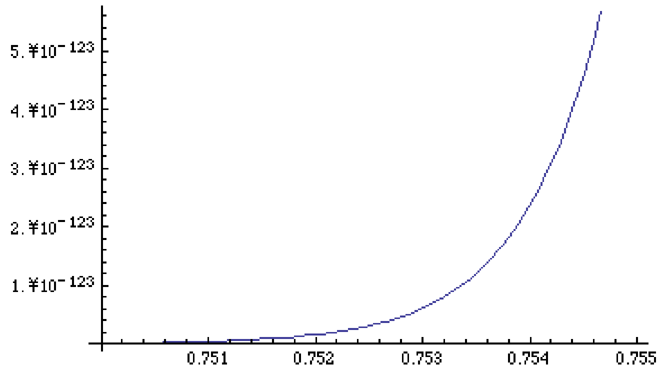


Não se trata de uma questão de software mas sim de uma questão matemática; como a função toma tanto valores praticamente nulos como muito grandes no intervalo $[0, 2]$ não conseguimos ver tudo ao mesmo tempo na mesma representação. Teremos de considerar pequenos intervalos em separado, e muito pequenos, para observar bem o que se passa. Por exemplo, no intervalo $[1.995, 2]$ obtemos o gráfico



O contradomínio neste intervalo é aproximadamente $\left[10^{300}, 10^{301}\right]$.

Mas se for outro intervalo o resultado observado não é muito diferente (excepto se for próximo de zero caso em que os números, sendo tão pequenos, podem ultrapassar o limiar de precisão do próprio software). No intervalo $[0.75, 0.755]$ obtemos



Em conclusão: teremos de considerar cerca de 200 intervalos de amplitude 0.005 para obter uma boa representação gráfica desta função, o que não é nada cómodo...

As dificuldades

Com o uso generalizado de calculadoras gráficas é muito fácil obter representações de gráficos de funções. Contudo, como assinala a brochura já referida, “nem sempre é fácil encontrar uma representação computacional do gráfico da função que permita analisar o comportamento global da função”. E o programa oficial indica mesmo que “os estudantes devem ter oportunidade de entender que aquilo que a calculadora apresenta no seu ecrã pode ser uma visão distorcida da realidade”.

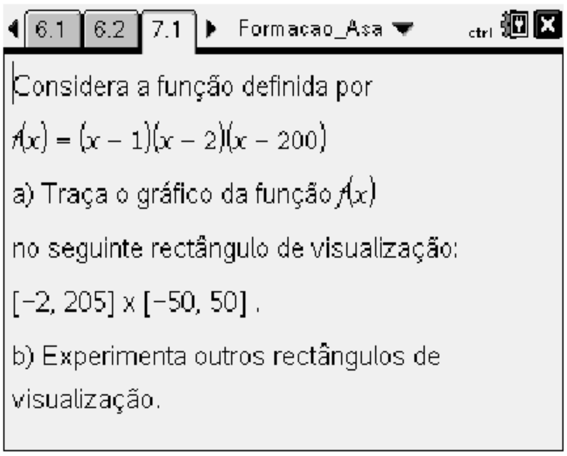
Podem então surgir dois tipos de dificuldades:

a) a representação escolhida não faz justiça ao gráfico da função.

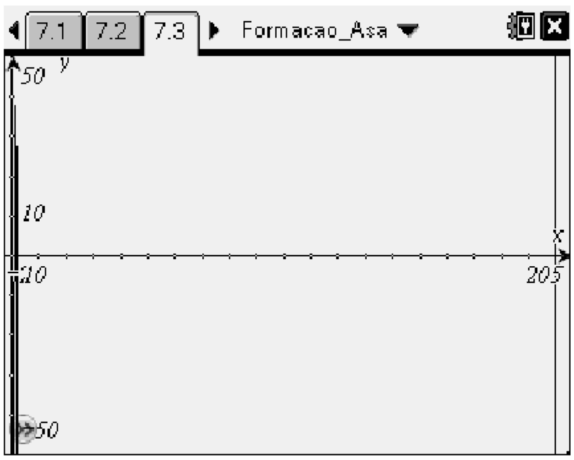
b) não há uma representação simples que consiga representar devidamente o gráfico da função dada, sendo necessário recorrer a duas ou mais representações diferentes.

Os alunos podem usar a mesma designação, “gráfico”, para indicar tanto o gráfico abstracto como uma sua representação, mas só devem fazê-lo depois de perceberem os desafios colocados por estas duas questões.

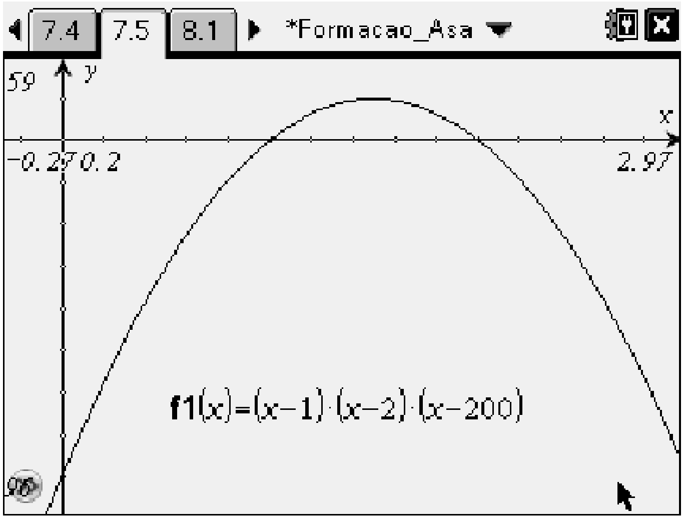
Exemplos,



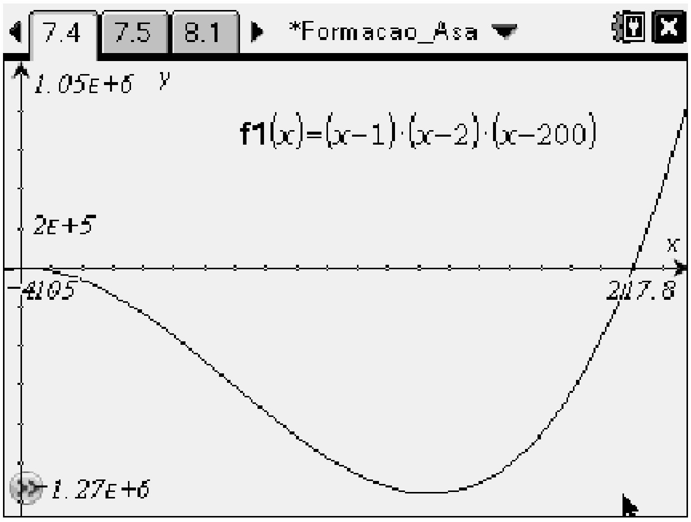
Vejamos o primeiro ecrã, apresentado pela calculadora no intervalo $[-2, 205]\times[-50, 50]$, o qual não nos dá ideia nenhuma do comportamento da função.



Vejamos o que se passa junto à origem no intervalo $[-0.3, 3]\times[-445, 95]$, tendo presente que vamos "perder" o que se passa, lá longe, onde a função tem outro zero.



Se a esta última representação gráfica juntarmos a seguinte, no intervalo $[-5, 220]\times\left[-1.27\times10^{6}, 1.05\times10^{6}\right]$, parece-nos que ficamos mais elucidados (ou não será?), sobre o comportamento desta função, da qual já sabíamos à partida que tinha três zeros: 1, 2 e 200.



Último exemplo

Uma das situações mais curiosas que distingue os gráficos das representações gráficas tem a ver com a inversão de funções. As calculadoras dispõem normalmente de uma opção que permite "inverter" funções. Na realidade a funções "invertem" as representações gráficas ao trocar o ponto de coordenadas (a, b) pelo ponto de coordenadas (b, a).

Exemplo,

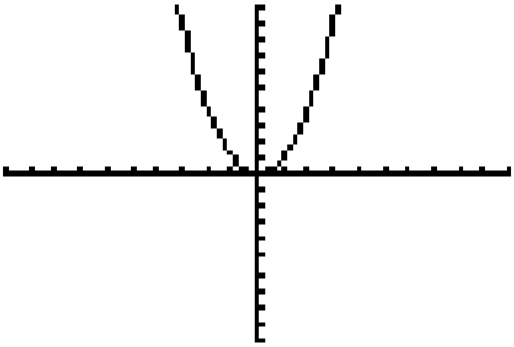
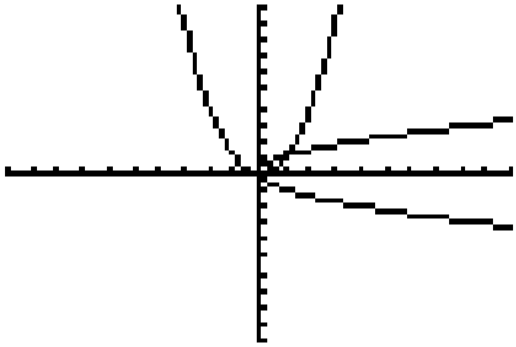
 

Gráfico da função $y = x^2$ **.** **A máquina desenhou a sua "inversa"!!!**

Só a análise de pelo menos algumas das situações aqui apresentadas vai permitir que "os estudantes" tenham "oportunidade de entender que aquilo que a calculadora apresenta no seu ecrã pode ser uma visão distorcida da realidade".

Referências

[1] Carvalho e Silva, Jaime - OS COMPUTADORES E O ENSINO DA ANÁLISE ELEMENTAR, in Nonius, nº 14, Outubro de 1988.

[2] ME-DES, MATEMÁTICA - 10º, 11º e 12º ANOS - Programa, 1995.

[3] Ramalho, G. (coord.) (2002). Contributo para uma melhor compreensão do desempenho dos alunos nos exames do 12º ano. Lisboa: GAVE, ME.

[4] Teixeira, P. (coord.), Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C. e Nápoles, S. (1997). Funções: Matemática – 10º ano de escolaridade. Lisboa: ME – DES.

DESPERTAR PARA A GEOMETRIA

UM PROJECTO DESENVOLVIDO COM ALUNOS DO 5.º E 6.º ANOS DE ESCOLARIDADE

Manuela Neto, João Sampaio Maia

Escola E.B. 2,3 Maria Lamas, Escola Superior de Educação do Porto

manuela.alves.neto@gmail.com, jsampmaia@gmail.com

Resumo

Esta comunicação descreve um projecto realizado, ao longo de um ano lectivo, com alunos do 5.º e 6.º anos de escolaridade. Com este projecto pretendemos motivar os alunos para a aprendizagem da Matemática, particularmente na área da Geometria, e desenvolver as competências previstas no Currículo Nacional de acordo com as orientações do novo Programa de Matemática do Ensino Básico.

Esta intervenção pedagógica incluiu actividades, desenvolvidas em contextos pedagógicos diversificados, tendo sido algumas realizadas fora da componente lectiva.

Os percursos propostos incluíram actividades diagnóstico, de observação, investigação, exploração, de desenvolvimento da criatividade e capacidade de comunicação e actividades de articulação curricular.

Com este projecto procurámos promover o recurso às novas tecnologias educativas no ensino da Matemática, nomeadamente na utilização do Quadro Interactivo e do software de Matemática Dinâmica – GeoGebra.

Apresentamos os recursos utilizados, as fases do planeamento do projecto, o percurso de abordagem de algumas actividades, as dificuldades identificadas, a organização do grupo-turma, e exemplos de produções dos alunos.

Terminamos com breves considerações sobre a importância deste tipo de experiências como estratégia de abordagem de alguns temas da Matemática e com uma referência aos resultados obtidos na experiência apresentada.

1. Introdução

O novo Programa de Matemática para o Ensino Básico indica duas finalidades fundamentais para o ensino da Matemática. (ME, 2007, p. 3)

> Promover a aquisição de informação, conhecimento e experiência em Matemática e o desenvolvimento da capacidade da sua integração e mobilização em contextos diversificados.
>
> Desenvolver atitudes positivas face à Matemática e a capacidade de apreciar esta ciência.

Foram estes dois princípios fundamentais que estiveram na base da implementação deste projecto e na definição das propostas de abordagem.

Para o National Council of Teachers of Mathematics (2007, p.11), «o ensino efectivo da matemática requer a compreensão daquilo que os alunos sabem e precisam de aprender, bem como o sequente estímulo e apoio para que o aprendam correctamente. (…) A tecnologia é essencial no ensino e na aprendizagem da matemática; influencia a Matemática que é ensinada e melhora a aprendizagem dos alunos».

Estas orientações remetem-nos para o diagnóstico prévio dos conhecimentos e competências e para um planeamento de percursos de abordagem diversificados que promovam novos conhecimentos e integrem as novas tecnologias.

Segundo Brumbaugh *et al* (2003), a tecnologia pode aumentar as competências do pensamento matemático. Quando é utilizada nos primeiros anos de escolaridade, aumenta o potencial dos alunos atingirem um nível mais elevado da compreensão matemática. Estes autores referem que há sempre alguma tecnologia que poderá ser usada para melhorar a aprendizagem dos conceitos. É importante que alguma forma de tecnologia seja seleccionada e que o professor possua algum nível de familiaridade com essa para que se torne numa ferramenta eficiente.

2. Apresentação do projecto

Este projecto inclui percursos de abordagem que incidem, fundamentalmente, sobre o desenvolvimento de competências na área da geometria. Decorreu ao longo de um ano lectivo com alunos dos 5.º e 6.º anos de escolaridade e envolveu actividades realizadas dentro e fora do contexto de sala de aula. As actividades foram orientadas e desenvolvidas pela investigadora (autora deste artigo e referida em primeiro lugar) e professora titular das turmas de 6.º ano. No 5.º ano, as actividades foram realizadas com a colaboração da professora titular dessa turma.

Seleccionaram-se os seguintes objectivos a desenvolver:

- Despertar o gosto e a aprendizagem da Geometria.
- Desenvolver competências de utilização das TIC.
- Desenvolver a capacidade de visualização espacial.

- Desenvolver a aptidão para realizar construções geométricas, reconhecer e explorar as suas propriedades.
- Explorar diferentes tipos de isometrias através da criação de padrões geométricos.
- Desenvolver a capacidade de comunicação e raciocínio matemático.
- Desenvolver a criatividade, através de composições de figuras geométricas.

Os temas abordados, "Sólidos geométricos", "Figuras no plano", "Reflexão, rotação e translação", "Perímetros" e "Áreas" estão previstos para o 5.º e 6.º anos do novo Programa de Matemática do Ensino Básico.

Para a exploração de alguns temas referenciados optámos pelo GeoGebra, por ser um software livre de matemática dinâmica (SMD), *open source*, e pelo facto da aprendizagem na utilização deste recurso ser relativamente rápida. É uma ferramenta que permite traçar funções, encontrar raízes, derivadas e integrais. É classificado como um SMD para a geometria, álgebra e cálculo (Hohenwarter & Preiner, 2007).

A utilização deste recurso permite motivar os alunos e envolvê-los de forma activa e participativa, na construção do seu próprio conhecimento.

Nesta comunicação, descrevemos algumas dessas actividades com o respectivo percurso de abordagem, organização do grupo turma e as dificuldades diagnosticadas.

2.1 Planeamento do projecto

Para enquadrar este trabalho, apresentamos uma breve caracterização dos contextos pedagógicos em que o mesmo foi desenvolvido.

As actividades incluídas neste projecto foram realizadas em três turmas do 2.º ciclo do ensino básico, uma do 5.º ano e duas do 6.º ano.

A turma do 5.º ano de escolaridade, tem 27 alunos e pertence a um agrupamento do concelho de Matosinhos. Em termos de conhecimentos matemáticos têm um aproveitamento bastante satisfatório, destacando-se um pequeno grupo de alunos com conhecimentos e competências superiores à média da turma. Apesar do elevado número de alunos, o que dificultou a realização de actividades mais práticas de investigação e exploração, estes mostraram-se empenhados e muito participativos. As turmas do 6.º ano, uma com 19 e outra com 20 alunos, pertencem a um agrupamento do concelho do

Porto. São alunos com muitas lacunas nos seus conhecimentos matemáticos, grande desmotivação, alguns problemas de comportamento e ausência de hábitos de trabalho.

Como o projecto foi desenvolvido com alunos de dois níveis de escolaridade, em contextos educativos diferenciados, as actividades foram seleccionadas de acordo com essas características. A análise do desempenho nas actividades desenvolvidas com os alunos do 5.º ano foi considerada como elemento orientador de algumas propostas desenvolvidas com os alunos do 6.º ano.

O primeiro momento deste projecto foi a realização de actividades de diagnóstico, com um ou dois exercícios muito específicos, sobre as áreas de intervenção. A análise dos resultados dessas actividades, permitiu o conhecimento prévio de competências e dificuldades constituindo a base do planeamento e preparação desta intervenção.

Identificaram-se três condições fundamentais para o sucesso deste projecto:

a) envolver os alunos na realização de tarefas que motivassem e despertassem o seu interesse e curiosidade;

b) promover uma articulação entre áreas disciplinares, um ambiente de cooperação/partilha entre os alunos deste projecto e alunos de outras turmas;

c) proporcionar uma formação básica na utilização do *software* de matemática dinâmica, a ser utilizado na realização de algumas actividades.

De forma a satisfazer a primeira condição foram considerados os seguintes factores: diversificar as estratégias e actividades; propor tarefas que a maioria dos alunos fosse capaz de resolver; aumentar gradualmente o grau de dificuldade e exigência, em termos de rigor de execução; seleccionar algumas actividades por sugestão dos alunos; imprimir um carácter de "competitividade" relativamente a algumas propostas.

No sentido de promover a partilha de conhecimento e a cooperação, realizámos actividades de articulação com outras áreas curriculares. Em Estudo Acompanhado, os alunos exploraram e ilustraram um texto sobre o tema "figuras geométricas". No âmbito da comemoração do "Centenário da República" criaram um modelo da bandeira.

Como pretendemos desenvolver com os alunos actividades de matemática dinâmica, foi necessário proceder à formação em GeoGebra, antes de se iniciar as actividades. A formação inicial realizou-se nas aulas de Matemática, tendo sido complementada com auto-formação desenvolvida pelos alunos em tempo extra-curricular com o apoio de guiões e da docente da disciplina de Matemática.

De forma a criar as condições adequadas, em termos de recursos tecnológicos, foi instalado o GeoGebra em todos os portáteis e computadores de algumas salas.

Com o objectivo de cooperação entre turmas, e como uma forma de motivação às aprendizagens, envolveu-se um grupo de alunos na dinamização de uma actividade realizada no âmbito do Plano da Matemática. Esta actividade também teve como objectivo proporcionar aos alunos do agrupamento que no próximo ano lectivo entram no novo Programa de Matemática uma primeira abordagem ao GeoGebra.

Reunidas as condições necessárias procedemos ao desenvolvimento do projecto.

2.2 Desenvolvimento do projecto

2.2.1 Dinamização da sessão de formação

Após o diagnóstico do domínio de competências, a investigadora iniciou a formação em GeoGebra, em cada uma das turmas separadamente, que decorreu numa aula de Matemática durante um período de 90 minutos.

Foi realizada uma breve demonstração das funções dos diversos ícones da barra de ferramentas e de cada uma das opções do menu do programa com a concretização de alguns exemplos tais como: marcar pontos, segmentos de recta, traçar rectas paralelas e perpendiculares, construir polígonos, entre outros. O conhecimento de outras funcionalidades do programa, decorreu no âmbito do desenvolvimento das actividades. Durante este momento de trabalho, não foram disponibilizados computadores aos alunos de forma a focar a sua atenção e concentração nas explicações apresentadas.

Finalizada esta primeira abordagem, os alunos foram organizados em grupos de dois, com um computador portátil por grupo. Iniciámos uma sessão orientada onde se procede a algumas construções geométricas, realizadas, passo a passo, em primeiro lugar pela investigadora e posteriormente reproduzidas pelos alunos. Nesta fase, foi fundamental o desenvolvimento deste tipo sessão de forma que os alunos não se desviassem dos objectivos previstos.

Os alunos representaram diversos elementos e figuras geométricas sendo solicitado que estivessem atentos aos “passos” que davam em cada uma destas representações. Esta actividade funcionou como treino na utilização do *software*, permitiu o desenvolvimento da capacidade de comunicação, através do questionamento dos alunos e possibilitou um diagnóstico de pré-requisitos.

2.2.2 Actividades de Matemática dinâmica

No âmbito destas sessões, foram propostas várias actividades seleccionando-se para esta comunicação quatro dessas actividades.

- Actividade: Construção de polígonos e exploração das suas propriedades.

Nesta sessão, procedeu-se à construção de polígonos, investigação e exploração das suas propriedades.

No 5.º ano, os alunos começaram por construir dois ou três polígonos e a partir de uma dessas construções, indicaram o número de lados de um dos polígonos classificando-o. Procederam também à classificação dos seus ângulos internos. Alguns alunos construíram polígonos com mais de oito lados e por isso não souberam atribuir-lhes uma classificação e também revelaram algumas dificuldades na distinção de ângulos agudos e obtusos. Posteriormente, cada grupo de alunos construiu um polígono com um número de lados inferior a seis, solicitando-se que indicassem algumas características dessa construção de forma que os colegas a pudessem reproduzir no seu computador. Ao nível da comunicação matemática obtiveram-se descrições muito incompletas, verificando-se várias incorrecções na aplicação de conceitos matemáticos. Alguns alunos associaram incorrectamente nomes de sólidos a nomes de polígonos bem como os seus elementos geométricos, usando frequentemente o termo arestas ou faces para referir os lados do polígono.

Foram também exploradas as noções de polígono regular e irregular partindo-se de algumas construções.

No 6.º ano a actividade foi orientada para a abordagem do tema “quadriláteros”. Os alunos construíram vários tipos de quadriláteros, indicaram os seus elementos usando a notação adequada, procederam à sua classificação, traçaram diagonais e investigaram as suas propriedades. Revelaram grandes dificuldades na utilização da notação matemática mas apreenderam com facilidade algumas propriedades dos quadriláteros. A possibilidade de “deformar” um polígono transformando-o num polígono diferente facilitou a compreensão destes conceitos. Na Figura 1, estão representados dois exemplos de construções (5.º e 6.º anos).

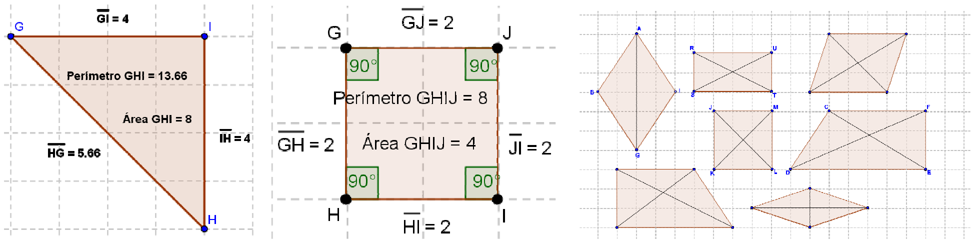


Figura 1– Construção de polígonos

- <u>Actividade</u>: Composição de figuras geométricas

Esta proposta foi desenvolvida como trabalho extra-curricular, para consolidação de aprendizagem e desenvolvimento da criatividade. A partir de duas composições criadas pelos alunos, foram exploradas as noções de perímetro e área e calculado o seu respectivo valor com recurso às funções do programa e verificação manual. Nestas actividades, alunos com dificuldades de aprendizagem destacaram-se no seu desempenho relativamente ao que é habitual. Na Figura 2, apresentamos exemplos de composições geométricas realizadas pelos alunos.

Figura 2 – Composição de figuras geométricas

- <u>Actividade</u>: Construção de um friso com figuras geométricas

A actividade foi proposta aos dois níveis de escolaridade embora se desenvolvesse uma exploração mais ampla no 6.º ano. No 5.º ano, a partir dos frisos, consolidou-se o estudo dos elementos e propriedades dos polígonos e desenvolveu-se a noção de sequência. No 6.º ano, solicitou-se que na criação de frisos fosse utilizada a translação, simetria e a rotação para posteriormente se explorar estes conceitos em grande grupo. Na Figura 3, está representado o friso criado por uma aluna de 5.º ano.

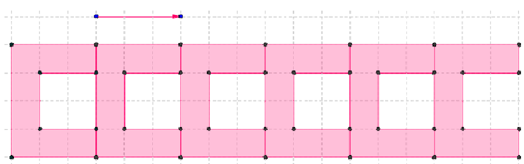


Figura 3 – Friso

- <u>Actividade</u>: Criação de um logótipo com figuras geométricas

Esta actividade, realizada apenas nas turmas de 6.º ano, pretendeu o desenvolvimento da criatividade e da capacidade de comunicação, através da criação de um logótipo contendo as iniciais da escola. Os alunos descreveram a sua criação indicando algumas características das figuras que utilizaram. O facto de já terem realizado anteriormente actividades que promoveram a comunicação permitiu a obtenção de descrições bastantes completas. Na Figura 4 apresentam-se dois desses trabalhos.

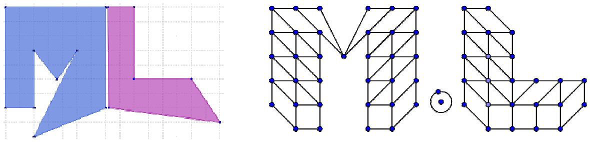


Figura 4 – Logótipo

2.2.3 Actividades de articulação

Foram seleccionadas duas actividades de articulação, realizadas no agrupamento do Porto, que incluíram alunos de outras turmas além dos alunos deste projecto.

- <u>Actividade</u>: Onde vês a Matemática

Esta actividade, de carácter extra-curricular, desenvolvida ao nível do Departamento de Matemática da escola do Porto, envolveu a participação de alunos de todas as turmas. Pretendeu-se a elaboração de um trabalho com imagens/fotografias, onde os alunos identificassem os elementos matemáticos presentes, os caracterizassem e descrevessem.

Os alunos deste projecto realizaram os trabalhos no GeoGebra. Inseriram uma imagem no bloco de desenho, identificaram elementos geométricos e construíram esses elementos sobrepondo-os na imagem. Na Figura 5, apresentamos dois desses trabalhos.

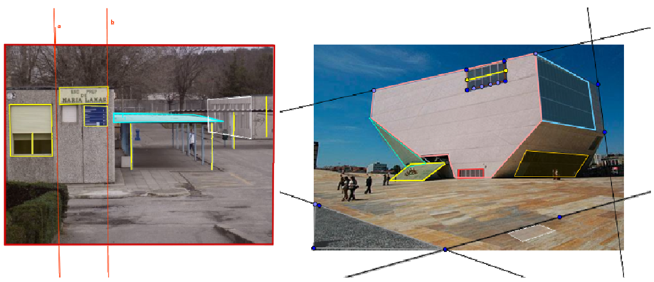


Figura 5 – Onde Vês a Matemática

- <u>Actividade</u>: Construção de um modelo da Bandeira da República

Esta actividade foi desenvolvida em articulação com as áreas curriculares de Área Projecto, História e Educação Visual e Tecnológica, no âmbito da “Comemoração do Centenário da República". Consistiu na construção, em cartolina, de modelos da Bandeira da República em diferentes escalas.

Os alunos aplicaram conceitos de álgebra e geometria através da realização de medições, cálculo de razões, áreas, perímetros, construção de circunferências, desenvolvendo a orientação e organização espacial. Na Figura 6, está representado um dos modelos construídos pelos alunos.

Figura 6 – Modelo de Bandeira

3. Considerações finais

Na turma de 5.º ano, as sessões de trabalho decorreram com a presença de dois professores na sala. Este facto contribuiu positivamente para os resultados das tarefas propostas, mais exigentes que o habitual, e para o cumprimento do plano de trabalho devido à possibilidade de apoio individualizado aos alunos com maiores dificuldades. Nas turmas de 6.º ano, apesar de menos numerosas, as sessões decorreram apenas com a presença da investigadora comprometendo, por vezes, os objectivos desejáveis e o cumprimento do plano de trabalho. Outra condicionante foi a heterogeneidade entre os conhecimentos e níveis de competências dos alunos. Nas actividades de Matemática dinâmica, verificámos que os alunos com acesso em casa à utilização do GeoGebra mostraram uma maior evolução nas aprendizagens comparativamente aos outros.

Nas actividades de exploração e investigação, os alunos revelaram muitas dificuldades em formular conjecturas, necessitando de muita orientação. Embora não se tendo realizado as mesmas actividades nos dois grupos, as observações registadas pelos alunos de 5.º ano superaram os objectivos enquanto que as dos alunos de 6.º ano ficaram aquém do esperado.

Em actividades de construção geométrica, identificação de elementos das figuras construídas e no cálculo de áreas e perímetros, a maioria dos alunos atingiu os objectivos previstos com bom desempenho. Os alunos com dificuldades de aprendizagem e défice de concentração destacaram-se pela positiva, relativamente ao que é habitual, tendo atingido as competências essenciais nos temas desenvolvidos.

As actividades propostas permitiram uma grande evolução no desenvolvimento da capacidade de visualização, comunicação e reconhecimento das características geométricas das construções realizadas. Verificámos que os alunos foram, gradualmente, integrando nas suas produções e nas suas conjecturas as orientações dadas nas primeiras sessões revelando mais autonomia. Pensamos que estas evidências resultaram do facto de terem sido realizadas várias actividades complementares e do carácter competitivo associado a algumas dessas actividades. Este ambiente de competição foi determinante na mobilização do empenho dos alunos.

Ao nível do raciocínio matemático, as actividades propostas não promoveram satisfatoriamente este objectivo.

Foi fundamental, neste projecto, que as tarefas envolvessem uma componente de abordagem diversificada, nomeadamente, oral, com recurso à escrita (papel e lápis) e às TIC. Estes factores foram especialmente relevantes no perfil de alunos do 6.º ano.

Globalmente, consideramos que foram atingidos os objectivos deste projecto pois registámos uma grande motivação e concentração, por parte dos alunos, e um progresso significativo em termos de conhecimentos e competências desenvolvidas.

Referências bibliográficas

Brumbaugh, Douglas K., Rock, David, Brumbaugh, Linda S., Rock, Michelle L.. (2003). *Teaching K- 6 Mathematics*. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers (pp. 32-35). Mahwah, New Jersey, London.

Hohenwarter, M. & Preiner, J. (2007). Dynamic mathematics with GeoGebra. *Journal of Online Mathematics and its Applications*. MAA, ID 1448, vol. 7. Acedido em 20 de Junho, 2010, de http://www.maa.org/joma/Volume7/Hohenwarter/index.html.

National Council of Teachers of Mathematics (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.

Ponte, J.P., Serrazina, L., Guimarães, H. M., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Sousa, Menezes, L., Martins, M. E. G., Oliveira, P. Alexandre (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação - DGIDC.

À DESCOBERTA DE *SOFTWARE* PARA EXPLORAR A PROGRAMAÇÃO LINEAR NO ENSINO SECUNDÁRIO

Paula Maria Barros[(1)], Ana Isabel Pereira[(1)], Ana Paula Teixeira[(2)]
[(1)]Instituto Politécnico de Bragança, [(2)]Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro
pbarros@ipb.pt, apereira@ipb.pt, ateixeir@utad.pt

Resumo

A Programação Linear, PL, tem como objectivo a resolução de problemas de optimização com restrições em que todas as funções envolvidas são lineares. Diversos problemas da vida real podem ser formulados como problemas de PL como, por exemplo, os problemas de planeamento e de transportes.

A Programação Linear é um dos temas obrigatórios de algumas disciplinas de Matemática do Ensino Secundário, sendo importante que se trabalhem com os alunos problemas que traduzam situações reais, ou suas adaptações. Como estes problemas nem sempre são fáceis e rápidos de resolver, a utilização de ferramentas tecnológicas na sua resolução reveste-se de enorme importância.

Existem diversos programas de computador como o *Solver* do *Microsoft Office Excel*, o *WinQSB*, o *Programación Lineal* e o *Winplot*, de fácil utilização pelos alunos, que possibilitam a exploração gráfica, no caso bidimensional, ou analítica dos problemas de PL. O uso deste *software* permite que os alunos resolvam uma maior diversidade de problemas e se centrem mais na análise e interpretação de resultados.

Neste artigo, ilustra-se, resumidamente, a forma de resolver problemas de PL com o *software* mencionado e discute-se as suas potencialidades e limitações.

Palavras-chave: Programação Linear, *Software*, Ensino Secundário

Introdução

Na sociedade actual somos várias vezes confrontados com situações em que temos de tomar decisões de planeamento ou de gestão de forma a rentabilizar os recursos disponíveis e minimizar os custos ou consumos, ou seja, é necessário resolver problemas de optimização. Se neste tipo de problemas todas as funções envolvidas (função objectivo e restrições) são lineares temos um problema de PL.

Como uma das finalidades da disciplina de Matemática no Ensino Secundário é "desenvolver a capacidade de usar a Matemática como instrumento de interpretação e intervenção no real" (Silva *et. al*, 2001, p.3), torna-se imprescindível que esses alunos explorem também problemas de PL. De realçar, que nos programas oficiais em vigor a Programação Linear é um dos temas obrigatórios das disciplinas de Matemática A do 11.º ano e Matemática B do 12.º ano do Ensino Secundário. Com efeito, no primeiro caso, a PL é um dos conteúdos do *Tema I - Geometria no Plano e no Espaço II*, recomendando-se uma breve introdução ao tema e a inclusão de referências aos Domínios Planos - interpretação geométrica de condições (Silva *et al.*, 2002a).

No programa da disciplina de Matemática B para o 12.º ano, a PL é um dos conteúdos do *Tema IV - Problemas de optimização*. "Pretende-se que os estudantes sejam capazes de reconhecer que situações distintas podem ser descritas pelo mesmo modelo matemático, resolver numérica e graficamente problemas simples de Programação Linear e reconhecer o contributo da Matemática na tomada de decisões, assim como as suas limitações." (Silva *et al.*, 2002b, p.7).

Os problemas de PL, oriundos de situações reais, nem sempre são de fácil e rápida resolução, pois podem envolver um considerável número de variáveis ou restrições, pelo que se torna imprescindível o recurso a ferramentas tecnológicas. Estas, para além de constituírem um objecto de motivação e predisposição para a aprendizagem, permitem que os alunos resolvam uma maior diversidade de problemas e que os explorem com maior profundidade.

Resolução de problemas de PL com recurso a *Software*

Os manuais do Ensino Secundário (Jorge *et al.*, 2004; Neves *et al.*, 2006) apresentam, essencialmente, problemas de PL com duas variáveis, sendo as propostas de resolução baseadas na representação gráfica da região admissível, remetendo posteriormente para o cálculo do valor da função objectivo em todos os vértices da região admissível ou para a representação de rectas de nível da função objectivo. Embora alguns manuais façam referência à necessidade de recorrer à utilização de *software* de PL para resolver problemas do quotidiano, não exploram nem incentivam a sua utilização.

Existe uma série de *software* entre os quais, o *Solver* do *Microsoft Office Excel*, o *WinQSB*, o *Programación Lineal* e o *Winplot*, que pode ser utilizado para resolução de problemas de PL no Ensino Secundário.

Nas secções seguintes pretende-se ilustrar, resumidamente, como se pode utilizar o *software* acima mencionado para resolver o seguinte problema de PL.

Tabela 1 - Problema de PL (adaptado de Jorge *et al.*, 2004)

Um fabricante produz três tipos de bicicletas: *B*1, *B*2 e *B*3, com lucro unitário de 100 euros. Na produção semanal usam-se três oficinas, cuja disponibilidade horária semanal é 200, 240 e 600, respectivamente. O número de horas necessárias, em cada oficina, para produzir uma bicicleta de cada tipo é o seguinte:

	B_1	B_2	B_3
Oficina A	2	1	0
Oficina B	0	3	4
Oficina C	0	0	21

Devido a um problema com as máquinas, a fábrica nessa semana, passou a produzir apenas bicicletas dos tipos *B*1 e *B*2.

Questão 1. Quantas bicicletas de cada tipo deve a fábrica produzir para obter o lucro máximo?

Questão 2. Quando a fábrica estiver apta a produzir os três tipos de bicicletas, quantas bicicletas de cada tipo deve a fábrica produzir para obter o lucro máximo?

Resolução do problema utilizando o *Winplot*

O *Winplot* (Parris, 2009) é um programa gráfico que permite desenhar funções em duas e três dimensões, 2D e 3D respectivamente, sendo um recurso de livre acesso. Embora se possam realizar representações a 3D não é possível representar os semi-espaços relativos às restrições, pelo que se vai utilizar esta ferramenta apenas para resolver a Questão 1 do problema proposto.

Tabela 2 - Resolução da Questão 1 utilizando o *Winplot*

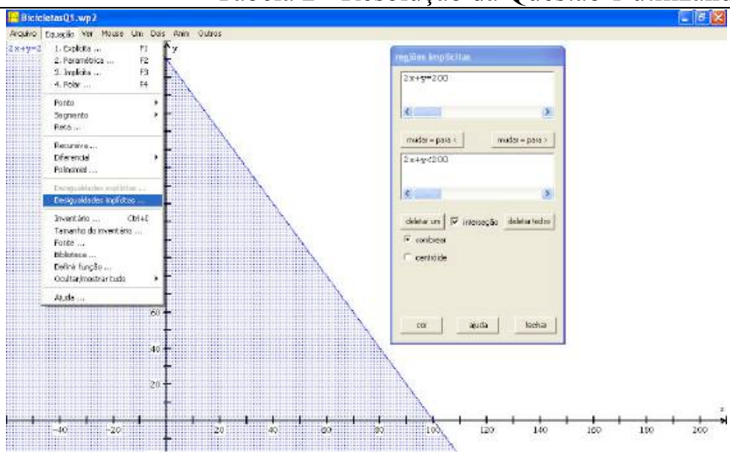
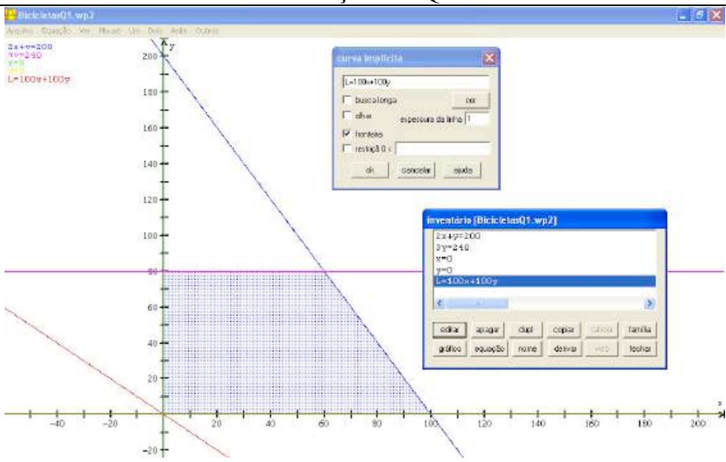
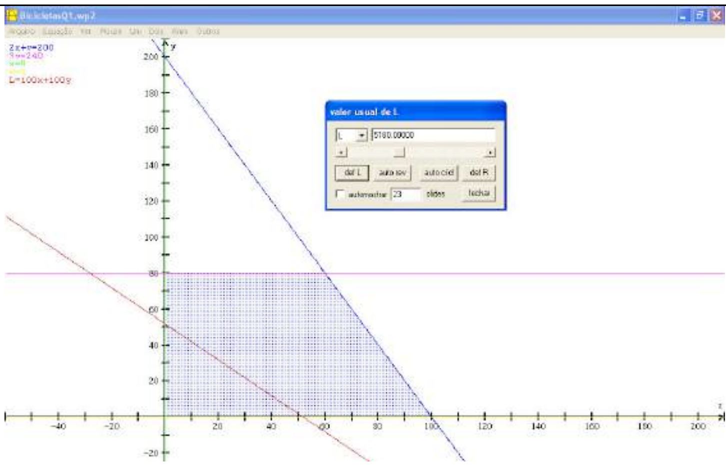
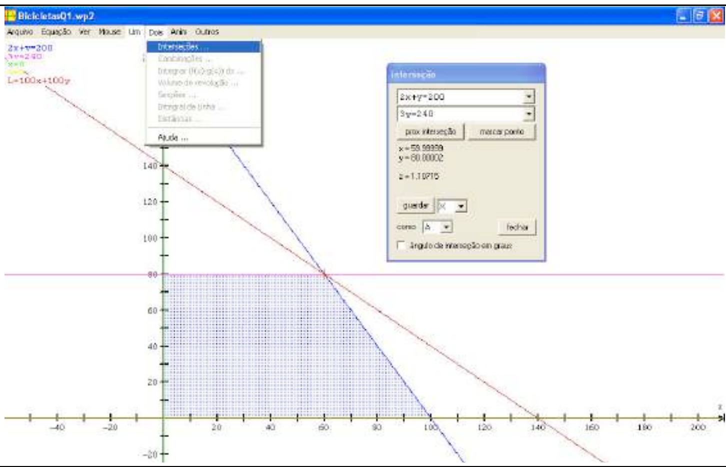
	No *menu Janela* escolher 2-dim.  Aparece um sistema de eixos cuja escala se pode adequar. Para introduzir as equações relativas às restrições, no *menu Equação*, escolhe-se *Implícita* (obtém-se a recta) e seguidamente, no mesmo *menu* , selecciona-se *Desigualdade implícita*, o que permite o traçado do semi-plano (ver figura).

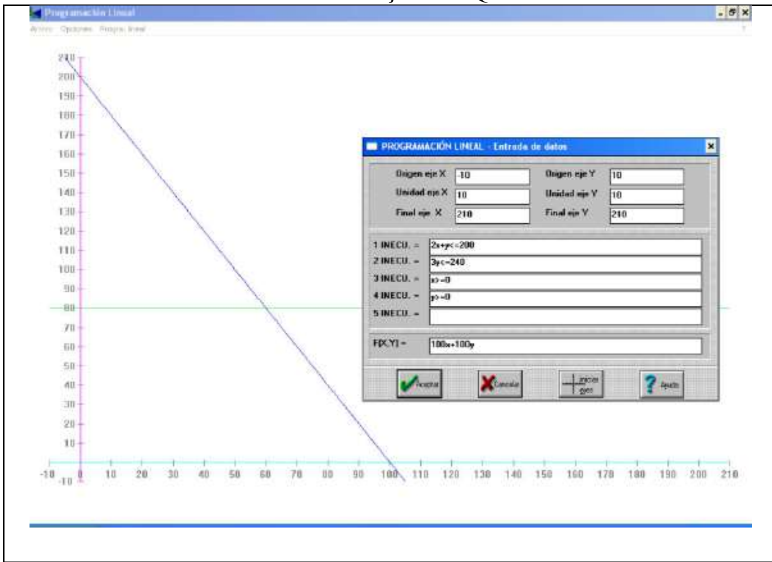
Tabela 2 - Resolução da Questão 1 utilizando o *Winplot* (continuação)

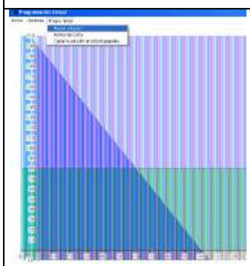
	Seguindo um procedimento análogo para as restantes restrições e mantendo seleccionado *intersecção*, na janela *Regiões implícitas*, (figura anterior), obtém-se a região admissível. A função objectivo pode ser representada seguindo o procedimento, já descrito, de introdução das equações.
	Para fazer a animação da recta representativa da função objectivo: - no *menu Anim.* seleccionar *Parâmetros A-W* e escolher o parâmetro que vai variar, neste caso L; - escolher na janela *Valor usual de L* o valor inferior e superior para o parâmetro que varia; - clicar nas setas da janela para deslocar a recta.
	Para encontrar a solução óptima, no *menu Dois* clicar em *Intersecções*. Abre-se a janela *Intersecção* onde se seleccionam as duas rectas cujo ponto de intersecção corresponde à solução óptima.

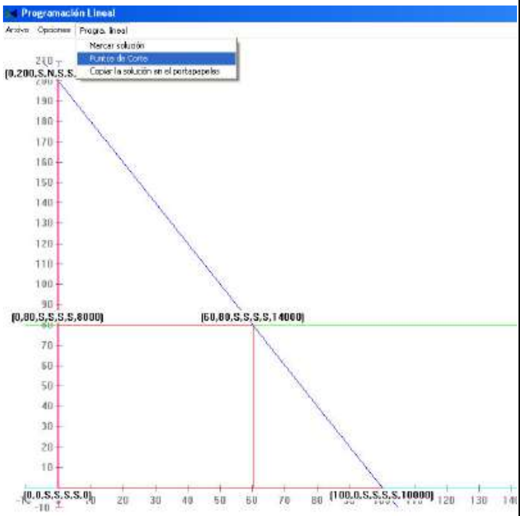
Resolução do problema utilizando o *Programación Lineal*

O *Programación Lineal* (Roset, 1994) é um *software* livre, de fácil utilização e apenas direccionado à PL. Só permite resolver problemas com duas variáveis pelo que se vai apresentar apenas a resolução da Questão 1.

Tabela 3 - Resolução da Questão 1 utilizando o *Programación Lineal*

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Abrindo o Programación, Lineal, aparece uma tabela que se tem de preencher com:
- dados referentes aos eixos;
- inequações correspondentes às restrições;
- função objectivo.

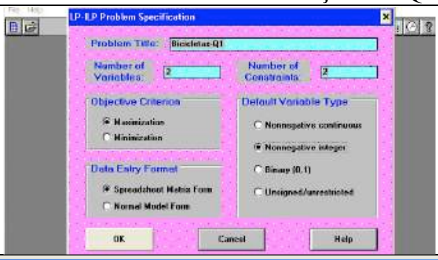
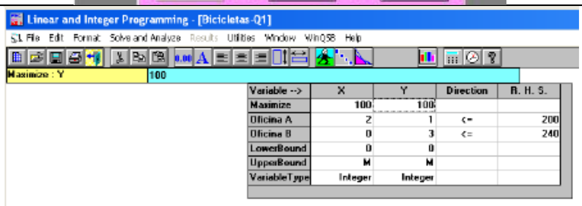
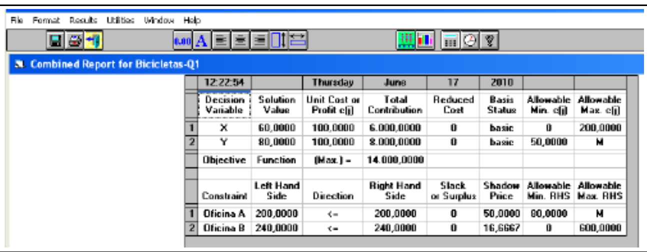
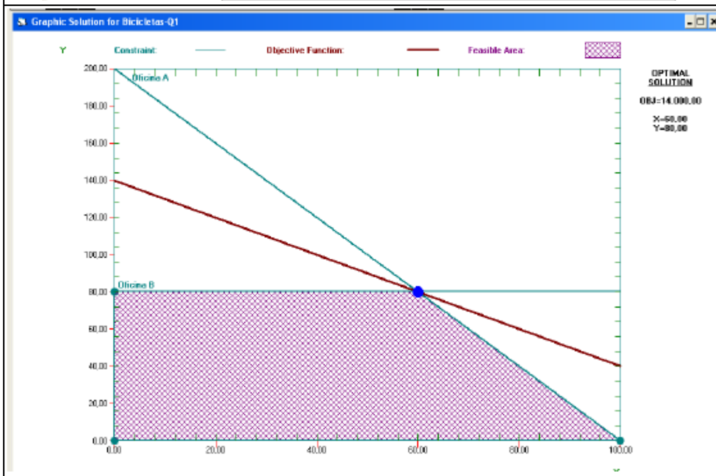
Pode-se clicar em Aceptar após preencher toda a tabela ou após a introdução de cada uma das inequações.</td>
</tr>
<tr>
<td>
F(0, 200) = 20000; S N S S
F(100, 0) = 10000; S S S S
F(60, 80) = 14000; S S S S
F(0, 200) = 20000; S N S S
F(100, 0) = 10000; S S S S
F(0, 80) = 8000; S S S S
F(0, 80) = 8000; S S S S
F(0, 0) = 0; S S S S
F(0, 0) = 0; S S S S
F(0, 0) = 0; S S S S

Max(60, 80) = 14000
Min(0, 0) = 0

</td>
<td>Seleccionando no menu Progra.lineal a opção:
- Marcar solución, obtém-se a sobreposição dos vários semi-planos correspondentes às restrições. (fig. sup. à esquerda)
- Puntos de corte, obtêm-se as coordenadas dos pontos de intersecção das rectas correspondentes às restrições, a indicação se o ponto obedece (S) ou não (N) a cada restrição e o valor da função objectivo nesse ponto (fig. à direita).
- Copiar la solución en el portapapeles, pode-se obter os dados anteriores num documento de Word (fig. inf. à esquerda).</td>
</tr>
</table>

Resolução do problema utilizando o *WinQSB*

O *WinQSB* (Chang, 2009) é um *software*, desenvolvido para várias áreas de Investigação Operacional, que permite a resolução gráfica (para 2D) e analítica de problemas de PL através do módulo *Linear and Integer Programming*.

Tabela 4 - Resolução da Questão 1 utilizando o *WinQSB*

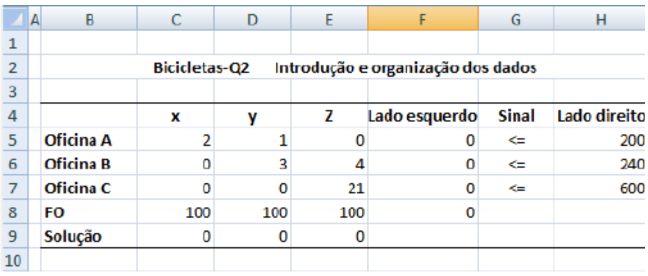
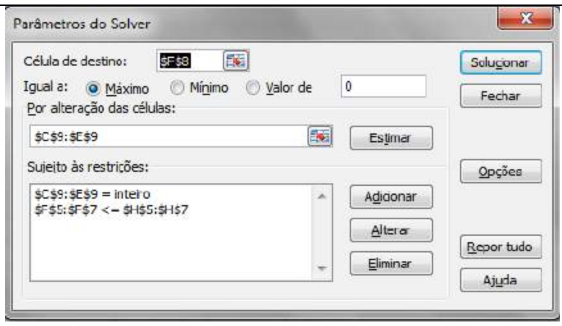
	Seleccionando no *menu File*, *New Problem* obtém-se o quadro (ver figura) para introduzir os dados referentes ao problema: Título do problema; Número de variáveis; Número de restrições; Tipo de optimização; Tipo de variáveis e Formato de entrada dos dados.
	Como se escolheu *Spreadsheet Matrix Form*, como formato de entrada de dados, vai-se introduzir os dados do problema na forma matricial: coeficientes da função objectivo, dados referentes às restrições, limite inferior /superior de cada variável.
	Seleccionando *Solve the Problem* no *menu Solve and Analyze* obtém-se a solução óptima e o valor óptimo, para além de outras indicações. Se se preferir apenas a solução com indicações relativas às variáveis e ao valor óptimo, no *menu Results* escolhe-se *Solution Summary*.
	Para resolver o problema graficamente, seleccionar *Graphic Method* no *menu Solve and Analyze*. Seguidamente, escolhe-se a variável a associar a cada eixo.  Obtém-se uma figura onde estão representadas as restrições, a função objectivo, a região admissível e são indicadas a solução óptima e o correspondente valor da função objectivo.

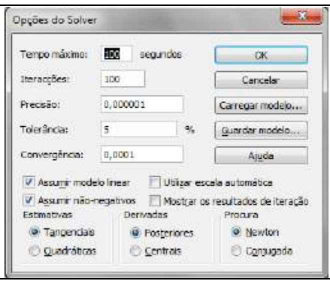
Para a resolução da Questão 2 seguem-se os mesmos procedimentos, à excepção do método gráfico que nesta situação não é aplicável dado o problema ter três variáveis.

Resolução do problema utilizando o *Solver* do *Excel*

O *software Microsoft Office Excel* 2007, ou simplesmente *Excel*, resolve problemas de PL, de forma analítica, através da ferramenta *Solver*. Como permite resolver problemas com várias variáveis, vai-se apresentar a resolução da Questão 2 do problema proposto.

Tabela 5 - Resolução da Questão 2 utilizando o *Solver* do *Excel*

<table>
<tr>
<td>

<table>
<tr><td></td><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td><td>E</td><td>F</td><td>G</td><td>H</td></tr>
<tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td></td><td>Bicicletas-Q2</td><td></td><td>Introdução e organização dos dados</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td></td><td>x</td><td>y</td><td>z</td><td>Lado esquerdo</td><td>Sinal</td><td>Lado direito</td></tr>
<tr><td>5</td><td></td><td>Oficina A</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td><=</td><td>200</td></tr>
<tr><td>6</td><td></td><td>Oficina B</td><td>0</td><td>3</td><td>4</td><td>0</td><td><=</td><td>240</td></tr>
<tr><td>7</td><td></td><td>Oficina C</td><td>0</td><td>0</td><td>21</td><td>0</td><td><=</td><td>600</td></tr>
<tr><td>8</td><td></td><td>FO</td><td>100</td><td>100</td><td>100</td><td>0</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>9</td><td></td><td>Solução</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>10</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
</td>
<td>Preencher uma folha de cálculo:
- linhas 5 a 7 com colunas C a E - coeficientes das restrições;
- linhas 5 a 7 com coluna F - valor de cada restrição em função de x, y e z . Na célula F5 é digitada a fórmula =SOMARPRODUTO(C5:E5;$C$9:$E$9) que é copiada para as restantes;
- linha 8 com colunas C a E - coeficientes da função objectivo (FO);
- linha 9 com colunas C a E - valores de x, y e z;
- célula F8 - valor da função objectivo.</td>
</tr>
<tr>
<td>


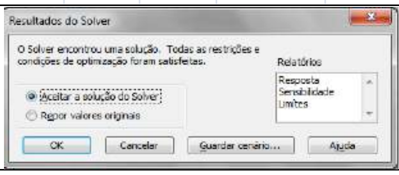
</td>
<td>No menu Dados - Análise clicar em Solucionador. Aparece a janela Parâmetros do Solver para preencher:
- Célula de destino - local onde se quer o valor da função objectivo (célula F8)
- Por alteração das células - valores de x, y e z;
- Sujeito às restrições - incluir as restrições. Clicando na caixa Adicionar aparece a janela Adicionar restrição que se preenche com base na folha de cálculo.</td>
</tr>
<tr>
<td>


</td>
<td>Na janela Parâmetros do Solver clicar em Opções, abre-se a janela Opções do Solver. Nesta seleccionar Assumir modelo linear e Assumir números não negativos (pretende-se só variáveis não negativas).</td>
</tr>
</table>

Tabela 5 - Resolução da Questão 2 utilizando o *Solver* do *Excel* (continuação)

	x	y	z	Lado esquerdo	Sinal	Lado direito
Oficina A	2	1	0	200	<=	200
Oficina B	0	3	4	238	<=	240
Oficina C	0	0	21	588	<=	600
FO	100	100	100	14900		
Solução	79	42	28			

Voltando à janela *Parâmetros do Solver* e clicando na caixa *Solucionar* obtém-se, na folha de cálculo, a solução e o valor óptimos.



Após a resolução aparece a janela *Resultados do solver*, podendo-se seleccionar as opções de relatórios disponíveis.

Vantagens e desvantagens do *software* apresentado

A análise e comparação do *software* vai-se focar essencialmente na forma de introdução (simplicidade/complexidade) dos dados, na dimensão dos problemas que permitem resolver e nos processos de resolução utilizados.

No que diz respeito à introdução dos dados relativos à função objectivo e às restrições, o *WinQSB* e o *Programación Lineal*, como são orientados para a resolução de problemas de PL, permitem introduzir os dados com facilidade, isto é, há uma compreensão rápida dos procedimentos a efectuar, já no caso do *Winplot* e do *Excel* a introdução desses dados não é tão intuitiva nem imediata. Por exemplo, no *Winplot* exige trabalho em vários *menus* e no *Excel* terá de ser o próprio utilizador a decidir a forma de efectuar o seu registo na folha de cálculo.

Quanto à dimensão dos problemas, apenas o *Excel* e o *WinQSB* permitem resolver, de forma simples, problemas com mais de duas variáveis. De referir que o *Programación Lineal* só admite no máximo cinco restrições.

Relativamente aos processos de resolução, enquanto o *Solver* do *Excel* efectua apenas a resolução analítica o *WinQSB*, o *Programación Lineal* e o *Winplot* permitem a resolução gráfica para o caso 2D.

Comparando com mais detalhe o tipo de representação gráfica, verifica-se que o *WinQSB* apresenta apenas o resultado final do processo, o *Programación Lineal* não representa a função objectivo e a representação da região admissível é um pouco confusa (sobreposição das regiões associadas às várias restrições). Finalmente o *Winplot* permite a visualização das várias etapas, inclusivamente com possibilidade de deslocação da recta correspondente à função objectivo ao longo da região admissível.

No que concerne à obtenção de resultados no *Winplot* a solução óptima não é indicada de modo imediato (tem de se fazer a intersecção das rectas onde está localizado o ponto óptimo). No *WinQSB* e no *Excel* para além de se obter a solução óptima e o valor óptimo pode-se obter outros dados como, por exemplo, o valor de recursos efectivamente gasto e as várias iterações correspondentes ao método utilizado na resolução analítica.

Também no que diz respeito a problemas de Programação Linear Inteira, isto é, quando as variáveis podem tomar apenas valores inteiros, o *WinQSB* e o *Excel* são mais fidedignos pois, na sua resolução analítica, permitem introduzir essa opção. Pelo contrário no *Programación Lineal* e no *Winplot* como a solução óptima e o valor óptimo obtidos são dados em função das coordenadas dos vértices da região admissível, já que a sua resolução se apoia na vertente gráfica, podemos obter valores contínuos (que não podem ser automaticamente convertido por arredondamento para inteiros) pelo que terá de se fazer uma reapreciação da solução perante o problema.

Conclusões

O *software* mencionado tem características e potencialidades diferentes sendo evidente que o *Solver* do *Excel* e o *WinQSB* são mais adequados para resolver problemas de maiores dimensões ou para realizar diferentes explorações do mesmo problema, que seriam demasiado morosas, e por vezes até impossíveis, com recurso apenas a papel e lápis. No entanto, o *WinQSB* é mais versátil pois a introdução dos dados é relativamente simples e permite, para além da resolução analítica, resoluções pelo Método Gráfico para duas variáveis. Contudo, seria uma mais-valia visualizar as várias etapas desta resolução (à semelhança do que faz o *Winplot*) e permitir a resolução gráfica de problemas com três variáveis.

Desta forma, o ideal seria haver um *software* orientado para a PL, que permitisse a introdução intuitiva dos dados, a resolução analítica para várias dimensões, a resolução gráfica por etapas, inclusivamente para problemas envolvendo três variáveis, para assim se poder explorar com os alunos do Ensino Secundário uma maior diversidade de problemas, efectuando, sempre que possível, a ligação à parte geométrica, como preconiza o programa.

Referências bibliográficas

Chang, Y.-L. (2009). *WinQSB*. Acedido em 14 Novembro, 2009, de http://winqsb.10001downloads.com.

Jorge, A. M., Alves, C. B., Fonseca, G., & Barbedo, J. (2004). *Infinito 11, Parte 1*. Porto: Areal Editores.

Neves, M. A., Silva, M. C., Guerreiro, L., & Pereira, A. (2006). *Matemática B, 12.º ano – Cursos Tecnológicos*. Porto: Porto Editora.

Parris, R. (2009). *Winplot*. Acedido em 14 de Novembro, 2009, de http://www.baixaki.com.br/download/winplot.htm.

Roset, J. L. (1994). *Programación Lineal*. Acedido em 14 de Novembro, 2009, de http://www.xtec.cat/~jlagares/matemati.htm.

Silva, J. C., Fonseca, M. G., Martins, A. A., Fonseca, C. M., & Lopes, I. M. (2002a). Matemática A - 11º Ano. Lisboa: ME-DES. Acedido em 15 de Janeiro, 2010, de http://www.dgidc.min-edu.pt/secundario/Paginas/Programas_ES_M.aspx.

Silva, J. C., Fonseca, M. G., Martins, A. A., Fonseca, C. M., & Lopes, I. M. (2002b). *Matemática A 12º Ano*. Lisboa: ME-DES. Acedido em 15 de Janeiro, 2010, de http://www.dgidc.min-edu.pt/secundario/Paginas/Programas_ES_M.aspx.

Silva, J. C., Fonseca, M. G., Martins, A. A., Fonseca, C. M., & Lopes, I. M. (2001). Matemática A - 10º Ano. Lisboa: Ministério ME-DES. Acedido em 15 Janeiro, 2010, de http://www.dgidc.min-edu.pt/secundario/Paginas/Programas_ES_M.aspx.

UTILIZAÇÃO DO *ENHANCED PODCAST* NO APOIO AO ESTUDO DA MATEMÁTICA: UMA EXPERIÊNCIA NO 11ºANO DE MATEMÁTICA A

Rute Almendra Lopes
Escola Secundária de Ponte de Lima
rsavlopes@gmail.com

Ana Amélia A. Carvalho
Universidade do Minho
aac@ie.uminho.pt

Ciclo de escolaridade a que (mais) se dirige a comunicação: Ensino Secundário

Resumo: Os jovens de hoje nasceram e cresceram na era digital, dos computadores, telemóveis, *Internet*, MP3, MP4, PSP, … Don Tapscott designou-os por "Geração Net" e Mark Prensky por "Nativos Digitais". Estes alunos, inversamente aos seus pais e professores, não receiam a tecnologia e possuem o seu pleno domínio. Limitá-los ao lápis e papel é reduzir a diversidade de formatos que podem usufruir para aprender. Em consonância com o Plano Tecnológico da Educação, o estudo que se apresenta relata uma experiência com 2 turmas do ensino secundário, em que o professor e os alunos produziram materiais pedagógicos multimédia, os *podcasts*, com a finalidade de apoiar o estudo autónomo dos alunos em casa e de os envolver na sua aprendizagem.

Introdução

Os baixos resultados obtidos pelos estudantes portugueses na disciplina de Matemática e respectivos exames nacionais são alvo de reflexão intensa em todas as escolas do país. O quadro é inquietante e urge encontrar estratégias que promovam a literacia Matemática e o sucesso na disciplina. Segundo Prensky (2001a), os alunos desta geração são nativos digitais: geração de indivíduos que cresce a par da evolução da *Web* e da tecnologia em geral. Convivem diariamente com computadores, telemóveis de terceira geração, videojogos, … e descobrem o funcionamento de todas estas tecnologias por tentativa-erro, sem recorrer ao manual de instruções. Limitá-los ao papel é reduzir o seu potencial para aprender.

Consciente desta realidade, o Governo Português tem vindo a manifestar uma preocupação crescente com a questão da integração curricular das tecnologias de informação criando em Setembro de 2007, o Plano Tecnológico da Educação. Nesse documento pode ler-se que o caminho para a sociedade do conhecimento impõe uma alteração dos métodos tradicionais de ensino e de aprendizagem e um investimento na disponibilização de ferramentas, conteúdos e materiais pedagógicos adequados para um alargamento dos espaços de comunicação, interacção e aprendizagem.

O trabalho de investigação que se apresenta vem de encontro a esta orientação do Ministério da Educação, uma vez que propõe a construção de novos materiais pedagógicos, os *podcasts* e a sua integração no processo de aprendizagem.

Podcast

A palavra *podcast* deriva de *Podcasting,* "é uma forma de publicação de arquivos de média digital (áudio, vídeo, foto, pps, etc...) pela *Internet,* através de um Feed RSS que, mediante subscrição, permite aos utilizadores acompanhar a sua actualização" (Richardson, 2006). A palavra *podcasting* resulta da junção das palavras *iPod* (célebre leitor mp3 da Apple) e *Broadcasting* (transmissão de informação rádio ou TV) (Richardson, 2006 citado em Carvalho et al., 2008).

É possível combinar uma imagem, um esquema ou uma sequência de imagens com locução. Este tipo de *podcast* designa-se por "*enhanced podcast*" (Salmon & Edirisingha, 2008 *apud* Carvalho, 2009, p.3). Os *podcasts* podem ser em vídeo, designando-se *vodcast* ou *vidcast* ou consistir na captura do que se passa no ecrã, tratando-se, neste caso de um *screencast* (idem). Para isso pode ser usado software gratuito da *Web* como *Jing, CamStudio* ou *Studio*. Em algumas áreas o casamento do som com a imagem pode ser muito vantajoso, na medida em que as imagens ilustram e complementam a informação transmitida oralmente. São exemplos desta combinação os estudos efectuados por Carla Carvalho (2009) no domínio da Ciências Naturais e por Rocha & Coutinho (2009) no âmbito da Geometria Descritiva.

Motivação

Os programas curriculares são extensos, especialmente o do 11º ano de Matemática A, o que não permite o efectivo desenvolvimento de actividades de consolidação dos conteúdos abordados em sala de aula, pelo que este terá de ser um trabalho desenvolvido pelos alunos em casa. Por sentirem grandes dificuldades em fazê-lo, frequentemente os discentes recorrem a apoio extra, vulgarmente conhecido como "explicações". A motivação para levar a cabo esta investigação nasceu exactamente desta necessidade premente de apoio extra revelada por grande parte dos nossos alunos.

Questões de investigação

Para melhorar operacionalizar a investigação foram formuladas três questões orientadoras da investigação:

- Os *podcasts* constituem um meio eficaz de apoio à aprendizagem, nomeadamente para explicar conhecimentos?
- Haverá diferenças na aceitação e audição de *podcasts* por bons alunos (com classificação igual ou superior a 14) e alunos com mais dificuldades?
- Os *podcasts* constituem uma forma de motivação para o estudo da disciplina?

Metodologia

Tendo em conta que um dos principais objectivos da investigação é avaliar o impacto dos *podcasts* na aprendizagem e comparar a aceitação e a audição dos mesmos por bons alunos (com classificação igual ou superior a 14) e alunos com mais dificuldades (classificação inferior a 14), ou seja, na medida em que um dos objectivos do estudo é estabelecimento de relações causa-efeito realizou-se um estudo do tipo quasi-experimental (Shumacker & McMillan, 1993). Foi manipulada uma variável independente (Carmo & Ferreira, 1998), audição dos *podcasts*, visando avaliar o seu efeito numa variável dependente, os resultados obtidos à disciplina de Matemática.

Instrumentos de recolha de dados

Os instrumentos de recolha de dados utilizados foram:

- Questionário inicial de caracterização da amostra, passado no início do estudo, no princípio do 2º período.
- Pré-teste e pós-teste para avaliar o impacto dos *podcasts* na aprendizagem e comparar a evolução do grupo de alunos com classificação inferior a 14 com a evolução do grupo de alunos com classificação superior a 14.
- Diário de bordo onde a docente registou todas as suas observações e reflexões.
- Questionário de opinião, realizado no final do estudo, que visou auscultar a motivação sentida ao longo da experiência, inquirir a opinião dos alunos acerca da criação dos *podcasts*, inquirir a opinião dos alunos sobre o efeito dos *podcasts* na compreensão dos conteúdos da disciplina e averiguar o efeito dos *podcasts* no desenvolvimento do estudo independente.

O estudo

A amostra integrou duas turmas do 11º ano de Matemática A, constituindo ao todo 45 alunos. Foram excluídos 3 alunos do estudo, por terem faltado ao Pré-teste ou ao Pós-teste. A amostra foi dividida em dois grupos, Grupo I e Grupo II. O primeiro é constituído pelos alunos com classificação inferior a 14 (15 alunos) e o segundo pelos restantes discentes (27 alunos). Todos os sujeitos da amostra possuem computador e ligação à *Internet* em casa. Constatámos que as ferramentas relacionadas com a produção e divulgação de *podcasts* eram amplamente desconhecidas: 22 alunos do Grupo I e 13 alunos do Grupo II desconhecem o *Jing*; 25 sujeitos pertencentes ao Grupo I e 12 sujeitos pertencentes ao Grupo II desconhecem o *Voicethread* e apenas 9 estudantes referentes ao Grupo I e 2 estudantes relativos aos Grupo II conhecem o *Podomatic*.

O estudo decorreu durante o 2º trimestre em três fases. Numa primeira fase a docente leccionou a unidade Programação Linear recorrendo a *enhanced podcasts*. Numa segunda fase, os alunos instalaram e aprenderam a trabalhar com o software *Jing*. Na terceira fase, de preparação para o teste intermédio, os alunos organizaram-se em grupos de quatro elementos e a docente distribuiu a cada grupo 4 exercícios (dois de escolha múltipla e dois de desenvolvimento) de testes intermédios anteriores ou de exames do 12º ano que teriam, em primeiro lugar, de resolver e, posteriormente, produzir o respectivo *podcast*.

A produção do tipo de *podcast* pretendido na 3ª fase percorreu várias etapas. Em primeiro lugar, cada grupo resolveu os exercícios na aula, em suporte de papel, que foram posteriormente corrigidos pela docente. Depois, redigiram os textos explicativos da resolução do exercício. Nesta tarefa, os alunos revelaram bastantes dificuldades, na medida em que, eram obrigados a comunicar matematicamente e oralmente, algo que não estão habituados a fazer. O passo seguinte era elaborar um *PowerPoint* com a resolução escrita do exercício e, por fim, com recurso ao programa *Jing,* acrescentar a explicação oral da resolução do mesmo. Após a conclusão da gravação, os *podcasts* foram visualizados pela professora que devolveu um *feedback* com os aspectos a corrigir ou melhorar: o som, a animação, as imagens, incorrecções na linguagem, incorrecções matemáticas, etc. Assim que o *podcast* tivesse concluído, sem incorrecções, a docente alojava-o na plataforma *Moodle* de forma a estar disponível a todos os alunos das duas turmas. Desde a atribuição dos exercícios a resolver por cada grupo à conclusão dos *podcasts*, passaram-se duas semanas. O objectivo era que uma semana antes do teste intermédio, os exercícios estivessem disponíveis na *Moodle* para que os alunos pudessem visualizá-los e ouvir a explicação da resolução.

Todos os exercícios facultados a cada grupo de trabalho eram diferentes, pelo que, ao todo foram 44 exercícios com diversas alíneas, o que constituía um conjunto alargado e diversificado de exercícios que estava ao dispor de todos os alunos.

Criou-se uma espécie de repositório de exercícios (em *enhanced podcasts*), fundamentalmente provenientes de exames e testes, resolvidos pelos alunos e para os alunos. Assim, por um lado, para o aluno explicar o exercício, "imitando" o professor, precisa de dominar perfeitamente a resolução do mesmo, exercitando a comunicação matemática, competência importante a desenvolver de acordo com as orientações do Ministério da Educação (ME, 2001), em vez de decorar apenas um conjunto de procedimentos e cálculos numéricos. Por outro lado, quando o aluno visualiza o *podcast,* não só observa a resolução do exercício, mas também lhe é explicado o raciocínio subjacente, uma vez que a explicação áudio acrescenta informações não visíveis na resolução escrita. Em determinados exercícios, um aluno com dificuldades na disciplina, se tiver acesso apenas à resolução escrita dos mesmos, provavelmente não compreenderá inteiramente o exercício. Um excelente exemplo do que referimos anteriormente é os problemas de Probabilidades do 12º ano. Na maioria dos casos, a resolução escrita do exercício é manifestamente insuficiente para a sua compreensão.

Ana Amélia 10/5/15 19:11
Deleted:

Neste contexto, consideramos que os *podcasts* podem contribuir para melhorar o desempenho dos alunos na disciplina de Matemática por proporcionar um apoio ao estudo independente, adaptado ao ritmo individual de cada estudante e por possibilitar uma aprendizagem mais centrada no aluno, em que este assume um papel activo de gestor de aprendizagem (Moran, 2000).

Resultados

A análise dos resultados ainda está em curso, mas os resultados preliminares apontam para um uso destes materiais muito diversificado. Os relatórios disponíveis na plataforma *Moodle* indicam que foram os melhores alunos que mais *podcasts* descarregaram. Uma parte dos alunos com negativa não descarregou qualquer *podcast* e os restantes visualizaram um número muito reduzido. Não obstante, a análise do questionário de opinião revela que os alunos consideram os *podcasts* benéficos para a sua aprendizagem. O que é curioso constatar, é que a totalidade dos alunos com classificação inferior a 14 no 1º período indica ser mais benéfico para a sua aprendizagem produzir um *podcast* do que visualizá-lo, enquanto que vários alunos com nota superior ou igual a 14 (mais especificamente uma aluna com 19 e duas com 18) indicam ser mais benéfico visualizar os *podcasts.* Os primeiros referem que para criar um *podcast* têm de perceber muito bem a matéria e por isso aprendem melhor; os segundos referem que já percebiam a matéria antes de gravar o *podcast* e que esta tarefa é muito morosa, sendo mais rápido visualizar o *podcast* para esclarecer alguma dúvida.

Quanto ao efeito dos *podcasts* no estudo autónomo, a reacção dos alunos foi positiva, referindo que era como "ter uma professora ambulante". É curioso verificar que os alunos que têm explicações descarregaram um número de *podcasts* consideravelmente mais baixo do que os restantes. Nomeadamente, houve até uma aluna que referiu não ter descarregado nenhum *podcast*, porque resolveu os exercícios nas explicações.

Como conclusão, pode-se nesta fase mencionar que a professora e alunos consideraram esta experiência muito enriquecedora e facilitadora da aprendizagem de uma disciplina considerada "difícil" por muitos.

Bibliografia

Carmo, M., & Ferreira, H. (1998). *Metodologia da Investigação - Guia para Auto-aprendizagem.* Universidade Aberta.

Carvalho, A., Aguiar, C. & Maciel, R. (2009). Taxonomia de Podcasts: da criação à utilização em contexto educativo. In A. Carvalho (Org.), *Encontro sobre Podcasts* , Braga: Universidade do Minho, 96-109.

Carvalho, A., Aguiar, C., Cabecinhas, R. & Carvalho, J. (2008). Integração de Podcasts no Ensino Universitário: Reações dos Alunos. *Prisma.com,* 6 , 50-74.

Carvalho, C. (2009). O Uso dos Podcasts no Ensino e Aprendizagem das Ciências Naturais: um estudo com alunos do 9º ano sobre temas do Corpo Humano/Saúde. *Ozarfaxinars, Maio* , Disponível em http://www.cfaematosinhos.eu/O%20Uso%20de%20Podcasts%20no%20Ensino%20e%20na%20Aprendizagem_08.pdf. Acedido em 29 de Junho de 2009.

Ministério da Educação (2001). *Programas do Ensino Secundário*. Disponível em http://sitio.dgidc.min-edu.pt/recursos/Lists/Repositrio%20Recursos2/Attachments/257/matematica_A_10.pdf. Acedido em 25 de Abril de 2010

Moran, J. (2000). *Ensino e Aprendizagem Inovadores com Tecnologia*. Disponível em http://www.scribd.com/doc/2525970/Moran-Ensino-e-aprendizagem-inovadores-com-tecnologia. Acedido em 25 de Abil de 2010.

Prenky, M. (2001a). *Digital Natives, Digital Immigrants*. Disponível em http://www.hfmboces.org/HFMDistrictServices/TechYES/PrenskyDigitalNatives.pdf. Acedido em 2 de Dezembro de 2009.

Richardson, W. (2006), *Blogs, Wikis, Podcasts, and Other Powerful Web Tools for Classrooms.* Thousand Oaks, California: Corwin Press.

Rocha, A.& Coutinho, C. (2009). Screencast: Promovendo o sucesso na disciplina de Geometria Descritiva. In P. Dias & A. Osório (Org.), *Challenges 2009.* Braga: Universidade do Minho, 618-627.

Shumacker, S., & McMillan, J. (1993). *Research in Education: A conceptual introduction, Third Edition.* New York: HaperCollins College Publishers.

Trabalho desenvolvido no âmbito do projecto do CIEd.

Carmo, M., & Ferreira, H. (1998). *Metodologia da Investigação - Guia para Auto-aprendizagem.* Universidade Aberta.

Carvalho, A., Aguiar, C., & Maciel, R. (2009). Taxonomia de Podcasts: da criação à utilização em contexto educativo. In A. Carvalho (Orgs.),. *Encontro sobre Podcasts.* , Braga: Universidade do Minho, 96-109.

Carvalho, A., Aguiar, C., Cabecinhas, R., & Carvalho, J. (2008a). Integração de Podcasts no Ensino Universitário; Reações dos Alunos. *Prisma.com nº6* , 50-74.

Carvalho, A., Aguiar, C., Carvalho, C., Oliveira, L., Cabecinhas, R., & Marques, A. &. (2008b). *Taxonomia de Podcasts* , Disponível em http://www.iep.uminho.pt/podcast/Taxonomia_Podcasts.pdf. Acedido em 14 de Abril de 2009.

Carvalho, C. (2009). O Uso dos Podcasts no Ensino e Aprendizagem das Ciências Naturais: um estudo com alunos do 9º ano sobre temas do Corpo Humano/Saúde. *Ozarfaxinars, Maio* , Disponível em http://www.cfaematosinhos.eu/O%20Uso%20de%20Podcasts%20no%20Ensino%20e%20na%20Aprendizagem_08.pdf. Acedido em 29 de Junho de 2009.

Ministério da Educação. (2007a). *Plano Tecnológico da Educação*. Obtido em 12 de Dezembro de 2008, de http://www.escola.gov.pt/docs/pte_RCM_n137_2007_DRn180_20070918.pdf

Ministério da Educação. (2001). *Programas do Ensino Secundário*. Obtido em 25 de Abril de 2010, de http://sitio.dgidc.min-edu.pt/recursos/Lists/Repositrio%20Recursos2/Attachments/257/matematica_A_10.pdf

Moran, J. (2000). *Ensino e Aprendizagem Inovadores com Tecnologia* , Disponível em http://www.scribd.com/doc/2525970/Moran-Ensino-e-aprendizagem-inovadores-com-tecnologia. Acedido em 25 de Abil de 2010.

Ponte, J. P. (1994). *Matemática: uma disciplina condenada ao insucesso?* , Disponível em http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/artigos_pt.htm. Acedido em 21 de Abril de 2010.

Prenky, M. (2001a). *Digital Natives, Digital Immigrants* , Disponível em http://www.hfmboces.org/HFMDistrictServices/TechYES/PrenskyDigitalNatives.pdf. Acedido em 2 de Dezembro de 2009.

Richardson, W. (2006). *Blogs, Wikis, Podcasts and Other Powerful Web Tools for Classrooms.* Thousand Oaks, California: Corwin Press.

Rocha, A. (2009). Screencast: Promovendo o sucesso na disciplina de Geometria Descritiva. In P. Dias & A. Ramos (Org.),. *Challenges 2009.* , Braga: Universidade do Minho, 618-627.

Shumacker, S., & McMillan, J. (1993). *Research in Education: A conceptual introduction, Third Edition.* New York: HaperCollins College Publishers.

A ÁLGEBRA DESDE OS PRIMEIROS ANOS

Maria Graciete Brito
mgcbrito@gmail.com

Neusa Branco
neusa.branco@ese.ipsantarem.pt

Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Santarém

Resumo

O Programa de Matemática do Ensino Básico define objectivos específicos para o tema Álgebra desde o 2.º ciclo e identifica a importância do desenvolvimento do pensamento algébrico desde os primeiros anos, em articulação com os restantes temas matemáticos, nomeadamente por meio de tarefas de carácter exploratório. Aos professores compete concretizar estas orientações na sala de aula, proporcionando aos alunos experiências de aprendizagem que visem esses objectivos. Para a prática do professor importa também compreender como se desenvolve a aprendizagem dos alunos, quais as suas dificuldades, que capacidades mobilizam e que relações estabelecem de modo a antecipar e a potenciar o seu trabalho em sala de aula.

Nesta sessão prática é dado enfoque ao desenvolvimento do pensamento algébrico do 1.º ao 3.º ciclo, com especial ênfase na capacidade de generalização e de representação. Para tal, são propostas para análise e discussão situações de ensino-aprendizagem que envolvem tarefas para trabalhar em sala de aula para os vários ciclos, bem como algumas produções de alunos.

São explorados os conceitos matemáticos, a abordagem que contribui para o desenvolvimento do pensamento algébrico e o enquadramento curricular nos três ciclos, em Números e Operações no 1.º ciclo e em Álgebra nos 2.º e 3.º ciclos.

Palavras-chave: Pensamento algébrico, generalização, representação.

Introdução

O Programa de Matemática para o Ensino Básico (ME-DGIDC, 2007) integra de forma muito explícita tópicos de natureza algébrica a serem explorados desde os primeiros anos de escolaridade. Embora apenas defina objectivos específicos para o tema Álgebra a partir do 2.º ciclo, identifica a importância do desenvolvimento do pensamento algébrico desde o 1.º ciclo, como um dos seus eixos fundamentais, em articulação com os restantes temas matemáticos, nomeadamente com o tema "Números e Operações". Uma outra alteração significativa relativamente ao programa de 1991 respeita à atenção dada ao desenvolvimento das capacidades de raciocínio, comunicação e resolução de problemas, designadas como capacidades transversais, as quais, assumindo um "espaço próprio, com a explicitação de objectivos gerais e específicos de aprendizagem" (ME-DGIDC, 2007, p. 1) deverão ser trabalhadas ao longo dos diferentes tópicos.

Nesta sessão prática, procuraremos estabelecer esta articulação, partindo de situações de emergência das primeiras ideias algébricas, em tarefas com sequências e regularidades numéricas e pictóricas aplicáveis ao 1.º ciclo, que permitem a formulação de algumas regras e a comunicação entre os alunos e destes com o professor desenvolvendo, assim, a capacidade de pensar algebricamente. No 2.º ciclo, as tarefas vocacionadas para o estabelecimento de relações entre termos de uma sequência e para o enunciado em linguagem natural de algumas leis de formação abrem caminho à utilização da simbologia e à possibilidade da sua utilização em estratégias de resolução de problemas em diversos contextos, como é enunciado no propósito principal de ensino para este ciclo de escolaridade. Já no 3.º ciclo, mantendo-se o propósito de ensino, as tarefas algébricas a propor já envolvem directamente situações de modelação matemática e de utilização da linguagem algébrica, embora não sejam dispensadas as experiências informais envolvendo a linguagem natural, antes da manipulação algébrica formal, e a discussão de situações em que o conceito de variável surge ligado à resolução de problemas. Propomos a análise e discussão de como se desenvolve a aprendizagem dos alunos ao longo dos três ciclos, que objectivos relativos às capacidades transversais são mobilizados em cada situação, bem como, que dificuldades podem vir a ter no decurso da implementação de uma tarefa e como as mesmas podem ser exploradas do ponto de vista didáctico, de forma a potenciar o trabalho em sala de aula.

O trabalho com sequências pictóricas crescentes

O trabalho no tema matemático Álgebra envolve diversos tópicos que vão apresentando uma maior formalização ao longo dos três ciclos, sendo que o desenvolvimento do pensamento algébrico, como foi referido, é visado igualmente em todos os ciclos de um modo adequado ao raciocínio matemático dos alunos e à sua capacidade de compreensão da linguagem matemática. Verificam-se, portanto, a existência de aspectos inerentes ao pensamento algébrico que acompanham o seu desenvolvimento nos alunos de todos os anos de escolaridade. Ponte, Branco e Matos (2009) explicitam três vertentes do pensamento algébrico: representar, raciocinar e resolver problemas, que o professor deve promover ao propor tarefas a desenvolver em sala de aula. O trabalho com sequência pictóricas crescentes constitui um contexto propício ao desenvolvimento da capacidade de generalização dos alunos e ao surgimento de diferentes modos de representar essa generalização, como por exemplo, usando objectos, descrições verbais, números, tabelas ou gráficos, de acordo com os objectivos previstos para o ano e ciclo de escolaridade.

Assim, propomos a realização e discussão de diversas tarefas para a sala de aula, com vista ao desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos dos três ciclos do ensino básico, analisando o seu enquadramento curricular e o conhecimento matemático envolvido, bem como perspectivando a sua implementação em sala de aula. Além disso, propomos a análise de produções de alunos com enfoque na generalização que estabelecem de sequências pictóricas e nas representações que usam.

O professor tem no ensino-aprendizagem da Álgebra um papel fundamental, em particular no 1.º ciclo, dado que a selecção das tarefas, a metodologia de trabalho e o modo como o conduz são determinantes para que o desenvolvimento do pensamento algébrico se proporcione, muitas vezes aproveitando situações decorrentes de outros temas matemáticos e promovendo a sua algebrização (Kaput & Blanton, 2001).

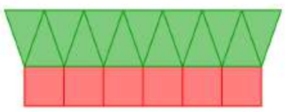
A título de exemplo apresentamos uma tarefa com uma sequência pictórica, inspirada numa situação aplicada em sala de aula no 2.º ciclo no âmbito do trabalho do Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico da Escola Superior de Educação de Santarém:

Figura 1: Três primeiros termos de uma sequência pictórica

A esta sequência pictórica estão associadas sequências numéricas, nomeadamente a sequência do número de quadrados, a sequência do número de triângulo, a sequência do total de *polydrons* usados. Pode promover-se o uso de diferentes representações para determinar um termo próximo, por exemplo, o 6.º termo da sequência, descrevendo a sua constituição:

Polydrons

Desenho



6 quadrados
13 triângulos

Números

Número de quadrados: 6
Número de triângulo:

$6 \times 2 = 12$

$12 + 1 = 13$

Palavras

O 6.º termo tem 6 quadrados vermelhos e tem 13 triângulos verdes que é mais um que o dobro do *número de quadrados*

Tabela

Termo	n.º de quadrados	n.º de triângulos
1.º termo	1	3
2.º termo	2	5
3.º termo	3	7
4.º termo	4	9
5.º termo	5	11
6.º termo	6	13

Figura 2: Diferentes representações na determinação do 6.º termo

A generalização inicia-se nos primeiros anos quando se determina um termo distante da sequência, o 20.º termo, por exemplo. No 3.º ciclo a generalização é apresentada recorrendo à linguagem algébrica com a indicação do termo geral da sequência numérica. Tendo por base a sequência pictórica e a estrutura dos seus termos essa generalização pode surgir segundo diferentes olhares:

São 20 quadrados e 41 triângulos porque há dois triângulos verdes por cada quadrado vermelho e mais um triângulo verde. No total são 61 polydrons.

A cada quadrado está ligado um triângulo o que dá 40 polydrons. Os restantes triângulos são 21 porque são mais um que o número do termo (20+1).

Numa fase inicial, os alunos podem não estabelecer relações entre o termo e a sua ordem, sentindo necessidade de fazer a representação pictórica dos termos e contando ou escrevendo toda a sequência numérica, por recorrência, até ao termo pedido. Cabe ao professor questionar os alunos de modo a incentivá-los a seguir uma estratégia menos morosa e que promova o estabelecimento de relações.

Conclusão

Esta sessão prática possibilitará, deste modo, discutir o trabalho que se espera dos alunos no âmbito do novo programa no que respeita ao trabalho com sequências, promovendo a generalização e a progressiva formalização dessa generalização.

Referências bibliográficas

Kaput, J., & Blanton, M. (2001). *Algebrafying the elementary mathematics experience, part I: Transforming Task Structures*. (Acedido em 5 de Julho de 2005 de http://www.scps.k12.fl.us/scctm/TextFiles/Educational%20Articles/Algebrafying%20elementary%20mathematicsPart%20I.pdf).

ME-DGIDC (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. http://sitio.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no ensino básico*. (Acedido em 7 de Setembro de 2010 de http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/003_Brochura_Algebra_NPMEB_(Set2009).pdf).

A NATUREZA DA TAREFA E OS DESAFIOS DA GESTÃO CURRICULAR

Cecília Felício e Margarida Rodrigues
EB 2,3 de Luísa Todi e ESE de Lisboa
cecilia.felicio@sapo.pt, margaridar@eselx.ipl.pt

Resumo

Propomo-nos reflectir em torno da forma como a natureza da tarefa pode marcar significativamente o trabalho desenvolvido na sala de aula, quer no que respeita ao nível cognitivo envolvido, quer no que toca ao desenvolvimento nos alunos das capacidades transversais valorizadas no Programa de Matemática do Ensino Básico. Iremos também equacionar a gestão curricular enquanto responsabilidade do professor, centrando a nossa atenção no modo como uma tarefa pode constituir um ponto de partida de descoberta de conceitos matemáticos, e como o seu encadeamento com outras pode conduzir à conexão entre vários conteúdos e a uma abordagem curricular integrada. Será dada visibilidade a estas questões através da partilha de uma situação de aprendizagem desenvolvida em sala de aula, no âmbito do Programa de Formação Contínua de Matemática para Professores dos 1.º e 2.º Ciclos, na qual serão apresentadas e analisadas as produções dos alunos.

Introdução

Uma tarefa que se proponha aos alunos pode assumir diferentes naturezas e, por esse motivo, apelar a diferentes níveis cognitivos. Embora possamos considerar que todos os tipos de tarefas têm o seu lugar na aula de Matemática, importa assegurar que tarefas mais abertas e desafiantes tenham um espaço significativo no trabalho quotidiano dos alunos. São estas que, potencialmente, elevam o seu pensamento matemático para níveis de maior complexidade. São estas que, potencialmente, conduzem os alunos a conjecturar, a testar as suas conjecturas, a procurar soluções por intermédio de múltiplas estratégias. E dada a diversidade de processos usados, de formas de raciocínio mobilizadas, são também estas que, potencialmente, favorecem a comunicação matemática, pela necessidade de explicitar, ao professor e aos colegas, por escrito e oralmente, o respectivo modo de resolução. Quando afirmamos que, potencialmente, a natureza da tarefa pode fazer a diferença na qualidade do trabalho desenvolvido pelos alunos, bem como nas suas aprendizagens, não ignoramos o papel essencial do professor nessa marca diferenciadora: não existem tarefas à prova de professor. Uma mesma tarefa pode levar a um trabalho limitado e empobrecido se o professor que a propuser adiantar, ele próprio, um modo de resolução, encarado como único e uniforme, não dando espaço nem tempo para os alunos a explorarem, ou pode conduzir a um trabalho rico e diversificado se aos alunos for concedido tempo, o feedback adequado (que não coarcte os seus modos específicos de pensar mas que simultaneamente ajude a prosseguir e a desbloquear) e se o professor conseguir gerir a discussão no seio da turma, de modo a torná-la produtiva do ponto de vista matemático, não só procurando a efectiva participação dos alunos mas também colocando questões que focalizem para o objectivo matemático visado e que provoquem o desenvolvimento do seu pensamento.

Propomo-nos ilustrar o atrás referido com o relato da forma como decorreu a aula em que foi explorada uma dada tarefa — *Os carrinhos do Luís* — e como foi encadeada no percurso didáctico efectuado. Esta foi uma das tarefas propostas no âmbito do PFCM, nos anos lectivos de 2007/08 e 2008/09, em que trabalhámos em conjunto, a Margarida, na qualidade de formadora da equipa da ESE de Setúbal, e a Cecília, na qualidade de formanda. O relato reflexivo que se segue diz respeito a aulas da Cecília do último ano lectivo e assume a pessoalidade da sua própria voz, embora tenhamos feito uma análise conjunta das produções dos alunos.

A tarefa na introdução de conceitos

A actividade, que aqui se relata, visa a apresentação e exploração do subtópico *divisores de um número*. Porque os divisores não se podem dissociar dos múltiplos, e do meu ponto de vista são de grande importância as conexões que os alunos podem estabelecer entre ambos, foi minha preocupação escolher uma tarefa motivadora onde esta relação pudesse ser trabalhada. Considero a tarefa *Os carrinhos do Luís* muito abrangente, pois permite trabalhar quase todos os assuntos que, no novo programa, se enquadram no tópico *Números naturais*. Passo a apresentá-la:

> O Luís gosta muito de brincar com carrinhos pequeninos. Quando acompanha os pais nas compras do supermercado, de vez em quando, pede para lhe comprarem mais um. Neste momento, o Luís tem 36 carrinhos.
> Como tem muitas caixas, num certo dia o Luís entreteve-se a arrumar de modo diferente os carrinhos pelas diferentes caixas.
> Supondo que cada caixa tem que ter sempre o mesmo número de carrinhos e que não fica nenhum carrinho de fora, **de quantas maneiras diferentes pode o Luís arrumar os carrinhos?**

Esta tarefa reveste-se de forte carácter exploratório e investigativo, pois permite estabelecer conexões, descobrir regularidades, bem como fazer conjecturas a partir da interpretação da informação, como se poderá verificar no desenrolar da sua aplicação, e na análise dos trabalhos realizados pelos alunos.

Na aula de exploração da tarefa, após distribuídas as folhas com o respectivo enunciado, pedi aos alunos que a realizassem em trabalho de pares. Optei pelo trabalho de pares, pois considero-o facilitador da resolução da tarefa e das aprendizagens dos alunos; não desmotiva os que apresentam mais dificuldades, facilita a entreajuda, e desenvolve o raciocínio e argumentação matemática, pois têm de explicar mutuamente os seus raciocínios e as suas ideias.

Quando iniciaram a resolução da tarefa, de uma forma ou de outra, todos foram procurando a solução para o problema que lhes foi colocado. Porque alguns tiveram como reacção imediata apresentar uma única maneira de arrumar os carrinhos, foram questionados sobre se para aquele problema existiria apenas uma maneira, ou se existiriam várias… Questionados sobre o que iam encontrando, rapidamente perceberam que havia várias maneiras de arrumar os carrinhos. E lá iam eles, com o colega de carteira, procurando essa diversidade de modos de arrumação.

As estratégias utilizadas foram diversificadas, como se pode constatar da análise das produções dos alunos. Apesar de terem trabalhado a pares, a análise que se segue reporta-se ao trabalho que cada um dos alunos apresentou.

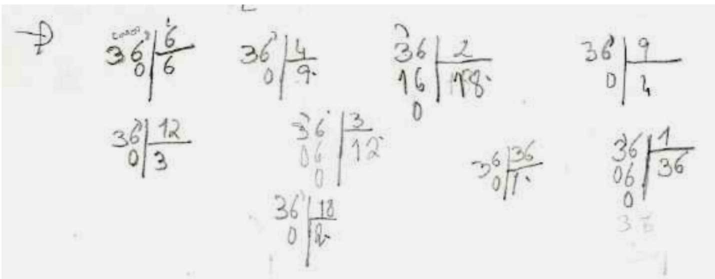


Figura 1. Resolução com base na divisão

Este aluno encontra o número máximo de maneiras de arrumar os carros. Recorre unicamente ao algoritmo da divisão, o que mostra que já se apropriou completamente dele e já o interiorizou, revelando uma capacidade de abstracção mais desenvolvida. É de assinalar o termo "carros" que escreve por cima do dividendo do primeiro algoritmo, mostrando atribuir significado ao que faz.

Na Figura 2, apesar de efectuar as multiplicações e as operações inversas, as divisões, o aluno necessita do apoio da representação gráfica para três das possibilidades (9, 1 e 12 caixas). O aluno não apresenta as possibilidades referentes a 2 e 18 caixas. No entanto, responde terem descoberto "10 diferentes maneiras de arrumar os 36 carrinhos". Será que uma destas possibilidades teria sido feita pelo seu colega de grupo? E neste caso, ter-se-iam apercebido que a comutatividade da multiplicação, neste contexto, corresponde a duas possibilidades diferentes? A resposta incidente em 10 parece indicar que o par de alunos teria chegado a 5 produtos (6x6; 3x12; 4x9; 1x 36; 2x18) concluindo que o número de maneiras diferentes de arrumar os carrinhos seria o dobro. Se foi o caso, não teriam reparado que o produto 6x6 contempla uma única possibilidade, a de 6 caixas com 6 carros, cada uma.

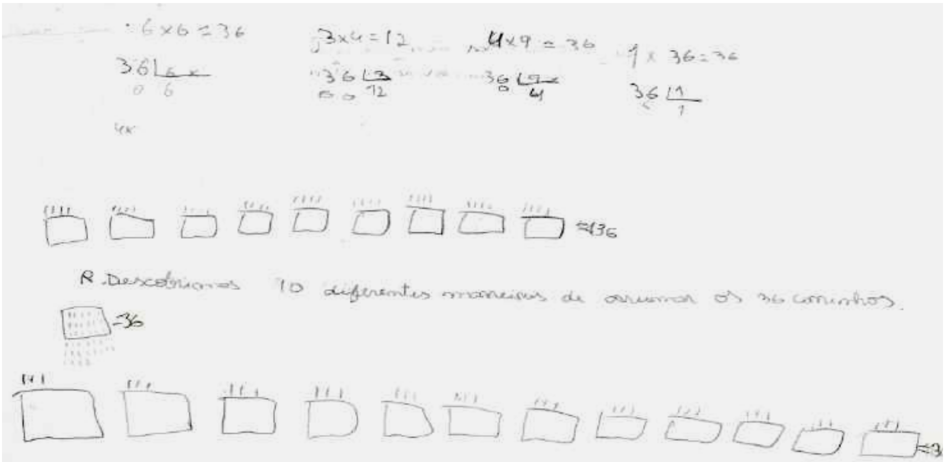


Figura 2. Abordagem mista

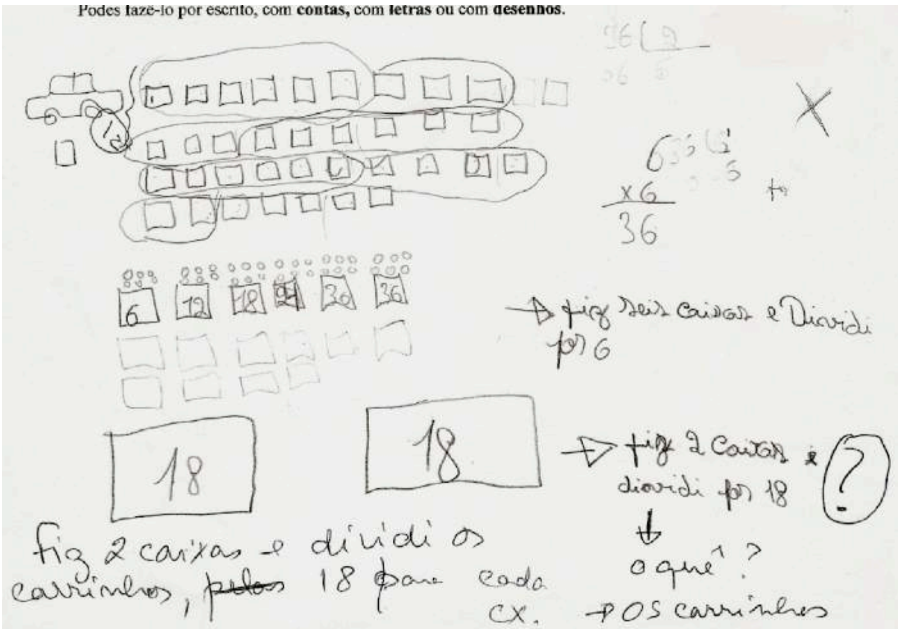


Figura 3. Recurso à representação gráfica

Este aluno não utiliza o algoritmo da divisão. Usa a multiplicação para uma das possibilidades, recorrendo essencialmente à representação gráfica para resolver o problema. Numa fase inicial, o aluno parece não saber muito bem o que divide, se os carrinhos ou as caixas. Repare-se que o seu primeiro desenho corresponde a 35 quadrados, agrupados em grupos de seis. Possivelmente, teria querido desenhar 36 quadrados. Representarão estes quadrados os carrinhos do Luís? Será esta a representação gráfica de 6 caixas com 6 carros, cada uma? Suponho que não, pois nos seus dois desenhos seguintes, cada quadrado representa uma caixa. Julgo que ele estaria ainda numa fase de procura de compreensão do próprio problema, sendo esta a sua primeira tentativa. O segundo desenho corresponde à segunda tentativa. Repare-se que ele desenhou 16 caixas, e depois concretiza, fazendo corresponder 6 carrinhos a cada caixa. Apresenta aqui uma sequência numérica — 6…12…18…24…30…36 — evidenciando ter usado um raciocínio aditivo na multiplicação envolvida. E só depois de ter obtido o 36, correspondente ao número total de carrinhos, é que teria apagado as 10 caixas sobrantes. A sua afirmação "fiz seis caixas e dividi por 6" sintetiza a conclusão alcançada com o seu processo aditivo. A operação multiplicação que apresenta — 6x6=36 — corresponde à representação simbólica do processo gráfico usado anteriormente. Quando a seguir desenha as duas caixas e já não desenha os carros (que anteriormente tinha representado com as bolinhas), escrevendo os números (18), ele afirma: "fiz 2 caixas e dividi por 18" (expressão análoga a "fiz seis caixas e dividi por 6", o que mostra que o aluno usaria a expressão "dividi por" para indicar o número de carrinhos em cada caixa). Reparando nesta expressão, perguntei-lhe o que é que ele tinha dividido. O aluno hesitou e respondeu – as caixas. Perguntei-lhe qual era a tarefa do Luís, o que é que ele tinha que fazer, ao que o aluno respondeu: arrumar os carrinhos nas caixas. Voltei a perguntar: então o que é que ele tinha que dividir? O aluno olhou para mim, sorriu e disse: os carrinhos… Então construímos a frase: " Fiz duas caixas e dividi os carrinhos, 18 para cada caixa."

A aluna, cuja produção se encontra na Figura 4, utiliza a multiplicação para resolver o problema e encontra todas as hipóteses possíveis. Percebe que 9x4 dá o mesmo resultado que 4x9 (comutativa), e que este facto lhe permite arrumar os carrinhos de duas maneiras diferentes, sem sobrar nenhum, explicitando-o narrativamente. E compreende que assim é para as outras hipóteses: embora o resultado da multiplicação seja idêntico, as situações que ele representa no contexto do nosso problema são diferentes, correspondendo a duas possibilidades distintas. A aluna engana-se na multiplicação correspondente à situação de 3 caixas ou 3 carrinhos.

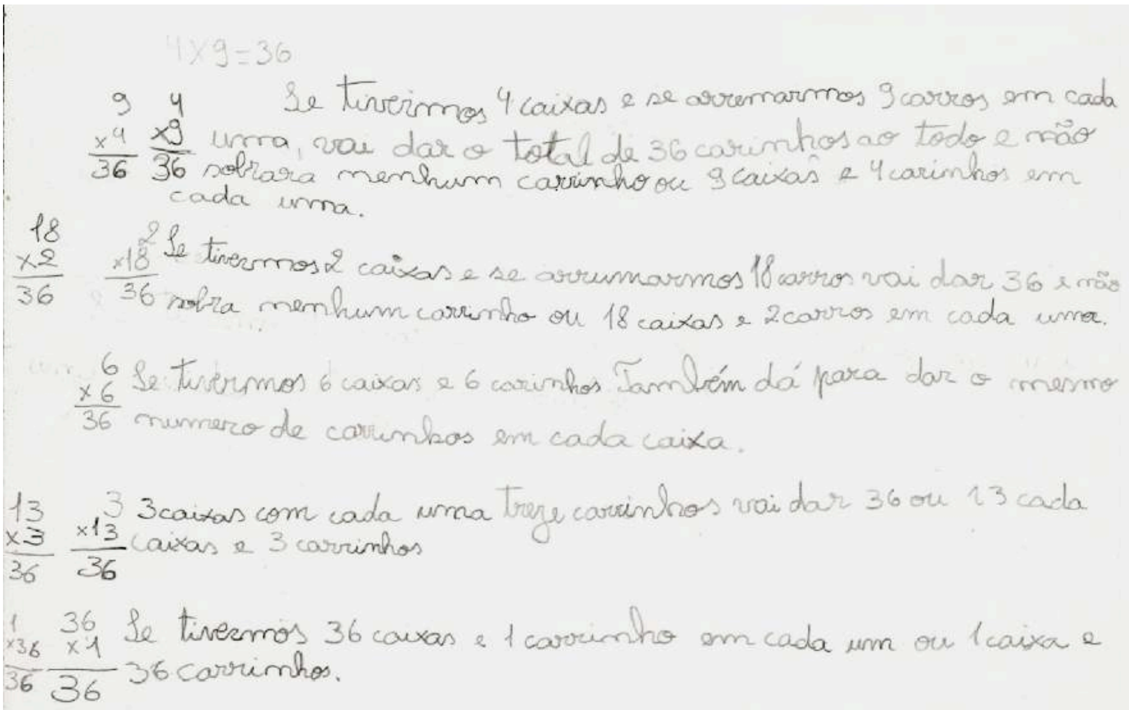


Figura 4. Adequação da comutatividade ao contexto

Ao longo da resolução da tarefa, e enquanto encontravam hipóteses para o problema, os alunos eram incentivados a fazer descobertas e a registá-las. O trabalho da Figura 5 é exemplo disso. De notar a forma organizada e clara como a maioria dos alunos expõe as suas ideias.

A afirmação “quando chegámos a um determinado número percebemos que já não dava para dividir”, revela nitidamente que este par de alunos já percebeu que o conjunto dos divisores de um número é um conjunto finito e que o maior divisor de um número é o próprio número. Este aspecto foi discutido e esclarecido com eles, em pequeno grupo.

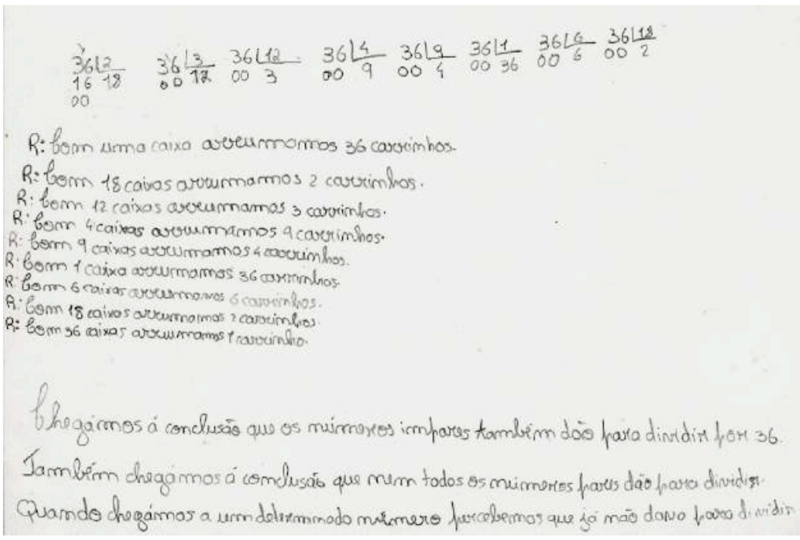


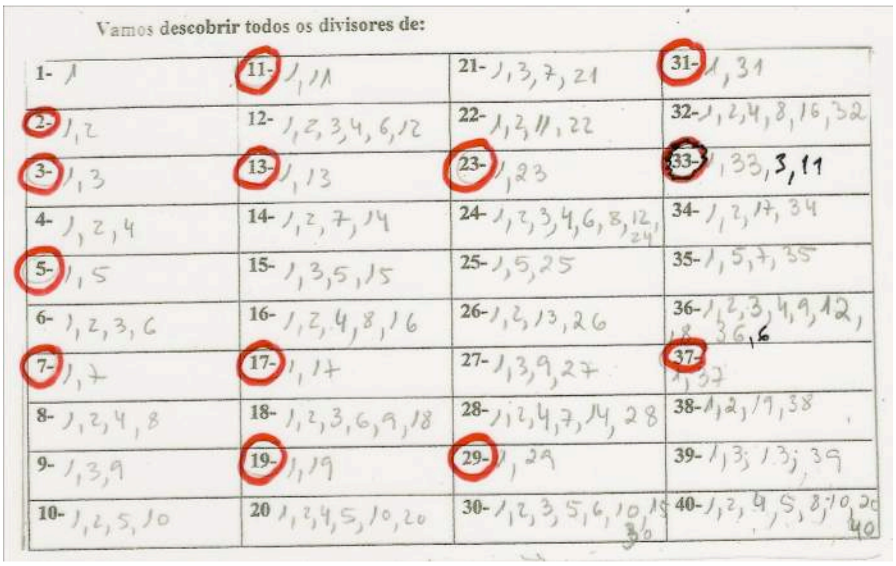
Figura 5. Registo de descobertas

Todas as formas de resolver o problema e todas as descobertas que os alunos fizeram foram apresentadas a toda a turma e debatidas em conjunto, tendo sido estabelecidas conexões entre as diferentes matérias que iam sendo abordadas.

Conexões no encadeamento de tarefas

Associadas à tarefa motivadora, foram desenvolvidas outras daí decorrentes, como sejam a construção e análise de tabelas, cuja exploração possibilitou a apresentação e exploração de conteúdos didácticos relacionados, cumprindo desta forma as orientações do novo programa, que visa estabelecer conexões entre os diferentes conteúdos. Assim, em aulas posteriores à realização da tarefa motivadora, os alunos completaram duas tabelas. A primeira tinha como objectivo levar os alunos a sistematizar e consolidar as hipóteses encontradas, e a segunda (Figura 6) visava a descoberta dos divisores dos números naturais inferiores a 41. Da sua análise foram trabalhados vários subtópicos, como sejam: múltiplos e divisores de um número natural; menor múltiplo comum de dois ou mais números; máximo divisor comum de dois números; critérios de divisibilidade por 2, por 5 e por 3; números primos e compostos; decomposição em factores primos; potências de base e expoente naturais.

Todos estes assuntos foram trabalhados individualmente ou em pares, quando se realizavam as tarefas e posteriormente no grupo turma. Os alunos registaram conclusões claras e precisas no caderno diário, que se revelaram fundamentais para o seu estudo, pois não tinham manual de Matemática. Para sistematização dos conteúdos, realizavam fichas de trabalho, que realizavam na sala de aula ou como trabalho de casa.


Vamos descobrir todos os divisores de:

1- 1	11- 1, 11	21- 1, 3, 7, 21	31- 1, 31
2- 1, 2	12- 1, 2, 3, 4, 6, 12	22- 1, 2, 11, 22	32- 1, 2, 4, 8, 16, 32
3- 1, 3	13- 1, 13	23- 1, 23	33- 1, 33, 3, 11
4- 1, 2, 4	14- 1, 2, 7, 14	24- 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24	34- 1, 2, 17, 34
5- 1, 5	15- 1, 3, 5, 15	25- 1, 5, 25	35- 1, 5, 7, 35
6- 1, 2, 3, 6	16- 1, 2, 4, 8, 16	26- 1, 2, 13, 26	36- 1, 2, 3, 4, 9, 12, 18, 36, 6
7- 1, 7	17- 1, 17	27- 1, 3, 9, 27	37- 1, 37
8- 1, 2, 4, 8	18- 1, 2, 3, 6, 9, 18	28- 1, 2, 4, 7, 14, 28	38- 1, 2, 19, 38
9- 1, 3, 9	19- 1, 19	29- 1, 29	39- 1, 3, 13, 39
10- 1, 2, 5, 10	20 1, 2, 4, 5, 10, 20	30- 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30	40- 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40

Figura 6. Descoberta de divisores e identificação dos números primos

Os procedimentos, utilizados para resolver a tarefa dos carrinhos do Luís, foram variados, como se viu na análise das produções dos alunos e as abordagens aos subtópicos em estudo foram feitas com base na análise dessas produções. A grande diversidade de situações permitiu encontrar regularidades e estabelecer conexões.

Relativamente ao que se poderia considerar o objectivo inicial, que era distinguir e identificar divisores e múltiplos de um número, a primeira tarefa *Os carrinhos do Luís* trouxe uma noção clara destes conceitos à grande maioria dos alunos da turma. Nos alunos com mais dificuldades, a aprendizagem destes conceitos verificava-se pouco consistente, mas o entusiasmo e o empenho dos alunos permanecia.

A realização e exploração da tarefa *Vamos descobrir todos os divisores de*, revelou-se também muito rica e abrangente, permitindo trabalhar novamente o conceito de divisor. Sistematizou o conhecimento dos alunos que já tinham percebido e permitiu trabalhar novamente o conceito com os alunos que ainda não o tinham interiorizado.

O facto de ser uma tarefa diferente, mas relacionada, permite, por um lado, a sistematização sem o carácter enfadonho da repetição (pois sendo uma nova actividade constitui um novo desafio); por outro lado, o trabalho diferente sobre o mesmo conceito permite aos alunos com mais dificuldades usufruírem de diferentes formas de abordagem para o mesmo conceito. Relativamente à primeira tarefa, esta apresentava um maior grau de abstracção, sem contexto que desse significado ao conceito de divisor.

Sendo duas tarefas relacionadas que permitem diferentes abordagens de um mesmo tópico, constituem o que as metodologias aplicadas ao novo programa designam por cadeia de tarefas, cuja utilização considero bastante vantajosa. Nesse encadeamento, é importante que as tarefas posteriores apresentem um maior grau de complexidade, com vista ao desenvolvimento matemático dos alunos.

Resta aqui mencionar a forma activa, entusiástica e colaborativa como os alunos participaram em todas estas actividades, tanto na análise das situações, como na descoberta, elaboração e registo de conclusões. Esta é para mim uma nova forma de ensinar Matemática, que julgo mais eficaz. No entanto, penso que será necessário um reajustamento dos tempos lectivos atribuídos a esta disciplina, bem como do número de alunos por turma e da regulação dos comportamentos dos alunos. Estes aspectos foram talvez as maiores dificuldades que senti na aplicação destas actividades e na utilização destas metodologias de trabalho.

A concluir

Tal como apontado por Stein e Smith (1998), as diferentes tarefas usadas na sala de aula constituem a base para a aprendizagem dos alunos pois representam tipos diferentes de oportunidade para os alunos pensarem, podendo variar no respectivo nível de exigência conceptual. As autoras chamam a atenção para o facto de a natureza das tarefas poder mudar radicalmente quando passam da fase de *apresentação* (nos manuais ou outros materiais auxiliares) para a fase de *implementação*. Isto é, tarefas com um nível elevado de exigência cognitiva tanto podem manter esse nível elevado, como não, quando os alunos as exploram efectivamente.

A identificação das fases da evolução da natureza das tarefas remete-nos para as várias fases do currículo, que integram o modelo proposto por Sacristán (1991/2000), particularmente adequado para uma estrutura de gestão centralizada, e para o papel do professor enquanto gestor e decisor curricular. Esse modelo apresenta as seguintes fases explicativas do currículo: *prescrição*, *apresentação, interpretação, implementação, realização* (efeitos da prática) e *avaliação*. Os diferentes papéis que o professor poderá assumir na gestão das fases curriculares situam-se numa linha contínua, desde o papel passivo de mero executor de directrizes curriculares até ao papel criativo de um profissional crítico que utiliza a sua autonomia, no que respeita à participação nas decisões curriculares. E, tal como é sublinhado por Rodrigues (2008), um "professor criativo não é apenas aquele que procura novas tarefas ou as realiza de modo pessoal, é também o que possui os fundamentos das tarefas que concretiza" (p. 178). Será a consciência reflexiva dos fundamentos das tarefas propostas nas aulas de Matemática que dotará o professor da capacidade de manter o nível elevado de exigência conceptual numa tarefa concebida com esse fim.

Um outro aspecto importante a atender na gestão curricular efectuada pelo professor é a sua capacidade de estabelecer conexões entre os vários conteúdos matemáticos na forma como explora, com os seus alunos, uma dada tarefa e a encadeia com outras tarefas. A capacidade de estabelecer conexões dentro e fora da Matemática é uma das capacidades a desenvolver nos alunos, e que o PMEB refere valorizar, além das três grandes capacidades transversais a toda a aprendizagem da Matemática destacadas, nomeadamente a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática. Pensamos que o estabelecimento de conexões pode ser uma das chaves para a resolução do problema, sentido actualmente pela generalidade dos professores, da falta de tempo para um efectivo desenvolvimento destas capacidades transversais, por um lado, e para a promoção de melhores e maiores aprendizagens dos alunos em Matemática, por outro lado.

> Uma gestão curricular envolvendo conexões matemáticas dotará os alunos de uma competência matemática qualitativamente superior, pois o saber que é fecundo é inter-relacional e conectado, e simultaneamente libertará tempo para uma integração continuada e não pontual das várias capacidades transversais. Esta nova gestão curricular é a única forma, penso eu, de transformar a escola numa instituição capaz de oferecer um currículo enquanto lugar produtor de um "saber em uso, activo e actuante" (Roldão, 2003, p. 45), ou seja, enquanto lugar das competências. (Rodrigues, 2009)

Referências bibliográficas

Rodrigues, M. (2008). *A demonstração na prática social da aula de Matemática.* Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa, Departamento de Educação da Faculdade de Ciências, Lisboa.

Rodrigues, M. (2009). As capacidades transversais no novo programa do ensino básico: Desafios da sua integração. *Educação e Matemática, 105,* 38-40.

Roldão, M. C. (2003). O lugar das competências no currículo – ou o currículo enquanto lugar das competências? In Associação de Professores de Matemática (Ed.), *Actas do ProfMat 2003* (pp. 41-48). Lisboa, Portugal: APM.

Sacristán, J. (2000). *O currículo: Uma reflexão sobre a prática* (3ª ed.). Porto Alegre: Artmed. (Obra original em espanhol publicada em 1991)

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(4), 268-275.

DIVIDINDO QUADRADOS: UMA PROPOSTA PARA A AULA DE MATEMÁTICA

Maria de Fátima Durão
ESE de Santarém - PFCM
fritadurao@gmail.com

Maria Cecília Rebelo
ESE de Santarém - PFCM
mceciliaprebelo@sapo.pt

Célia Mercê
ESE de Santarém - PFCM
celiamerce@sapo.pt

Susana Colaço
ESE de Santarém - PFCM
susana.colaco@ese.ipsantarem.pt

Resumo

Existem infinitas possibilidades para dividir uma folha de papel, com a forma de um quadrado, em quatro partes congruentes. Esta sessão prática tem como objectivo apresentar e discutir as potencialidades desta tarefa, de natureza exploratória em contexto de sala de aula no âmbito do ensino e da aprendizagem da Geometria. A discussão em torno da exploração desta tarefa permitirá também estabelecer conexões com outros temas matemáticos além do desenvolvimento das diferentes capacidades transversais mencionadas no Programa de Matemática do Ensino Básico (2007). Esta tarefa foi explorada nas sessões de formação do Programa de Formação Contínua em Matemática para professores dos1.º e 2.ºciclos do ensino básico da Escola Superior de Educação de Santarém, sendo por isso também, apresentadas algumas produções dos alunos resultantes da sua implementação em sala de aula.

A tarefa de «Dividindo quadrados» será trabalhada nesta sessão prática, tendo em conta os três níveis do Ensino Básico, quer recorrendo a materiais manipuláveis, instrumentos de desenho ou mesmo a programas computacionais como é o caso do *GeoGebra*. No final serão ainda apresentadas algumas propostas de extensão desta tarefa. A sessão prática destina-se a docentes do ensino básico (1.º, 2.º e 3.ºciclos do ensino básico).

1. Introdução

A tarefa tem uma natureza exploratória, uma vez que apresenta uma situação cuja resolução permite aos alunos chegarem a diferentes soluções, procurando definir várias estratégias de modo a encontrarem um maior número de possibilidades. Enquanto no 2.ºCEB os alunos podem identificar diferentes polígonos nas várias dobragens a partir do quadrado, no 3.º ciclo farão essa identificação partindo de outros polígonos regulares (pentágono, hexágono, entre outros). Na realização desta tarefa os alunos podem recorrer a materiais manipuláveis e a software de Geometria dinâmica.

Esta tarefa enquadra-se no tema de Geometria, contudo a discussão da tarefa permite estabelecer conexões com outros temas matemáticos, nomeadamente Álgebra.

2. Apresentação e enquadramento da tarefa

No âmbito do Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB) esta tarefa (ver figura 1) enquadra-se no tema matemático de Geometria para os três ciclos do Ensino Básico. No 1.º e 2.º CEB surge no tópico figuras no plano. Os objectivos específicos para o 1.º CEB são: reconhecer propriedades de figuras no plano e fazer classificações enquanto para o 2º CEB são: identificar os elementos de um polígono, compreender as suas propriedades e classificar polígonos bem como compreender a noção de figuras congruentes. Para o 3.º CEB enquadra-se no tópico triângulos e quadriláteros e os objectivos específicos são: classificar quadriláteros e construí-los a partir de condições dadas e investigar as suas propriedades e resolver problemas que envolvam polígonos. Quanto às capacidades transversais para os três níveis de ensino, esta tarefa pretende desenvolver a capacidade de comunicação matemática, mais especificamente, na forma de representar informação, ideias e conceitos matemáticos de diversas formas e ainda de discutir resultados, processos e ideias matemáticas. Esta tarefa permite, por um lado, trabalhar outros subtópicos dentro deste tema e por outro, fazer conexão com outros temas matemáticos. Nos 1º e 2º ciclos com o tema Números e Operações nomeadamente no tópico Números racionais não negativos e no 3º Ciclo com o tema Álgebra no tópico sequências e regularidades.

Dividindo quadrados...

1. Com várias folhas de papel com a forma de um quadrado experimenta dividi-las em quatro partes geometricamente iguais (congruentes) através de dobragens.

2. Identifica as formas das partes que encontraste.

3. De quantas maneiras diferentes é possível dividir o quadrado em quatro partes geometricamente iguais?

Figura 1 – Tarefa «Dividindo quadrados» adaptada de Shapiro (2000)

Tal como é preconizado nas indicações metodológicas do tema da Geometria, no PMEB, esta tarefa permite ainda o recurso a um *software* de Geometria dinâmica que favorece a compreensão de conceitos e relações geométricas.

3. Indicações para a sala de aula

Para esta tarefa sugere-se o trabalho em grupo pois promove a descoberta de soluções variadas, bem como, a partilha das soluções encontradas.

O professor deve começar por apresentar os objectivos da tarefa aos seus alunos e, de seguida, clarificar alguns conceitos, nomeadamente o de figuras congruentes ou geometricamente iguais. Antes de qualquer manipulação ou descoberta os alunos devem fazer a previsão do número de soluções que irão encontrar. Seguidamente serão distribuídas folhas de papel com a forma de um quadrado para apoiarem as suas explorações e a partir daí tirarem e registarem as suas conclusões. Após efectuarem as dobragens os alunos devem verificar se as partes obtidas são efectivamente congruentes.

No 3.º ciclo o professor recorrerá também ao *Geogebra* para que os alunos possam construir outros polígonos regulares e realizar a respectiva divisão em quatro partes congruentes.

É importante que o professor indique, aos alunos, o modo como pretende que eles registem as suas conclusões. No decorrer da tarefa ou no momento de apresentação das soluções encontradas, o professor deverá promover a comunicação matemática encorajando os alunos a verbalizarem os seus raciocínios. Para isso, pode colocar questões de modo a que os alunos expressem e desenvolvam as suas ideias e esclareçam e organizem os seus raciocínios, por exemplo: Será que o número mínimo de dobragens tem que ser sempre o mesmo? Como é que podem verificar que as partes obtidas são congruentes?

No final da realização da tarefa, é fundamental que exista uma apresentação e discussão dos resultados de todas as soluções encontradas (correctas e incorrectas) para a turma. O professor deve gerir a discussão de modo a que cada grupo verifique se também obteve a solução que está a ser apresentada e que sejam apresentadas todas as soluções diferentes. Durante este momento de discussão deve procurar que os alunos usem a linguagem matemática quando descrevem as dobragens realizadas.

Outros aspectos que devem ser realçados são o facto de esta tarefa ter infinitas soluções e qualquer um dos polígonos encontrados, como solução, serem equivalentes.

4. Conclusões

De acordo com as orientações metodológicas gerais do PMEB, sabendo que a aprendizagem Matemática dos alunos está dependente, entre outros factores, do tipo de tarefas propostas pelos professores e de experiências matemáticas diversificadas, consideramos que esta tarefa, de natureza exploratória, proporciona aos alunos uma prática compreensiva de procedimentos.

O ensino e aprendizagem da Matemática deve proporcionar momentos de confronto de resultados, argumentação e discussão de estratégias utilizadas pelos alunos.

5. Referências Bibliográficas

Shapiro, S. (2000). Solve that Problem! Skills and strategies for practical problem solving. Sidney: Blake Education.

Ministério da Educação (2007). Programa de Matemática do Ensino Básico. Lisboa: Ministério da Educação: Direcção-Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.

A COMPREENSÃO DE PROFESSORAS DO 1º AO 2º CICLO DO ENSINO FUNDAMENTAL SOBRE MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL A PARTIR DA ANÁLISE DE ATIVIDADES

Maria Patrícia F. Lemos, UFPI, PUC-SP –Bolsista CAPES, mpflemos@gmail.com

Introdução

A escola como espaço de discussão e produção do conhecimento científico é, essencialmente, responsável pela formação e transmissão dos conteúdos, cada vez mais solicitada a adequar-se à realidade atual e às exigências da sociedade cada dia mais informatizada. Ou seja, segundo Lopes (2004, p. 189) a escola "deve possibilitar a seus alunos uma formação de conceitos que os auxiliem no exercício da cidadania".

Para essa autora, os alunos devem ser capazes de ler e interpretar as informações e dados que veem a todo o momento expressos em listas, tabelas e gráficos de vários tipos que ganham importância e credibilidade e são difíceis de serem retrucados pelo cidadão comum que, muitas vezes, pode se interrogar sobre a veracidade ou não desses dados, mas, muitas vezes, não possui os conhecimentos necessários para contra-argumentar.

Deste modo, ensinar os conceitos estatísticos desde as séries iniciais poderá auxiliar os alunos na compreensão das informações veiculadas em seu cotidiano, tomar decisões e fazer previsões que influenciem sua vida pessoal, social e profissional.

Entretanto, será que em nossas escolas esses conteúdos estão sendo realmente trabalhados? Será que nossos professores do Ensino Fundamental e Médio têm formação e conhecimentos necessários para ensinar os conceitos básicos da Estatística Descritiva, articulando com situações do cotidiano e significativas para nossos alunos?

Batanero (2000) afirma que o fato da Estatística estar presente no currículo de Matemática não significa que os professores a estão ensinando. Essa autora reflete que alguns professores não se sentem confortáveis para ensinar estatística, deixando-a, muitas vezes, como último tema e quando têm oportunidade omitem-na.

No Brasil, o ensino de Estatística entrou em pauta a partir 1997, com a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais(PCN) especificamente, o de Matemática, há mais de dez anos, o que efetivamente tem sido ensinado nas escolas e nas séries iniciais.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental - PCN (Brasil, 1997) defendem o trabalho com este conteúdo, desde as séries iniciais do Ensino Fundamental. O documento propõe que seja realizado um trabalho efetivo com noções de estatística descritiva, probabilidade e combinatória no bloco intitulado Tratamento da Informação (p. 56), ou seja:

> Segundo os PCN, o ensino de estatística deve fazer com que o aluno venha a construir procedimentos para coletar, organizar, comunicar e interpretar dados, utilizando tabelas, gráficos e representações que aparecem freqüentemente em seu dia-a-dia. “A finalidade não é a de que os alunos aprendam apenas a ler e a interpretar representações gráficas, mas que se tornem capazes de descrever e interpretar sua realidade, usando conhecimentos matemáticos. (BRASIL, 1997, p 69).

A defasagem da aprendizagem dos alunos em relação à Matemática ainda é muito grande, apesar de nos últimos 20 anos ter aumentado consideravelmente o número de pesquisas que buscam investigar o ensino e a aprendizagem da Matemática.

Letramento Estatístico

Os conhecimentos básicos de estatística são a uma capacidade essencial que se espera que os cidadãos nas sociedades saturadas de informações possuam. Gal define letramento estatístico como correspondendo ao que se espera de uma pessoa adulta, especialmente, aquela que vive em uma sociedade industrializada. Nesse sentido, possuir um letramento estatístico segundo Gal (2002) pode auxiliar as pessoas de diversas maneiras como compreender os fenômenos sociais e pessoais estando plenamente consciente de sua relevância como por exemplo: as taxas de criminalidade, o crescimento populacional, a produção industrial, entre outros.

Gal (2002) propõe um modelo no qual diz que o letramento estatístico das pessoas implica tanto componentes de conhecimento formado por cinco elementos cognitivos (habilidades do letramento, conhecimentos estatísticos, matemáticos e do contexto e competência para elaborar perguntas críticas) e componentes de disposição formado por dois elementos (postura crítica, crenças e atitudes).

Estes elementos e componentes do modelo proposto por Gal (2002) não devem ser vistos como fixos e separados, mas sim como um conjunto dependente do contexto dinâmico de conhecimentos e disposições que em conjunto tornam possível um comportamento progressivo do letramento estatístico.

A análise das habilidades de letramento é à base do conhecimento das noções básicas de estatística que são transmitidas através de textos orais, escritos, representações gráficas e tabelas. No mundo real, os leitores têm que ter a capacidade de ler, interpretar e dar sentido a uma ampla gama de informações que são formuladas em diferentes níveis de complexidade e em diferentes estilos de escrita ou de fala.

As noções básicas de conhecimento estatístico, segundo Gal (2002) devem considerar alguns pontos importantes que os adultos deveriam ter como: conhecimento da origem dos dados e de suas diferentes formas de representações gráficas e tabulares, bem como as regras para sua elaboração e análise, compreensão das idéias vinculadas com os acontecimentos que tem a ver com as oportunidades como o azar que estão implícitas ou explicitas em muitos tipos de informações, entendendo e avaliando criticamente as afirmações probabilísticas, reconhecendo a importância de determinar a fonte dos estimativas e probabilidade; compreensão das grande idéias fundamentais que servem de base as investigações estatísticas como variação e familiaridade como as medidas de tendência central (média, moda e mediana).

Gal (2002) alega que é desejável que os consumidores de informações estatísticas sintam que as médias e medianas são meios simples de resumir um conjunto de dados e mostrar seu centro; essas medias são afetadas por valores extremos, muito mas que as medianas e que as medidas de tendência central podem enganar quando a distribuição ou forma dos dados sobre os quais se baseiam e muito desigual ou bimodal, ou quando os dados ou a amostra a partir do qual se calculam no são representativo da população total que é o objeto de estudo.

Segundo Gal (2002,p. 36), o conhecimento do contexto é o principal determinante da familiaridade que o leitor tem com as fontes de variação e erro, pois se este, não esta familiarizado com o meio em que a coleta os dados será realizada fica difícil imaginar porque ocorreu uma diferença entre grupos, que interpretação alternativa pode existir para as conclusões apresentadas ou imaginar a razão de um estudo estar errado.

Desta forma, todos esses conhecimentos reunidos são necessários para que o cidadão possa não apenas realizar leituras como compreender, analisar e elaborar questões críticas em relação às informações estatísticas ou não que são apresentadas a todo o momento pelas mídias.

Em relação aos elementos de disposição que são a postura critica, crenças e atitudes, Gal (2002) diz referindo-se ao primeiro item que o adulto dever ter uma propensão a desenvolver uma atitude de questionamento diante de informações quantitativas que podem ser unilaterais, viesadas ou incompletas, seja de maneira intencional ou não. Além disso, deveriam realizar de maneira espontânea sua lista pessoal de perguntas capciosas quando se deparam com argumentos que aparentemente estão baseados em dados ou em informações de resultados ou conclusões provenientes de estudos e outras investigações empíricas.

Já as atitudes e crenças resultam da posição critica e da disposição de um adulto em fazer um esforço mental e assumir riscos ocasionalmente em relação a informações estatísticas. Segundo Gal (2002) as atitudes são relativamente estáveis, sentimentos intensos que se desenvolvem através de internalização gradual de respostas emotivas repetidas, negativas ou positivas, com o passar do tempo. E as crenças, são idéias ou opiniões que se elevam de maneira individual, tais como o domínio, sobre se mesmo e sobre um contexto social.

Vale ressaltar que os elementos que compõem o letramento estatístico podem sofrer modificações quando observados num contexto de trabalho, num contexto pessoal, num contexto público e num contexto de aprendizagem formal segundo Gal (2002).

Nesse sentido, o presente trabalho pretende verificar o desempenho de professoras que lecionam do 1º ao 4º ciclo do Ensino Fundamental numa escola particular do subúrbio de São Paulo. O objetivo do trabalho foi identificar quais os conhecimentos que possuíam e perceber quais níveis de letramento e compreensão possuem sobre o conteúdo de Média, Moda e Mediana para ensinar em sala de aula a seus alunos.

Procedimento Metodológico

Este estudo constou de uma pesquisa qualitativa que foi aplicada com quatro professoras que lecionam do 1º ao 4º do Ensino Fundamental de numa escola particular de São Paulo que chamaremos com nomes fictícios de Vitória, Gabriela, Vanessa e Roberta. A coleta dos dados se desenvolveu num período de quatro meses e foi composta por cinco etapas.

A primeira etapa: realização do Curso de Introdução a Estatística para Professores do 1º ao 4º ano do Ensino Fundamental com aplicação de uma sequência de ensino, composta de dez atividades, distribuída em cinco encontros, que abordavam as medidas de tendência central e suas propriedades. Também trabalhamos com diferentes tipos de representação gráfica e textual. A segunda etapa: elaboração pelas professoras de uma atividade sobre medidas de tendência central que será aplicada em sala de aula. Terceira etapa: análise pelas professoras da atividade elaborada na segunda etapa com base em um roteiro produzido pela pesquisadora. Quarta etapa: destinada à aplicação da atividade em sala de aula pelas professoras e posterior análise dos resultados obtidos confrontando com os resultados esperados elaborado na etapa anterior. Quinta etapa: realização de uma reflexão com o objetivo de discutir e analisar o desenvolvimento e aplicação da atividade, bem como todo o processo de formação.

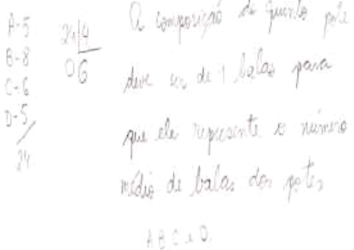
Entretanto, neste trabalho apresentaremos a análise e discussão dos resultados de duas atividades aplicadas na primeira etapa da coleta dos dados que denominamos de Curso de Introdução a Estatística.

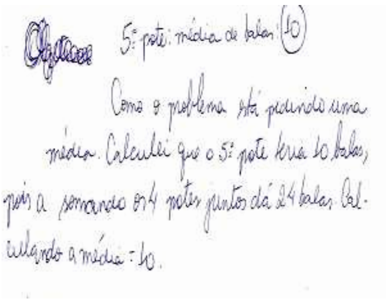
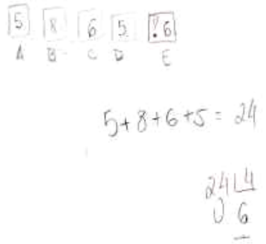
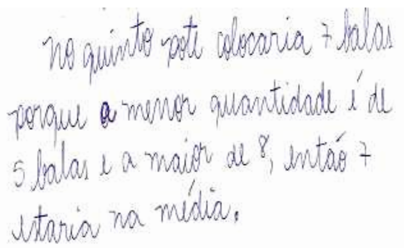
Resultados

As duas atividades que apresentaremos versão sobre conteúdos de Medidas de Tendência Central especificamente a Média, Moda e Mediana. Na primeira atividade analisada visávamos introduzir o conceito de média aritmética e a propriedade da média como pontos de equidade e equilíbrio em uma distribuição, ou seja, pretendíamos que os professores percebessem a média como uma medida de distribuição equitativa, representada pela composição do valor do quinto pote que significa o número médio ou o ponto de equilíbrio na distribuição. **A atividade era a seguinte:**

Tenho quatro potes de balas, o pote A tem 5 balas;o pote B tem 8; o pote C tem 6 e o pote D tem 5. Num quinto pote quero colocar uma quantidade de balas que represente a média dos quatro potes anteriores. Qual a composição do quinto pote para que ele apresente o número médio de balas dos quatro potes A, B, C e D?

As professoras responderam está atividade utilizando as seguintes estratégias de resolução e justificativas para as suas respostas:

Estratégias de solução	Comentários
	A professora Vitória resolveu a atividade por meio do algoritmo, somando a quantidade de balas em cada pote e, em seguida, efetuando a divisão para encontrar o resultado da composição do quinto pote, como pode ser observado na figura 15 abaixo. Quando questionada sobre sua solução respondeu, descrevendo oralmente o que tinha escrito e completou; *"esta atividade envolve raciocínio lógico, adição e subtração. Acredito que se destina para alunos do 4º ao 5º ano, por exigir um raciocínio mais complexo"*.

	A professora Vanessa respondeu que a média no quinto pote seria dez como pode ser observado na figura 16 abaixo. Quando questionada, disse que: *"somei, mas, depois foi que caiu minha ficha, eu visualizei só o oito, como estava pedindo uma média, se eu colocasse a metade que seria seis, mas tem um oito lá. Ai eu coloquei uma média de dez balas no quinto pote. Eu visualizei só a quantidade máxima".* Ressaltamos que esta estratégia não foi prevista nas análises prévias.
	A professora Gabriela fez tanto a representação dos potes como a operação escrevendo o algoritmo, como pode ser observado na figura 17 abaixo. Quando questionada sobre sua resposta disse que: *"Pensei em quatro potes com a quantidade de cada um, e no quinto pote com a quantidade a ser definida. Somei a quantidade dos potes A, B, C e D e dividi por quatro, resultando na média do quinto pote".*
	A professora Roberta, também, estabeleceu uma relação entre as quantidades dos potes. Ela analisou os valores de cada pote, comparando o pote com menos quantidade que foi representado pelo número 5 com o que tinha mais quantidade representada pelo número oito. Quando questionada disse que: *"Observei o menor número que é cinco e o maior que é oito, vi que seis apareceu e o sete não. Então, eu trabalharia os números faltosos entre o menor e o maior. Então a minha média seria o sete e eu iria observar os números que faltaram".* Ressaltamos que essa estratégia não foi prevista nas análises prévias.

No que se refere ao letramento, nós reportamos a Gal (2002) que defende que um dos pré-requisitos para compreender e interpretar as informações estatísticas, é o conhecimento de conceitos e procedimentos estatísticos básicos, conhecimentos e temas matemáticos relacionados.

Em relação às professoras, podemos inferir que apresentaram dificuldades para compreender o significado do quinto pote, pois embora tenham resolvido a atividade encontrando o valor da média do quinto pote, não estabeleceram uma relação dessa atividade com o significado da média. Na maioria das respostas, identificamos que o critério que usam, foi a idéia de somar todos os valores de cada pote e dividir pelo total dos mesmos, não considerando que o valor do quinto pote representa o ponto de equilíbrio da distribuição.

As professoras fazem automaticamente o cálculo da média, mas não refletem sobre seu significado, ou seja, o que esta média realmente representa em uma distribuição. Isso foi evidenciado por exemplo na fala da professora Gabriela quando diz:*"Pensei em quatro potes com a quantidade de cada um, e no quinto pote com a quantidade a ser definida. Somei a quantidade dos potes A, B, C e D e dividi por quatro, resultando na média do quinto pote"*.

Em nenhum momento, percebemos uma análise do que seria a representação do quinto pote, ou seja, o elemento que representa o equilíbrio da distribuição. Ressaltamos que as estratégias utilizadas pelas professoras para resolver a atividade foram previstas em nossas análises prévias com a exceção de duas respostas abaixo apresentadas:

> *Professora Vanessa: Respondeu que a média no quinto pote seria dez e explicou dizendo que "somei, mas depois foi que caiu a minha ficha, eu visualizei só o oito, como está pedindo uma média, se eu colocar a metade que seria seis, mas tem um oito lá, ai eu coloquei uma média de dez balas no quinto pote. Eu visualizei só a quantidade máxima".*
>
> *Professora Roberta: "Observei o menor número que é cinco e o maior que é oito, vi que seis apareceu e o sete não, então eu trabalharia os números faltosos entre o menor e o maior. Então a minha média seria o sete e eu iria observar os números que faltaram".*

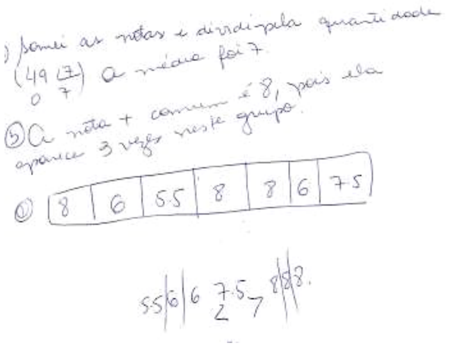
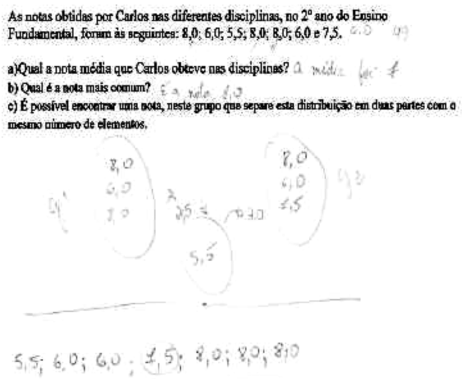
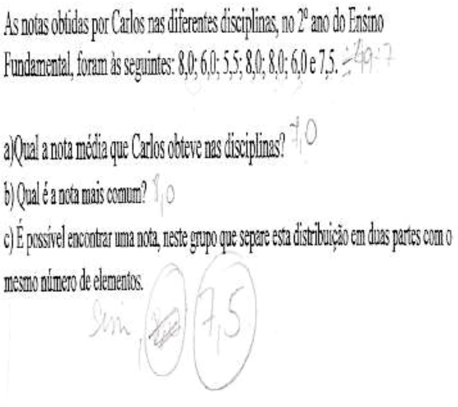
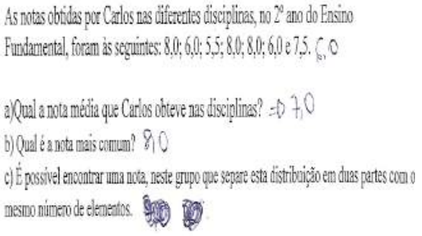
As duas estratégias em nenhum momento se relacionam-se à ideia intuitiva do cálculo da média, podemos observar que as Professoras Vanessa e Roberta consideraram como média um valor mais ou menos aproximado dos valores que estavam indicados nos potes. Quando questionadas sobre suas respostas, disseram que pensaram em uma quantidade que estivesse mais aproximada entre o total que estava nos potes.

Esta foi nossa primeira atividade de intervenção e com ela percebemos indícios de que as professoras em relação ao conteúdo abordado apresentam dificuldades em compreender o conceito de média aritmética e a propriedade trabalhada, que é a média como ponto de equidade e equilíbrio em uma distribuição abordados nessa atividade.

A segunda atividade analisada foi adaptada do trabalho de Boaventura e Fernandes (2004) e visa abordar a média, moda e mediana, a partir de um rol de notas obtidas por um aluno em diferentes disciplinas. **A atividade era a seguinte:**

As notas obtidas por Carlos nas diferentes disciplinas, no 2º ano do Ensino Fundamental, foram as seguintes: 8,0; 6,0; 5,5; 8,0; 8,0; 6,0 e 7,5. a)Qual a nota média que Carlos obteve nas disciplinas? b) Qual é a nota mais comum? c) É possível dividir esse grupo de notas em dois outros grupos com exatamente a mesma quantidade de elementos? Se sim, justifique? Se não, o que é preciso fazer para obter estes dois grupos?

As professoras responderam está atividade utilizando as seguintes estratégias de resolução e justificativas para as suas respostas:

Estratégias de solução	Comentários
) Somei as notas e dividi pela quantidade (49 |7) a média foi 7. 0 7 b) A nota + comum é 8, pois ela aparece 3 vezes neste grupo. c) 8 | 6 | 5,5 | 8 | 8 | 6 | 7,5 5,5|6|6 7,5 7 8|8|8.	A professora Gabriela resolveu o item A pelo algoritmo. No item B respondeu que seria a nota 8 porque aparece 3 vezes, percebemos que também usou a freqüência. Ela ainda completou a sua resposta dizendo que: "*No gráfico, seria o ponto mais alto?*". Nesse momento a professora Vitória confirma a pergunta da colega dizendo que seria. Ai ela reafirma sua pergunta dizendo: *"Ele representa um pico né!"*. No item C ela representou as notas na sequência que estava no enunciado da atividade e depois separou por grupos iguais de notas como pode ser observado no quadro ao lado. Quando questionada responde que: "*pensou no 7,5 porque tem três notas maiores que 7,5 e três notas menores que 7,5. Então ficou dividido em duas partes com o mesmo número de elementos*".
 As notas obtidas por Carlos nas diferentes disciplinas, no 2º ano do Ensino Fundamental, foram às seguintes: 8,0; 6,0; 5,5; 8,0; 8,0; 6,0 e 7,5. a)Qual a nota média que Carlos obteve nas disciplinas? a média foi 7 b) Qual é a nota mais comum? É a nota 8,0 c) É possível encontrar uma nota, neste grupo que separe esta distribuição em duas partes com o mesmo número de elementos. 8,0 6,0 7,0 — 8,0 6,0 5,5 — 5,5 5,5; 6,0; 6,0; 7,5; 8,0; 8,0; 8,0	A professora Vitória resolveu a atividade calculando a média pelo somatório das notas e dividiu pelo total desta para encontrar a resposta 7. Apesar de ter respondido apenas o resultado como pode ser observado no quadro ao lado, mas no momento da exposição disse oralmente como tinha resolvido. No item B, respondeu que foi a nota que mais apareceu. No item C a professora Vitória respondeu separando a distribuição em dois grupos mais ou menos equilibrados em distribuição de valores, como pode ser observado na figura 26 abaixo. Segundo ela o "*5,5 foi o que o mais baixo que dividiu o grupo*. se o número é ímpar como é que vai dividir a quantidade certinha.
 As notas obtidas por Carlos nas diferentes disciplinas, no 2º ano do Ensino Fundamental, foram às seguintes: 8,0; 6,0; 5,5; 8,0; 8,0; 6,0 e 7,5. = 49 : 7 a)Qual a nota média que Carlos obteve nas disciplinas? 7,0 b) Qual é a nota mais comum? 8,0 c) É possível encontrar uma nota, neste grupo que separe esta distribuição em duas partes com o mesmo número de elementos. Sim ~~6~~ 7,5	A professora Vanessa resolveu a atividade calculando a média pelo do somatório das notas e dividir pelo total desta para encontrar a resposta 7. No momento da exposição disse oralmente como tinha resolvido. No item B, respondeu 8 justificando oralmente que foi a nota que mais apareceu. No item C, Vanessa respondeu 7,5 como pode ser observado na figura ao lado e justificou a sua resposta oralmente dizendo que: "*Separou as notas do menor para o maior e colocou como resposta 6, mas escreveu no protocolo 7,5. Ainda completou dizendo que em um grupo ficaram todas as notas 8 e, em outro grupo, as notas 5,5. 6,0 e 7,5 ficando como nota que separa o 6*". Essa foi a justificativa oral, mas no escrito colocou a resposta correta.
 As notas obtidas por Carlos nas diferentes disciplinas, no 2º ano do Ensino Fundamental, foram às seguintes: 8,0; 6,0; 5,5; 8,0; 8,0; 6,0 e 7,5. 6,0 a)Qual a nota média que Carlos obteve nas disciplinas? → 7,0 b) Qual é a nota mais comum? 8,0 c) É possível encontrar uma nota, neste grupo que separe esta distribuição em duas partes com o mesmo número de elementos.	A professora Roberta escreveu apenas a resposta do item A como pode ser observado na figura ao lado, mas explicou oralmente que resolveu efetuando a operação na calculadora para encontrar a média. No item B, respondeu que era 8 porque era a nota que apareceu mais. No item C , Roberta disse que não sabia responder e completou dizendo que: "*não entendi o problema, por mais que leia não estou entendendo o que o problema esta pedindo*".

Nesta atividade trabalhamos com o conceito de moda e mediana, além de abordar a média como ponto de equilíbrio da distribuição que foi a primeira propriedade trabalhada na intervenção.

Em relação ao item A da atividade que abordava a média, identificamos que todas as professoras responderam corretamente o valor da média utilizando como estratégia o algoritmo como pode ser observado no quadro acima. Entretanto, quando questionadas sobre o que essa média representa, foi unânime a resposta, que era o ponto de equilíbrio e representava a equidade da distribuição. Nesse momento, foi abordado que o valor da média nem sempre corresponde a um dos valores da distribuição. Este ponto ainda não tínhamos abordado nas atividades. Neste momento percebemos que a reflexão sobre o significado da média em uma distribuição está mais presente, tanto nas explicações da representação desta média numa distribuição como nas relações que fazem com as outras atividades, sobretudo as do pote. Isso foi observado na discussão desta atividade como nas discussões anteriores.

Em relação ao item B, todas as professoras responderam corretamente qual a nota mais comum que seria oito. Como procuramos introduzir o conceito de moda de forma intuitiva, imaginávamos que pelo tipo de pergunta elaborada na atividade, conduziria à resposta correta. Mas não disseram o que essa nota significava e isso foi observado pela da discussão da atividade e dos questionamentos. Quando perguntamos o que representa a nota oito, elas disseram que era a nota que mais aparecia.

Nesse momento, começamos a discussão abordando o tema moda, exemplificando com uma situação em que determinados objetos como roupas, sapatos, maquiagem, ente outros, passam a ser utilizados com mais frequência pelas pessoas do dia para a noite que chamamos de evento. Nesse momento, elas responderam que é uma tendência, uma mania e está na moda.

Com isso aproveitamos para perguntar, então, o que significa a nota oito? Responderam que era a nota que estava em evidência, na moda a que mais aparece. Assim, começamos a explicar que moda é uma medida de tendência central e com isso discutimos a definição de moda e os diferentes casos em que esta aparece ou não em uma distribuição, ou seja, abordamos os conceitos bimodal, muitimodal e amodal.

No Item C, apenas a professora Gabriela conseguiu responder corretamente à atividade, dando a seguinte resposta:

> *Professora Gabriela: “pensou no 7,5 por que tem três notas maiores que 7,5 e três notas menores que 7,5. Então, ficou dividido em duas partes com o mesmo número de elementos”.*

As outras professoras apresentaram dificuldades incluindo, a professora Roberta que não consegui responder. Em seus argumentos, ela observa que:

> *Professora Roberta: não entendi o problema, por mais que leia, não estou entendendo o que o problema está pedindo”.*

Ressaltamos que esta professora em um dos encontros relatou que tem dificuldade com a Matemática, que não gosta e não consegue entender.

Estas respostas reforçam os resultados apontados pela pesquisa desenvolvida por Boaventura e Fernandes, (2009) que conclui que no conceito de mediana, os alunos apresentaram mais dificuldade.

Ainda sobre a afirmação de Cobo e Batanero (2000) corrobora com os autores acima discutindo que a definição de mediana é excessivamente difícil para os alunos porque este conceito está relacionado com o raciocínio proporcional e as ideias de ordem e distribuição que, com freqüência, causam dificuldade aos alunos. Os autores citados afirmam que não é simples dar uma definição clara e concisa de mediana que não leve à confusão. Pois,

> Os alunos devem em primeiro lugar compreender que como qualquer resumo estatístico, a mediana se refere a todo o conjunto de dados e não a nenhum dos indivíduos em particular” (COBO e BATANERO, 2000. p.86).

Mas para, compreender isso requer um olhar pautado em uma perspectiva estatística, que consiste em entender as características do coletivo e não do individual. Compreender que o coletivo tem uma tendência ao se referir a um de seus resumos estatísticos, o que implica que o coletivo é uma coleção de indivíduos idênticos que varia com respeito à propriedade de interesses. Isso implica também, a compreensão da variabilidade dos dados com respeito a seus valores (COBO e BATANERO, 2000. p.86).

Considerações Finais

Os resultados mostraram que as professoras apresentaram dificuldade na compreensão dos conceitos de média, moda e mediana e de suas propriedades apresentada na sequência o que demonstra pouca familiaridade e compreensão deste conteúdo pelas professoras. Contudo, Não podemos inferir que as professoras não atingiram a compreensão do conhecimento pedagógico e didático do conteúdo abordado nessa intervenção visto que estamos apenas refletindo sobre as soluções e estratégias de duas atividades desenvolvidas na primeira etapa da coleta de dados na qual os conceitos de Média, Moda e Mediana foram discutidos. Em relação à média, podemos inferir que as professoras avançaram na compreensão e discussão desse conceito, ou seja, no que e a média representa nem uma distribuição, mas ainda não podemos intuir conclusões mais elaboradas sem antes aplicar todas as etapas previstas na pesquisa.

Temos observado um crescimento significativo nas discussões realizadas nas outras atividades no que se refere à média, como aos argumentos utilizados para justificar suas respostas.

REFERÊNCIAS

BATANERO, C. Significado y comprensión de las medidas de posición central. UNO, 25, p. 41-58, 2000.

BATANERO, C.; COBO, B.; L mediana en la educación secundaria obligatoria: un concepto sencillo. **UNO,** 23, P.85-96,2000.

BOAVENTURA, G. M.; FERNANDES, J. A. Dificuldades de alunos do 12º ano nas medidas de tendência central: o contributo dos Manuais Escolares. In: **Revista Portuguesa de educação**. Braga: Portugal. p. 103-126, 2004. Disponível em: < http://hdl.handle.net/1822/4150>. Acesso em: 29 maio 2009.

BRASIL, Ministério da Educação e Desporto - Secretaria do Ensino Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** Brasília: MEC/SEF, 1997.

COBO, B.; BATANERO, C. La mediana .Un concepto sencillo en la enseñanza secundaria. **UNO***,* 23, p. 85-96,2000.

GAL, I. Adult's Statistical Literacy: Meanings, Components, Responsabilities. In: **International Statistical Review**, v. 70, n. 1, p. 1-25, 2002.

LOPES, C. A. E. Literacia estatística e o INAF 2002. In: FONSECA, M. C. F. R. (Org). **Letramento no Brasil: habilidades Matemáticas.** São Paulo: Global, p. 187-197, 2004.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: DA INVESTIGAÇÃO À PRÁTICA

Jorge Cruz
E B I Santiago Maior - Beja
jorgeascruz@gmail.com

Resumo

A Resolução de Problemas é uma das três capacidades transversais propostas no Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte *et al*, 2007). Este artigo faz um périplo pelas diversas fases (e ganhos) da investigação em resolução de problemas. Apresenta alguns aspectos teóricos, numa perspectiva de ampliação do conhecimento profissional do docente sobre o tema, tendo como referência principal Lesh e Zawojewski (2007). As pontes para ligar investigação à prática serão lançadas através da caracterização do processo de resolução de problemas e dos perfis adequados para um aluno ser bom solucionador de problemas e para um professor ser bom facilitador desse mesmo processo de resolução de problemas.

Palavras-chave: Resolução de problemas, formulação de problemas.

1. Introdução

A investigação na resolução de problemas desenvolveu-se bastante desde as descrições das heurísticas para resolver problemas feitas por Polya (1957).

Schoenfeld (1992) faz uma revisão de literatura e conclui que as tentativas para ensinar estratégias para resolver problemas não foram bem sucedidas. Considera que se podem obter melhores resultados através de um ensino de estratégias mais específicas, (associadas a classes de problemas). Além disso, defende, é necessário investigar sobre o ensino de estratégias metacognitivas e eliminar as crenças contraproducentes que os alunos transportam.

O tema (ou capacidade) Resolução de Problemas tem presença central nos currículos escolares (de que Pehkonen (2001) e Törner, Schoenfeld. e Reiss (2007) dão testemunho abundante) a ponto de poder afirmar-se que o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas vai para além do interesse central que tem na disciplina de Matemática e afigura-se como uma demanda social, um atributo que o cidadão deve ter.

2. Os resultados (ou ganhos) da investigação em Resolução de Problemas

2.1. Relativos a variáveis e grau de dificuldade dos problemas

Uma primeira abordagem feita pela investigação ao tema da resolução de problemas centra-se em aspectos de conteúdo e de contexto; de estrutura; de sintaxe e de comportamento heurístico. Os problemas podem pois ser classificados. Supõe-se que dentro de cada grupo de problemas há algum aspecto de onde se pode extrair generalidade, transferível a outros problemas do mesmo grupo. A descoberta de características comuns pode ajudar à resolução de um problema, Polya dizia que conhecer um problema semelhante pode ajudar (e define este procedimento como uma heurística). Não obstante, autores defendem que esta é uma perspectiva muito redutora pois nem só as variáveis externas são importantes. Factores internos, como a maneira como cada um vê o problema são decisivos e requerem investigação. Esta visão tem um forte cariz positivista que consideram os solucionadores como processadores de informação.

2.2. Relativos a investigação com alunos com diferentes níveis de prestação.

Destas investigações ressalta que os "bons" sabem mais e de maneira diferente (de maneira relacionada e com esquemas ricos); tendem a focalizar nos aspectos estruturais enquanto que os "menos bons" se centram em aspectos mais superficiais.

Diversos autores concordam que os "bons" solucionadores o são, não apenas porque sabem mais matemática, mas sobretudo porque a sabem de forma diferente. Os estudantes mais dotados têm ideias, estratégias e representações organizadas de forma sofisticada (em rede); tendem a compreender mais rapidamente as estruturas matemáticas subjacentes aos problemas (criam uma imagem do problema).

Partindo destes pressupostos faz sentido defender o ensino da r. p. emerso no conteúdo e no contexto de situações em vez de um processo ou destreza isolados.

Segundo esta linha de investigação, o trabalho a desenvolver com "bons" solucionadores de problemas (o qual não se baseará em tarefas típicas de livros de texto, pois não é de supor que estes alunos se comportem de maneira tradicional), deverá ser centrado em abordagens holísticas de conteúdo, estratégias de r. p., pensamento complexo e afectos e dará informação privilegiada sobre o perfil necessário para resolver problemas.

2.3. Relativos ao ensino de estratégias de resolução de problemas

Desde o trabalho de Polya, que as heurísticas são consideradas importantes, embora, por vezes, a investigação estabeleça poucas ligações entre o seu ensino e o melhoramento do desempenho em r. p.

Por exemplo, ensinar "desenhar um esquema" supõe que o solucionador saberia que esquemas desenhar, em que circunstâncias e em que tipo de problemas… Schoenfeld (1992) faz notar que a lista de heurísticas proposta por Polya em *How to solve it* é descritiva em vez de prescritiva. Por outras palavras, Schoenfeld considera as heurísticas demasiado gerais. Listas mais precisas, acompanhadas de ensino apropriado (contemplando aspectos metacognitivos e crenças – os quais precisam de mais investigação).

Há, contudo, um dilema: listas curtas de estratégias são demasiado generalistas, enquanto que listas mais detalhadas e longas poderão constituir por si só o foco do esforço de compreensão.

Alguns autores defendem que se deveriam fazer detalhadas listas prescritivas sobre o que os solucionadores experientes fazem para ensinar aos inexperientes. Consideram também que a lista de heurísticas de Polya não deve ser encarada como um conjunto de sugestões para quando se está bloqueado, mas antes para ajudar a pensar sobre experiências anteriores de r.p. Os alunos deverão desenvolver protótipos flexíveis de experiências utilizáveis no futuro.

O ensino, contextualizado, de heurísticas com poder transformador dos problemas é fundamental para permitir desbloqueio.

2.4. Relativos à metacognição

Metacognição, definida originalmente por Flavell (1976): refere-se ao conhecimento pessoal dos (próprios) processos e produtos cognitivos, à supervisão activa, orquestração e regulação desses processos, usualmente ao serviço de alguma meta ou objectivo.

Schoenfeld (1992) descreve metacognição como auto-regulação ou monitorização e controlo durante a actividade cognitiva e r. p.

Diversos autores contribuíram com novos matizes sobre o termo. Sem particularizar, e fazendo uso de um grande poder de síntese, podemos acrescentar que, metacognição, dependendo dos autores, pode contemplar: conhecimento estratégico, conhecimento acerca das tarefas, autoconhecimento, autoavaliação, auto-regulação, …

Não obstante a dificuldade de separação das variáveis que podem conduzir à melhoria da performance em r.p. ser uma realidade, diversos estudos têm mostrado relações entre a capacidade metacognitiva e a prestação em r.p. Experiências de ensino onde são favorecidos questionamentos de carácter metacognitivo, onde são desenhadas tarefas que obrigam à auto consciência (relativamente a diversos aspectos presentes na r. p.) mostram esta relação. Os resultados da investigação dizem que o detalhe de comportamentos metacognitivos específicos é sempre produtivo, assim como o treino dos estudantes para colocarem a si próprios questões específicas (que ajudem a detalhar o que está a ser feito ou pensado). O trabalho com bons solucionadores de problemas, frequentemente usado, deu resultados que permitiram, além de evidenciar a relação metacognição *vs* desempenho em r.p., caracterizar melhor os modos de comportamento e o perfil de um bom solucionador de problemas.

2.5. Relativos aos hábitos da mente

Cuoco, Goldenberg e Mark (1996) descrevem hábitos mentais como hábitos que permitem aos estudantes desenvolver um repertório de heurísticas gerais e de abordagens que podem ser aplicadas em diferentes situações. De um modo geral pretende-se dotar os estudantes de formas de pensamento semelhantes às dos matemáticos.

Esta linha de investigação, embora tenha dado resultados que permitem estabelecer relação positiva entre hábitos da mente e desempenho em r.p., sofreu algumas críticas, particularmente a dois níveis:

- pouca clarificação das diferenças entre os hábitos da mente e heurísticas;

- serão as formas de pensamento dos matemáticos espectáveis em estudantes?

2.6. Relativos a crenças (afectos, emoções, …)

A investigação em crenças ganhou grande importância nos anos 1980 e 90. Os alunos podem aprender a usar heurísticas, podem aprender a regular, monitorar e a usar mecanismos de controlo os quais são influenciados (positivamente ou negativamente) pelas crenças, atitudes, sentimentos ou temperamentos.

Schoenfeld (1992), (baseado em estudos seus e de outros) conclui que as crenças dos estudantes são, em grande parte, provenientes da sua experiência na sala de aula e que moldam o seu comportamento com consequências poderosas (e frequentemente negativas).

Diversa literatura refere o carácter estável (embora não imutável) das crenças.

Sugere-se que a prática docente e os currículos mudem. Actividades direccionadas (problemas com mais do que uma solução razoável, por exemplo) devem se usadas para combater uma das mais conhecidas crenças (unicidade de resposta).

Alguns estudos defendem, não o ensino explícito de estratégias metacognitivas, mas antes a discussão dos processos utilizados nas resoluções pelos próprios alunos. Desta forma os alunos podem desenvolver uma personalidade dinâmica como solucionadores de problemas. Outros estudos referem actividades de r. p. implementadas em grupo como forma de promover a discussão (durante e após a r. p.) para favorecer o desenvolvimento de crenças produtivas.

3. O questionamento na sala de aula.

O questionamento na sala de aula, feito pelo professor (como motor da comunicação que se estabelece na aula) tem evidentes implicações ao nível da aprendizagem da matemática (da qual a r.p. é parte indissociável). Diversos autores têm destacado o papel que as questões abertas, problematizadoras, desempenham. Muir (2009) realizou um estudo, para o qual usou as seguintes categorias para analisar as questões colocadas pelos professores nas aulas:

Abertas 1 (que requerem explicação, podem começar com "*como?*" ou "*porquê?*"), abertas 2 (que requerem justificação, generalização ou procura de alternativas, podem começar com "*e se?*"), fechadas (para as quais há uma resposta bem determinada e que apelam fundamentalmente a conhecimento adquirido que é relembrado), não matemáticas (questões de âmbito geral, que podem auxiliar a condução do questionamento e apelar à participação de mais alunos, por exemplo), aprofundamento (várias questões dirigidas a um mesmo aluno no sentido de obter maior reflexão por parte do mesmo) e incorporação (quando o professor se serve de uma resposta de um aluno para formular a pergunta seguinte). A investigação citada, revela como um resultado, a relação entre o uso de questões de aprofundamento e abertas e a qualidade das explicações dadas pelos alunos.

Um erro detectado por diversos investigadores (em particular Smith, 2000), reside em "queimar" etapas, isto é, quando o professor salta e passa à explicação da solução do problema ou opta por um questionamento muito dirigido, não genuíno, no qual as questões apenas se destinam a construir, de forma imediata, a resposta pretendida. Por outras palavras, não é dado suficiente tempo ao trabalho dos alunos e/ou à discussão.

4. Características do aluno e papel do professor

Adoptando os resultados da teorização feita por Schoenfeld, para se ser bom solucionador de problemas é preciso recursos (matemáticos), heurísticas, controlo e crenças (favoráveis). Para chegar a este perfil, o aluno terá que beneficiar de aulas onde o ensino da matemática seja, preferencialmente, uma via r.p. (em vez de ser um ensino para resolver problemas ou sobre resolução de problemas). Não obstante, há que ter tarefas bem desenhadas (explorações, investigações, problemas ou projectos) que levem os alunos ao questionamento, à discussão, ao estabelecimento de conjecturas e sua testagem. Nesta aula não há "censura" às participações. O professor deverá ter a sensibilidade de conduzir um questionamento problematizador (logo, aberto) e de ser capaz de devolver questões aos alunos ou de incorporá-las no seu questionamento, estabelecendo assim uma comunicação matemática onde o aperfeiçoamento de significados conduza a sínteses esclarecedoras. Não poderá o professor "matar" a tarefa, apressando a chegada à solução, deverá, em vez de desvendar, sugerir, em vez de responder directamente às solicitações dos alunos, redireccionar estes para a interpretação de aspectos ainda não suficientemente aprofundados e que possibilitem uma aproximação à solução. Deverá o professor levar os seus alunos à descoberta de ferramentas potentes, ou seja, com possibilidade de serem transferidas para outras situações: nomeadamente conhecimento matemático (regras, algoritmos, teoremas, diversas formas de representação/modelação de situações, …) e heurísticas (conhecimento estratégico sobre as tarefas matemáticas que os alunos podem aplicar em situações similares). Dentro das heurísticas, cabe importante papel àquelas que têm papel transformador da estrutura dos problemas e que (provavelmente devido a esta característica) dificilmente surgem nas produções dos alunos. São exemplo deste tipo de heurísticas, considerar um problema equivalente ou argumentar por contradição (com vista à obtenção de um absurdo). Este tipo de heurísticas, mais do que outras, requer uma capacidade de abstrair a estrutura Matemática do problema e a possibilidade de transferir esse problema para outro contexto, mais comportável do ponto de vista matemático, isto é, mais fácil de ser resolvido. Com tarefas bem desenhadas e com uma condução e organização de aula compatíveis, os alunos poderão experienciar o valor de tais ferramentas e melhorar o seu perfil como solucionadores de problemas.

Referências bibliográficas

Cuoco, A., Goldenberg, E. P., e Mark, J. (1996). Habits of mind: An organization principle for mathematics curricula. Journal of Mathematical Behaviour, 15(4), pp. 375-402.

Lesh, R. e Zawojewski, J. (2007): Problem solving and modeling. Em Lester, F. (Ed) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. NCTM.

Muir, T. (2009). Investigating teacher's use of questions in the mathematical classroom. In Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. e Sakonidis, H (Eds). Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4, pp 161-168. Tessalónica, Grécia: PME.

Pehkonen, E. (ed.) (2001): *Problem Solving Around the World*. Proceedings of the Topic Study Group 11 (Problem Solving in Mathematics Education) at the ICME-9 meeting August 2000 in Japan. Turku: Faculty of Education, Department of Teacher Education.

Polya, G. (1957). *How to solve it* (2ª ed). Princeton, NJ: Princeton University Press.

Ponte, J. *et al* (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Ministério da Educação/DGIDC.

Schoenfeld, A. H. (1992): Learning to think mathematically: Problem Solving, Metacognition and Sense-Making in Mathematics. Em Grouws, D. A. (ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* New York. MacMillan, pp. 334-370.

Smith, M. (2000). *A comparison of the the Types of Mathematical Tasks and How They Were Completed during Eighth-Grade Mathematics Instruction in Germany, japan end the United States*. Ph.D. University of Delaware.

Törner, G., Schoenfeld, A. e Reiss, K. (2007). Problem solving around the world: summing up the state of the art. *ZDM, Mathematics Education,* 39:353.

A EXPLICAÇÃO DE IDEIAS MATEMÁTICAS: AS PRÁTICAS E A REFLEXÃO SOBRE A PRÁTICA DE UMA FUTURA PROFESSORA DO 2.º CICLO

Kátia Maria de Medeiros
Universidade Estadual da Paraíba-Brasil
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
katiamedeirosuepb@gmail.com

Resumo

Este artigo analisa as práticas e a reflexão sobre a prática de explicação na aula de Matemática de uma futura professora, na fase final da sua formação inicial. O caso aqui apresentado baseia-se em oito entrevistas, uma interpretação de situações de ensino e em registos de observações de quatro aulas. O artigo analisa os motivos da escolha profissional da futura professora bem como as suas práticas e reflexão sobre a prática de explicação nas aulas de Matemática, nomeadamente a explicação dela e dos alunos.

A futura professora desenvolve explicações instrucionais e disciplinares. Neste artigo apresento explicações instrucionais. As explicações dos alunos são procedimentais ou descrevem acções sobre objectos matemáticos experiencialmente reais. A explicação dos alunos, agora nos grupos, no momento final da primeira aula, foi utilizada por Luzia como estratégia na condução da aula, consoante referiu em sua reflexão.

O caso revela a importância que atribui à comunicação nas aulas, apresenta as suas práticas de explicação (dela e dos alunos), bem como a sua reflexão sobre a prática. Nesta prática, identificamos o modo como desenvolve diferentes tipos de explicação e propicia condições para que seus alunos desenvolvam explicações, bem como utiliza a explicação dos alunos como estratégia de condução em uma de suas aulas.

Palavras-chave: Formação Inicial de Professores de Matemática; Explicação; Práticas; Reflexão.

Introdução

A comunicação professor-aluno e entre os alunos na sala de aula nem sempre propicia uma aprendizagem significativa. O excesso de cálculos mecânicos, a ênfase em procedimentos e a própria linguagem, em muitos casos, restringem o alcance da comunicação oral (Lampert & Cobb, 2003). Este artigo debruça-se sobre a comunicação na formação inicial do professor de Matemática, mais especificamente, práticas de explicação (Bishop & Goffree, 1986; Leinhardt, 1993; 2001; Charalambous, 2009; Yackel & Cobb, 1996; Levenson et al., 2009) e a reflexão sobre a prática (Korthagen et al. 2001; Oliveira & Serrazina, 2002) de uma futura professora de Matemática.

Nas últimas décadas a reflexão tem sido um conceito fulcral na formação de professores como sublinham diversos autores (Korthagen et al. 2001).

Neste artigo pretendo analisar a prática de explicação e a reflexão sobre a prática de uma futura professora de Matemática do 2.º ciclo, Luzia.

A comunicação e o futuro a professor de Matemática

Comunicação na sala de aula

A comunicação matemática tem vindo a ser apontada como elemento importante na actividade da sala de aula (e.g., Bishop & Goffree, 1986; Sfard, 2002; Yackel & Cobb, 1996). Pode ser olhada como um objectivo curricular, ou seja, um conjunto de capacidades a desenvolver pelo aluno (NCTM, 1991; PCNEM, 2002; Ponte et al., 2007) ou como um elemento do processo de ensino-aprendizagem, ou seja, um conjunto de aspectos que marcam o modo como se trabalha na sala de aula (Bishop & Goffree, 1986; Lampert & Cobb, 2003; ME, 2007; NCTM, 2007; Sfard, 2002; Yackel & Cobb, 1996). A análise da comunicação na sala de aula permite identificar aspectos fundamentais do ensino-aprendizagem, como o papel do professor e do aluno, as concepções de conhecimento de ambos os actores (Brousseau, 1996), as normas sociomatemáticas (Yackel & Cobb, 1996) e o contrato didáctico (Brousseau, 1996; Medeiros, 2001).

Explicação

Uma vertente importante da comunicação respeita à explicação de ideias matemáticas. Esta explicação pode ser realizada pelo professor (Bishop & Goffree, 1986; Charalambous, 2009; Leinhardt, 2001) ou pelo aluno (Yackel & Cobb, 1996; Leinhardt, 2001; Levenson et al., 2009). De acordo com Bishop e Goffree, frequentemente, o futuro a professor de Matemática vê *explicar* como equivalente a *dizer*. No entanto, para estes autores, explicar é mais que isso – é um processo sem fim de representar as conexões, as relações entre a ideia que está sendo explicada e outras ideias matemáticas. Para estabelecer essas conexões e melhor se comunicar com os alunos, o futuro a professor pode utilizar metáforas e analogias, pois estes recursos de linguagem, ao surgirem na sua explicação, podem contribuir para que os alunos compreendam melhor os conceitos e procedimentos. As explicações, como sublinha

Leinhardt (2001), são frequentemente definidas como respostas à pergunta “por que” em um conteúdo de ensino. A autora considera as explicações de modo mais amplo, isto é, apresenta uma definição ou uma definição aproximada e depois distingue as explicações instrucionais de três outros tipos maiores de explicações.

As explicações, consoante sublinha Leinhardt (2001), são definidas como resposta à pergunta “por que” em um conteúdo de ensino. As questões para as quais são desenvolvidas uma explicação, de acordo com a autora, podem ser implícitas ou explícitas. Considera as explicações de modo mais alargado e apresenta quatro tipos de explicações: (i) *explicações comuns*; (ii) *auto-explicações*; (iii) *explicações disciplinares* e (iv) *explicações instrucionais.*

As *explicações comuns*, segundo a autora, são desenvolvidas em resposta a uma questões directas. Estas questões geralmente são simples e, às vezes, profundas. As questões para estas explicações estão fundamentadas numa confiança entre os interlocutores, isto é, a questão é dirigida a alguém que poderá responder.

As *auto-explicações* assinala a autora, como o próprio nome sugere, são desenvolvidas para a própria pessoa e não para os outros. Estas explicações são utilizadas para a aprendizagem de quem as desenvolve. Elas podem contribuir para a melhoria da memória.

O terceiro tipo de explicações apresentado pela autora são as *explicações disciplinares*. Estas explicações, como o seu próprio nome indica, surgem de questões inseridas numa disciplina

De acordo com Leinhardt (2001) de modo distinto ao que ocorre com as comuns, auto-explicações e disciplinares, as *explicações instrucionais* são desenvolvidas para ensinar explicitamente. Para a autora, estas explicações são utilizadas na comunicação de alguma parte de um conteúdo de ensino a outros: os alunos. Além disso, as explicações instrucionais podem ser desenvolvidas no livro-texto, num computador, por um professor ou por um aluno, por grupos de alunos trabalhando juntos e, além disso, podem usadas como forma de avaliação. Estas explicações também podem ser construídas através de um discurso coerente, em torno de tarefas realizadas pela classe-inteira e pelo professor quando trabalham juntos. As explicações instrucionais são “acções pedagógicas” que, como sublinha Leinhardt (2001), são desenvolvidas em resposta a questões explícitas ou implícitas, colocadas pelos alunos ou pelos professores.

O *modelo de explicações instrucionais.* Leinhardt (2001) apresenta um modelo de explicações instrucionais. Trata-se de um modelo genérico, isto é, que pode ser aplicado a explicações em qualquer disciplina. No entanto, o desenvolvimento e o exemplo é baseado no conteúdo de ensino. O modelo das explicações instrucionais pode ser pensado como um sistema de objectivos interrelacionados (mostrados nos hexágonos da Figura 1), apoiando suas acções (mostrado nos rectângulos) e o conhecimento para encontrar o objectivo de modo bem sucedido (mostrado pela rede de ícones). Em geral, os objectivos são implícitos e não visíveis a um observador, mas eles podem ser inferidos pela interpretação de acções explícitas ou através de entrevistas com os professores e alunos sobre intenções e justificações a respeito do ensino e aprendizagem (Leinhardt, 1993).

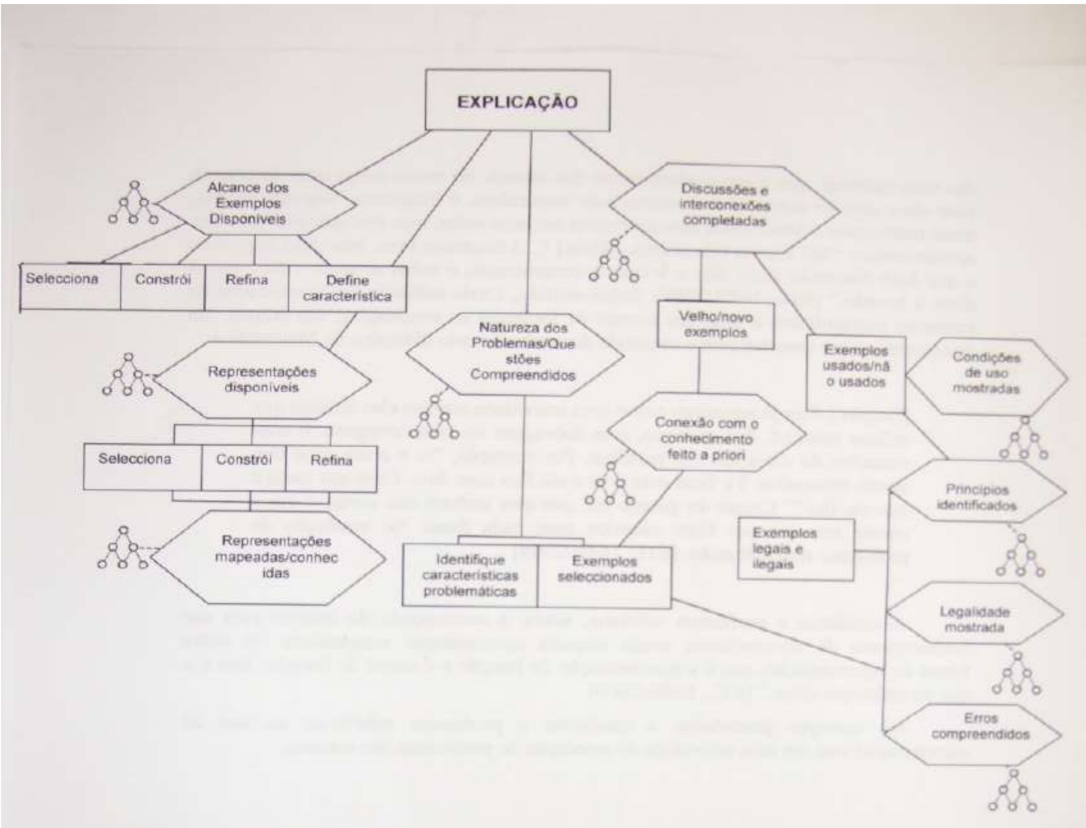


Figura 1: Modelo das Explicações Instrucionais (Leinhardt, 2001)

Numa perspectiva interaccionista da sala de aula de Matemática, o aluno também realiza explicações. Segundo Yackel e Cobb (1996) a explicação dos alunos pode ter uma base social em vez de matemática. Com o aumento da participação dos alunos nas aulas de Matemática, de carácter investigativo, leva a diferenciar vários tipos de raciocínio matemático. Eles podem distinguir, por exemplo, entre as explicações que descrevem procedimentos e as que descrevem acções com objectos matemáticos. Esses autores apresentam três aspectos da compreensão dos alunos sobre a explicação. O primeiro é *as explicações que descrevem procedimentos*, o segundo *explicações como descrições de acções sobre objectos matemáticos experiencialmente reais* e o terceiro, *explicações como objecto de reflexões.*

A reflexão sobre a prática

Segundo Oliveira e Serrazina (2002) o conceito de prática reflexiva constitui-se num modo através do qual as práticas lectivas dos professores podem ser por eles interrogadas. A reflexão, para as autoras, fornece oportunidades para voltar atrás e rever acontecimentos e práticas. A expressão 'prática reflexiva' surge muitas vezes associada à investigação sobre as práticas.

Trata-se, de acordo com Ponte (2002), de dois conceitos parcialmente sobrepostos. Para o autor, para fazer investigação sobre a prática é necessário ser reflexivo. No entanto, não é suficiente ser reflexivo para se fazer investigação.

Para Oliveira e Serrazina (2002) o conceito de prática reflexiva possibilita aos professores ter poder e oportunidades para o seu desenvolvimento profissional. Segundo as autoras, movimentos de reflexão e de desenvolvimento do pensamento sobre as práticas, têm sido motivados pelo facto de muitos professores, sentirem-se insatisfeitos com a sua formação para a profissão docente, uma vez que esta, muitas vezes, não contempla determinados aspectos da prática lectiva.

As práticas de explicação e a reflexão sobre a prática de Luzia

O contexto

Este artigo constitui parte do conteúdo de uma investigação mais ampla, cujo objectivo é estudar a comunicação nas aulas de Matemática do futuro professor ao longo da fase final da sua formação inicial. Trata-se de dois estudos de caso das futuras professoras Júlia e Luzia.

Luzia, a futura professora cujo caso é abordado neste texto, tem 25 anos. O seu interesse pelo ensino da Matemática ocorreu quando estava a frequentar a Licenciatura em Engenharia Electrotécnica. No decorrer desta Licenciatura, constatou que não sentia grande interesse pelo curso, ao contrário dos outros colegas, e, ao dar umas explicações aos sobrinhos de seu namorado, apercebeu-se que a docência da Matemática podia ser uma actividade com a qual se identificava. Decidiu mudar de curso.

As explicações nas aulas e a reflexão

O episódio das pavimentações

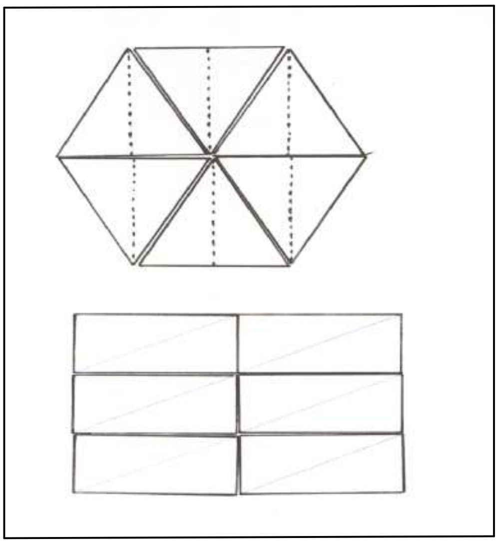


Figura 2: Pavimentação usada na segunda aula de Luzia

As questões colocadas por Luzia, na primeira parte deste episódio, vão propiciando as condições, para que emerja, nestas interacções verbais, através de explicações e respostas dos alunos, a condição necessária para a pavimentação. Na primeira parte destas interacções verbais, contidas no episódio precedente, os alunos apenas respondem às questões da candidata a professora, referentes ao tipo de figuras usadas na pavimentação e sobre a impossibilidade de pavimentar com lacunas ou superposições entre as figuras.

Na segunda parte das interacções verbais, há mudanças subtis, uma vez que, percebemos que as questões de Luzia propiciam a emergência da palavra ângulo, proferida pelo aluno A6. De seguida, após algumas respostas e explicações pouco desenvolvidas dos alunos, Luzia desenvolve uma *explicação instrucional* na qual a questão implícita é qual o principal requisito para se formar pavimentações com determinadas figuras e explica a condição necessária para a pavimentação ser possível. A candidata a professora, em sua explicação, fala em "juntar" e "soma dos ângulos", induzindo, com estas palavras, os alunos a apresentarem a condição necessária para a pavimentação. Na explicação de Luzia esta condição de existência foi conectada a representações de pavimentações possíveis e impossíveis, como assinala:

> Inicio esta actividade projectando algumas pavimentações feitas por mim e vou perguntando aos alunos se a tinham feito. Para começar mostro apenas algumas pavimentações que sejam possíveis de formar e depois passo para as que não são possíveis de formar, por exemplo:

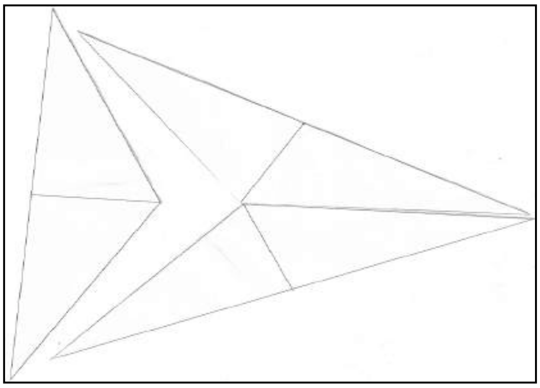


Figura 3: Pavimentação referida na reflexão escrita sobre a segunda aula de Luzia

> Depois fui perguntando porque não dava para formar esta pavimentação e o que é que era necessário para que fosse possível a pavimentação. Foi então que o Jonas disse: "É preciso que o ângulo da figura seja igual ao ângulo onde queremos pôr." Fiquei muito contente por ele ter percebido e parti daí, pedi-lhe que explicasse aos colegas, mas a sua explicação não foi evidente. [REA2L[1], 20/02/2009]

A explicação dos alunos

Episódio A

Luzia: Décimas. Ah… Joana. Este cinco mais este cinco dá dez décimas?

[1] Reflexão Escrita sobre a Aula 2 de Luzia.

A11: Dez centésimas.
Luzia: Dez centésimas. Quanto é que é dez centésimas?
A11: Uma décima.
Luzia: Camila, quanto é que é dez centésimas?
A3: Dez centésimas …
Luzia: Marco, eu perguntei a Camila.
A3: Tá bem.
Luzia: Camila, quanto é que é dez centésimas? Quem quer ajudar a Camila? Jonas.
A17: Dez centésimas é uma décima.
Luzia: Dez centésimas é uma décima.
A18: Eu sabia!
Luzia: Cala-te. Portanto, se isto é uma décima, cinco mais cinco, cinco centésimas é uma décima. Se juntarmos às nove décimas, quanto é que dá?
A3: Dez décimas.
Luzia: Dez décimas, dá quanto?
A17: Que dá uma unidade.

[Aula 1 de Luzia, 06/02/2009]

A aluna propôs a adição a partir das centésimas até chegar a unidade. Esta aluna já tinha respondido que dez centésimas equivalem a uma décima. No entanto, Luzia pergunta mais uma vez, e depois pede a outro aluno para ajudá-la. Parece que a futura professora não ouviu a aluna ou quer que mais alunos participem da explicação. No episódio acima, as explicações dos alunos descrevem acções sobre objectos matemáticos experiencialmente reais, uma vez que fazem referência explícita ao valor das quantidades que os números significam e clarificam como os resultados devem ser interpretados.

Em uma outra actividade, a correcção da ficha sumativa, a explicação dos alunos, agora nos grupos, foi utilizada por Luzia como estratégia na condução da aula, como refere:

> Quando planeei a correcção da ficha sumativa pensei que se fosse feita por mim no quadro, a maior parte dos alunos limitar-se-ia a passar para o caderno sem tentar compreender como se resolveria. Assim pensei em agrupá-los de modo que pelo menos uma parte das questões seria compreendida pois estaria às suas responsabilidades a apresentação da resolução. Agrupei-os por alunos que erraram as mesmas questões, deixando sempre presente no grupo pelo menos um aluno que conseguisse explicar aos colegas como se poderia resolver. Por acaso, não saiu muito da constituição habitual dos grupos, por isso, os grupos que costumam funcionar, funcionaram, os que não costumam funcionar, não funcionaram. [REA1L[2], 06/02/2009]

[2] Reflexão Escrita sobre a Aula 1 de Luzia.

Ao reflectir, durante o planeamento da correcção da ficha sumativa, Luzia constatou que seria mais produtivo que a correcção não fosse feita por ela, mas pelos próprios alunos. Portanto, resolveu utilizar o trabalho em grupo. Neste modo de trabalho, o erro e a explicação dos alunos foi explorado pela candidata a professora. Cada grupo é composto por alunos com os mesmos erros nas questões e pelo menos um dos alunos deve explicar aos outros a resolução. A candidata a professora sublinha que os grupos foram constituídos de modo habitual e o funcionamento dos mesmos também não se afastou do que ocorre frequentemente. Esta actuação de Luzia revela conhecimento dos alunos.

Notas finais

O objectivo deste artigo foi analisar a prática de explicação e a reflexão sobre a prática de explicação de uma futura professora do 2.º Ciclo. Nesta análise pretendeu-se focalizar algumas explicações da futura professora, Luzia, bem como dos seus alunos.

Na prática de explicação de Luzia, em suas explicações instrucionais, são colocadas questões que vão proporcionando que os alunos apresentem a condição necessária para a pavimentação. Em sua reflexão sobre a prática, assinala que o aluno percebeu a condição necessária para a pavimentação, mas não soube desenvolver a explicação claramente. As explicações dos alunos, no episódio apresentado neste artigo, descrevem uma acção sobre um objecto matemático experiencialmente real., uma vez que interpretam os resultados, fazem referência explícita ao valor deste resultado. Por outro lado, a futura professora utiliza a explicação dos alunos nos grupos como uma estratégia de condução da aula e, em sua reflexão sobre a prática, afirma ter agrupado os alunos de acordo com as questões que erraram e, em cada grupo, ao menos um dos alunos, explicou aos restantes a resolução da questão.

Deste modo, a prática de explicação de Luzia revela-se como um espaço no qual a explicação pode ser protagonizada e desenvolvida quer pela candidata a professora quer pelos alunos interagindo verbalmente com ela quer pelos grupos de alunos.

Referências bibliográficas

Bishop, A., & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel.

Brousseau, G. (1996). Os diferentes papéis do professor. In C. Parra & I. Sayz (Eds.), *Didática da Matemática: Reflexões psicopedagógicas*. (pp. 48-72). Porto Alegre: Artes Médicas.

Charalambous, C. Y. (2009). *Mathematical knowledge for teaching and providing explanations: an explanatory study.* In Tzekaki, M. Kaldrimidou, M. & Sakonids, H. (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 305-312). Thessaloniki, Greece.

Korthagen, F. A. J., Kessels, J., Koster, B., Lagerwerf, B., & Wubbels, T. (2001). *Linking practice and theory: The pedagogy of realistic teacher education*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lampert, M., & Cobb, P. (2003). Communication and language. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Shifter (Eds.). *A research companion to Principles and standards for school mathematics* (pp. 237-249). Reston, VA: NCTM.

Leinhardt, G. (1993). Instructional explanations in history and mathematics. In W. Kintsch (Ed.), *Proceedings of the Fifteenth Annual Conference of the Cognitive Science Society* (pp. 5-16). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Leinhardt, G. (2001). Instrucional explanations: a commonplace for teaching and location for contrast. In V. Richardson (Ed.), *Handbook for research on teaching* (4 th ed., pp. 333-357). Washington, DC: American Educational Research Association.

Medeiros, K. M. (2001) O contrato didáctico e a resolução de problemas matemáticos em sala de aula. *Educação Matemática em Revista*, *8*(10), 32-39.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar.* Lisboa: APM e IIE. (Trabalho original publicado em 1989).

NCTM (2007). *Standards for school mathematics: Communication*. Retirado de http://my.nctm.org/ebusiness/mlogin.aspx?return=/standards/document/chapter3/comm.htm. em 27 de Agosto de 2007.

Oliveira, I., & L. Serrazina (2002). A reflexão e o professor como investigador. In GTI (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 30-42). Lisboa: APM.

PCN + ENSINO MÉDIO (PCNEM). (2002). *Orientações complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Secretaria de Educação Tecnológica – Brasília: MEC; SEMTEC.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI (Org.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Guerreiro, A., Cunha, H., Duarte, J., Martinho, H., Martins, C., Menezes, L., Menino, H., Pinto, H., Santos, L., Varandas, J. M., Veia, L., & Viseu, F. (2007). A comunicação nas práticas de jovens professores de Matemática. *Revista Portuguesa de Educação, 20*(2), 39-74.

Sfard, A. (2002). Mathematics as form of communication. *Proceedings of the 26th PME Internacional Conference*, Vol 1, 145-149.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458-477.

CONTRIBUIÇÕES DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PARA A FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES NAS SÉRIES INICIAIS

CONTRIBUTIONS OF MATHEMATICS EDUCATION FOR CONTINUING EDUCATION OF TEACHERS IN EARLY SERIES

***Leonora Pilon Quintas*[1]**

PUCRS

lpq@uol.com.br

RESUMO

Este trabalho analisa o processo de educação continuada de oito professoras polivalentes de uma escola pública em Cubatão/SP. A investigação teve como objetivo ressignificar e redimensionar o trabalho pedagógico, a partir de uma prática investigativa e reflexiva, com a alternativa metodológica da pesquisa-ação. Para tanto, foi ministrado um curso de formação continuada *in loco*, onde as reflexões e os conflitos revelaram que a compreensão que os professores têm de si mesmos como Educadores Matemáticos passa pelas mediações que eles estabelecem na busca de soluções para os desafios de sua condição e prática docente. Sendo a profissão docente, segundo Ponte (2006), Tardif (2000) e outros, um processo contínuo que não se esgota na formação inicial, foi imprescindível abrir este espaço à reflexão a fim de eliminar os mitos e preconceitos. A análise revelou a visão dicotômica entre ensino/aprendizagem, ainda bastante presente como fundamento da prática docente na escola. Como se acredita na relação indissociável entre esses conceitos, nossa perspectiva de trabalho apoiou-se na teoria dos campos conceituais de Vergnaud (1988), para quem a aquisição do conhecimento se dá por meio de situações já conhecidas, constituindo o viés da práxis investigativa.

Palavras-chave: formação continuada, resolução de problemas, educação matemática.

[1] Especialista MBA em Gestão Educacional pela PUCRS (2006), graduada em Pedagogia pela Universidade Metropolitana de Santos (2004). Atualmente é professora na Secretaria Municipal de Cubatão onde realiza estudos dos Indicadores Educacionais, coordena o Programa MEC GESTAR II e desenvolve programas de formação para profissionais da educação, com ênfase em Alfabetização Matemática e Gestão (PDE-escola).

ABSTRACT

This paper examines the process of continuing education of primary teachers in a public school in the city of Cubatão, São Paulo, Brazil. The work aimed to increase and improve pedagogical work, from a research and reflective practice, with the alternative method of action research. For both, was given a course of continuing education in loco, where the discussions and conflicts revealed that the understanding which teachers have of themselves as Math Educators depends on the mediations they lay in the search for solutions to the challenges of their condition and teaching practice. According to Pontes (2006), Tardif (2000) and others, as the teaching profession is a process that goes beyond the initial training, it was essential open space for reflection in order to eliminate the myths and prejudices. The analysis revealed a dichotomy between teaching / learning, still present as the foundation of teaching practice in school. The practice of this research study was based on the inseparable relationship between teaching and learning, from the perspective of the theory of conceptual fields of Vergnaud (1988), for whom the acquisition of knowledge occurs through known situations.

Keywords: Teacher's continuing education, Mathematical problem-solving, Mathematics education.

1. UM CENÁRIO SOBRE A FORMAÇÃO DE PROFESSORES

O processo contínuo de construção e reconstrução da identidade do professor advém da relativização do saber, que gera constante reflexão das experiências e práticas cotidianas do professor. Destaca-se ainda, segundo Nóvoa (1992), que *"[...] a maneira como cada um de nós ensina depende daquilo que somos como pessoa. É no ser que definimos o nosso fazer*". Portanto, é impossível separar o *eu* profissional do *eu* pessoal.

No que se refere às demandas internas, alguns saberes são necessários para o desenvolvimento do trabalho docente. Esses saberes são construídos a partir dos conhecimentos adquiridos antes e durante a formação inicial, bem como em outros espaços de formação, e reconstruídos pelo professor no decorrer de sua prática. O conjunto desses conhecimentos forma o que alguns autores chamam de *saberes da docência.*

Dentre os conhecimentos que compõem o saber docente (SHULMAN apud MIZUKAMI et al., 2002), encontram-se o conhecimento do conteúdo específico, o conhecimento pedagógico geral, o conhecimento pedagógico do conteúdo, os quais incluem ainda: a experiência, o conhecimento dos alunos e suas características, o conhecimento do contexto educacional e dos fins educacionais.

Tardif (2000) considera que o professor, ao realizar seu trabalho, se apoia nos conhecimentos disciplinares, didáticos e pedagógicos adquiridos na escola de formação e nos conhecimentos curriculares veiculados em programas e livros didáticos. Mas considera, ainda, que eles são provenientes também de cultura pessoal do professor, de sua história de vida e de sua escolaridade anterior e do próprio saber proveniente de experiências profissionais.

Nos últimos anos, as contribuições sobre as investigações acerca da formação de professores apontam que a formação inicial não é o produto acabado e pronto, mas uma parte do desenvolvimento profissional, que, por sua vez, se constitui e se amplia por meio da formação continuada.

Referimo-nos à formação inicial como uma parte do desenvolvimento profissional, pois este, segundo Ponte (2006), ocorre de múltiplas formas, exigindo uma gama de experiências que incluem projetos, leituras, trocas de experiência, reflexões, entre outras atividades:

> *[...] a formação tende a ser vista como um movimento de fora para dentro, cabendo ao professor assimilar os conhecimentos e a informação que lhe são transmitidos, enquanto que no desenvolvimento profissional o movimento é de dentro para fora, cabendo ao professor as decisões fundamentais relativamente às questões que quer considerar, aos projectos que quer empreender e ao modo como os quer executar. Por isso mesmo, na formação atende-se principalmente àquilo em que o professor é deficiente e no desenvolvimento profissional dá-se especial atenção às suas qualidades. Além disso, a formação tende a ser vista de modo compartimentado, por assuntos ou por disciplinas, enquanto o desenvolvimento profissional implica o professor como um todo nos seus aspectos cognitivos, afectivos e relacionais. A formação tende a partir da teoria e frequentemente não chega a sair da teoria, ao passo que o desenvolvimento profissional tende a considerar a teoria e a prática de uma forma interligada. Aponto ainda que o desenvolvimento profissional envolve necessariamente a combinação de processos formais e informais. O mais importante é que o professor deixa de ser objecto para passar a ser sujeito da formação. (PONTE, 2006, p.3)*

Entretanto, historicamente, a formação continuada estabelece pouco vínculo entre o estudo proposto e a prática da sala de aula. Segundo Serrazina (1999), os professores apresentam insatisfação em relação aos cursos de formação, pois são levados a entender que estão ali para serem capacitados, na mesma condição do aluno enquanto "tábula rasa".

Também Nóvoa (1995) aponta "*a formação não se constrói por acumulação (de cursos, de conhecimentos ou de técnicas), mas sim através de um trabalho de reflexividade crítica sobre* *as práticas e de (re) construção permanente de uma identidade pessoal. Por isso é tão importante investir a pessoa e dar estatuto ao saber da experiência*." (Nóvoa, 1995, p.25)

Dessa forma, apresenta-se a relação intrínseca entre formação – gestão – mudança e a formação continuada, como uma proposta de abordagem reflexiva que deve ser perspectivada em torno de situações retiradas diretamente do contexto, pois segundo Tardiff (2000):

> *[...] essa tarefa supõe que os pesquisadores universitários trabalhem nas escolas e nas salas de aula em colaboração com os professores, vistos não como sujeitos ou objetos de pesquisa, isto é, como co-pesquisadores ou, melhor ainda, como co-elaboradores da pesquisa sobre seus próprios saberes profissionais. (TARDIF, 2000, p.20)*

Essa tarefa exige do professor, portanto, disponibilidade e disposição para discernir suas crenças nas maneiras de ensinar, um trabalho geralmente arraigado em certezas sobre os fundamentos de uma prática constituída por saberes pessoais, tácitos e íntimos.

2. EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

No contexto da educação matemática, a questão da prática docente revela seu lado crítico e problemático. Se tomarmos os resultados do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB, 2004, p.8) "*na 4ª série, verificaremos que não houve modificações qualitativas significativas no desempenho dos alunos, considerando os intervalos de confiança calculados pelo procedimento estatístico mais rigoroso, apesar da média ter passado de 176,3, em 2001, para 177,1, em 2003*".

Mediante tal quadro, constata-se a dificuldade dos alunos da educação básica em Matemática, e em especial na resolução de problemas, habilidade que tem sido o fulcro dos exames nacionais. Cabe considerar, todavia, que o ensino de problemas tem sua própria trajetória histórica, e no atual movimento de reorientação curricular, a resolução dos problemas é compreendida como uma perspectiva metodológica**,** como um conjunto de estratégias para o ensino e a aprendizagem Matemática.

Nessa perspectiva, se fundamenta a teoria dos campos conceituais do psicólogo francês Gérard Vergnaud, para quem a aquisição do conhecimento se dá por meio de situações e problemas já conhecidos, e que o conhecimento, portanto, tem características locais. Segundo Nunes et al. (2005), nessa experiência, a oralidade da criança/aluno possibilita ao professor a compreensão dos "teoremas em ação", momento em que coordena a atividade prática e os sistemas simbólicos para a formação dos conceitos, ou seja, "*a transformação do conhecimento intuitivo para o conhecimento explícito*" (MAGINA et al, 2001, p.17).

O caso da adição e subtração são exemplos de conceitos onde não faz sentido estudá-los isoladamente, mas sim dentro de um campo conceitual, o das Estruturas Aditivas. Com essa classificação, os estudos de Nunes e Bryant (2000) e Magina et. al (2001), além de outros, explicam que esta classificação contribui para que o professor possa compreender o amplo espectro de significações das operações, evidenciando a complexidade do trabalho a ser realizado para que os alunos ampliem os conceitos envolvidos nessas operações.

Essa classificação deve ser entendida na tríade desenvolvida por Vergnaud (1988), em que um conceito é formado por *S, I, R*:

> *S é o conjunto de situações que tornam o conceito significativo;*
> *I é o conjunto de invariantes (objetos, propriedades e relações) que podem ser reconhecidos e usados pelo sujeito para analisar e dominar essas situações;*
> *R é o conjunto de representações simbólicas que podem ser usadas para pontuar e representar esses invariantes e, portanto para pontuar e representar as situações e os procedimentos para lidar com eles. (MAGINA et. al, 2001, p.7)*

Nesse âmbito, um cálculo numérico 7 + 4, por exemplo, pode ser apresentado em diferentes situações e, por isso, adotaremos, nesta pesquisa, o cálculo relacional que se refere *"[às] operações do pensamento necessárias para que haja a manipulação das relações envolvidas nas situações*" (MAGINA et. al, 2001). O quadro[2], abaixo, exemplifica essa situação:

Problema	Diagrama e Cálculo Relacional	Cálculo Numérico
Carlos tinha 7 reais e ganhou de sua avó 4 reais. Quanto ele tem agora?	$7 \xrightarrow{+4} \square$ Aplicar uma transformação positiva direta ao estado inicial	ADIÇÃO 7 + 4 =11

Quadro 02: "Cálculo relacional"

Sendo assim, todas essas contribuições teóricas, que concebem a escola como *locus* de formação continuada, valorizam os saberes docentes e consideramos, de acordo com Nunes et al. (2005 p. 57), "*a avaliação como uma busca de evidências que nos ajudem a tomar decisões sobre os objetivos do ensino para um grupo específico de alunos e nos ajudem a conhecer melhor os resultados de nossa ação pedagógica*".

3. METODOLOGIA

[2] In: MAGINA, Sandra; CAMPOS, Tânia M.M.; GATIRANA, Verônica; NUNES, Teresinha. Repensando adição, subtração: contribuições da teoria dos campos conceituais. 2 ed. São Paulo: Proem, 2001.

Nesse trabalho, a concepção dialética na formação do profissional da educação ocupa posição central. É vinculada a esta interpretação que desenvolvemos uma pesquisa-ação, na Escola Municipal de Ensino Fundamental Luiz Gustavo de Lima, localizada no Conjunto Mario Covas situado no bairro Vila Natal, em Cubatão – São Paulo, com 3 (três) encaminhamentos concomitantes:

I- Um Programa de Formação Continuada em Educação Matemática, organizado e ministrado pela pesquisadora em 7 (sete) encontros quinzenais *in loco,* com duração de 18 horas, ao longo de 4 (quatro) meses, dirigido a 8 (oito) professores e 1 (uma) coordenadora.

II- Duas avaliações realizadas com 210 alunos dos professores participantes: a prova inicial realizada antes do 1º encontro do Programa de Formação Continuada, e a prova final após o término do Programa de Formação Continuada com os mesmos alunos.

III- Oito alunos dos professores participantes foram selecionados para reaplicação da prova inicial com intervenção da pesquisadora. A escolha foi feita mediante as soluções errôneas apresentadas na prova inicial.

Ressaltamos que nosso objetivo na coleta dos dados com os alunos foi verificar especificamente: (i) as dificuldades destes em resolver problemas envolvendo estruturas aditivas em cálculos relacionais e não, em cálculos numéricos; (ii) as dificuldades de leitura do problema, para confrontar a percepção dos professores com relação a esta temática.

Em consonância com Fiorentini (2006), entendemos esta pesquisa-ação com "*uma modalidade de pesquisa que torna o participante da ação um pesquisador da sua própria prática e o pesquisador um participante que intervém nos rumos da ação, orientado pela pesquisa que realiza*" (FIORENTINI, 2006, p.114).

É do cruzamento dessas múltiplas fontes que se pretende investigar os sentidos e as percepções dos professores polivalentes sobre as dificuldades do ensino e da aprendizagem da matemática na resolução de problemas, para atender ao nosso objetivo de ressignificar e redimensionar o trabalho pedagógico a partir de uma prática investigativa e reflexiva, por meio de um Programa de Formação Continuada, *in loco*.

4. ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

4.1 AS PRIMEIRAS MEMÓRIAS E IMPRESSÕES

O ponto de partida adotado foi o questionamento a respeito das expectativas dos professores em relação à formação, em que detectamos as seguintes falas:

> *P1: "Ainda bem que vamos aprender algo em matemática, pois nos últimos anos apenas a alfabetização esteve presente".*

> *P8: "Queria alguma coisa que facilitasse o ensino da divisão".*
> *P3: "Gostaria de atividades que facilitassem o ensino da matemática".*
> *P7: "Nós vamos montar jogos para usar na sala de aula?".*

Como podemos observar, as expectativas demonstram o interesse em situações de aplicabilidade imediata, assim, concordamos com Ponte (2006), que afirma ser a dificuldade da reflexão justificável pela expectativa que os professores criam no sentido de receberem idéias imediatas à aplicação em sala de aula.

Em seguida, a questão apresentada foi: "Por que os alunos erram nos problemas matemáticos?".

As argumentações iniciaram com as seguintes percepções:

> *P7: "Eles não têm vocabulário matemático".*
> *P2: "Até sabem ler, mas não sabem dar a resposta".*
> *P8: "Acho que não sabem dar resposta, porque não sabem interpretar".*
> *P6: "É, eles não sabem interpretar".*
> *P3: "O aluno fala que não gosta de matemática porque é difícil e nunca vai aprendê-la."*
> *P4: "Não querem parar para pensar, são preguiçosos".*
> *P1: "Não estão acostumados a descobrir um caminho próprio, vão logo perguntando: é de mais ou menos".*
> *P7: "Os alunos têm a vivência, mas não conseguem transferir para o problema".*

Nessa discussão, apresentaram como justificativa ser o aluno "culpado" pelas dificuldades com os problemas matemáticos. Até que uma professora que não havia se manifestado fez o seguinte comentário:

> *P5: "Mas, o aluno fica ligado ao que é certo, ao que o professor espera, por exemplo, se quer uma conta de multiplicação o aluno busca isso, e na verdade a gente sabe que existem outras estratégias para resolver, mas não valorizamos. Eles já estão acostumados a todo problema ter uma conta, então se resolveu por 14 + 14 + 14, ele apaga e copia da lousa 14 x 3, sem entender que seu caminho era certo".*

Essa discussão foi um importante instrumento de interação que permitiu evidenciar as dificuldades e os sucessos das professoras relacionados à história de vida de cada uma, como podemos observar no relato:

> *P3: "Na verdade, eu sofri com isso no 3º ano, quando fui reprovada em matemática. A professora me chamava de burra, e eu fazia de tudo para agradá-la, mas não acertava. Passei o ano sem entender matemática e com muito medo dela, até hoje! Acabo sempre priorizando as outras disciplinas".*

Nesse momento, propusemos pensar um pouco sobre a interpretação dos problemas, em como nós professores aprendemos a matemática e em como os nossos alunos aprendem matemática.

> *P5: "Não aprendíamos a pensar, mas a memorizar extensas listas de exercícios e problemas".*
> *P7: "É assim e pronto, copia e faz!".*

Na busca de relacionar aquele currículo apreendido, buscamos o currículo praticado no momento:

> *P1: "Na 1ª série, primeiro a adição, depois a subtração. A multiplicação e a divisão entram no concreto, mas não são cobradas".*

Então, percebemos que, na 1ª série, a ênfase dada ao ensino da leitura e da escrita determina à matemática um segundo plano, pois como nos disse uma professora:

> *P1: "O que repete na 1ª série é o português e não, a matemática".*

Nesse momento, surgiu o seguinte questionamento:

> *P2: "Mas todo problema não tem que ter uma conta?".*

Essa pergunta desencadeou a discussão acerca das crenças produzidas e, dentre elas, a de que todo problema tem uma resposta numérica. Outra crença, diz respeito à leitura do problema realizada pela professora, que fortalece os números envolvidos, e as ações que indicam a operação a ser utilizada.

> *P5: "E quando a gente inverte o problema, assim: Comi 4 bananas da cesta que tinha 10. Quantas sobraram? O aluno faz 4 – 10 e diz que o resultado é 6. Nem percebe o que fez!".*
> *P2: "É isso mesmo, o aluno identifica a conta pela palavra: "mais", "sobrou"," ganhou"," perdeu"," total"," restou", "dividiu" e outras".*

Para elucidar essa questão, demos o exemplo da seguinte situação: "Ciclana tinha alguns pirulitos. Ela jogou um jogo e ganhou 3 pirulitos. Agora ela tem 12. Quantos pirulitos ela tinha?"

Em seguida, perguntamos: *como vocês, professoras, acham que os alunos resolveriam?* Durante a reflexão, elas perceberam que a dificuldade em captar a situação contemplada no problema provavelmente impossibilitaria aos alunos chegarem à resposta correta. Como o termo "ganhou" sugere a ocorrência de um aumento do valor proposto no problema, muitos alunos optariam pela operação de adição. Esse tipo de erro pode ser devido a práticas didáticas que privilegiam a identificação da operação apenas a partir de pistas no enunciado, sem levar em consideração a necessidade de construir com a criança habilidades de representar efetivamente as relações envolvidas no problema.

Magina e outros (2001), Nunes et al. (2005) e Vila (2006) constatam que muitos professores enfatizam o uso de palavras-chave no ensino de matemática, acreditando com isso que estão facilitando a compreensão dos problemas por parte dos alunos. Conduzindo o debate por este caminho, finalizamos o primeiro encontro com a seguinte reflexão: Será que são os nossos alunos que têm dificuldades para resolver problemas matemáticos?

> *P3: "Então a gente acaba ensinando o aluno a procurar os números e a palavra-chave?".*
> *P3: "Acho que a gente dá ênfase na leitura dos problemas".*

Nesse momento, nos apoiamos na idéia de Brousseau (1986):

> *Em uma situação de ensino, preparada e realizada por um professor, o aluno tem, em geral, como tarefa, de resolver um problema (matemático) que lhe é apresentado, mas o acesso a essa tarefa é feito através da interpretação das perguntas colocadas, das informações fornecidas, das obrigações estabelecidas que são constantes da maneira de ensinar do professor. Esses hábitos (específicos) do professor esperados pelo aluno e os comportamentos do aluno esperados pelo professor constituem o contrato didático. (BROUSSEAU, 1986 APUD D'AMORE, 2005, p.71)*

Exploramos esta idéia, com o intuito de aproximar as percepções das professoras às suas próprias relações com a matemática, o que veio a ser confirmado pelas seguintes falas:

> *P8: Então, tem outro jeito para ensinar matemática?".*
> *P2: "Na realidade, nem no magistério e nem na Pedagogia, aprendemos metodologia da matemática, a ênfase sempre esteve presente na língua escrita. O máximo que estudamos foram os estágios de Piaget".*
> *P4: "Você vai ensinar outro jeito?".*

As crenças retratadas durante este primeiro encontro atribuíram à resolução de problemas a finalidade da aplicabilidade dos conceitos matemáticos e, por conseguinte, toda a estrutura necessária ao currículo, enquanto didática, seleção de conteúdos, avaliação e outros aspectos do ensino e aprendizagem desta disciplina. Como afirma Pais (2005):

> *Quando se analisa a epistemologia do professor, surgem crenças enrijecidas pelo tempo, que podem gerar uma visão puramente pessoal sobre a ciência ensinada. Trata-se do conflito entre a visão subjetiva e a intenção de objetividade que deve caracterizar a aprendizagem escolar. (PAIS, 2005, p.34)*

Nesse ínterim, o conflito em questão coloca em processo reflexivo, *Os saberes mobilizados e empregados na prática cotidiana, saberes esses que dela se originam, de uma maneira ou de outra, e que servem para resolver os problemas dos professores em exercício e para dar sentido às situações de trabalho que lhes são próprias. (TARDIF e RAYMOND, 2000, p.211)*

4.2 UM CAMINHO PARA O PROCESSO REFLEXIVO

Zunino (1995) verificou, em sua pesquisa, que os procedimentos utilizados pelos alunos, muitas vezes, não coincidem com os algoritmos tradicionalmente ensinados na escola.

Assim como Zunino (1995), Smole e Diniz (2001) argumentam sobre a importância de o professor "*propiciar um espaço de discussão no qual eles pensem sobre os problemas que irão resolver, elaborem uma estratégia e façam o registro da solução encontrada ou dos recursos que utilizaram para chegar ao resultado*". (Smole e Diniz, 2001, p.125)

Nesse sentido, encorajar os alunos a inventarem seus próprios procedimentos, a compará-los e "*discutir sobre a eficácia comunicativa das diferentes representações que utilizam*" (ZUNINO, 1995, p. 53), são ações que propiciam o desenvolvimento da autonomia, da autoconfiança em sua própria capacidade de pensar. Além de favorecer a ruptura do contrato didático, onde foi estabelecido o saber do professor, como o único saber válido, e o aluno como receptor desse saber.

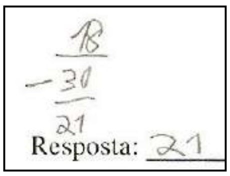
Partindo desses pressupostos, nos encontros seguintes do "Programa de Formação Continuada" estudamos o campo conceitual aditivo e as estratégias adotadas pelos alunos.

Aluno 01

Um dos conflitos que presenciamos foi o esquema de ação adotado pelo aluno que não o levava à resposta, pois a solução pedia a aplicação do esquema inverso.

Problema: Juntos conseguimos juntar 30 reais. Eu economizei 18 reais, e você?

Na aplicação da prova, sua solução foi a seguinte:



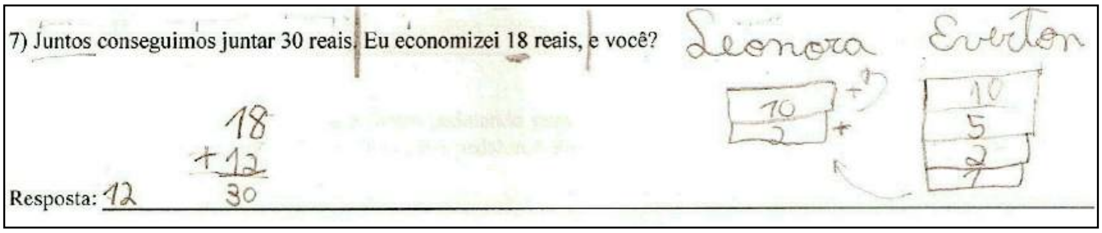
Quadro 04: "Solução apresentada na Prova Inicial"

Com intervenção na aplicação individual, utilizando as cédulas de dinheiro como estratégia, houve o desencadeamento do seguinte diálogo:

Aluno 01: Eu tô tentando para ver se dá certo. Se é de mais mesmo! Eu tô na dúvida, se dá mais passa, se não, é de menos.
Pesquisadora: Quem são os personagens?
Aluno 01: Não tem nome!
Pesquisadora: Então vou lhe dar essas notas, te ajuda a pensar?
Aluno 01: Eu tenho uma nota de 10 reais, uma nota de 5, uma nota de 2 e uma nota de 1 real.
Pesquisadora: Você pode representar isso na folha?
Aluno 01: Escreveu Everton e desenhou as notas, em seguida perguntou meu nome, escreveu e já disse: Você tem 12!
Pesquisadora: Você pode representar?

(Fez a representação, em seguida realizou o cálculo 18 + 12 igual a 30, mas na hora de colocar a resposta, escreveu 30 e percebeu que havia algo errado).

Pesquisadora: O que aconteceu?
Aluno 01: A conta dá 30, mas não é a resposta!
Pesquisadora: E qual é?
Aluno 01: É 12!



Quadro 05: "Solução apresentada com intervenção da pesquisadora"

Esse e outros exemplos foram discutidos ao longo do "Programa de Formação", os professores foram evidenciando suas "novas" práticas em sala de aula, pois estavam oferecendo a oportunidade de confronto dos diversos registros utilizados pelos alunos.

Também externaram suas dificuldades e apreensões:

P8: "Muitos alunos colocam a resposta e não sei como pensaram, então usei a seguinte estratégia: tinham que justificar a resposta, assim explicavam como haviam feito".

Então, percebemos que existem diversas formas de registro para a representação de um conceito matemático: os desenhos, os símbolos matemáticos etc. Antes de proceder à análise, enfatizamos que as formas de representação precisam corresponder às propriedades dos conceitos os quais elas representam. Nesta etapa da formação, as professoras solicitaram a elaboração de recursos e objetivos que contemplassem a evolução dos registros realizados pelos alunos. Assim, descrevemos as competências dos alunos em representar quantidades e relações que foram apresentadas nos problemas dos testes.

4.3 ANÁLISE DA PROVA FINAL

Nas provas, foram utilizados os problemas propostos nas pesquisas desenvolvidas por Terezinha Nunes *et al.* (2005), publicados nos livros *Repensando Adição e Subtração, e Educação Matemática – Números e operações numéricas, vol. 1*. Algumas alterações e adaptações foram realizadas nestes instrumentos, com vistas a adequá-los ao objetivo da presente pesquisa. Para cada uma das duas provas foi elaborada uma lista contendo 10 (dez) problemas, entre eles: problemas da estrutura aditiva, estrutura multiplicativa e problemas simples, em que apenas o aspecto da leitura estava presente.

Tendo como objetivo da pesquisa responder à questão "quais as contribuições da formação continuada em Educação Matemática em termos de mudança de idéias e práticas do professor das séries iniciais?", a análise feita considerou 5 (cinco) questões, contemplando as relações básicas propostas por Vergnaud (1988); e o impacto do estudo denominado "Efeito idade do capitão", comparando os resultados entre a 1ª prova e a 2ª prova.

A seguir apresentamos a resolução dos problemas utilizados, categorizados de acordo com o que propõe Vergnaud:

COMPOSIÇÃO

1ª prova - Juntos conseguimos juntar 30 reais. Eu economizei 18 reais, e você?

2ª prova - João tem uma coleção de 98 carrinhos guardados em 3 caixas. Na primeira caixa, ele colocou 35 carrinhos. Na segunda ele colocou 22. Quantos carrinhos ele colocou na terceira caixa?

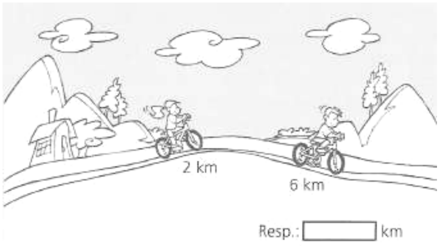
TRANSFORMAÇÃO:

1ª prova - Ciclana tinha alguns pirulitos. Ela jogou um jogo e ganhou 3 pirulitos. Agora ela tem 12. Quantos pirulitos ela tinha?

2ª prova - Maria tinha alguns biscoitos e ganhou 4 biscoitos de sua amiga, ficando com 12 biscoitos. Quantos biscoitos Maria tinha antes?

COMPARAÇÃO:

1ª prova - Dois amigos saíram de bicicleta e foram pedalando para o mesmo lado. A menina parou e o menino continuou pedalando. A menina pedalou 2 km. O menino pedalou 6 km. Quantos km (quilômetros) o menino percorreu a mais que a menina?



2ª prova - Ana tem 8 reais. Carlos tem 22 reais. Quem tem a menor quantia? Quantos reais a menos?

COMPARAÇÃO:

1ª prova - Bertrana tem 5 doces. Ela tem 6 doces a menos do que Gamilda. Quantos doces Gamilda tem?

2ª prova - Maria tem um pote com balas e José tem 8 balas a mais que Maria. Sabendo que José tem 15 balas, quantas balas tem Maria?

COMPOSIÇÃO DE TRANSFORMAÇÕES:

1ª prova - João disputou figurinhas no "bafo" de manhã e à tarde. À tarde, ele perdeu 6. No final do dia, ele percebeu que havia perdido 13 figurinhas no total. Ele perdeu ou ganhou figurinhas de manhã? Quantas?

2ª prova - João tinha 13 bombons, deu alguns a seu irmão, ficando com 8 bombons. Depois deu 2 bombons ao seu primo. Quantos bombons João deu ao todo? Com quantos bombons João ficou no final?

LEITURA:

1ª prova - Era aniversário da professora Alfana. Seis alunos vieram à festa. Cada um deles trouxe o mesmo número de flores para a professora. A professora ganhou 18 flores. Quantos alunos vieram à festa?

2ª prova - Um aquário tem 11 peixes de cores amarela e vermelha, sendo que cinco peixes são amarelos. Quantos são os peixes amarelos?

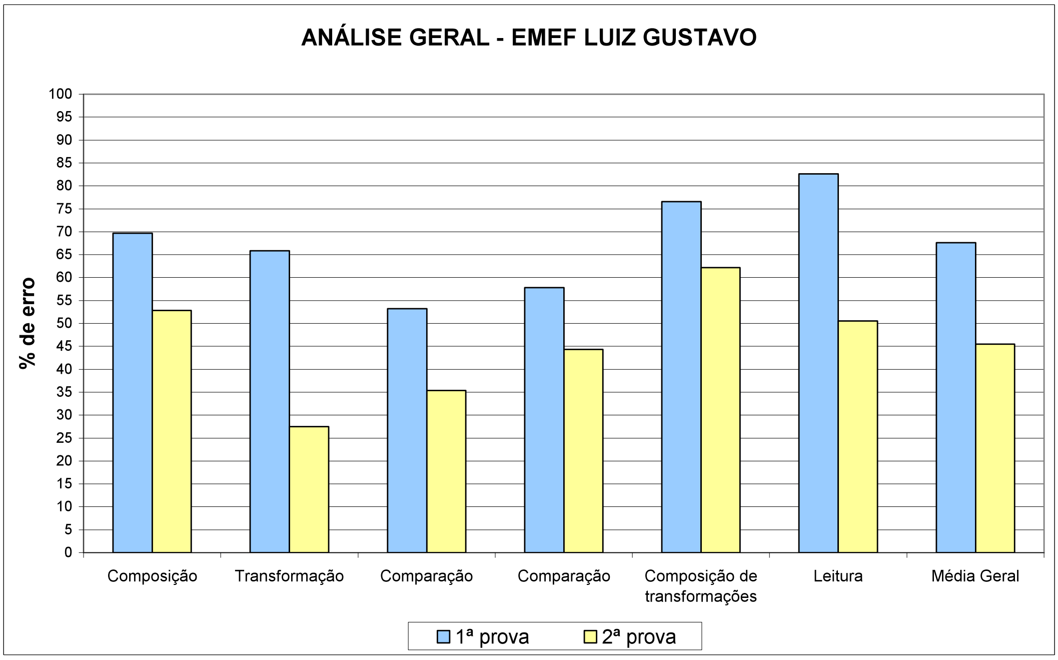


Gráfico 03: “Gráfico – Análise geral”

Pelo que se observa no gráfico, é possível constatar a redução do percentual de erro, o que indica uma mudança na prática pedagógica dos professores envolvidos.

Cabe lembrar que a preocupação em não oferecer apenas “novos modelos de ensino” se fez presente durante todo o processo, para tornar a *investigação da prática* e a *reflexão sobre a prática* uma diretriz deste estudo. Dessa maneira, procuramos na análise da Prova final identificar um dos objetos de estudo do “Programa de Formação Continuada”: a validação das estratégias e procedimentos adotados pelos alunos, na perspectiva de construção dos significados.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O “Programa de Formação Continuada” proposto e descrito neste artigo pautou-se pelo incentivo ao confronto de idéias, de crenças, de saberes e de experiências pedagógicas, na busca de uma discussão e reflexão conjunta, que levassem a um desenvolvimento profissional dos professores.

Para efetivar esse espaço de discussão, foi necessário romper o tradicional isolamento e individualismo do professor, uma preocupação constante por parte da pesquisadora, baseada na crença de que a troca de saberes sobre as experiências pedagógicas dos professores é um importante instrumento de interação que permite situar mais facilmente as dificuldades e os sucessos, fazer balanços e analisar os obstáculos e os progressos, constituindo-se um efetivo processo de reflexão que conduz à ação.

Durante a aplicação do trabalho, pudemos constatar que entre os principais obstáculos encontrados encontram-se as dificuldades dos professores em lidar com o conhecimento matemático, o que pode ser um sinal de que a formação inicial oferecida nos cursos de Magistério e de Pedagogia em sua maioria não contempla ou contempla pouco, os estudos pós-piagetianos ou ainda quem sabe, a carga horária oferecida seja insuficiente para o estudo mais aprofundado da Didática da Matemática que a demanda educacional hoje requer.

Corroborando essa questão ressalta-se também, o fato de que os professores participantes da formação desconheciam os temas abordados nos encontros. Tendo em vista a publicação, há quase quinze anos, dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para os anos iniciais do ensino fundamental, é de se supor que as orientações contidas nestes parâmetros ainda não foram suficientemente implementadas nas salas de aula.

É neste contexto, portanto que os programas de formação continuada ganham enorme importância. Em nossos encontros de estudo, no que se refere ao conhecimento matemático, observamos que a alternância de discussões metodológicas e conhecimentos específicos possibilitaram às professoras confrontar suas diferentes concepções. Somente a partir disso é que foi possível promover o deslocamento necessário para que reformulação dos conceitos e das práticas pudesse encontrar lugar.

Acreditamos que pesquisas e trabalhos relacionados a esse tema devem ser divulgados com maior ênfase aos professores das séries iniciais do ensino fundamental, para que tenham uma melhor visão do Campo Conceitual das Estruturas Aditivas, na busca pela transformação dos esquemas de ação em conceitos operatórios. Não obstante, para se compreender adequadamente o desempenho dos alunos, estudos com foco na resolução de problemas deveriam ser conduzidos analisando todo tipo de produção dos alunos em que, sejam descritas as estratégias de que se utilizam para chegar à solução.

No âmbito dos programas de formação continuada, ao se oferecer a oportunidade de os professores terem contato com os estudos e resultados de pesquisa a que nos referimos, não é suficiente apenas a transmissão desse conhecimento, ou a oferta de modelos de ensino pura e simplesmente. A atuação do formador, ou de quem apóia essa atuação, deve isto sim, priorizar a reflexão dos professores com o objetivo de buscar uma progressiva construção de seu conhecimento, ajudando-o dessa forma, na construção de suas competências profissionais.

Tomando a experiência de formação descrita neste artigo, o fato de termos considerado os saberes docentes foi o que propiciou efetivamente, reflexões sobre a ação e, consequentemente, a construção de conhecimentos por meio de ações, conforme averiguamos nas “novas” práticas a que os professores foram conduzidos e nos resultados positivos alcançados pelos alunos.

Outro aspecto importante a considerar na experiência diz respeito ao currículo de matemática discutido ao longo do “Programa de Formação”, que desencadeou o estudo e a reformulação do Plano Referencial de Matemática para as séries iniciais das escolas da Rede Municipal de Cubatão, além da extensão do “Programa de Formação” aos demais professores.

Sendo assim, a formação continuada não deve ser entendida como um fim em si mesma, mas antes como um recurso a serviço da inovação e da melhoria da qualidade do ensino e da educação.

Esperamos que o presente trabalho seja um instrumento de uma discussão séria e proveitosa, para que possamos avançar substancialmente numa formação que propicie a construção dos diversos saberes a seu tempo, em suas múltiplas formas e contextos, contribuindo assim para um ensino pautado na reflexão, na cooperação mútua e no desenvolvimento profissional de nossos professores.

6. REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Inep, **Resultados do SAEB 2003** – Brasil e São Paulo. Brasília, Junho, 2004.

CARRAHER, T. N., CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANN, A. D. (Orgs.), **Na vida dez, na escola zero**. 13. ed. São Paulo: Cortez, 2003. 182p.

D’AMORE, Bruno. **Epistemologia e Didática da Matemática**. Tradução de Maria Cristina Bonomi Barufi. São Paulo: Escrituras, 2005. 123 p. Título original: Lê basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e conceittuali della didattica della matemática. (Coleção Ensaios Transversais, 31)

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. Campinas, SP: Autores Associados, 2006. 226 p. (Coleção formação de professores)

MAGINA, Sandra; CAMPOS, Tânia M.M.; GATIRANA, Verônica e NUNES, Teresinha. **Repensando adição, subtração**: contribuições da teoria dos campos conceituais. 2 ed. São Paulo: Proem, 2001. 63 p.

MIZUKAMI, Maria da Graça Nicoletti. **Aprendizagem da docência**: professores formadores. Revista E-Curriculum, São Paulo, v 1, n. 1, dez. – jul. 2005-2006. Disponível em: http://www.pucsp.br/ecurriculum, acesso em 23/12/2006.

NÓVOA, António. **Vidas de professores**. Trad. Maria dos Anjos Caseiro e Manuel Figueiredo Ferreira. Portugal: Porto Editora, 1992.

______. Formação de professores e profissão docente. In: NÓVOA, A. (org.). **Os professores e sua formação**. 2 ed. Lisboa: Dom Quixote, 1995. p.13-33.

NUNES, Teresinha; BRYANT, Peter. **Crianças Fazendo Matemática**, Porto Alegre, Artes Médicas, 2000. 244 p.

______; CAMPOS, Tânia M. Mendonça; MAGINA, Sandra; BRYANT, Peter. **Educação Matemática**: os números e as operações numéricas. São Paulo: Proem Editora, 2005. 206 p.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática**: ama análise da influência francesa. 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002. 128p. (Coleção Tendências em Educação Matemática, 3)

PONTE, João Pedro da. **Por uma formação do professor de matemática capaz de contribuir para o seu desenvolvimento profissional**. Conferência Plenária apresentada na VII Reunião de Didática da Matemática do Cone Sul. SP: Águas de Lindóia, 2006.

SERRAZINA, L. **Reflexão, conhecimento e práticas lectivas em Matemática num contexto de reforma curricular no 1º ciclo**. Quadrante, v.8, 1999, p.139-168. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/fp/textos%20_p/99-serrazina.doc>. Acesso em: 20 dez. 2006.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. **Ler, escrever e resolver problemas**: habilidades básicas para aprender Matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001. 204 p.

TARDIFF, M. "Saberes profissionais dos professores e conhecimentos universitários - Elementos para uma epistemologia da prática profissional dos professores e suas conseqüências em relação à formação para o magistério". **Revista Brasileira de Educação**, Rio de Janeiro, n. 13, p. 5–24, jan./fev./mar./abr. 2000.

TARDIF, Maurice; RAYMOND, Danielle. Saberes, tempo e aprendizagem do trabalho no magistério. **Educ. Soc.**, Campinas, v. 21, n. 73, 2000. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0101-73302000000400013&lng=pt&nrm=iso>. Acesso em: 26 Dez 2006.

ZUNINO, D. L. de. **A matemática na escola: aqui e agora**. 2. ed. Tradução: Juan Acuña Llorens. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.