A MATEMÁTICA

na

Educação Básica

Ministério da Educação
Departamento da Educação Básica

A MATEMÁTICA

na

Educação Básica

Paulo Abrantes

Lurdes Serrazina

Isolina Oliveira

Lisboa, 1999

Este trabalho foi realizado a solicitação do
Departamento da Educação Básica do Ministério da Educação por:

Paulo Abrantes
Professor Auxiliar do Departamento de Educação da Faculdade de Ciências
da Universidade de Lisboa

Lurdes Serrazina
Professora Adjunta da Escola Superior de Educação de Lisboa

Isolina Oliveira
Professora da Escola Básica 2,3 Damião de Góis, Lisboa

com a colaboração de:

Cristina Loureiro
Professora Adjunta da Escola Superior de Educação de Lisboa

Fernando Nunes
Professor da Escola Básica 2,3 Marquesa de Alorna, Lisboa

NOTA PRÉVIA

ÍNDICE

Cap. 1. Introdução	11
Cap. 2. Matemática para todos	17
Cap. 3. Competência matemática	31
Cap. 4. Grandes temas matemáticos	43
4.1. Números e Cálculo	45
4.2. Geometria	67
4.3. Estatística e Probabilidades	93
4.4. Álgebra e Funções	109
Bibliografia	127

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Saber o que são hoje as competências matemáticas essenciais a todos os cidadãos constitui uma questão importante que diz respeito a toda a sociedade. Definir essas competências em termos de grandes objectivos curriculares para os alunos que frequentam a escolaridade obrigatória é, por sua vez, um desafio que o nosso sistema educativo precisa de enfrentar.

No presente trabalho, procuramos sistematizar as competências matemáticas que as crianças e jovens devem desenvolver no seu percurso ao longo dos três ciclos do Ensino Básico, a partir de uma perspectiva sobre o que significa, hoje, ser *matematicamente competente*. Esta noção ampla de competência matemática está relacionada com as atitudes, as capacidades e os conhecimentos relativos à matemática que, de uma forma integrada, todos devem desenvolver e ser capazes de usar, podendo identificar-se com a noção de *literacia matemática*. O trabalho baseia-se num conjunto de pressupostos sobre a aprendizagem e numa reflexão sobre as características fundamentais do conhecimento matemático. Além disso, toma em consideração quer as tendências curriculares recentes quer os resultados da investigação educacional.

O principal propósito é o de proporcionar aos professores um instrumento de trabalho que lhes seja útil na difícil tarefa de concretizar as intenções educativas de uma forma adequada aos seus próprios alunos. Embora possa vir a ser um elemento de consulta, entre muitos outros, num processo de análise do modo como os currículos de Matemática do Ensino Básico poderão evoluir num futuro próximo, este documento não deve ser interpretado como uma proposta de alteração dos actuais programas. Claro que uma determinada perspectiva sobre as competências matemáticas essenciais não pode deixar de estar associada a uma leitura crítica dos objectivos dos programas. Mas não discutimos aqui, de modo sistemático, os conteúdos, os métodos de ensino ou as formas de avaliação a considerar nos vários ciclos. Mesmo quando apresentamos propostas concretas para a sala de aula, fazemo-lo a título de exemplo, com o propósito de ilustrar as competências que os alunos devem desenvolver e os tipos de experiências de aprendizagem que lhes devem ser proporcionadas.

Naturalmente, um trabalho como este baseia-se em determinados pressupostos e requer que se façam grandes opções. Explicitar o quadro de referência que seguimos ao longo do trabalho é o objectivo dos capítulos 2 e 3.

Assim, no capítulo 2, MATEMÁTICA PARA TODOS, questionamos a visão tradicional sobre o que são “competências básicas” em matemática, procurando dar um sentido à noção de literacia para o domínio específico da matemática. Além disso, explicitamos os pressupostos sobre a aprendizagem e sobre o papel do professor que orientam todo o trabalho.

No capítulo 3, COMPETÊNCIA MATEMÁTICA, procuramos discutir o que é saber matemática numa perspectiva de educação básica, analisando o que significam os principais tipos de competências matemáticas e a sua aquisição de um modo integrado. Neste capítulo referimo-nos largamente a capacidades e atitudes que são transversais aos vários temas e tópicos de matemática mas que nos parecem essenciais quaisquer que sejam os conteúdos concretos considerados em cada momento.

Finalmente, no capítulo 4, GRANDES TEMAS MATEMÁTICOS, entramos numa discussão centrada em temas específicos. Optámos por organizá-lo em subcapítulos, segundo quatro grandes temas: números e cálculo, geometria, estatística e probabilidades, álgebra e funções. Em cada um, incluímos sucessivamente: uma reflexão sobre as tendências actuais relativas ao ensino e aprendizagem do tema respectivo; uma discussão a respeito dos principais tipos de capacidades a desenvolver pelos alunos; uma proposta de competências básicas.

Em todos os capítulos, surgem por vezes exemplos que não estão completamente desenvolvidos. Tais exemplos servem essencialmente para ilustrar as ideias que se apresentam e para chamar a atenção para questões que, sendo fundamentais na aprendizagem da matemática, são frequentemente ignoradas.

Temos consciência de que a divisão por temas — ainda que se trate de grandes domínios da matemática e não de tópicos muito específicos — envolve alguns riscos para os quais devemos estar alertados.

Um primeiro risco é o de se perderem de vista as conexões que existem entre diversos temas matemáticos. Por exemplo, a noção geométrica de semelhança adquire um novo sentido quando se compreendem as relações numéricas de proporcionalidade e, reciprocamente, o conceito de proporção torna-se mais consistente quando está associado à ideia de se manter a forma de uma figura apesar de se variar as suas dimensões; além disso, esta noção é compreendida de um modo mais profundo quando for encarada como uma função com determinadas propriedades. Porém, esta compreensão mais profunda só se verifica quando se vêem as conexões, quando se percebe que estamos a falar da mesma coisa mas encarando-a de diferentes pontos de vista.

Em segundo lugar, a divisão por temas pode ser enganadora. Por exemplo, quando os alunos estão a explorar situações ou a resolver problemas que envolvem áreas e perímetros, podemos dizer que estão a trabalhar em geometria mas é quase inevitável que estejam ao mesmo tempo a trabalhar igualmente noutros temas, como os números, a álgebra ou as funções.

Em terceiro lugar, a divisão por temas é muitas vezes artificial. Um exemplo é o começo do trabalho em álgebra. Em geral, relacionamo-lo com o momento em que os alunos começam a contactar com variáveis representadas por letras e a lidar com equações e polinómios. No entanto, os alunos já resolveram muitas equações desde os primeiros anos de escolaridade sem se darem conta de que o faziam e a noção de variável foi-se desenvolvendo aos poucos a partir de experiências com sequências numéricas ou geométricas.

Finalmente, a divisão por temas levanta problemas de "arrumação" de certas noções matemáticas. É o caso, por exemplo, do conceito de razão que pode estar associado a diversos grandes temas (aos números ou às funções, entre outras hipóteses). As opções que tomámos constituem por isso apenas uma solução entre várias possíveis para este tipo de problemas.

A divisão por grandes temas tem, por outro lado, a grande vantagem de facilitar a leitura do documento e consequentemente a sua utilização como instrumento de trabalho, sugerindo modos de concretizar as competências matemáticas em domínios específicos. A ideia é partir de um dado tema mas procurando evidenciar as conexões com outros e, sobretudo, tomando como meta o desenvolvimento das competências matemáticas transversais, isto é, daquelas que atravessam todos os temas e devem constituir os grandes objectivos de um currículo de Matemática. Ao orientar-se para os objectivos gerais, o presente trabalho situa-se numa perspectiva que atribui às escolas e aos professores a responsabilidade de tomarem as decisões mais adequadas na gestão do currículo: não há um modo único, nem uma sequência única, independente das situações concretas, dos alunos concretos e do professor concreto, para se atingirem os referidos objectivos.

Convém assinalar que, dentro de cada tema, não há uma separação por ciclos, ainda que, episodicamente, possam surgir referências ao nível etário dos alunos. Este facto deve-se igualmente a uma opção deliberada. Na verdade, aceitar que os alunos não desenvolvem as suas competências matemáticas do mesmo modo nem nos mesmos momentos implica promover uma forte interligação entre as experiências de ensino-aprendizagem nos vários ciclos. E isto, por sua vez, requer que os professores desenvolvam uma visão global sobre o ensino da Matemática ao longo de toda a escolaridade e não restrita apenas ao ciclo em que leccionam. Além disso, como sublinhámos atrás a propósito do exemplo da resolução de equações, a aprendizagem de certas noções não começa quando se apresentam as definições formais correspondentes mas, por vezes, muitos anos antes quando os alunos contactam de modo informal com essas noções.

A elaboração de um trabalho como este enfrenta, naturalmente, diversas dificuldades e limitações. Uma delas, porventura a maior, é que estamos (todos nós, como comunidade educativa) condicionados pela nossa própria inexperiência em entender o que pode ser um currículo de Matemática centrado em competências e não baseado numa acumulação de conhecimentos mais ou menos isolados uns dos outros, de acordo com uma sequência pré-estabelecida e supostamente universal. Na terminologia educativa oficial, tem cerca de dez anos a afirmação de que os objectivos dizem respeito não só a conhecimentos mas também a capacidades e atitudes, e o conceito de *gestão curricular flexível* é ainda mais recente. Além disso, não ignoramos que o ensino da Matemática se desenvolve num contexto e em condições que estão, muitas vezes, a uma grande distância do que seria desejável, e que está sujeito às mais diversas pressões exteriores.

Esperamos que este trabalho contribua para uma reflexão sobre aquilo que realmente pretendemos para a formação matemática de todas as crianças e todos os jovens ao longo da educação básica. Isso pode sugerir mudanças mas pode também implicar "simplesmente" ver com outros olhos aquilo que, em muitos casos, já procuramos fazer há muito tempo.

Não devemos esquecer que as condições em que se processa o ensino da Matemática vão mudando, e que o conhecimento que temos sobre a aprendizagem, assim como o nosso entendimento sobre o que é essencial num currículo de Matemática, vai evoluindo. Por isso mesmo, este trabalho é inevitavelmente datado: Fevereiro de 1999.

Como autores, queremos deixar aqui registado o nosso agradecimento aos colegas que, em diversos momentos da realização do presente trabalho, nos ajudaram, em especial através da crítica a versões preliminares dos vários capítulos.

Capítulo 2

MATEMÁTICA PARA TODOS

Aprender Matemática é um direito básico de todas as pessoas — em particular, de todas as crianças e jovens — e uma resposta a necessidades individuais e sociais. A Matemática faz parte dos currículos, ao longo de todos os anos da escolaridade obrigatória, por razões de natureza cultural, prática e cívica que têm a ver ao mesmo tempo com o desenvolvimento dos alunos enquanto indivíduos e membros da sociedade e com o progresso desta no seu conjunto.

A matemática constitui um património cultural da humanidade e um modo de pensar. A sua apropriação é um direito de todos. Neste sentido, seria impensável que não se proporcionasse a todos a oportunidade de aprender matemática de um modo realmente significativo, do mesmo modo que seria inconcebível eliminar da escola básica a educação literária, científica ou artística. Isto implica que todas as crianças e jovens devem ter possibilidade de contactar, a um nível apropriado, com as ideias e os métodos fundamentais da matemática e de apreciar o seu valor e a sua natureza.

Todas as pessoas precisam de desenvolver as suas próprias capacidades e preferências, bem como interpretar as mais variadas situações e tomar decisões fundamentadas relativas à sua vida pessoal, social ou familiar. A educação matemática pode contribuir, de um modo significativo e insubstituível, para ajudar os alunos a tornarem-se indivíduos não dependentes mas pelo contrário competentes, críticos e confiantes nos aspectos essenciais em que a sua vida se relaciona com a matemática. Isto implica que todas as crianças e jovens devem desenvolver a sua capacidade de usar a matemática para analisar e resolver situações problemáticas, para raciocinar e comunicar, assim como a auto-confiança necessária para fazê-lo.

Com alguma frequência, as necessidades básicas em termos de formação matemática são identificadas com as competências elementares de cálculo, designadamente a aptidão para efectuar os algoritmos das operações aritméticas ou, num nível mais avançado, para realizar os procedimentos algébricos rotineiros. Trata-se, porém, de uma visão ultrapassada e inadequada do que são as competências matemáticas que todas as pessoas devem desenvolver. O cálculo faz, naturalmente, parte integrante da matemática mas aprender procedimentos de cálculo isolados, só por si, não promove o contacto dos alunos com as ideias e os modos de pensar fundamentais da matemática e não garante que eles sejam capazes de mobilizar os conhecimentos relevantes quando tiverem que enfrentar mesmo as situações problemáticas mais simples surgidas num contexto diferente.

A *Declaração Mundial sobre Educação para Todos* da UNESCO (1990) indica explicitamente a resolução de problemas como um dos instrumentos de aprendizagem essenciais (ao lado de outros como a leitura, a escrita e o cálculo) e refere que, além dos conhecimentos, também as capacidades, os valores e as atitudes constituem conteúdos básicos de aprendizagem. É esta, igualmente, a perspectiva dos programas de Matemática para todos os ciclos do ensino básico aprovados no âmbito da última reforma curricular, aliás em consonância com o que sucede na generalidade dos países e de acordo com as recomendações dos mais importantes documentos programáticos internacionais sobre o ensino da Matemática.

Pensar naquilo que é básico, essencial, para todos, remete--nos habitualmente para a noção do que é ser-se alfabetizado. A verdade é que esta noção tem evoluído consideravelmente. No primeiro sentido em que o termo foi utilizado, consideravam-se alfabetizados todos aqueles que tinham feito um conjunto de aprendizagens básicas (de leitura, escrita e cálculo) como resultado de terem frequentado a escola durante um certo número de anos. Mas esta identificação de alfabetizado com formalmente escolarizado não resistiu à verificação de que sectores significativos da população, embora escolarizados, não eram capazes de realizar adequadamente tarefas da vida corrente que requeriam a mobilização dos conhecimentos supostamente adquiridos. Num primeiro momento, começou-se então a falar de *alfabetização funcional*, um conceito que procurava equacionar as competências necessárias à realização de novas tarefas. Mais recentemente, ao colocar-se o foco não na obtenção de tais competências mas no seu uso efectivo, recorreu-se a um novo conceito, o de *literacia*.

Esta nova perspectiva tem a grande vantagem de chamar a atenção para que a noção do que é ser-se alfabetizado — ou "letrado", se quisermos evidenciar a ligação ao conceito de literacia — não pode entender-se de forma estática. Os padrões à luz dos quais se entende o que é ser-se alfabetizado vão mudando com o tempo, numa evolução que tem a ver com os níveis de exigência da sociedade em cada momento e com o desenvolvimento da ciência e da tecnologia. Por esta razão, e também porque o foco está no uso de competências e não na sua (suposta) aquisição, não se pode determinar de uma vez por todas se uma pessoa é ou não alfabetizada. Na verdade, este conceito está inevitavelmente ligado à ideia de aprendizagem ao longo da vida.

No caso da matemática, as tradicionais "competências de cálculo" estão longe de corresponder às exigências da nossa sociedade actual e daquilo que poderíamos considerar ser-se *matematicamente letrado*. Hoje, há até menos exigências de cálculo na vida do dia-a-dia do que no passado: as máquinas não só efectuam as operações como calculam os trocos e as percentagens e, em muitos casos, registam mesmo os próprios valores numéricos. Mas, ao mesmo tempo, o mundo em que vivemos está cada vez mais matematizado. Por um lado, modelos matemáticos são usados numa crescente variedade de domínios de actividade num processo que ultrapassa largamente a ligação tradicional com as ciências experimentais, a engenharia e a tecnologia, abrangendo igualmente a economia, o mundo dos negócios, a medicina, a arte, as ciências sociais e humanas. Por outro lado, é cada vez mais abundante, mais variada e mais sofisticada a informação numérica com que lidamos a respeito dos mais diversos assuntos.

Exemplos de tarefas que realizamos com frequência incluem calcular uma despesa que implica o pagamento de um imposto, examinar diferentes alternativas para contrair um empréstimo, estimar um valor aproximado, compreender um anúncio ou uma notícia que se baseia em tabelas e gráficos. Na realização destas tarefas, aquilo que é determinante não é a proficiência de cálculo — geralmente efectuado com o recurso a uma calculadora ou a um computador — mas sim um conjunto de competências como perceber qual é a operação adequada, estimar a razoabilidade do resultado, localizar os dados relevantes numa tabela, interpretar um gráfico ou decidir a sequência de passos necessários para resolver um problema. Nalgumas situações, é importante saber avaliar criticamente a validade de um argumento, por exemplo analisando se uma generalização está apenas baseada em casos particulares ou se uma amostra é representativa de uma determinada população. Noutras situações, são ainda relevantes capacidades ligadas à visualização e à orientação espacial, como sucede quando se pretende interpretar uma imagem ou uma construção ou produzir uma explicação relativa a uma figura ou a um trajecto.

No que diz respeito ao cálculo, à realização dos algoritmos das operações com papel e lápis é preciso acrescentar a competência para efectuar cálculos mentalmente e com a calculadora e, ainda, para decidir quando é apropriado usar um ou outro procedimento. Além disso, estas competências não podem ser dissociadas de outras, como ter uma noção da ordem de grandeza de um número ou estimar um valor aproximado quando tal for pertinente. Finalmente, elas só fazem sentido se associadas à competência para identificar quais são as operações necessárias para resolver um determinado problema.

Estas competências estão relacionadas entre si e o desenvolvimento de umas ajuda o de outras. No entanto, são competências distintas. Dominar a execução de um algoritmo não significa que se compreenda o sentido da operação correspondente ou que se seja capaz de identificar a relevância dessa operação e de a usar numa situação concreta. Estudos nacionais e internacionais sobre competências matemáticas têm mostrado repetidamente que os nossos alunos têm desempenhos razoáveis nos procedimentos rotineiros de cálculo mas têm resultados muito fracos em tarefas de resolução de problemas. Por outro lado, a investigação tem mostrado, por exemplo, casos de crianças e adultos que são capazes de resolver problemas da vida corrente através do uso correcto de procedimentos orais de cálculo depois de terem fracassado na escola em exercícios que envolviam algoritmos das mesmas operações.

Poder-se-ia, talvez, pensar que o treino intensivo em procedimentos de cálculo deveria constituir uma prioridade para os primeiros anos de escolaridade, funcionando como um pré-requisito para uma aprendizagem posterior de competências de “ordem superior” ligadas ao pensamento e à resolução de problemas.

No entanto, a experiência e a investigação educacional vêm questionando, cada vez mais, esta hierarquização de competências. Ser-se matematicamente competente na realização de uma determinada tarefa implica ter não só os conhecimentos necessários como a capacidade de os identificar e mobilizar na situação concreta e ainda a disposição para fazê-lo efectivamente. Estes três aspectos (conhecimentos, capacidades, atitudes) são inseparáveis não só nas novas tarefas que surgem aos alunos mas, também, no próprio processo de aprendizagem. Se é certo que as capacidades se desenvolvem sobre conhecimentos concretos, não é menos verdade que a ausência de elementos de resolução de problemas ou de hábitos de pensamento é, muitas vezes, um obstáculo intransponível para se adquirirem mesmo as competências usualmente consideradas mais básicas. No caso da Matemática elementar, de pouco servirá tentar ensinar regras práticas em situações e de maneiras que não têm qualquer significado para as crianças e em que estas não são estimuladas a usar e expressar o seu pensamento.

A escola tem justamente a função de ajudar os alunos a desenvolver as suas capacidades e de cultivar a sua disposição para usá-las mesmo que (sobretudo quando!) isso envolva algum esforço de pensamento. Só neste contexto faz sentido a “aquisição” de conhecimentos, se pretendemos que estes não se tornem superficiais ou mesmo totalmente irrelevantes na primeira oportunidade.

Isto não significa que regras de cálculo ou aspectos da terminologia específica não sejam importantes e, mais do que isso, inerentes à aprendizagem da Matemática. Não se concebe o desenvolvimento da competência matemática sem tais componentes. Mas é impensável que uma aprendizagem significativa da Matemática, ao longo de 9 anos de escolaridade, não proporcione inúmeras oportunidades aos alunos para efectuarem uma grande variedade de cálculos ou para compreenderem a necessidade das definições e do rigor dos termos que utilizam. Se assim não fosse, o objectivo de ajudar os alunos a apreciar a matemática e a compreender a sua natureza estaria irremediavelmente condenado.

Em suma, o treino isolado e mecanizado de procedimentos de cálculo, assim como o conhecimento memorizado de termos e factos, não ajuda os alunos a compreender o que é a matemática, não constitui um pré-requisito para o desenvolvimento de capacidades ligadas ao raciocínio e à resolução de problemas e nem sequer garante que os alunos sejam capazes de utilizar na prática os conhecimentos supostamente adquiridos. Tais conhecimentos são relevantes se forem integrados num conjunto mais amplo e significativo de competências e se a sua aquisição progressiva for enquadrada por uma perspectiva que valorize o desenvolvimento de capacidades de pensamento e de atitudes positivas face à matemática e à aprendizagem.

Como se aprende

Para repensar as competências matemáticas essenciais para todos é necessário ter em conta aquilo que se sabe sobre o modo como os alunos aprendem e, em particular, como aprendem Matemática. Por isso, a investigação desenvolvida nas últimas décadas em torno do que é e como se processa a aprendizagem adquire uma indiscutível relevância.

Se a criança é vista como um "recipiente" que armazena informação, então o papel do professor é essencialmente o de transmitir "correctamente" essa informação. Os alunos são confrontados com factos, princípios e regras que devem "adquirir" para depois aplicar. O professor atribui um significado às suas próprias palavras e acções, esperando que o mesmo seja "apreendido" pelos alunos, de modo organizado, previsível e essencialmente passivo.

Porém, as coisas são muito diferentes se a aprendizagem é considerada um processo de construção activa do conhecimento por parte das crianças. Estas, tal como os adultos, concebem um modelo do mundo com base nas experiências que vivem e nos conhecimentos prévios que têm. Ao entrar na escola, têm já conhecimentos informais de Matemática que não podem ser ignorados. Depois, a natureza das actividades que realizam assume uma importância fundamental uma vez que é sobre a sua própria experiência que vão desenvolvendo os novos conhecimentos, construídos sobre os que já possuíam e através do filtro das crenças e atitudes que têm relativamente ao assunto em estudo e à própria aprendizagem. Na verdade, o aluno dá significado às coisas a partir daquilo que sabe, de toda a sua experiência anterior, e não necessariamente a partir da lógica interna dos conteúdos ou do sentido que o professor atribui às mesmas coisas.

Todos os professores experientes conhecem muitos exemplos que poderiam ilustrar estas afirmações. Quando um aluno afirma na aula que os números 4 e 7 "não podem ser *primos entre si* porque não têm qualquer relação um com o outro", isso não significa que, alguma vez, um professor de um ano anterior lhe tenha ensinado uma definição errada mas sim que, independentemente do que o professor diz, os alunos dão um sentido aos termos e aos conceitos que pode ser muito diferente daquele que o professor lhes atribui. Muitas vezes, o professor não se chega a aperceber dos sentidos que os alunos constróem ou só contacta com eles quando surge um erro inesperado ou uma afirmação surpreendente.

Ter consciência deste fenómeno não retira importância ao papel do professor, pelo contrário, coloca-lhe até novas exigências. Mas, antes de referir o papel do professor, será útil sistematizar um certo número de ideias fundamentais sobre a aprendizagem que são particularmente relevantes na discussão sobre as competências matemáticas essenciais e constituem pressupostos de todo o presente trabalho.

1. A aprendizagem requer o envolvimento das crianças em actividades significativas. As explicações do professor, num momento adequado e de uma forma apropriada, são certamente elementos fundamentais. Porém, não adianta ensinar coisas novas de modo expositivo se as crianças não tiveram oportunidade de viver experiências concretas sobre as quais essas explicações podem fazer sentido.

2. Para haver uma apropriação de novas ideias e novos conhecimentos, não basta que o aluno participe em actividades concretas, é preciso que ele se envolva num processo de reflexão sobre essas actividades. O recurso aos materiais manipuláveis e aos

instrumentos tecnológicos, por exemplo, é imprescindível como ponto de partida ou suporte de muitas tarefas escolares. Mas trata-se de um meio e não de um fim; o essencial está na natureza da actividade intelectual dos alunos.

3. Se queremos valorizar as capacidades de pensamento dos alunos, teremos de criar condições para que eles se envolvam em actividades adequadas ao desenvolvimento dessas capacidades. Não é por fazer muitas contas que os alunos aprendem a identificar quais são as operações que fazem sentido numa situação nova. Não é por fazer muitos exercícios repetitivos que os alunos adquirem a capacidade de resolver problemas. Não é por memorizar nomes de figuras e sólidos geométricos ou enunciados de propriedades e teoremas que os alunos aprendem a raciocinar e a argumentar logicamente.

4. Como já foi referido atrás, a ausência de elementos de compreensão, raciocínio e resolução de problemas nas actividades dos alunos pode mesmo ser responsável por grande parte das dificuldades que muitos sentem em realizar procedimentos aparentemente simples. Quando um aluno realiza uma tarefa matemática de forma mecânica e sem lhe atribuir qualquer sentido, é muito provável que ele seja incapaz de reconstituir aquilo que parecia saber fazer perante uma situação que apresenta alguma diferença (mesmo que ligeira) ou que esteja colocada num contexto diferente (ainda que familiar).

5. Também já foi sugerido que as competências dos dois tipos — conhecimento de termos, factos e procedimentos, por um lado, e capacidade de raciocinar e resolver problemas, por outro — se desenvolvem ao mesmo tempo e apoiando-se umas às outras. Por exemplo, o uso de definições rigorosas (um aspecto tão importante na Matemática) é um hábito de pensamento que dificilmente se desenvolve por imposição; pelo contrário, é algo que deve emergir de situações problemáticas como uma necessidade de coerência e argumentação lógica e que é progressivamente aperfeiçoado e aprofundado à medida que é relevante para novas situações, mais complexas.

6. Na verdade, não se aprende de uma vez por todas. Quando, por exemplo, o professor de Geografia afirma que um aluno não aprendeu as proporções porque deu respostas absurdas em problemas

simples de mapas e escalas, enquanto o professor de Matemática considera o contrário porque o mesmo aluno resolveu correctamente os exercícios da unidade respectiva, num certo sentido ambos têm razão. A aprendizagem é um processo gradual de compreensão e aperfeiçoamento. À medida que se vão envolvendo em novas situações, os alunos vão relacionando aquilo que já sabiam com as exigências das novas situações. Nesta perspectiva, a aprendizagem é, em grande parte, uma questão de estabelecer relações, ver as mesmas coisas de outros ângulos ou noutros contextos.

7. Quando estas relações se ignoram e se considera que os conhecimentos anteriores estão adquiridos e arquivados, ocorre um fenómeno que todos os professores experientes conhecem: muitos alunos, simplesmente, começam a errar naquilo que pareciam saber ou deixam, até, de evidenciar capacidades que lhes eram reconhecidas. Há crianças que desenvolvem uma capacidade de cálculo mental notável e que depois parecem perdê-la quando ela lhes surge como irrelevante e totalmente desligada dos processos algorítmicos do cálculo com papel e lápis. Um outro exemplo conhecido é o dos alunos que, com a introdução dos números relativos, deixam de saber realizar operações com os números naturais em que antes tinham tido sucesso.

8. Quando se pensa em termos de aprendizagem, cometer erros ou dizer as coisas de modo imperfeito ou incompleto não é um mal a evitar, é algo inerente ao próprio processo de aprendizagem. É na medida em que o aluno se expõe e tanto ele como o seu professor se apercebem dos erros e da sua origem que é possível falar sobre isso, compreender melhor o que está em causa, contribuir para uma aprendizagem mais significativa. Assim como o facto de um aluno ter sucesso numa determinada tarefa não garante que ele “domine” o assunto para sempre e em todas as situações, também o insucesso numa tarefa não significa que o aluno esteja irremediavelmente condenado a não compreender esse assunto.

9. A aprendizagem não é uma questão meramente cognitiva. Os aspectos afectivos estão igualmente envolvidos e são muitas vezes determinantes. Não apenas a motivação para aprender é essencial, como a natureza dessa motivação influencia o modo como os alunos se envolvem nas tarefas e aprendem. Se um aluno quer terminar uma tarefa apenas para ter uma nota positiva, é muito

provável que adopte uma atitude defensiva, procurando simplesmente obter o resultado “certo” e não cometer erros. Mas se está intrinsecamente motivado para realizar a tarefa, se realmente a valoriza, mais facilmente aceitará correr riscos para melhorar o seu trabalho e mais provavelmente se envolverá na exploração da situação e na compreensão daquilo que ela envolve.

10. Também as concepções que os alunos têm sobre a matemática e sobre o seu papel como alunos de Matemática desempenham um papel crucial na aprendizagem. Quando um aluno acredita que a matemática é a ciência do certo-ou-errado, em que aquilo que conta é saber antecipadamente como se fazem as coisas e ser rápido a fazê-las, então ele tenderá a desvalorizar, na prática, os processos de pensamento; muito provavelmente, ficará à espera que o professor lhe diga se aquilo que fez está certo e, perante uma situação aparentemente nova, chamará o professor para lhe explicar como se faz. Há situações, frequentes, em que um aluno não resolve um problema, embora tenha os conhecimentos necessários e as capacidades requeridas para o fazer, alegando que “não percebe o que é para fazer”, simplesmente porque crê que o papel do aluno em Matemática é “aplicar” algum procedimento que acabou de treinar e não põe sequer a hipótese de que se trate de uma disciplina para explorar, pensar e descobrir, ainda que isso leve tempo.

11. Todos estes aspectos — cognitivos, afectivos, do domínio das concepções — estão muito estreitamente ligados ao ambiente de aprendizagem que se vive no interior das aulas. Se a “norma” é valorizar o envolvimento em processos de pensamento, assim como o raciocínio e a argumentação lógica, pode criar-se uma “cultura da aula de Matemática” muito diferente daquela que valoriza as respostas rápidas e certas.

O papel do professor

Como já foi sugerido, reconhecer que a aprendizagem é um processo que requer o envolvimento dos alunos em actividades significativas e que é fortemente influenciado pela cultura da sala de aula não retira importância ao professor. O professor é o elemento chave na criação do ambiente que se vive na sala de aula. Cabe-lhe a responsabilidade de propor e organizar as tarefas a realizar e de coordenar o desenvolvimento da actividade dos alunos.

Na verdade, tanto a necessidade de promover uma aprendizagem significativa da Matemática para todos como a perspectiva atrás esboçada sobre a aprendizagem tornam o trabalho do professor ainda mais difícil e mais exigente do que se apenas lhe fosse pedido que "explicasse" a matéria de maneira clara, escolhesse uma lista de exercícios-tipo e verificasse os erros dos alunos.

Quando se diz que o professor não deve ignorar as experiências e os conhecimentos prévios que os seus alunos possuem, isso significa que o professor precisa de estar atento e construir as situações de aprendizagem e promover a reflexão dos alunos sobre essas experiências e esses conhecimentos. Por outras palavras, ainda que utilizando materiais e propostas de trabalho inspiradas em livros ou fichas pré-existentes, tem que os seleccionar e adaptar, bem como conduzir toda a actividade na sala de aula, de um modo adequado aos seus próprios alunos.

Por outro lado, se a aprendizagem é um processo de construção de significados por parte dos alunos, então a comunicação e a negociação desempenham um papel central na sala de aula. Ora, estes aspectos têm a ver, essencialmente, com o modo como o professor conduz as suas aulas. Além disso, uma vez que os alunos são diferentes uns dos outros e vão construindo diferentes imagens e concepções sobre os temas em estudo, o professor precisa de valorizar as interacções entre os alunos e entre estes e o professor.

Esta perspectiva é realmente mais exigente para o professor, de quem se espera não só trabalho como também criatividade, mas é-o igualmente para o aluno. De facto, aprender requer esforço e envolvimento pessoal. A afirmação de que o professor deve ser, acima de tudo, um "facilitador" da aprendizagem é muitas vezes interpretada num sentido errado: não se pretende dizer que o processo se torna "fácil" mas sim realçar que são os alunos quem aprende e que o professor deve criar as melhores condições para que isso ocorra.

Este trabalho é dedicado às capacidades e competências matemáticas que todos os alunos precisam desenvolver durante o ensino básico. Não se trata de um documento sobre as competências profissionais do professor nem de um trabalho sobre métodos de ensino. Porém, isso não nos impede de chamar a atenção para que quase tudo o que aqui se sugere tem a ver com a figura insubstituível do professor. Certamente, há outros elementos relevantes no processo de ensino-aprendizagem, como os programas ou os manuais, mas até o modo como estes são interpretados e usados depende essencialmente do professor.

Quando nos referimos ao professor, não o vemos isolado mas sim integrado numa escola, num conselho de turma, num grupo disciplinar. O trabalho do professor de uma disciplina é fortemente influenciado pelo ambiente que lhe é proporcionado pelas estruturas de gestão e de coordenação pedagógica da escola e que, por sua vez, ele próprio ajuda a construir. Quanto aos alunos, será útil ter presente que a aprendizagem não ocorre apenas na escola e que, dentro desta, não depende apenas do que se passa nas aulas de cada disciplina; está igualmente relacionada com o ambiente geral que a escola lhes proporciona e, em especial, com a coerência do trabalho do conjunto dos seus professores e dos projectos interdisciplinares que estes forem capazes de ajudar a desenvolver.

Capítulo 3

COMPETÊNCIA MATEMÁTICA

Vimos, no capítulo anterior, que o conhecimento de termos e de regras não pode ser identificado com a competência matemática, mesmo a um nível elementar, e que esse conhecimento, embora seja parte integrante e um produto inevitável de uma aprendizagem significativa da Matemática ao longo de vários anos, apenas se torna relevante quando está integrado num conjunto mais amplo de capacidades e atitudes. No presente capítulo, procuramos identificar estas capacidades e atitudes, assim como discutir o seu significado, pensando em termos da educação básica.

A este respeito, é interessante recordar palavras do grande matemático Henri Poincaré, proferidas numa conferência realizada em 1908, quando comentava o facto de muitas pessoas inteligentes e dotadas de excelente memória cometerem erros ou terem dificuldade em compreender raciocínios matemáticos:

> Quanto a mim, devo confessar que sou completamente incapaz de adicionar sem me enganar… A minha memória não é má, mas seria insuficiente para fazer de mim um bom jogador de xadrez. (…) Ela não me falha num raciocínio matemático (…) [por] ser conduzida pela marcha geral do raciocínio. [Numa] demonstração matemática (…) a ordem pela qual [os] elementos são colocados é muito mais importante que os próprios elementos. Se tenho a sensação, a intuição, por assim dizer, desta ordem, de forma a que possa perceber com

> uma "olhadela" o conjunto do raciocínio, já não tenho que recear esquecer nenhum dos seus elementos.

Nesta citação, a matemática surge identificada com um modo de pensar que é distinto de outros ligados a diferentes áreas do conhecimento e da actividade humana. Poincaré argumenta que é uma forte intuição, associada a este modo de pensar, aquilo que está na base do poder criativo em matemática e não uma memória prodigiosa capaz de armazenar uma grande quantidade de regras e de cálculos. Não pretendemos discutir aqui o talento criativo, mas cremos que a apropriação, a um nível adequado, de aspectos essenciais do raciocínio matemático é fundamental para se ser matematicamente competente.

Quando uma criança faz explorações multiplicando diversos números, pode observar que, sempre que um dos factores é par, também o produto é par. Isto pode levá-la a fazer uma generalização a partir dos casos concretos que observou, a conjecturar uma regra. Para ter a certeza ou para compreender por que razão as coisas se passam desse modo, precisa de encontrar uma explicação lógica: se um dos números é par, ele é um múltiplo de 2; então o seu produto por outro número qualquer será ainda um múltiplo de 2, logo par. Trata-se de uma justificação convincente para a aceitação da regra que descobriu.

Noutras situações, as conjecturas podem ser falsas. Se a criança pensar que o mesmo sucede com a soma de dois números — isto é, se uma das parcelas é par então a soma é par — e experimentar sistematicamente com vários casos, encontrará rapidamente um contra-exemplo que a leva a rejeitar a hipótese que tinha formulado.

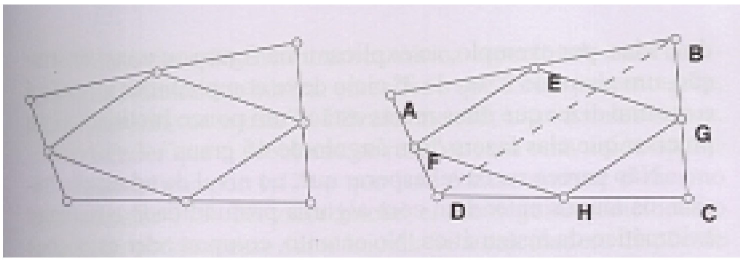
Estes exemplos são muito simples mas encerram aspectos fundamentais da actividade matemática: explorar, procurar generalizações, fazer conjecturas, raciocinar logicamente. Se a criança se habitua a experimentar e a tentar encontrar generalizações, a procurar o que há de invariante numa situação — o que não muda quaisquer que sejam os exemplos concretos — e se ela compreende que não basta que uma hipótese formulada se verifique em alguns casos para poder tomar essa hipótese como uma afirmação verdadeira, sendo necessário encontrar uma argumentação lógica para a validar, ou um contra-exemplo para a rejeitar, então a criança está a desenvolver aspectos essenciais da sua competência matemática.

É importante referir que não há aqui apenas elementos cognitivos. A criança adquirirá esta competência também na medida em que goste de se envolver neste tipo de actividade intelectual, em que se sinta confiante para fazê-lo com autonomia, e em que vá desenvolvendo a concepção de que aquilo que torna válida uma afirmação em Matemática não é o simples facto de coincidir com a resposta do manual ou com a aprovação do professor mas a consistência da argumentação lógica apresentada.

A ênfase nestes aspectos do raciocínio matemático, ao longo dos primeiros anos de aprendizagem, pode desempenhar um papel essencial para que a criança se torne matematicamente competente, a um nível apropriado à sua idade e grau de escolaridade, e ao mesmo tempo esteja melhor preparada para contactar com outros aspectos da Matemática. Claro que o raciocínio não se desenvolve sem conteúdos. Não se imagina o seu desenvolvimento sem o conhecimento e a compreensão de noções matemáticas fundamentais e a aquisição progressiva de capacidades ligadas, por exemplo, ao sentido do número ou à visualização espacial — para citar algumas das mais relevantes nos primeiros anos. Porém, estes aspectos mais específicos ligados a temas matemáticos serão abordados no capítulo seguinte. No presente capítulo, procuramos salientar as competências matemáticas mais gerais que atravessam os vários temas.

A referida ênfase no raciocínio deve manter-se ao longo de toda a escolaridade. As situações a explorar tornam-se progressivamente mais complexas mas isso não altera a natureza da actividade intelectual. Se os exemplos atrás apresentados podem ser adequados para o 1º ciclo, um aluno do 2º ou do 3º ciclo pode envolver-se numa investigação sobre os eixos de simetria dos polígonos regulares. Eventualmente com a ajuda de um espelho, pode estudar quantos eixos de simetria têm os polígonos de 3, 4, 5, … lados, e formular uma conjectura sobre o que sucederá no caso geral — isto é, para n lados. A conjectura de que um polígono regular de n lados tem exactamente n eixos de simetria parece muito plausível mas, uma vez mais, é preciso apresentar uma explicação lógica para esse facto — ou, alternativamente, encontrar um contra-exemplo que refute a conjectura formulada. A observação cuidadosa da posição dos eixos de simetria em relação aos lados e vértices dos polígonos, em diferentes casos, pode conduzir a uma justificação convincente que, mesmo não sendo uma demonstração formal, é totalmente satisfatória.

No fim do 3º ciclo, um aluno matematicamente competente deve ser sensível ao interesse de demonstrar conjecturas, compreender o raciocínio seguido em demonstrações simples e mesmo, nalguns casos, ser capaz de as fazer por si próprio. Por exemplo, ao explorar o que se passa unindo os pontos médios dos lados de diversos quadriláteros, o aluno pode conjecturar que se obtém sempre um paralelogramo. Mas o facto de se verificar em muitos casos não prova que isso seja verdade e, além disso, não explica porquê — muitas vezes, a demonstração não servirá tanto para ter a certeza de algo de que não se duvida mas para compreender por que razão isso acontece. Eventualmente, com uma sugestão do professor, o aluno pode unir os vértices opostos do quadrilátero inicial e provar, a partir de propriedades elementares dos triângulos, que se obtém realmente sempre um paralelogramo.



Unindo os pontos médios dos lados de um quadrilátero, obtemos sempre um paralelogramo.
O mesmo se pode dizer de FH e EG, uma vez que são ambos paralelos a AC. Então FEGH é um paralelogramo.

Outros aspectos da Matemática tornam-se igualmente relevantes na educação básica, à medida que os alunos vão avançando na aprendizagem. Um deles é o modo como, no contexto da actividade matemática, as afirmações são formuladas e justificadas, através de uma linguagem que deve ser gradualmente mais precisa. Se nos situarmos a um nível próximo do final da escolaridade obrigatória, a competência matemática básica inclui a compreensão da importância de se produzir afirmações não ambíguas e, mesmo, a capacidade para usar uma terminologia matemática específica.

Porém, o rigor da linguagem, assim como o formalismo, devem corresponder a uma necessidade sentida e não a uma imposição arbitrária. A experiência em tarefas que implicam a comunicação de ideias e de descobertas matemáticas pode evidenciar essa necessidade. Ser capaz de comunicar matematicamente, tanto por escrito como oralmente, constitui um aspecto essencial da competência matemática que todos devem desenvolver. Se uma criança, ao descrever uma situação, usa a expressão "caixa de fósforos" para designar um tipo de sólido, é absurdo considerar que a sua explicação seria mais "clara" ou mais "rigorosa" se ela tivesse utilizado o termo "paralelepípedo". Mas, por exemplo, ao explicar uma figura ou uma construção, um aluno do 2º ou do 3º ciclo deve compreender que não é o mesmo dizer que duas rectas estão "um pouco inclinadas" ou precisar que elas fazem "um ângulo de 45 graus".

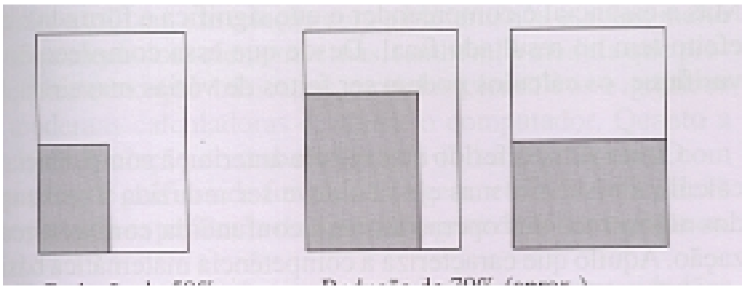
Não parece razoável esperar que, ao nível da educação básica, os alunos entendam com alguma profundidade o carácter axiomático da matemática. No entanto, compreender as noções de conjectura e teorema, e distingui-las, assim como compreender o que é uma demonstração, faz parte de uma competência matemática básica. Além disso, os alunos devem também compreender o que é uma definição e ter alguma experiência de situações em que se examinam as consequências de se usarem diferentes definições. Actividades de *organização local* da matemática podem ser muito úteis a este respeito, por exemplo, relacionar entre si e hierarquizar todos os tipos de quadriláteros que se conhecem, analisando de que modo as soluções encontradas dependem das definições que se adoptam: Um quadrado é ou não um rectângulo? Um paralelogramo é ou não um trapézio? Um losango é ou não um papagaio?

A competência matemática é essencial a todas as pessoas na interpretação de uma grande variedade de situações e na resolução de diversos tipos de problemas. Encontramos muitas dessas situações na vida de todos os dias.

Quando queremos comprar um artigo em que, ao preço indicado, é ainda preciso juntar um imposto de 17%, precisamos de fazer uma estimativa ou mesmo calcular o custo final. Imaginemos que o artigo custa 41 contos sem imposto. Dez por cento são 4100$00; vinte por cento são 8200$00; então o custo final estará situado entre 45 e 50 contos. Para o calcular com exactidão, podemos usar uma calculadora, multiplicando 41000 por 1,17; obteremos 47970$00. A previsão feita anteriormente leva-nos a crer que não cometemos qualquer erro nas teclas da calculadora.

Nesta situação encontramos vários aspectos de uma competência matemática básica: entender o que é uma percentagem, fazer estimativas e usar o cálculo mental, usar a calculadora, compreender que o problema se resolve com uma única operação (multiplicar por 1,17) e que isso é exactamente o mesmo que calcular 17% do valor inicial e, em seguida, adicionar o resultado obtido a esse valor inicial. Se a calculadora dispõe de uma tecla específica para a percentagem, então pode-se fazer 41000 x 17 % +.

Quando queremos reduzir um texto ou um desenho impresso em A4 para formato A5 numa fotocopiadora em que essa operação não está automaticamente disponível, temos que pensar qual é a redução que devemos indicar. Uma vez que uma folha A5 é exactamente metade de uma folha A4, poderíamos pensar que a redução é de 50%; ao experimentar uma tal redução, veríamos que o nosso texto ou desenho passava a ocupar não metade mas um quarto da área inicial! Pensando um pouco, perceberíamos que, realmente, duplicar cada uma das dimensões de um rectângulo implica quadriplicar a área. No nosso caso, o que fizemos foi 0,5 x 0,5 = 0,25 (e 0,25 é precisamente um quarto). Calculando mentalmente, vemos que 0,7 x 0,7 = 0,49 nos dá um valor próximo de 0,5; a conclusão é que 70% será um valor bastante aproximado da redução pretendida.



Com uma redução para metade do comprimento e da largura, a área do novo rectângulo (sombreado é reduzido para um quarto.

Neste problema há também diversas competências matemáticas envolvidas. Algumas são evidentemente de cálculo mas incluem compreender que, no contexto do problema, multiplicar por um número positivo menor do que 1 representa uma redução e não um aumento. Por outro lado, a interpretação da situação está ligada à noção de área e, ainda, à compreensão do que significa ampliar ou reduzir proporcionalmente uma figura. Além disso, se a situação se desenrolar como a descrevemos, é também relevante a capacidade para analisar por que razão uma determinada estratégia falhou e que alternativa de resolução do problema deve ser ensaiada.

Quando, na reunião de encarregados de educação, a directora de turma informa que a nota final do aluno é calculada pela fórmula $N = (3 \times c + p) / 4$, precisamos de perceber o que isso significa e como concretizamos a fórmula para determinados valores da classificação interna (c) e da prova global (p). Ao compreendermos que se trata de uma média ponderada em que o peso do primeiro valor é de 3/4 (ou 75%) e o do segundo é de 1/4 (ou 25%), podemos estimar imediatamente que, por exemplo, com 14 na classificação interna e 10 na prova global, o resultado final será um valor entre 10 e 14, mais próximo de 14.

Claro que é relevante, numa situação deste tipo, o domínio de aspectos ligados à ordem das operações e ao uso de parêntesis. Mas o essencial é compreender o que significa a fórmula e que efeito tem no resultado final. Desde que essa compreensão se verifique, os cálculos podem ser feitos de várias maneiras.

Como já foi referido no capítulo anterior, a competência de cálculo é essencial mas ela não deve ser reduzida à realização dos algoritmos das operações nem confundida com essa realização. Aquilo que caracteriza a competência matemática básica neste domínio é a capacidade para

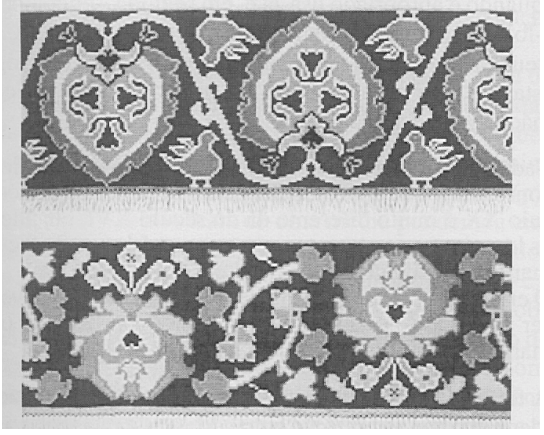
- avaliar se uma situação requer um valor aproximado ou exacto;
- estimar o valor aproximado de uma operação — o que será suficiente nalgumas situações e ajudará a ajuizar da razoabilidade do resultado quando o cálculo exacto é requerido;
- usar o cálculo mental, algoritmos das operações ou a calculadora, de acordo com a complexidade dos valores e operações em causa.

Quanto ao uso da calculadora, a questão essencial está em saber quando é apropriado usá-la e, em seguida, ser competente a fazê-lo. Vale a pena recordar aquilo que Bento de Jesus Caraça escreveu em 1942, após ter observado que as tábuas de logaritmos estavam a ser ultrapassadas, em certos ramos de aplicação, pela máquina de calcular:

> Cada época cria e usa os seus instrumentos de cálculo conforme o que a técnica lhe permite; a técnica do século XX é muito diferente da do século XVI, quando os logaritmos apareceram como necessários para efectuar certos cálculos.
> O ensino do Liceu que é, ou deve ser, *para todos*, deve ser orientado no sentido de proporcionar a *todos* o manejo do instrumento que a técnica nova permite.

A tecnologia que, hoje, todos devem ter oportunidade de aprender a utilizar, em relação com a Matemática escolar, inclui não só a calculadora elementar mas, também, à medida que progridem na educação básica, os modelos científicos e gráficos das modernas calculadoras e, ainda, o computador. Quanto a este, uma iniciação ao trabalho com a folha de cálculo e com programas de gráficos de funções e de geometria dinâmica deve fazer parte da experiência de aprendizagem de todos os alunos.

De resto, a competência matemática que todos os cidadãos devem desenvolver não se limita às situações que envolvem raciocínio numérico. Quando nos procuramos orientar numa cidade ou queremos dar alguma explicação sobre um mapa, a sensibilidade para ver relações geométricas e pensar com base nessas relações faz parte de uma competência matemática básica. O mesmo se passa quando observamos a natureza, uma obra de arte ou algum artefacto construído pelos seres humanos: a tendência para procurar as regularidades e perceber a estrutura que está presente na situação influencia o modo como apreciamos e compreendemos aquilo que estamos a observar.



Muitos objectos de arte podem ser apreciados do ponto de vista das suas regularidades geométricas. Frisos das barras de tapetes de Arraiolos contituem exemplos de diversos tipos de simetrias (as figuras extraídas do livro Tapeçarias Decorativas de Arraiolos, de Fernando Baptista de Oliveira).

Os exemplos anteriores mostram que, em situações muito diferentes e recorrendo a objectos matemáticos distintos, a competência matemática está relacionada com esta tendência para "ver" a estrutura abstracta por detrás daquilo que observamos.

Em síntese, a competência matemática que todos devem desenvolver, no seu percurso ao longo da educação básica, inclui:

• a predisposição e a aptidão para raciocinar matematicamente, isto é, para explorar as situações problemáticas, procurar regularidades, fazer e testar conjecturas, formular generalizações, pensar de maneira lógica;

• o gosto e a confiança pessoal em desenvolver actividades intelectuais que envolvem raciocínio matemático e a concepção de que a validade de uma afirmação está relacionada com a consistência da argumentação lógica e não com alguma autoridade exterior;

• a aptidão para discutir com outros e comunicar descobertas e ideias matemáticas através do uso de uma linguagem, escrita e oral, não ambígua e adequada à situação;

• a compreensão de noções como conjectura, teorema e demonstração, assim como a capacidade de examinar consequências do uso de diferentes definições;

• a predisposição para procurar entender a estrutura de um problema e a capacidade de desenvolver processos de resolução, assim como para analisar os erros cometidos e ensaiar estratégias alternativas;

• a capacidade de decidir sobre a razoabilidade de um resultado e de usar, consoante os casos, o cálculo mental, os algoritmos de papel e lápis ou os instrumentos tecnológicos;

• a tendência para procurar "ver" e apreciar a estrutura abstracta que está presente numa situação, seja ela relativa a problemas do dia-a-dia, à natureza ou à arte, envolva ela elementos numéricos, geométricos ou ambos.

A competência matemática que integra estes aspectos desenvolve-se gradualmente, ao longo dos vários anos da escolaridade básica, e envolve a compreensão de um conjunto de noções matemáticas fundamentais. Por isso, faz sentido falar de sentido do número, de capacidades geométricas, de raciocínio probabilístico, de aptidão para usar e interpretar funções e gráficos. Estes pontos serão tratados em pormenor no capítulo seguinte.

Capítulo 4

GRANDES TEMAS MATEMÁTICOS

Neste capítulo, discutimos o modo como se podem concretizar os aspectos que atrás associámos à competência matemática quando os alunos trabalham em torno dos grandes temas dos currículos de Matemática da educação básica.

Optámos por estruturar o capítulo em quatro subcapítulos de acordo com a seguinte divisão:

- Números e cálculo
- Geometria
- Estatística e probabilidades
- Álgebra e funções

Dentro de cada subcapítulo, considerámos sucessivamente uma introdução, uma reflexão genérica sobre alguns dos principais problemas da aprendizagem do tema respectivo (abordados a partir do que a investigação educacional e a experiência nos ensinam), uma discussão sobre as principais capacidades a desenvolver pelos alunos e, finalmente, uma proposta de aspectos característicos do que é a competência matemática no respectivo domínio.

A consciência de que é imperioso ver o desenvolvimento da competência matemática como um processo continuado ao longo de todo o percurso escolar dos alunos levou-nos a não fazer uma organização deste trabalho por ciclos de escolaridade. Apesar disso, a reflexão sobre os problemas da aprendizagem (que procuramos organizar em subtemas) vai, em geral, embora não rigidamente, das aprendizagens iniciais para aquelas que são esperadas na última fase da educação básica. Quanto aos aspectos da competência matemática em cada domínio, eles são formulados, primeiro, para todos os ciclos e, em seguida, salientam-se alguns específicos de cada ciclo.

Como já foi referido na introdução, a divisão em grandes temas levanta problemas. A decisão de criar apenas quatro subcapítulos obrigou-nos a diversas opções difíceis, das quais vale a pena destacar a que se refere à aprendizagem da medida.

A medida é uma área diferente da geometria e os aspectos mais importantes das capacidades geométricas e das maneiras de pensar em geometria são, por vezes, subvertidas por uma ênfase descabida em procedimentos numéricos e técnicas de cálculo. No entanto, ao nível da educação básica e na disciplina de Matemática, o estudo da medida tem uma ligação preferencial com capacidades e contextos geométricos, razão pela qual decidimos incluí-la no subcapítulo da geometria, ainda que reservando-lhe uma secção específica.

4.1

NÚMEROS E CÁLCULO

Não é por acaso que ainda hoje associamos a Matemática na escola elementar à aritmética. Durante muito tempo foi tarefa da escola elementar o ensino da aritmética. Saber aritmética correspondia a saber as tabuadas e a saber fazer as contas.

Gradualmente, a ideia do que devia ser a Matemática na escola elementar foi-se alargando e hoje considera-se que esta deve compreender, para além dos números e das operações, a medida, a geometria, a estatística e as probabilidades. Por outro lado, como vimos nos capítulos anteriores, a ênfase no raciocínio, na capacidade de resolução de problemas e na aptidão para comunicar matematicamente corresponde a uma orientação fundamental para todos e não apenas para os melhores alunos ou para os níveis de escolaridade mais avançados.

Hoje, os adultos fazem relativamente pouco uso do cálculo escrito, em especial dos algoritmos formais das operações. As calculadoras estão universalmente disponíveis e a preços irrisórios. É claro que continua a ser importante aprender os algoritmos, mas o papel atribuído ao cálculo ao longo da escolaridade deve ser reexaminado tendo em conta as necessidades actuais e os grandes objectivos do ensino da Matemática. Isto obriga-nos a repensar o ensino e a aprendizagem dos números e das operações.

A aprendizagem dos números e do cálculo

Todos os alunos devem adquirir uma compreensão global do número e das operações a par da capacidade de usar essa compreensão de maneira flexível para fazer julgamentos matemáticos e desenvolver estratégias úteis de manipulação dos números e das operações. Este *sentido do número* — como diversos autores lhe chamam — não é algo que se aprenda de uma vez por todas numa dada fase do percurso escolar dos alunos mas sim uma competência genérica que se desenvolve ao longo de todo o ensino obrigatório e não obrigatório e mesmo ao longo de toda a vida. Com o significado que aqui lhe atribuímos, o sentido do número constitui uma referência central do ensino dos números e do cálculo desde os primeiros anos.

Com efeito, muitas das experiências das crianças e dos jovens envolvem o conhecimento intuitivo do número e das relações numéricas e é com base nestas experiências que os alunos vão construindo os diferentes significados do número e, deste modo, desenvolvendo o sentido do número. Este processo implica um trabalho prolongado que procure ligar as intuições das crianças e a sua linguagem informal às quatro operações e à linguagem matemática, nomeadamente, aos símbolos usados para cada operação. O trabalho exploratório com situações problemáticas, envolvendo objectos físicos e em que é possível "ver" os efeitos das operações, é fundamental para o desenvolvimento do significado destas e para contextualizar a aprendizagem dos procedimentos de cálculo.

O conhecimento dos números e das operações constitui um saber indispensável ao dia a dia dos alunos. Os números estão presentes em múltiplos campos da sociedade actual e são usados não apenas para fazer cálculos ou para representar medidas, mas, também, para localização, para ordenação e para identificação. Ser capaz de estimar o comprimento de determinado objecto ou o número de objectos presentes num determinado contexto é um outro aspecto da utilidade do número no dia a dia. Saber avaliar a razoabilidade de um resultado constitui uma outra competência fundamental.

O ensino dos números e das operações na educação básica não deve visar a aquisição de um conjunto de técnicas rotineiras mas sim uma aprendizagem significativa ligada a uma compreensão relacional das propriedades dos números e das operações. Não basta aprender procedimentos; é necessário transformá-los em instrumentos de pensamento.

Aprendizagens iniciais

O raciocínio informal e intuitivo deve ser privilegiado nos primeiros anos de escolaridade e sempre que um conceito se alarga, porque ajuda os alunos a atribuirem significado à matemática. Materiais manipuláveis e modelos de representação contribuem para a integração dos processos na rede conceptual, isto é, para uma compreensão consistente. Além disso, facilitam a comunicação, ao permitir que os alunos falem de objectos concretos quando explicam os seus raciocínios. A vivência de experiências, acompanhada de discussão, é extremamente importante para que os alunos vão estabelecendo ligações entre a linguagem oral e os símbolos e vão desenvolvendo a capacidade e o gosto de raciocinar.

A compreensão dos números e do sistema de numeração constitui o alicerce sobre o qual a maioria das capacidades matemáticas é construída. A compreensão da contagem resulta da vivência de muitas experiências onde ela é útil e necessária. Utilizar a contagem para saber quantos elementos tem um conjunto costuma referir-se como encontrar a *cardinalidade* do conjunto. Um outro uso da contagem é para determinar qual o item numa série (primeiro, segundo, terceiro...) que está a ser nomeado, isto é, encontrar a *ordinalidade*.

Um aspecto a considerar no desenvolvimento do sentido do número é a capacidade para reconhecer conjuntos com um pequeno número de elementos sem os contar. À medida que os alunos adquirem experiência com números, esta capacidade pode estender-se a conjuntos de quatro, cinco ou seis elementos. Para além de seis ou sete, é duvidoso que possam identificar o seu número sem os contar, a não ser que estejam dispostos com um arranjo especial.

A noção de que um número pode ser decomposto de diversas maneiras é essencial para a compreensão dos conceitos de adição e subtracção. Neste sentido, uma criança que aprendeu que 9 pode representar-se como 5+4, 6+3, 7+2 e 8+1 está em melhor posição do que outra que não tenha um tal conhecimento. Ser capaz de estabelecer relações entre os diferentes números, bem como relacionar um número com os que lhe estão próximos (por exemplo, relacionar o 5 com o 6, com o 4, ou com o 3) é também um aspecto essencial do sentido do número.

Os conceitos de base, valor de posição e notação posicional estão interligados e são interdependentes no nosso sistema de numeração. Embora não seja necessário que os alunos sejam capazes de distingui-los dum modo formal, há actividades que contribuem para a sua compreensão. A ideia de base tem a ver com o facto de, quando contamos, fazermos grupos e contarmos os grupos, mantendo o número de itens (*base*) que cada um dos grupos contém através do sistema. Qualquer algarismo pode representar um número de elementos ou um número de grupos ou um número de grupos de grupos e, por isso, é possível exprimir qualquer quantidade numérica usando apenas 10 símbolos (os algarismos 0-9). Este facto constitui a ideia fundamental do *valor de posição*. A escrita lado a lado dos algarismos para nos dizer quantos elementos de cada valor de posição nós temos, é o que se costuma chamar a *notação posicional*.

Operações

Tradicionalmente, a maior parte do tempo da escola era gasto a ensinar os algoritmos das quatro operações (adição, subtracção, multiplicação e divisão). Os algoritmos devem continuar a ser ensinados, mas hoje deve dar-se menos atenção à prática repetitiva dos algoritmos e mais atenção à compreensão das operações e das relações entre elas. As propriedades das operações devem ser consideradas em situações concretas, em especial a propósito do seu uso para facilitar o cálculo. Podem, ainda, ser referidas para justificar algoritmos, como é o caso da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição no algoritmo tradicional da multiplicação.

O conhecimento de elementos históricos, relativos aos algoritmos das operações e a outros aspectos como os sistemas de numeração, pode tornar-se muito relevante. Não se trata de divulgar curiosidades mas sim de contribuir para que os alunos vejam a matemática como uma ciência em evolução e compreendam que os métodos e procedimentos matemáticos não foram sempre os mesmos, dependendo das culturas dos diferentes povos e épocas. Além disso, este tipo de conhecimento pode ajudar a não confundir a operação com um dado algoritmo de cálculo.

Ajudar os alunos a desenvolver estratégias que lhes permitam aprender a tabuada, como forma de facilitar o cálculo mental, o cálculo escrito e a estimação, contribui para que compreendam relações entre os números e raciocinem matematicamente. Esta abordagem requer, aparentemente, mais tempo do que a aprendizagem por simples memorização mas desenvolve competências associadas à investigação, permite a discussão das ideias e a validação das soluções e pode tornar mais significativa a aprendizagem dos algoritmos.

Para os alunos desenvolverem uma melhor compreensão das operações devem ser familiarizados com as diferentes ideias subjacentes a cada uma delas. Por exemplo, a multiplicação e divisão estão relacionadas com a adição e subtracção, mas no raciocínio multiplicativo existem novos significados para os números que devem ser apreendidos e novas espécies de relações representadas. Enquanto o raciocínio aditivo é, normalmente, sobre situações que envolvem acções de juntar ou separar, as situações que conduzem ao raciocínio multiplicativo são diferentes e envolvem mais do que isso. Por exemplo, na situação "um carro tem 4 rodas, quantas rodas têm 5 carros?", há um invariante (que não existe no raciocínio aditivo) que é o número de rodas por carro.

Noutros casos, as situações multiplicativas envolvem relações entre variáveis. Por exemplo, "1kg de açúcar custa 180$00, logo 1/2kg custa 90$00" envolve um raciocínio que, embora com analogias, é diferente do anterior: os números não se referem a cardinais de conjuntos, mas são valores contínuos, pode falar-se dum factor ou duma terceira variável ligando as duas variáveis (o "preço por quilo" de açúcar).

Há, ainda, outros casos que envolvem situações de partilha e de divisão. Convém notar que, na verdade, existem dois tipos de divisão: a divisão inteira com resto e a divisão como operação inversa da multiplicação. Na primeira, a cada par de números corresponde outro par de números, enquanto, na segunda, a um par de números corresponde um número. Problemas e contextos diversos implicam diferentes tipos de divisão, como se pode ver no exemplo: "A escola da Rita vai organizar uma visita de estudo às gravuras de Foz Côa. Inicialmente foram alugados 6 autocarros de 56 lugares para transportar professores e alunos, mas, afinal, houve 501 inscrições. Quantos autocarros são, então, necessários?".

Conexões entre as operações proporcionam novas formas de pensar. Por exemplo, quando um aluno tem de responder à pergunta "Quantas rodas têm 8 triciclos?", pode contar todas as rodas, pode aplicar a adição repetida (3+3+3+…), pode fazer quatro grupos de dois triciclos cada (6+6+6+6) ou pode aplicar a multiplicação (8x3 ou 4x6). Estas soluções reflectem maneiras diferentes de pensar sobre o problema, assim como graus diferentes de preocupação com a eficácia da resolução.

A relação entre uma operação e a sua inversa é outra conexão que pode proporcionar diferentes maneiras de pensar sobre um problema. Por exemplo, para calcular 480:8, um aluno pode pensar na situação como 8x? = 480, em vez de o fazer em termos de divisão. Isto não significa que não saiba fazer a divisão, mas, antes, que sabe a relação inversa entre a divisão e a multiplicação e que prefere resolver o problema dessa forma.

Para compreender a relação entre as operações é essencial perceber bem cada uma delas. Por exemplo, dividir por 5 é o mesmo que multiplicar por 2 e dividir por 10. Estas relações aumentam à medida que se passa das operações nos números inteiros para os racionais. Por exemplo, multiplicar por 0,1 é equivalente a dividir por 10 ou dividir por 0,1 é o mesmo que multiplicar por 10.

Além disso, estas relações aumentam, também, à medida que os alunos contactam com novas operações ao longo dos 2º e 3º ciclos. De facto, os alunos precisam de conhecer a potenciação e a radiciação e entender a raiz quadrada como uma operação inversa da potenciação de expoente 2. O domínio do algoritmo da raiz quadrada, que outrora fez parte dos programas escolares, não faz sentido hoje — o cálculo faz-se com a calculadora ou, em casos simples, mentalmente — mas é essencial saber que calcular $\sqrt{n}$ significa encontrar o número (ou números) que, elevado ao quadrado, dá n.

Alargamento do conceito de número

Um dos conjuntos numéricos com que muitos alunos têm dificuldade em lidar é o dos denominados números decimais. Segundo a investigação, a origem de alguns erros pode estar na forma como se introduzem estes números. Por exemplo, é habitual que os decimais apareçam pela primeira vez ligados a questões de medida. Neste caso basta mudar a unidade para que desapareça a vírgula, que só serviu para disfarçar um número inteiro: se um dado comprimento mede 1,23m, basta expressá-lo em centímetros para já não se tratar de um número escrito com vírgula.

Acontece, por exemplo, que os alunos, ao compararem dois números inteiros, fixam a regra “quanto maior o número de dígitos maior é o número” e depois continuam a aplicá-la para os decimais. O desenvolvimento dos conceitos de ordem e de equivalência, que se inicia no 1º ciclo, deve ser promovido pela manipulação de materiais, com o uso de modelos figurativos e ligados a situações do mundo real, através de explorações acompanhadas da descrição das experiências com a utilização da linguagem oral em conjunção com o uso de símbolos.

Os alunos inventam frequentemente regras próprias que podem ser erradas mas que permitem obter resultados correctos em casos particulares. Por exemplo, para ordenar decimais, “é menor o número que tem mais algarismos depois da vírgula”. A regra é falsa mas conduz a resultados certos em casos como $12{,}04 < 12{,}4$; no entanto, é falso $12{,}413 < 12{,}4$ ou $4{,}25 < 4{,}1$. Um outro exemplo é a aplicação do algoritmo da ordenação dos inteiros aos números que estão antes da vírgula e aos que estão depois da vírgula, gerando afirmações falsas como “$4{,}15 > 4{,}5$” (pois 15 é maior que 5). O professor pode não se aperceber destas regras implícitas se não proporcionar aos alunos situações em que elas não funcionem e conduzam a erros.

Estudos realizados nesta área mostram a existência de diferentes níveis de compreensão, podendo acontecer que os alunos utilizem correctamente os números decimais em situações concretas e familiares, por exemplo de medida, mas apresentem lacunas no seu domínio. A aprendizagem dos números decimais não se reduz a conhecer nomes e algumas regras de cálculo, mas envolve a interiorização de uma cadeia complexa de relações, na própria estrutura do valor de posição (por exemplo, 0,3 é equivalente a 0,30), a ligação a outros conceitos como o de fracção, alguma visualização e a conexão com situações do mundo real. Por isso, a aprendizagem deve envolver a exploração de situações com materiais concretos e modelos visuais, como os modelos de áreas, num processo a desenvolver ao longo dos vários ciclos do ensino básico.

A partir do 2º ciclo, é especialmente importante que os alunos percebam que os números têm diversas representações. Este facto é decisivo para que possam resolver uma série de problemas com que são confrontados. Conceitos como fracção, razão, decimal e percentagem constituem ideias chave a serem trabalhadas em situações significativas para os alunos e que lhes permitam a passagem de umas representações para outras, das concretas para as figurativas e destas para as simbólicas. Os alunos devem compreender e utilizar essas diversas representações e saber quais as vantagens que oferecem em situações concretas. Reconhecer 30 minutos como 1/2 hora é útil em determinadas situações, assim como reconhecer diferentes escritas simbólicas, como 3/4 = 6/8, 3/4 = 0,75 ou 3/4 = 75%. Por isso, é muito importante que, nesta altura, seja dada particular atenção à apreciação das diversas representações da mesma quantidade, antes mesmo do ensino das técnicas de cálculo que permitem a passagem de uma representação a outra.

As situações a explorar devem fazer sentir a necessidade de números para além dos números inteiros que já conhecem (por exemplo, quando se pretende dividir duas tartes por sete pessoas). Neste aspecto, o recurso a episódios significativos da história da matemática e o conhecimento das crises que foram levando à criação de novos conjuntos numéricos pode desempenhar um papel formativo essencial.

A introdução dos números racionais ou dos inteiros relativos é habitualmente uma fonte de dificuldades. Os alunos têm tendência a transferir regras aprendidas nos números inteiros para os outros conjuntos, surgindo-lhes certas regras como estranhas. Por exemplo, muitos alunos não percebem porque podem multiplicar os numeradores e os denominadores e não podem usar o mesmo processo na adição. Outra ideia comum, quando tratam com fracções equivalentes, é observar o numerador e o denominador separadamente mas não a razão entre eles, conduzindo a afirmações como “4/8 é maior do que 2/4”.

A visualização, através de modelos figurativos, assim como a contextualização dos cálculos e a valorização de diversas estratégias na sua execução, pode ajudar a atribuir sentido às diversas acções e a desenvolver uma compreensão conceptual e uma destreza consciente do cálculo. Além disso, este trabalho deve conduzir ao domínio de técnicas que facilitem a estimação e o cálculo mental. Acresce que as possibilidades oferecidas pelo uso das calculadoras e dos computadores permitem deslocar a ênfase atribuída ao cálculo de rotina para a necessidade dos alunos experimentarem e criarem diferentes procedimentos, perceberem como podem usá-los e serem capazes de interpretar os resultados.

A ampliação do conceito de número é um dos aspectos centrais do desenvolvimento da competência matemática dos alunos ao longo da educação básica. A partir do 2º ciclo, a aprendizagem dos números racionais (positivos) e, posteriormente, dos números relativos (inteiros, racionais, reais) está, normalmente, associada a dificuldades a que é necessário dar a maior atenção. Os alunos precisam de compreender que tipos de problemas deram origem à criação de novos conjuntos numéricos e como se relacionam estes conjuntos com aqueles que já conheciam. A história da evolução do conceito de número, incluindo os aspectos humanos a ela ligados, ajuda os alunos a compreender essa evolução e pode contribuir para que apreciem a matemática.

Trata-se de um processo lento e gradual que deve ser orientado para a compreensão e não para um domínio muito rápido de novas técnicas de cálculo. De outro modo, o efeito é acentuar a tendência para a memorização de regras que são muitas vezes aplicadas em situações inadequadas, chegando a suceder que os alunos se confundem em cálculos que já pareciam dominar. Por exemplo, após a introdução dos números relativos, e no meio de outras expressões, hesitam ou erram no cálculo de 7–3, que já faziam desde os primeiros anos de escolaridade; ou então, memorizando regras da multiplicação do tipo "menos por menos dá mais", usam-nas para adicionar, cometendo erros que seriam impensáveis na semana anterior.

Ao nível do 3º ciclo, é importante que os alunos saibam efectuar as operações nos novos conjuntos numéricos com que contactaram, assim como usar as potências e, em particular, a escrita de números em notação científica. Nestes aspectos, utilizar adequadamente uma calculadora científica é também importante. Além disso, os alunos devem distinguir e saber representar de várias formas os números inteiros, os racionais e mesmo (na fase final do ciclo) os reais. Essa compreensão deve ir além do conhecimento de quais são aqueles que se podem escrever na forma de fracção ou dos tipos de dízimas que lhes correspondem. Saber trabalhar com valores aproximados e perceber que, ao contrário do que se passa com os inteiros, entre dois números racionais existe sempre outro, são competências desejáveis neste nível. Porém, é preciso ter-se a noção de que se está a lidar com ideias que não são simples, sobretudo quando se lida com os números reais. Os alunos têm experiência de trabalhar com alguns destes números (como π ou $\sqrt{2}$) e podem adquirir sensibilidade para a continuidade do respectivo conjunto, nomeadamente através da sua identificação com a recta. Mas convém ter presente que estes aspectos, que têm a ver com a noção de infinito, serão aprofundados em eventuais estudos posteriores.

Padrões e regularidades

O estudo de padrões e regularidades é central em matemática e, naturalmente, actividades envolvendo padrões e regularidades atravessam o currículo dos três ciclos de educação básica. O campo dos números é propício a este tipo de actividades, as quais contribuem para desenvolver o raciocínio e estabelecer conexões entre as diversas áreas da matemática.

Sempre que possível, os alunos devem envolver-se em actividades de natureza exploratória e investigativa, com a possibilidade de explicar e justificar os seus processos de pensamento ou as suas soluções.

Ao longo do ensino básico há imensas oportunidades para o fazer, desde o trabalho com as dízimas às situações que envolvem os números primos, os divisores e os múltiplos de diferentes números. Também a exploração dos números triangulares, quadrados, pentagonais, etc., gera ambientes propícios ao desenvolvimento de atitudes características da actividade matemática como formular e testar conjecturas, apresentar justificações e fazer generalizações.

Nos primeiros anos de escolaridade os alunos podem criar padrões partindo de materiais que manipulam, em que se apercebem das relações existentes que descrevem e representam, usando esquemas e desenhos. Estão, deste modo, a desenvolver o raciocínio analítico e espacial. Actividades muito estimulantes podem ser, por exemplo, a observação e a procura de regularidades em desenhos, em conjuntos de números ou em formas, bem como a sua descrição oralmente ou por escrito e, ainda, a descoberta da relação entre uma sequência de figuras geométricas e a respectiva sequência numérica.

A exploração das sequências numéricas, trabalhadas desde os primeiros anos, vai sendo ampliada, constituindo uma introdução à ideia de variável quando os alunos usam letras ou outros símbolos na descrição das relações. Nesse contexto, pode surgir a oportunidade para a descoberta de relações entre variáveis e para a sua representação por meio de tabelas. Deste modo, está-se a desenvolver o raciocínio e as ideias algébricas.

Diferentes relações podem ser descobertas numa mesma sequência. É o que acontece quando se explora, por exemplo, o triângulo de Pascal: os alunos podem pensar em descobrir uma regra para obter uma nova linha do triângulo ou prever a soma dos números da 30ª linha do triângulo ou da linha de ordem *n*.

No contexto da resolução de problemas, a procura de regularidades é uma estratégia a desenvolver, como no caso em que se procura descobrir quantos apertos de mão são dados na turma, se cada aluno der um aperto de mão a cada um dos seus colegas. Este tipo de problemas pode estar associado a várias representações e ajudar a estabelecer conexões entre diversas ideias envolvendo, por exemplo, os números triangulares e as diagonais de um polígono.

Nas actividades de generalização a calculadora pode revelar-se muito útil, nomeadamente, quando é preciso efectuar grande quantidade de experiências e de cálculos ou quando se procuram contra-exemplos para conjecturas que se pretendem refutar.

Razão e proporção

O conceito de razão, que envolve uma relação entre duas quantidades e não é directamente uma medida, não é fácil de entender para muitos alunos. Diversas investigações mostram como a sua construção se faz lentamente, com níveis de funcionamento cognitivo progressivos, e muito interligada ao domínio de outros mecanismos construtivos como a partição e a equivalência.

A utilização de razões surge numa variedade de situações, desde as mais simples, como achar o dobro ou a metade, até outras que implicam multiplicar por um número inteiro, determinar o valor correspondente a um dado número de unidades conhecendo um valor constante para cada unidade, calcular um valor por unidade e depois aplicá-lo, ampliar um desenho e usar percentagens.

Os alunos devem aperceber-se da importância da ordem dos elementos na razão e compreender a sua natureza multiplicativa, tomando consciência de que, por exemplo, as medidas 3/4 e 6/8 de uma unidade representam a mesma quantidade. No entanto, uma receita com 3kg de farinha e 4kg de açúcar é diferente de outra com

6kg de farinha e 8kg de açúcar, embora se mantenha a proporção entre os ingredientes.

A compreensão dos conceitos de razão e de proporção é de uma importância crucial, quer numa perspectiva prática, porque permite desenvolver a capacidade de lidar com diversas situações do mundo real, quer numa perspectiva psicológica, porque fornece um campo no qual os alunos podem expandir processos mentais necessários ao seu desenvolvimento cognitivo. Por outro lado, a compreensão destes conceitos está interligada e na base de outros como as fracções, a semelhança de figuras e as razões trigonométricas. Além disso, constituem um elemento fundamental para a apreensão de conhecimentos em várias áreas do saber, como a física, a geografia e as artes.

Segundo alguns autores, o raciocínio proporcional está presente em diferentes tipos de problemas que envolvem comparações, razões, conversões e combinações. Nas situações de proporcionalidade, podem ser usados diferentes procedimentos que recorrem à redução à unidade, à equivalência de fracções ou às equações. A multiplicidade de situações e a variedade de procedimentos constituem uma fonte de dificuldades conceptuais.

A investigação concluiu que, por vezes, os alunos utilizam um tipo de raciocínio errado que interpreta a ampliação como a adição de uma quantidade fixa. De facto, os métodos espontâneos de muitos alunos tendem a ser inicialmente não-multiplicativos, normalmente sugeridos por um padrão numérico (por exemplo, 3, 6, 9) ou recorrendo a uma estratégia aditiva. Tais métodos permitem-lhes obter resultados correctos em casos simples mas não em situações mais complexas. Compreender estes métodos espontâneos e tomá-los como ponto de partida para promover a reflexão dos alunos em confronto com novas situações pode ser uma estratégia adequada para que desenvolvam um raciocínio correcto.

Capacidades a desenvolver

Compreensão global do número e das operações

A compreensão do sistema indo-árabe de numeração, do valor de posição e dos números racionais, nomeadamente, o reconhecimento de diferentes formas de os representar, ajudam o aluno a organizar mentalmente, a comparar e a ordenar números.

Os números aparecem em diferentes contextos e podem ser expressos através de várias representações gráficas e/ou simbólicas. Não basta saber que 35 é o mesmo que 3 dezenas e 5 unidades, ou 2 dezenas e 15 unidades; é importante também ver 35 como o produto de dois ímpares consecutivos, 5x7, ou como o número anterior a um quadrado perfeito, $35=6^2-1$, ou ainda como o produto da soma de dois números pela sua diferença, 35=(6+1)x(6-1), ou metade de 70, 35=70/2. Para desenvolver a competência matemática, é essencial o conhecimento de que os números podem ser representados de muitas formas e que algumas são mais úteis que outras em determinadas situações ou problemas.

Reconhecer o valor relativo de um número ou quantidade em relação a outro número, assim como, ter sensibilidade para a ordem de grandeza de um dado número, são capacidades que devem ser desenvolvidas ao longo da aprendizagem da matemática.

A compreensão conceptual de uma operação implica analisar os seus efeitos nos vários conjuntos numéricos, incluindo os inteiros e os racionais e, mais tarde, os reais. Por exemplo, ao conceber a multiplicação apenas como uma adição repetida de números naturais, muitos alunos fazem generalizações erradas como "a multiplicação dá sempre um número maior". Modelos como a recta numérica ou as disposições rectangulares podem ser interessantes para que os alunos vejam a multiplicação em outros contextos.

Com efeito, perceber de que modo a variação da ordem de grandeza dos factores influencia o produto é uma forma de desenvolver o sentido do número. Por exemplo, o que acontece se um dos factores é menor que 1, ou se os dois factores são menores que 1?

Uso da compreensão do número e das operações de maneira flexível para fazer julgamentos matemáticos

Resolver problemas que envolvem raciocínios com números implica uma diversidade de acções: decidir que tipo de resposta é adequada (exacta ou aproximada), decidir que instrumento de cálculo é adequado e/ou acessível (calculadora, cálculo mental, algoritmos), escolher uma estratégia, aplicar a estratégia, rever os dados e os resultados para avaliar da sua razoabilidade e, se necessário, repetir os passos anteriores utilizando uma estratégia alternativa.

Este processo envolve diversos tipos de decisão. Primeiro, requer compreender a relação entre o contexto do problema e o cálculo necessário. Segundo, exige um conhecimento de um leque de possíveis estratégias para realizar o cálculo e seleccionar a mais adequada. Finalmente, inclui ser capaz de rever a resposta e verificar tanto a sua correcção como a sua relevância no contexto original do problema.

Domínio de estratégias úteis de manipulação dos números e das operações

O sentido do número implica o reconhecimento de que são possíveis múltiplas estratégias de solução para um determinado problema. Quando uma estratégia inicial parece não conduzir a nada, recomeçar com uma nova estratégia pode ser a solução. A tendência para prosseguir na resolução de um problema explorando vários caminhos permite a comparação entre diferentes métodos. Esta reflexão metacognitiva nem sempre é fácil de identificar porque ocorre rapidamente e, muitas vezes, não ao nível do pensamento consciente.

A consciência de que, numa dada situação, algumas estratégias e/ou instrumentos de cálculo são mais eficazes que outros é também um indicador do sentido do número. Para calcular 8+7, um aluno pode contar um a um, enquanto outro pode escolher um método de recomposição que usa mentalmente (por exemplo, 7+7+1 sabendo que 7+7 são 14, ou 8+2+5 sabendo que 8+2 são 10).

Os alunos com sentido do número, quando chegam a uma solução, analisam-na à luz do problema original (considerando quer os dados do problema, quer a pergunta), para concluir se a sua resposta “faz sentido”. Se esta reflexão é feita rápida e naturalmente, torna-se uma parte integrante do processo de resolução do problema. Esta revisão metacognitiva do contexto do problema pode envolver uma avaliação da estratégia usada e, ainda, uma verificação para determinar se a resposta produzida foi a adequada. Os alunos omitem frequentemente esta verificação porque o resultado (e portanto o problema) não é importante para eles.

A aquisição de destrezas de cálculo mental promove o desenvolvimento da compreensão numérica, uma vez que encoraja a procura de processos mais fáceis baseados nas propriedades dos números e das operações. Os algoritmos mentais têm algumas características interessantes: (1) são variáveis (para calcular 83-26 as crianças utilizam diferentes algoritmos); (2) são flexíveis e podem adaptar-se conforme os números em causa (por exemplo, 83-79 e 83-51 serão calculados de modos diferentes); (3) são activos, permitindo ao utilizador escolher um método, conscientemente ou não; (4) são holísticos, no sentido em que lidam com os números como um todo e não com dígitos separados; (5) começam frequentemente com o primeiro número (por exemplo, 37+28 é 37, 47, 57, 67, 65); (6) exigem sempre compreensão e o seu uso desenvolve compreensão; (7) dão uma aproximação inicial da resposta porque os dígitos da esquerda são considerados primeiro.

Utilização do raciocínio proporcional

Diferentes autores consideram que a característica essencial do raciocínio proporcional é que este raciocínio deve envolver uma relação entre duas relações (isto é, uma relação de segunda ordem), em vez de, simplesmente, uma relação entre dois objectos concretos. Esta capacidade, que se vai desenvolvendo ao longo da educação básica, inclui a decisão sobre que tipo de relação numérica se aplica (proporcionalidade directa, proporcionalidade inversa, raciocínio aditivo ou outra), a decisão sobre as operações a realizar e, ainda, a execução destas.

A compreensão da relação de proporcionalidade implica que o aluno seja capaz de usar as estratégias multiplicativas (reconhecer uma relação multiplicativa entre os termos de uma razão e aplicar aos termos da segunda ou reconhecer uma relação multiplicativa entre os termos correspondentes de duas razões que se alarga aos outros dois termos correspondentes). Os casos que correspondem a acréscimo ou decréscimo simultâneo dos termos de uma fracção ou razão são os que exigem uma compreensão funcional do conceito de proporcionalidade directa.

No sentido de contribuir para o desenvolvimento deste tipo de raciocínio, os alunos devem experienciar situações que envolvam a investigação de alterações e da direcção dessas alterações, em operações de natureza aditiva e multiplicativa. Por exemplo, é importante perceberem que a alteração de 2 para 6 pode ser definida de forma aditiva ou multiplicativa e que a mesma relação aditiva se mantém quando se obtém 19 a partir de 15, mas o mesmo não se verifica para a multiplicação.

Aos alunos devem ser dadas oportunidades de trabalhar com situações problemáticas envolvendo o raciocínio proporcional, começando por casos em que podem lidar com materiais concretos e esquemas. As situações devem ser de natureza geométrica e numérica. A semelhança de figuras e as escalas podem dar origem a boas situações de aplicação do raciocínio proporcional, permitindo relacioná-lo com o raciocínio espacial.

A capacidade de utilizar o raciocínio proporcional corresponde a uma fase importante do desenvolvimento cognitivo, por ser um ponto culminante das aprendizagens da matemática no ensino elementar e uma base fundamental para o estudo da matemática no ensino secundário.

Uso dos números e de métodos quantitativos como um meio de comunicação e de resolução de problemas

O sentido do número desenvolve-se gradualmente como resultado de explorar números, visualizá-los numa variedade de contextos e relacioná-los de formas não limitadas aos algoritmos tradicionais. Os alunos com sentido do número são capazes de utilizá-los nas mais variadas situações, como resultado de contagens, como medidas, como localização, identificação e ordenação. Além disso, são capazes de usá-los nas operações e em situações envolvendo proporcionalidade.

Podemos dizer que os alunos com sentido do número desenvolveram significados para os números e para as relações numéricas, reconhecem a sua grandeza relativa e os efeitos das operações sobre os números, tendo desenvolvido referentes para as quantidades e para as medidas. Deste modo, são capazes de interpretar criticamente o resultado de um problema, verificar a sua razoabilidade e interpretá-lo à luz dos dados disponíveis.

A competência matemática no domínio dos números implica utilizá-los como instrumentos de formulação e resolução de problemas e de comunicação de ideias. Na perspectiva em que nos colocamos, o sentido do número está ligado ao desenvolvimento de hábitos de pensamento matemático, em especial de uma atitude investigativa que implica o gosto e a predisposição para formular questões, explorá-las, fazer e testar conjecturas, produzir e comunicar argumentos.

A competência no domínio dos números e do cálculo

A competência matemática no domínio dos números e do cálculo que todos devem desenvolver está relacionada com o *sentido do número* e inclui diversos aspectos.

Em todos os ciclos da educação básica:

• a compreensão global dos números e das operações e a sua utilização de maneira flexível para fazer julgamentos matemáticos e desenvolver estratégias úteis de manipulação dos números e das operações;

• o reconhecimento e a utilização de diferentes formas de representação dos elementos dos conjuntos numéricos, assim como das propriedades das operações nesses conjuntos;

• a aptidão para efectuar cálculos com os algoritmos de papel e lápis, mentalmente ou usando a calculadora, bem como para decidir qual dos métodos é apropriado à situação;

• a sensibilidade para a ordem de grandeza de números, assim como a aptidão para estimar valores aproximados de resultados de operações e decidir da razoabilidade de resultados obtidos por qualquer processo de cálculo ou por estimação;

• a predisposição para procurar e explorar padrões numéricos em situações matemáticas e não matemáticas e o gosto por investigar relações numéricas, nomeadamente, em problemas envolvendo divisores e múltiplos de números ou implicando processos organizados de contagem;

• a aptidão para dar sentido a problemas numéricos e para reconhecer as operações que são necessárias à sua resolução, assim como para explicar os métodos e o raciocínio que foram usados.

Para além dos pontos atrás referidos, que dizem respeito a todos os alunos e a todos os ciclos da educação básica, há aspectos específicos em cada um dos ciclos que importa identificar.

No primeiro ciclo:

• a compreensão do sistema de numeração de posição e do modo como este se relaciona com os algoritmos das quatro operações;

• o reconhecimento dos números inteiros e decimais e de formas diferentes de os representar e relacionar, bem como a aptidão para usar as propriedades das operações em situações concretas, nomeadamente, para facilitar a realização de cálculos.

No segundo ciclo:

• o reconhecimento dos conjuntos dos números inteiros e racionais positivos, das diferentes formas de representação dos elementos desses conjuntos e das relações entre eles, bem como a compreensão das propriedades das operações em cada um deles e a aptidão para usá-las em situações concretas;

• a aptidão para trabalhar com valores aproximados de números racionais de maneira adequada ao contexto do problema ou da situação em estudo;

• o reconhecimento de situações de proporcionalidade directa e a aptidão para usar o raciocínio proporcional em problemas diversos.

No terceiro ciclo:

• o reconhecimento dos conjuntos dos números inteiros, racionais e reais, das diferentes formas de representação dos elementos desses conjuntos e das relações entre eles, bem como a compreensão das propriedades das operações em cada um deles e a aptidão para usá-las em situações concretas;

• a aptidão para trabalhar com valores aproximados de números racionais ou reais de maneira adequada ao contexto do problema ou da situação em estudo;

• o reconhecimento de situações de proporcionalidade directa e inversa e a aptidão para resolver problemas no contexto de tais situações;

• a aptidão para operar com potências e para compreender a escrita de números em notação científica e, em particular, para usar esta notação no trabalho com calculadoras científicas.

4.2

GEOMETRIA

O lugar da geometria nos currículos tem sido alvo de grande controvérsia, um pouco por todo o mundo. Nos últimos anos, observa-se uma tendência geral no sentido da revalorização da geometria nos programas de Matemática. No entanto, quer os conteúdos a incluir, quer as metodologias a utilizar, continuam a ser questionados.

Em Portugal, durante as décadas de setenta e oitenta, em consequência da reforma da Matemática Moderna, a geometria tendia a ser vista como um parente pobre da álgebra linear, sem grande interesse para o prosseguimento de estudos. O seu papel era o de ilustrar o carácter axiomático e dedutivo da matemática. Na prática, os aspectos da geometria ligados à observação, à experimentação e à construção praticamente desapareceram do ensino básico.

As tendências actuais procuram romper com esta situação. A geometria é essencialmente um meio para a criança conhecer o espaço em que se move, pelo que se torna importante promover a aprendizagem baseada na experimentação e na manipulação. De acordo com esta perspectiva, destacam-se, como aspectos a desenvolver, as capacidades de visualização espacial e de verbalização, a intuição e a utilização destas na resolução de problemas.

A geometria constitui, na verdade, um meio privilegiado de desenvolvimento da intuição e da visualização espacial. Sendo uma boa fonte de problemas de matemática, contribui para melhorar a capacidade de resolução de problemas. O raciocínio visual, fazendo uso de diagramas e de modelos como modos de interpretação e de resolução de problemas, é importante em qualquer área da matemática.

A geometria é um campo propício ao desenvolvimento do pensamento matemático, assim como à realização de investigações e de outras actividades que envolvem aspectos essenciais da natureza da matemática, como fazer conjecturas e validar essas conjecturas.

A aprendizagem da geometria

A geometria e a visualização espacial proporcionam meios de percepcionar o mundo físico e de interpretar, modificar e antecipar transformações relativamente aos objectos. Estabelecer e comunicar relações espaciais entre os objectos, fazer estimativas relativamente à forma e à medida, descobrir propriedades das figuras e aplicá-las em diversas situações são processos importantes do pensamento geométrico.

O desenho, a manipulação e a construção no computador de objectos geométricos permitem a exploração de conjecturas e a investigação de relações que precedem o uso do raciocínio formal. Actualmente, ferramentas computacionais, designadas por ambientes geométricos dinâmicos (*Cabri Geomètre*, *Geometer's Sketchpad,…)* são geradoras de uma nova abordagem no ensino e aprendizagem da geometria. Permitem a construção e manipulação de objectos geométricos e a descoberta de novas propriedades desses objectos, através da investigação das relações ou medidas que se mantêm invariantes.

O estudo de propriedades e relações geométricas inicia-se com experiências concretas, amplia-se ao longo da escolaridade caminhando para processos mais formalizados, o que leva ao desenvolvimento da capacidade de organização lógica do pensamento.

Muitas noções matemáticas e científicas são melhor compreendidas e comunicadas utilizando modelos geométricos. É o que acontece, por exemplo, quando se representa um produto por um rectângulo, podendo deste modo estudar-se múltiplos, decomposições, áreas ou operações com polinómios. A aprendizagem de conceitos, como o de número, de medida e de função, pode ser facilitada quando os alunos aprendem a representar os números na recta numérica ou as fracções como sectores de um círculo.

A geometria está presente em múltiplos campos da nossa sociedade actual, como na produção industrial, no *design*, na arquitectura, na topografia, nas artes plásticas. Ao mesmo tempo, as formas geométricas representam um aspecto importante do estudo dos elementos da natureza.

Por outro lado, o conhecimento básico das formas geométricas é importante na vida quotidiana, para uma pessoa se orientar, estimar formas e distâncias, fazer medições indirectas ou apreciar a ordem e a estética na natureza e na arte. É também importante na comunicação, por exemplo, para dar e receber informações relativas ao modo de se chegar a um dado lugar.

Aprendizagens iniciais

O ensino da geometria na escola básica deve privilegiar formas intuitivas e flexíveis próximas das capacidades lógicas dos alunos. Investigações sobre o processo do pensamento geométrico indicam que este evolui de um modo lento, desde as formas intuitivas iniciais de pensamento até às formas dedutivas finais, em que indução e dedução se vão articulando e desenvolvendo.

O modelo de van Hiele, ao descrever esta evolução, distingue diversos níveis que vão desde a possibilidade dos alunos reconhecerem figuras diferenciadas pelo seu aspecto físico (e não por uma análise das suas propriedades), até níveis mais complexos em que são capazes de compreender os sistemas axiomáticos. Entre estes níveis, os alunos desenvolvem, numa primeira fase, a capacidade de análise, de conhecimento das componentes das figuras e das suas propriedades básicas. Ainda não são capazes de explicitar relações entre as diferentes famílias de figuras, mas conseguem fazê-lo de um modo experimental, desenhando, medindo e modelando.

Durante este processo, os alunos relacionam e classificam as figuras de um modo lógico. Podem deduzir propriedades das figuras e reconhecer classes de figuras. São também capazes de desenvolver argumentações e de provar conjecturas.

Num nível mais complexo de raciocínio dedutivo, começam a organizar sequências de proposições para deduzir uma propriedade a partir da outra. As definições emergem como organizadores lógicos e não como uma lista de propriedades.

No ensino básico, os primeiros níveis são fundamentais, requerendo que se percorra uma fase inicial, prolongada, de abordagem intuitiva e experimental do conhecimento do espaço e de desenvolvimento das formas mais elementares de raciocínio geométrico, ligado ao conhecimento das propriedades fundamentais das figuras e das relações básicas entre elas.

As crianças desenvolvem um pensamento geométrico realizando acções e reflectindo sobre essas acções. Antes do desenvolvimento da linguagem, as suas interacções com o meio baseiam-se essencialmente em experiências espaciais. Piaget, que estudou o desenvolvimento da compreensão espacial nas crianças, distingue *percepção* — conhecimento dos objectos resultante de um contacto directo com eles — de *representação* (ou *imaginário mental*) — que envolve a evocação de objectos na sua ausência.

Nos diversos períodos de desenvolvimento equacionados por este autor, há uma diferenciação progressiva de propriedades geométricas, partindo das *topológicas* — propriedades globais independentes do tamanho e da forma — passando a um segundo grupo de propriedades, as *projectivas* — que têm a ver com a capacidade de prever como um objecto é visto de diferentes ângulos — e finalmente às propriedades *euclidianas* — relacionadas com o tamanho, distância e direcção, conduzindo à medida de comprimentos, ângulos, áreas, etc. Esta sequência verifica-se em termos de percepção e de representação.

Visualização e representação

O estudo das formas no espaço e das relações espaciais oferece às crianças e aos jovens uma das melhores oportunidades para relacionar a matemática com o mundo real. As primeiras experiências das crianças são geométricas e espaciais, ao tentarem compreender o mundo que as rodeia, ao distinguirem um objecto de outro e ao descobrirem o grau de proximidade de um dado objecto. Aprendendo a movimentar-se de um lugar para outro, estão a usar ideias espaciais e geométricas para resolver problemas. Esta relação com a geometria prossegue ao longo da vida. Com efeito, a natureza que nos rodeia possui múltiplos aspectos geométricos.

A construção do espaço começa, então, no plano perceptivo e prossegue no terreno da representação. Os alunos chegam à escola com uma longa experiência informal que deve ter continuidade através da manipulação e ordenação de objectos, da dobragem de papéis, do uso de espelhos, de jogos envolvendo a construção de padrões, de experiências com itinerários, da realização de construções geométricas. Este conhecimento geométrico deve constituir um ponto de partida para o desenvolvimento de novas competências e de atitudes positivas relativamente à matemática.

A composição e decomposição de figuras, acompanhadas da sua descrição, da representação e do raciocínio sobre o que acontece, permite aos alunos desenvolver o pensamento visual. O mesmo se passa com a construção de objectos tridimensionais a partir de objectos bidimensionais, acompanhada da interpretação das experiências realizadas.

O uso de modelos físicos e de modelos desenhados permite aos alunos realizar trabalho experimental, manipulando os modelos, formulando conjecturas e justificações. O uso de *software* adequado permite a visualização quase imediata das imagens geradas quando os alunos fazem conjecturas sobre propriedades e relações (por exemplo, entre tipos de quadriláteros com base no estudo das diagonais) e procuram testá-las e justificá-las. A manipulação que é proporcionada pela utilização dessas ferramentas computacionais favorece a formação de imagens mentais, contribuindo para o desenvolvimento da capacidade de visualização e raciocínio espacial.

Transformações

As transformações são processos importantes do pensamento geométrico. As experiências com transformações geométricas podem iniciar-se com a observação de figuras simétricas, geometricamente iguais ou semelhantes. Os alunos mostram que duas figuras são geometricamente iguais quando as manipulam e descrevem de um modo cada vez mais preciso os movimentos realizados. Começam a aperceber-se de importantes transformações como a *reflexão* (simetria axial), a *translação*, a *rotação* e a *reflexão deslizante* (composição de uma reflexão com uma translação de vector paralelo ao eixo de reflexão). Inicialmente, têm dificuldade em descrever o que estão a ver mas são capazes de explicar o que vão fazendo.

O uso de *software* pode também contribuir para a ampliação das representações com que os alunos trabalham quando, por exemplo, deslizam, rodam, ampliam ou reduzem uma dada construção geométrica.

Uma abordagem deste tipo pode contribuir para a compreensão das relações de semelhança entre figuras. O raciocínio proporcional é necessário ao desenvolvimento deste conceito de semelhança. Contudo, os alunos começam a preparar-se desde o momento em que observam o que muda e o que se mantém numa figura que é ampliada ou reduzida. Mais tarde, quando medem e comparam os lados e os ângulos de polígonos semelhantes, estão a tentar compreender o conceito de semelhança e a preparar-se para a aprendizagem da trigonometria. A trigonometria fundamenta-se na relação entre os ângulos e os lados de triângulos semelhantes. Funções trigonométricas, como o seno e o co-seno, são modelos matemáticos para muitos fenómenos do mundo real.

Organização do pensamento geométrico

A apropriação da linguagem e dos conceitos geométricos faz-se de um modo gradual, levando a que sejam retomados frequentes vezes em contextos diferentes, ao longo dos diferentes anos de escolaridade. As primeiras abordagens da geometria envolvem actividades como construir, modelar, traçar, medir, desenhar, visualizar, comparar, transformar e classificar figuras geométricas. Estas actividades desenvolvem o sentido espacial e preparam os alunos para se tornarem mais precisos no estudo das características de formas de duas e três dimensões (por exemplo, quando aprendem a descrever os atributos comuns a todos os casos de uma classe de figuras). Para classificar, investigar propriedades geométricas e relações nos triângulos, nos quadriláteros e nos sólidos, é importante toda a experiência de manipulação e construção já iniciada no 1º ciclo ou antes.

Essas experiências, acompanhadas da explicação dos processos de pensamento e das justificações, oferecem um contexto apropriado à utilização de uma linguagem geométrica significativa. É importante deixar claro que a linguagem, isolada, não deve constituir um fim a atingir. Os termos, as definições, as propriedades e as fórmulas não são para memorizar; constituem um meio, que se vai desenvolvendo gradualmente, de tornar mais claro, preciso e sistemático o pensamento e a sua expressão.

A capacidade de compreensão é também ampliada pelo estudo das analogias. É o que acontece, entre muitas outras situações, quando os alunos usam o teorema de Pitágoras para calcular o comprimento do segmento definido por dois pontos numa situação bidimensional e, mais tarde, o fazem numa situação tridimensional. O teorema de Pitágoras proporciona, aliás, múltiplas actividades de exploração. Por exemplo, pode ser usado para determinar distâncias indirectamente, em experiências relacionadas com a sua demonstração e mesmo na interligação com outras disciplinas sobre a história deste teorema.

Algumas ferramentas computacionais podem tornar-se muito úteis em actividades de natureza exploratória e investigativa, permitindo, por exemplo, desenhar um triângulo qualquer e alterá-lo, concluindo que a soma dos ângulos internos se mantém invariante, ou investigar a posição relativa dos centros (incentro, circuncentro, baricentro e ortocentro) nos diversos tipos de triângulos. O recurso ao *software* dá ao aluno a possibilidade de fazer construções no ecrã de um computador, tendo em conta as propriedades das figuras geométricas, e de manipular essas construções, mantendo as referidas propriedades.

Estes ambientes computacionais permitem um maior leque de acções e o trabalho com objectos mais complexos relativamente à utilização das ferramentas clássicas (papel e lápis, régua e compasso) e, fundamentalmente, permitem que os alunos contactem com um grande número de situações em tempo real e se apercebam do domínio de validade das propriedades estudadas. Trabalhar com estes ambientes ajuda os alunos a dar sentido ao processo da demonstração. A sua aprendizagem decorre por etapas e a formulação de conjecturas e sua validação, com a análise de exemplos e contra-exemplos, é facilitada pelo vai e vem contínuo facultado pelas ferramentas.

A aprendizagem dos conceitos de grandeza e de medida

A inclusão do estudo da medida nos currículos do ensino básico justifica-se pelas necessidades da vida quotidiana, do mundo do trabalho e, ainda, do desenvolvimento da tecnologia e da ciência. Com efeito, tanto na vida do dia-a-dia como em muitas profissões, é importante realizar medições e ser capaz de manipular instrumentos de medida. A evolução tecnológica e científica está associada ao grau de precisão nas medidas.

Aspectos essenciais deste tema incluem a compreensão de que um atributo mensurável é uma característica de um objecto que pode ser quantificada, como, por exemplo, a amplitude, o comprimento, a área, o volume ou a temperatura. Seleccionar unidades de medida adequadas, compreender os sistemas de medida e aplicar fórmulas, assim como utilizar propriedades da medida na compreensão do conceito de invariante, constituem aspectos importantes da competência matemática.

A medida é um meio privilegiado para se estabelecerem conexões, quer dentro da própria Matemática, quer na ligação a outras disciplinas. Na medida, estão interligados conceitos geométricos, aritméticos, trigonométricos, bem como a capacidade de formulação e de resolução de problemas e várias destrezas. Há uma forte ligação deste tópico à geometria (por exemplo, o perímetro e a área são características mensuráveis de certas figuras geométricas) e ao conceito de número (números fraccionários, decimais e racionais são usados para representar medidas). As medições constituem, ainda, uma boa oportunidade para trabalhar as fracções e os decimais.

Hoje, a medida é usada de muitas formas no mundo à nossa volta e é vital para a comunicação. Estes usos variam, contudo, em termos de escalas, códigos e numerais. Por exemplo, a dureza da água é medida em termos do conteúdo mineral, a intensidade de um tremor de terra na escala de Richter, a dureza de uma rocha pela escala de Mosh.

No quotidiano, as pessoas fazem pesagens, cortam porções (medidas) de material para coser roupa, imaginam a distância que ainda têm de percorrer, ou marcam a porção do canteiro a ajardinar. Portanto, medir pode ter significados diferentes para diferentes pessoas e profissões.

Aprendizagens iniciais

A compreensão do processo de medida inicia-se com a vivência de experiências concretas em que se usam medidas, não só na matemática, mas também noutras áreas curriculares como os estudos sociais, a arte, a ciência, o desenho e os desportos. Também fora da escola, em diversas situações, os alunos contactam com ideias sobre medida como, por exemplo, na culinária e nas compras.

As primeiras experiências dos alunos devem proporcionar o contacto com diferentes objectos em que lhes seja permitido manipular, comparar, sentir, observar os atributos mensuráveis. Naturalmente, nestas explorações, ainda não usam unidades padrão, mas estão a construir um processo que é necessário à sua compreensão e estão a aprender a fazer conversões.

A necessidade de uma unidade padrão deve surgir após a utilização pelas crianças de diferentes unidades de medida e depois de verificarem que o número de unidades necessárias para descrever o tamanho de um objecto depende da unidade de medida utilizada.

De acordo com estudos realizados a partir de Piaget, o conceito de conservação, que tem a ver com a invariância de certas características dos objectos quando se exercem transformações sobre eles, é fundamental para o desenvolvimento do conceito de medida. Esta capacidade vai-se desenvolvendo com a idade, mas sabe-se que a aceitação da conservação por parte dos alunos depende das tarefas realizadas. Os alunos começam por interessar-se por tamanhos contrastantes: grande ou pequeno, cedo ou daqui a muito tempo, rápido ou lento, pouco ou muito.

Com base na experiência, medir torna-se bastante simples para o adulto, se alguém lhe fornecer um instrumento de medida calibrado nas unidades apropriadas. Mas usar um instrumento de medida pode envolver mudar a sua posição tantas vezes quantas as necessárias para medir o objecto. Por exemplo, para medir um comprimento, o aluno tem também de desenvolver o conceito de conservação. O comprimento do objecto, tal como é dado por um instrumento de medida, não muda quando este se desloca. O conceito de invariância do comprimento constitui um passo fundamental para a compreensão da medição. Esta é, em primeiro lugar, uma mudança de posição, quer seja movimento da vista ou de um instrumento de medida. Esta mudança de posição pode também ser referenciada a um sistema coordenado de eixos no espaço.

É importante que os alunos sejam levados a construir o conceito de grandeza, a medir e a realizar estimativas. As crianças devem aperceber-se da grandeza a medir (a área, o peso,…) e do significado de medir. Neste sentido, é necessário partir da percepção da grandeza que se vai medir e, depois, comparar os objectos que possuam esse atributo. Desta comparação emerge a ideia de que se podem identificar classes de objectos equivalentes. Por exemplo, se estamos a trabalhar com superfícies planas, duas superfícies equivalentes têm a mesma área.

O número de unidades pode ser calculado por contagem, usando um instrumento ou recorrendo a uma fórmula. As fórmulas e os procedimentos para determinar medidas devem surgir da exploração de situações concretas. Por exemplo, os alunos podem encontrar a área de um rectângulo cobrindo-o com quadrados e procedendo à respectiva contagem. A visualização leva a pensar noutras questões, tais como, a relação entre as áreas dos rectângulos e de outras figuras geométricas.

Na descrição e classificação dos triângulos e dos quadriláteros, os alunos usam as medidas das amplitudes de ângulos e as suas relações. Torna-se, assim, essencial que sejam capazes de medir amplitudes de ângulos e compreendam os diversos tipos de relações entre eles (por exemplo, estudando, num paralelogramo, os ângulos suplementares). Também aqui o recurso ao *software* dinâmico ajuda a criar ambientes propícios à investigação das relações existentes.

A investigação mostra que a utilização de instrumentos de medida e de fórmulas muito cedo pode conduzir a uma utilização sem a compreensão necessária à resolução de problemas que envolvam medidas. Contudo, nos 2º e 3º ciclos, os alunos devem ir desenvolvendo a capacidade de usar estratégias mais eficientes e utilizar as fórmulas de modo significativo para encontrar as medidas e saber utilizar instrumentos de medida.

Desenvolvimento dos conceitos

Diversas investigações mostram que alguns alunos, mesmo já no 2º ou no 3º ciclo, não estão convencidos da conservação do comprimento, da área e do volume, enquanto outros esquecem a importância da unidade usada para medir. Isto leva à necessidade de reforçar as competências associadas à medida durante toda a escolaridade básica. Há disciplinas, como a Física, a Química, as Ciências e a Educação Visual, em que estas competências são importantes e que contam, a maior parte das vezes, que seja a Matemática a desenvolvê-las.

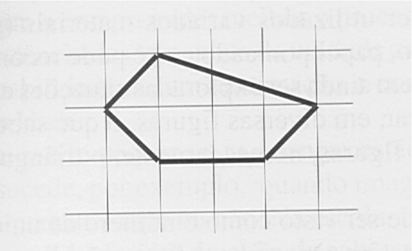
Sempre que seja oportuno, podem introduzir-se os conceitos e as destrezas relativas à medição em situações de natureza interdisciplinar. Por exemplo, a construção de uma planta ou de uma maqueta da sala de aula dá aos alunos a oportunidade de utilizar o conceito de medida, raciocinar em termos proporcionais, desenvolver a criatividade e, ao mesmo tempo, associar a Matemática a outras disciplinas.

As medições fornecem um contexto para o desenvolvimento de ideias matemáticas. Pode ser muito estimulante conhecer o contexto histórico em que determinadas questões matemáticas surgiram. Os alunos podem ser encorajados, por exemplo, a relacionar os números racionais com o processo de medição a partir de uma certa unidade ou a relacionar os números irracionais com a impossibilidade de medição que surgiu num determinado contexto histórico.

Outros aspectos podem ser estudados e compreendidos numa perspectiva histórico-cultural, como os que dizem respeito à história das unidades de medida standard, nomeadamente, as do sistema métrico ou de sistemas de medida utilizados noutras culturas.

Há uma variedade de contextos em que pode aparecer o conceito de área, por exemplo, um campo de futebol, uma piscina, o território de um estado, uma parede a pintar, um chão a cobrir com mosaicos, um campo a plantar...

As fórmulas não devem aparecer antes que os conceitos sejam trabalhados. Pode medir-se a área de uma figura cobrindo-a com quadrados ou desenhando a figura em papel quadriculado e contando o número de quadrados cobertos. Quando apenas uma parte dos quadrados é coberta, não é possível usar o processo anterior; encontrar a área torna-se mais difícil, podendo recorrer-se a enquadramentos.



Pode-se calcular a área da figura utilizando quadrados e rectângulos como enquadramentos: 8 - 0,5 - 0,5 - 0,5 - 1,5 = 5

É importante que os alunos se apercebam que uma dada região é formada por sub-regiões e que podem fazer-se diversos tipos de arranjos com elas, mantendo a mesma área, o que significa compreender o conceito de unidade, usar essa unidade repetidas vezes e, através da contagem, atribuir um número a uma dada região.

Tarefas que envolvam decomposições de figuras e sucessivos rearranjos devem ser acompanhadas de questões sobre o perímetro. Há uma forte tendência para os alunos dizerem que o perímetro não mudou porque a área não mudou. A ideia de que a área é uma grandeza relativa à extensão duma figura e que o perímetro corresponde ao comprimento da sua fronteira deve ser construída pelos alunos com base em actividades adequadas, implicando, por exemplo, determinar os perímetros de figuras com a mesma área ou as áreas de figuras com o mesmo perímetro.

Há uma gama considerável de actividades relevantes que podem ser trabalhadas com os alunos, desde simples pavimentações, para os alunos mais novos, até investigações para os mais velhos, passando pela construção de figuras equivalentes, pela procura de relações entre figuras e pela comparação de áreas e perímetros (por exemplo, num conjunto de figuras que têm o mesmo perímetro, descobrir a que tem maior área). Nestas actividades, podem ser utilizados variados materiais (geoplanos, papel quadriculado, papel ponteado,…) e pode recorrer-se a situações reais. Devem ainda ser exploradas situações em que lhes seja possível aplicar, em diversas figuras, o que sabem sobre o cálculo da área de figuras, nomeadamente, o triângulo e o rectângulo.

O volume pode ser visto como o número de unidades que, quando justapostas, têm a mesma configuração do recipiente ou de outro objecto. Pode ainda ser associado à deslocação causada num líquido quando se mergulha nele um objecto. Em certas situações, ao volume é atribuído um sentido de capacidade, ao qual correspondem grandezas e unidades de medida diferentes, quando é entendido como a quantidade contida num recipiente.

Actividades que envolvam construções com cubos, organizando diferentes figuras, em simultâneo com uma reflexão sobre o volume de cada uma, constituem boas oportunidades para começar a trabalhar o conceito de volume.

Nas actividades que envolvem a contagem de cubos, nem todos devem ser visíveis. A visualização espacial pode ser desenvolvida com a manipulação destes materiais. Muitas vezes, a dificuldade dos alunos manipularem mentalmente, rodarem ou inverterem um objecto, representado graficamente, resulta de não lhes terem sido proporcionadas experiências de manipulação com esses objectos. Assim, é importante, por exemplo, dar o desenho de uma construção para ser realizada com cubos ou, dada a construção, pedir o seu desenho em papel isométrico segundo uma determinada perspectiva.

As tarefas de pavimentação, tal como as de preencher o espaço (empacotar), favorecem a passagem das estratégias aditivas para as multiplicativas. Reduzir o número de unidades de que o aluno dispõe, pode contribuir para que ele desenvolva uma estratégia multiplicativa, a partir dos números que correspondem às várias dimensões.

Ao usar a estimativa, quando trabalham com medidas, os alunos ficam a compreender melhor o processo de medição, tomam consciência dos tamanhos da unidade de medida, dão atenção à razoabilidade de uma estimação e compreendem o conceito de unidade.

Desde muito pequenas, as crianças estão habituadas a estimar. Isto sucede, por exemplo, quando imaginam se um pacote de leite dá para um copo ou não. Na escola, podem começar por estimar a medida da área do chão da sala ou quantos cubos são necessárias para encher uma caixa. Podem usar-se diversas situações da vida real para que os alunos façam estimativas de medidas, as quais devem ser testadas. É importante que disponham de um conjunto de objectos de referência de que conhecem a medida, como o comprimento do pé, a área de uma folha do caderno, a altura da porta da sala, a área de um campo de futebol ou a altura de um prédio de dez andares.

O desenvolvimento da capacidade de estimação faz-se de modo gradual e pressupõe que os alunos tenham tido a oportunidade de viver experiências variadas.

Em simultâneo, devem desenvolver-se estratégias de estimação, como a aplicação mental e sucessiva da unidade de comprimento com posterior contagem, a comparação do objecto a estimar com outro sobre o qual se tem informação ou uma decomposição e reagrupamento obtendo uma figura cuja área ou volume se determina mais facilmente.

Capacidades a desenvolver

Visualização espacial

Sob esta designação incluímos um conjunto de capacidades relacionadas com a forma como os alunos percepcionam o mundo à sua volta e como conseguem representar, interpretar, modificar e antecipar transformações relativamente aos objectos que os rodeiam.

Uma destas capacidades é a *coordenação visual motora*, isto é, a capacidade de coordenar a visão com os movimentos do corpo. Muitas vezes, esta não é uma preocupação dos professores quando começam a ensinar geometria, mas se os alunos não tiverem já uma certa desenvoltura terão dificuldades nas tarefas propostas. Por exemplo, se um aluno tem dificuldade em construir figuras geométricas com cubos pequenos, terá dificuldade em compreender as questões que se põem relativamente às dimensões de um cubo grande.

A capacidade de identificar figuras geométricas em desenhos complexos é chamada a *percepção figura-fundo*. Esta capacidade implica que os alunos sejam capazes de isolar essas figuras geométricas de um fundo, isto é, que tomem atenção apenas à figura geométrica pretendida.

A capacidade de reconhecer figuras geométricas em diferentes posições, tamanhos e contextos é chamada *constância perceptual*. Uma pessoa revela a constância perceptual quando reconhece um quadrado em qualquer posição. Por exemplo, quando se pede aos alunos para desenharem todos os quadrados no geoplano 5x5, aparecem quadrados que não são desenhados nas posições mais usuais.

Muitas vezes, os alunos do 1º ciclo têm dificuldade em distinguir os pp dos bb, dos dd ou dos qq, ou escrevem números em que os algarismos das dezenas e das unidades estão trocados. Estes alunos precisam de desenvolver a *percepção da posição no espaço*, isto é, a aptidão para distinguir figuras iguais mas colocadas em posições diferentes.

A *percepção das relações espaciais* consiste em conseguir ver ou imaginar dois ou mais objectos em relação consigo próprios ou em relação connosco, por exemplo, conseguir fazer uma construção com cubos a partir do desenho da mesma.

Quando procuramos analisar se duas figuras são iguais, ou, sendo diferentes, quais são as diferenças entre elas, estamos a usar a capacidade de *discriminação visual.* Por exemplo, estamos a usar esta capacidade quando procuramos características de triângulos ou descobrimos critérios que conduzam a determinadas classificações ou ordenações.

A capacidade de recordar objectos que já não estão à vista é a *memória visual*. É esta capacidade que permite, por exemplo, observar figuras em papel ponteado e desenhá-las no geoplano, sem ter voltado a observá-las, ou pensar na área de um triângulo visualizando a sua relação com a de um rectângulo.

Medição

De uma maneira geral, medição é uma síntese das operações de mudança de posição e subdivisão. Exemplos destas operações são, no caso da grandeza comprimento, a deslocação do instrumento de medida ao longo do objecto a medir e a subdivisão do objecto a medir em unidades com o mesmo comprimento do instrumento de medida.

Esta capacidade implica que os alunos compreendam que o comprimento, a área e o volume de objectos não mudam por deslocamento e que a medida pode ser quantificada pela repetição de uma unidade, dependendo o número resultante do tamanho da unidade de medida. Implica, também, que compreendam as relações entre as unidades do mesmo sistema e que saibam escolher unidades e instrumentos de medida apropriados, tendo em conta o grau de aproximação exigido pela situação. Este processo envolve a compreensão das relações entre a estrutura dos sistemas de medida e a do sistema de numeração decimal.

Os alunos desenvolvem esta capacidade em situações contextualizadas, utilizando materiais e resolvendo problemas de medida.

Esta capacidade engloba, ainda, a estimação de medidas e a utilização de instrumentos de medição como a régua e o transferidor.

Comunicação

É a capacidade de trocar ideias, negociar significados, desenvolver argumentos. É uma capacidade que pode ser aperfeiçoada através da troca de ideias entre os alunos e entre estes e o professor.

As actividades geométricas são um excelente meio para desenvolver a comunicação matemática. Por exemplo, quando um aluno tem de descrever a figura que desenhou num geoplano, para que o colega a possa desenhar, está a fazer uso desta capacidade. Uma outra actividade geométrica que pode desenvolver a comunicação é descrever a figura seguinte de uma dada sequência e tentar descobrir uma regra verbal que a permita obter, justificando porque funciona.

Os alunos parecem ter alguma facilidade na descrição de modelos e na construção desses modelos com base numa descrição oral. A geometria é um campo propício para poderem expressar as suas ideias e argumentos, verbalmente ou através de desenhos ou esquemas. A experiência dos alunos em comunicarem claramente o seu raciocínio geométrico prepara-os para a compreensão posterior das demonstrações formais.

A medida pode também ser um excelente veículo para que o aluno desenvolva a comunicação, por exemplo, quando tem de explicar a um colega porque é que duas figuras têm a mesma área mas perímetros diferentes, quando descreve a estratégia para estimar uma determinada medida ou quando consegue explicar a escolha da unidade e da escala usadas tendo em conta o grau de precisão pretendido.

Construção e manipulação de objectos geométricos

Esta capacidade envolve a construção material de objectos, como no caso do cubo ou outros sólidos geométricos, de desenhos geométricos com régua e esquadro e de construções no computador. Tarefas de construção de objectos geométricos são muitas vezes deixadas para as aulas de Educação Visual, quando podem ser uma boa forma de matematização do real. A construção de frisos ou pavimentações através da manipulação de figuras geométricas pode fazer-se a partir do 1º ciclo e constitui uma boa oportunidade para relacionar as propriedades das figuras. Também devem ser feitas construções com objectos tridimensionais, por exemplo, dadas duas vistas de uma construção com cubos, fazer outra da mesma forma, mas de dimensões duplas.

Construir o lugar geométrico de pontos que satisfazem uma determinada condição é uma tarefa que implica algum conhecimento das propriedades das figuras geométricas e que pode ser facilmente visualizada através do computador, recorrendo aos programas de geometria dinâmica.

A construção de lugares geométricos pode proporcionar actividades de resolução de problemas que envolvem o raciocínio geométrico e permitem estabelecer ligações entre diversos ramos da matemática.

Os alunos podem chegar a fórmulas para obter a área de um trapézio, através da sua decomposição e usando o conhecimento que têm sobre a área do rectângulo e do triângulo, ou para obter a área de um polígono regular de n lados a partir da de um triângulo.

Compreensão dos invariantes numa figura

A ideia mais simples sobre a invariância duma figura tem a ver com a possibilidade de aplicar transformações, mantendo a forma e o tamanho ou conservando apenas a forma. Esta capacidade engloba a compreensão de que quatro tipos de transformações deixam as figuras invariantes no que se refere à forma e tamanho: a reflexão (ou simetria axial), a translação, a rotação e a reflexão deslizante. Analisar frisos e pavimentações, por exemplo, percebendo que transformações geométricas estão na base da sua construção, ajuda a desenvolver esta compreensão.

A forma refere-se ao conjunto das características de uma figura que se mantêm invariantes após uma ampliação ou redução (semelhança). Esta capacidade implica que os alunos compreendam que, na ampliação de qualquer figura, todas as medidas lineares referentes a essa figura se alteram na mesma proporção, mas o mesmo não acontece com a área. Por exemplo, no rectângulo, se a ampliação tem o factor k, tanto a base como a altura variam na mesma proporção, resultando daí que a área do rectângulo ampliado fica k^2 vezes maior. O mesmo tipo de raciocínio tem de ser feito quando se trata de comparar os volumes de dois sólidos em que um é o resultado de uma ampliação do outro.

Medir e comparar os lados e os ângulos dos polígonos semelhantes ajuda os alunos a compreender o conceito de semelhança. Trata-se de um conceito geométrico importante. Por exemplo, em todas as situações que envolvem escalas, está-se a lidar com o conceito de semelhança.

Um outro tipo de invariantes são os que correspondem a relações entre elementos de uma figura. São exemplos disto a relação entre os três lados de um triângulo rectângulo (teorema de Pitágoras) ou a relação entre o comprimento de uma circunferência e o do raio.

Os lugares geométricos também podem ser estudados como invariantes. Por exemplo, uma circunferência é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de um ponto fixo, a mediatriz de um segmento de recta é o lugar geométrico dos pontos equidistantes dos extremos desse segmento.

A compreensão da medição tem implícita a do conceito de invariância, implicando compreender, por exemplo, que o comprimento da unidade de medida não muda quando esta se desloca ao longo do objecto a medir ou quando se decompõe um dado rectângulo em triângulos que podem dar origem a uma nova figura, mantendo a área.

Organização lógica do pensamento matemático

O desenvolvimento da capacidade de organização lógica do pensamento é um processo gradual que se inicia com experiências concretas, passando a uma diferenciação dos objectos geométricos, seguindo-se uma organização local de propriedades que, por último, se globalizam num sistema axiomático. De entre as capacidades lógico-geométricas, podem salientar-se: a intuição espacial; o estabelecimento de relações espaciais entre os objectos; as estimações relativas à forma e à medida; a descoberta de propriedades das figuras; a aplicação destas propriedades em situações variadas.

A compreensão das relações entre os diversos tipos de quadriláteros depende da capacidade para se formarem mentalmente classes de objectos, bem como da capacidade para decidir se um quadrilátero é ou não elemento de uma dada classe. Estas capacidades são características do nível 3 do modelo de van Hiele, existindo muitas situações na geometria onde podem ser desenvolvidas. Por exemplo: Os triângulos equiláteros são isósceles? Os rectângulos são paralelogramos? O papel do professor é colocar questões e deixar o aluno responder de modo a provocar o salto para o nível seguinte.

A ampliação das capacidades de raciocínio lógico permite aos alunos fazer inferências e deduções a partir de situações problemáticas. Discutir ideias, fazer conjecturas e testar hipóteses são actividades que devem preceder o desenvolvimento de abordagens formais. Em muitas situações, os alunos conseguem fazer demonstrações adequadas ao seu nível etário. Por exemplo, podem demonstrar, através de representações por meio de desenho, que a soma dos ângulos externos de um polígono convexo é de 360^{o}.

As fórmulas para calcular perímetros, áreas ou volumes surgem quando os alunos têm oportunidades para medir, registar a informação e procurar padrões. Por exemplo, os alunos começam por determinar, com técnicas informais, a área de figuras como rectângulos, quadrados ou triângulos, mas essas técnicas vão sendo formalizadas ao longo da escolaridade e, a partir delas, obtêm-se fórmulas para as áreas do triângulo, de polígonos regulares, do círculo, do trapézio ou de paralelogramos. O mesmo se pode dizer a respeito do cálculo do volume de sólidos.

Utilização de conhecimentos de geometria e de medida

O ensino da geometria e da medida deve proporcionar um conjunto diversificado de experiências espaciais, procurando que os alunos construam imagens mentais, desenvolvam a memória espacial para recordar ou reconhecer um objecto e prevejam os efeitos resultantes de mudanças nas relações espaciais entre os objectos.

Muitos conceitos e destrezas geométricas e de medida são essenciais à resolução de problemas. Por exemplo, uma das estratégias de resolução de problemas consiste em desenhar uma figura ou um diagrama que não é mais que uma representação geométrica do problema.

A geometria e a medida são tópicos privilegiados da Matemática para proporcionar ligações entre diferentes ramos desta. Por exemplo, a utilização da recta para representar números — a *recta numérica* — pode ser um excelente auxiliar no 1º ciclo, mas também no 2º e 3º ciclos, à medida que novos conjuntos numéricos vão aparecendo. Diversas figuras geométricas são usadas para representar fracções. Padrões de simetria podem ser observados na tabela da multiplicação ou no triângulo de Pascal. Os padrões numéricos, como os números triangulares, quadrados ou pentagonais, são um bom exemplo de ligação entre a geometria, os números e a álgebra. Um outro exemplo é o da relação entre o número de diagonais e o número de lados de um polígono.

Os aspectos ligados à medida podem levar os alunos a obter relações entre o comprimento, a área e o volume em figuras semelhantes. Para isso, os conceitos de razão e proporção são fundamentais.

A medida permite ligar a matemática com o mundo real. Por exemplo, permite responder a questões como a de determinar a distância de casa à escola. Desenvolver um projecto sobre a instalação de um campo de basquetebol no pátio da escola tem implícito o conceito de medida e proporciona o desenvolvimento do raciocínio proporcional.

O estudo da geometria ajuda os alunos a representar e a dar significado ao mundo. Por exemplo, a simetria proporciona oportunidades para os alunos verem a geometria no mundo da arte ou na natureza. Neste domínio, a exploração de conceitos e padrões geométricos pode proporcionar situações muito interessantes para os alunos.

A competência no domínio da geometria, das grandezas e da medida

A competência matemática no domínio da geometria, das grandezas e da medida que todos devem desenvolver inclui diversos aspectos.

Em todos os ciclos da educação básica:

- a aptidão para realizar construções geométricas e para reconhecer e analisar propriedades de figuras geométricas, nomeadamente, recorrendo a materiais manipuláveis e a software geométrico;
- a aptidão para utilizar a visualização e o raciocínio espa-cial na análise de situações e na resolução de problemas em geometria e outras áreas da matemática;
- a compreensão de conceitos como os de comprimento, área, volume, amplitude e a aptidão para utilizar conhecimentos sobre estes conceitos na resolução de problemas;
- a aptidão para efectuar medições em situações diversas e fazer estimativas, bem como a compreensão do sistema métrico;
- a predisposição para procurar e explorar padrões geométricos e o gosto por investigar propriedades e relações geométricas;
- a aptidão para formular argumentos válidos recorrendo à visualização e ao raciocínio espacial, explicitando-os em linguagem corrente;
- o reconhecimento e a utilização de ideias geométricas em diversas situações, nomeadamente, na comunicação e a sensibilidade para apreciar a geometria no mundo real.

Para além dos pontos atrás referidos, que dizem respeito a todos os alunos e todos os ciclos da educação básica, há aspectos específicos em cada um dos ciclos que importa identificar.

No primeiro ciclo:

- o reconhecimento de formas geométricas simples, bem como a aptidão para descrever figuras geométricas e para completar e inventar padrões;
- a aptidão para realizar construções geométricas simples, assim como para identificar propriedades de figuras geométricas;
- a compreensão do processo de medição e dos sistemas de

medidas e a aptidão para fazer medições em situações diversas do quotidiano utilizando instrumentos apropriados.

No segundo ciclo:

• a predisposição para identificar propriedades de figuras geométricas, nomeadamente, em triângulos, em quadriláteros e em sólidos geométricos, bem como para justificar e comunicar os seus raciocínios;

• a aptidão para realizar construções geométricas, nomeadamente, ângulos e triângulos, bem como para descrever figuras geométricas;

• a aptidão para resolver e formular problemas que envolvam os conceitos de perímetro e de área e as relações entre eles, em diversos contextos;

• a aptidão para calcular áreas de rectângulos, triângulos e círculos, assim como volumes de paralelepípedos, recorrendo ou não a fórmulas, em contexto de resolução de problemas.

No terceiro ciclo:

• a aptidão para visualizar e descrever propriedades e relações geométricas, através da análise e comparação de figuras, para fazer conjecturas e justificar os seus raciocínios;

• a aptidão para fazer construções geométricas, nomeadamente, quadriláteros, outros polígonos e lugares geométricos;

• a compreensão do significado da forma de uma figura geométrica e o reconhecimento das relações entre elementos de figuras semelhantes;

• a aptidão para resolver problemas geométricos através de construções, nomeadamente, envolvendo lugares geométricos, igualdade e semelhança de triângulos, assim como para justificar os processos utilizados;

• o reconhecimento do significado de fórmulas e a sua utilização no cálculo de áreas e volumes de sólidos e de objectos do mundo real, em situações diversificadas;

• a predisposição para identificar transformações geométricas e a sensibilidade para relacionar a geometria com a arte e com a técnica;

• a tendência para procurar invariantes em figuras geométricas e para utilizar modelos geométricos na resolução de problemas reais.

4.3

ESTATÍSTICA E PROBABILIDADES

Em comparação com a aritmética, a geometria ou a álgebra, pode dizer-se que a estatística e as probabilidades são temas recentes nos currículos escolares, sobretudo ao nível do ensino básico. No entanto, nas últimas décadas, tópicos ligados a estes temas ganharam visibilidade nos currículos de Matemática da generalidade dos países, acompanhando a sua crescente utilização nos mais diversos sectores da sociedade.

Em Portugal, depois de um longo período em que apenas surgiam no fim do ensino secundário, a situação modificou-se. Com a reforma curricular do início dos anos noventa, conceitos ligados à estatística e probabilidades aparecem explicitamente nos currículos de educação básica a partir do 2º ciclo e aspectos relacionados com a organização de dados estão implícitos já no próprio currículo do 1º ciclo.

Na verdade, o pensamento estatístico e probabilístico faz parte do mundo actual, pelo que faz todo o sentido que lhe seja atribuída uma maior relevância em todos os níveis de escolaridade. No entanto, na educação básica, o objectivo é iniciar os alunos na compreensão e uso da estatística descritiva e proporcionar-lhes uma primeira reflexão sobre o conceito de probabilidade. Dada a complexidade deste conceito, não é razoável que a sua aquisição formal seja considerada uma meta a atingir no ensino básico. Mas é importante proporcionar a todos os alunos experiências que lhes permitam desenvolver intuições que podem ser percursoras dessa aquisição.

A aprendizagem da estatística e das probabilidades

A competência matemática que todos devem desenvolver inclui conhecimentos de estatística e de probabilidades, os quais constituem uma ferramenta imprescindível em diversos campos de actividade científica, profissional, política e social.

Desde logo, a capacidade dos cidadãos para interpretar uma grande quantidade de dados quantitativos assume, hoje, uma grande importância. Ser competente em estatística é fundamental para entender os julgamentos que os meios de comunicação social veiculam com base na estatística e nas probabilidades.

Em numerosas actividades científicas e profissionais, esta competência desempenha um papel muito relevante. Por exemplo: em biologia, no estudo das características herdadas; em medicina, na análise da eficácia de um novo tratamento; em geografia, nas previsões sobre a evolução da população numa dada região; na agricultura, na pesquisa do efeito de um determinado fertilizante; em meteorologia, no estudo da duração e da intensidade das chuvas; em política, nas previsões de resultados eleitorais; em economia, na análise do índice de preços ao consumidor.

Apesar dos fenómenos aleatórios estarem presentes na sociedade, a escola orientou tradicionalmente o pensamento para explicações deterministas. Há necessidade de dar aos alunos uma visão mais equilibrada e menos determinista da realidade e, nesse sentido, desenvolver o pensamento estatístico e probabilístico ao longo da escolaridade constitui um aspecto importante da formação que a escola deve proporcionar.

Os conceitos de estatística e de probabilidades ajudam a compreender outros tópicos do currículo de Matemática, ligados aos números, às medidas ou às representações gráficas, e envolvendo capacidades matemáticas importantes, nomeadamente de estimação e de resolução de problemas. Os processos de contagem, por exemplo, constituem modelos para relacionar e desenvolver significados do número e procedimentos de sistematização.

As tecnologias actuais, nomeadamente a calculadora e o computador, trazem novas possibilidades para a aprendizagem da estatística e das probabilidades, em especial, ao permitirem trabalhar com dados reais e fazer simulações. As capacidades destas tecnologias na organização e visualização de dados e na execução de cálculos, assim como o retorno quase imediato dos efeitos de decisões tomadas, tornam possível uma ênfase na compreensão e exploração de conceitos, na interpretação da informação e na avaliação de argumentos.

Além da tecnologia, também existem ao nosso dispor instrumentos de representação e organização de dados relativamente recentes, a par das tabelas e dos gráficos já tradicionais. Alguns deles são muito simples e podem facilmente ser utilizados por alunos destes níveis etários, permitindo alargar o leque de opções de trabalho.

Aprendizagens iniciais

Desde cedo as crianças começam, naturalmente, a agrupar objectos com base em determinados atributos. Ao aprenderem a separar, a seleccionar e a classificar, estão a organizar o pensamento, a tomar decisões, a usar ideias estatísticas. Também a intuição primária do acaso está presente na sua vida diária, nomeadamente, nos jogos de azar que fazem com os amigos.

Estas situações podem constituir um ponto de partida para o desenvolvimento de ideias relacionadas com a estatística e as probabilidades e, ao mesmo tempo, para a realização de actividades em que os alunos tenham oportunidade de lidar com aspectos centrais do pensamento matemático.

Com efeito, as situações de aprendizagem a criar poderão gerar oportunidades para que os alunos se envolvam em actividades matemáticas de natureza investigativa: uma vez posta a questão, há necessidade de recolher dados, organizá-los, interpretá-los e tirar conclusões relativamente ao problema de partida. Este processo pode levar a novas conjecturas e à sua investigação, assim como pode reforçar a capacidade de comunicação, quando os alunos têm de descrever e discutir os processos que usaram e as conclusões a que chegaram.

Alguns autores defenderam, com base nos estudos de Piaget, que a noção de probabilidade apenas seria compreendida no período das operações formais, pelo que a sua introdução não faria sentido antes do ensino secundário. Porém, estudos posteriores mostraram que as crianças são capazes de atribuir significado a situações que envolvem noções probabilísticas, manifestando intuições que podem ser desenvolvidas com a ajuda do professor através de experiências reais ou simuladas.

Na verdade, os jogos de azar — que se encontram em quase todas as culturas através do mundo — são, sob algumas formas, familiares às crianças. O lançamento da moeda ao ar, a extracção de bolas de um saco ou o lançamento de dados, entre outros, podem ser usados como ponto de partida para o desenvolvimento da noção de probabilidade.

Situações adequadas de ensino-aprendizagem, em que os alunos fazem simulações e podem comparar as suas previsões com aquilo que realmente acontece, permitem desenvolver desde cedo intuições sobre probabilidades. Uma metodologia assente em experiências concretas e na resolução de problemas oferece um contexto apropriado ao ensino das noções probabilísticas.

O conceito de probabilidade

Pelas razões atrás apontadas, diversos autores, que têm estudado as intuições das crianças relativamente a estas noções, consideram desejável que os alunos contactem com elas nos primeiros anos de escolaridade através da realização de expe-riências concretas e da exploração da ideia de acaso na previsão de padrões de acontecimentos.

A noção de frequência relativa parece desenvolver-se de um modo natural na criança, como resultado de diversas situações experienciadas por ela e em que o acontecimento aleatório está presente.

No que diz respeito às operações combinatórias, verifica-se que, quando o número de casos possíveis é pequeno, as crianças são capazes de desenvolver métodos que lhes permitem determinar os arranjos e combinações possíveis.

A investigação tem permitido conhecer o pensamento probabilístico dos alunos, nomeadamente, os métodos de resolução que tendem a utilizar e as concepções erróneas que desenvolvem. Na análise de situações de incerteza, encontram-se, muitas vezes, respostas que assentam em juízos errados. É o que se passa, por exemplo, quando o aluno indica a probabilidade de um acontecimento esquecendo os efeitos do tamanho da amostra ou quando faz previsões sobre a probabilidade de um acontecimento com base na maior ou menor facilidade com que é possível recordar um exemplo desse acontecimento. Também as ideias ligadas a concepções deterministas estão na base de muitas incompreensões manifestadas pelos alunos.

Estas são razões adicionais que justificam que os alunos comecem cedo a lidar com situações de incerteza e possam confrontar o seu pensamento probabilístico com o dos outros, de modo a questionarem e ultrapassarem as suas incompreeensões e concepções erradas.

Por outro lado, actividades em torno do conceito de probabilidade têm o potencial de evidenciar diversas conexões matemáticas, permitindo que os alunos utilizem, entre outras, noções relativas a fracções, percentagens, proporções e números decimais.

Recolha, organização e análise de dados

A actividade humana exige cada vez mais fazer previsões e tomar decisões com base em informação organizada segundo métodos estatísticos e probabilísticos. Neste sentido, é importante que os alunos desenvolvam capacidades associadas à recolha, organização e análise de dados, assim como à representação e comunicação de processos e resultados.

Um problema ligado ao mundo dos alunos pode ser um bom ponto de partida, se permitir pôr questões, levar a decidir sobre o tipo de informação a recolher, como organizá-la e interpretá-la, com vista a dar resposta às questões formuladas.

A área das probabilidades e da estatística desenvolveu-se muito como consequência da experimentação científica, sendo, portanto, natural que se ligue o seu estudo ao processo científico. Experiências realizadas pelos próprios alunos, envolvendo observação, registo e análise de dados sobre diversos fenómenos, constituem oportunidades para se fazer uma interligação entre o conhecimento científico e o uso de competências características da matemática. Por exemplo, o estudo do crescimento duma planta sob determinadas condições ou do processo de arrefecimento de um líquido envolve, naturalmente, a recolha sistemática de dados numéricos, a sua organização em tabelas e a sua representação através de gráficos, assim como a interpretação desses dados.

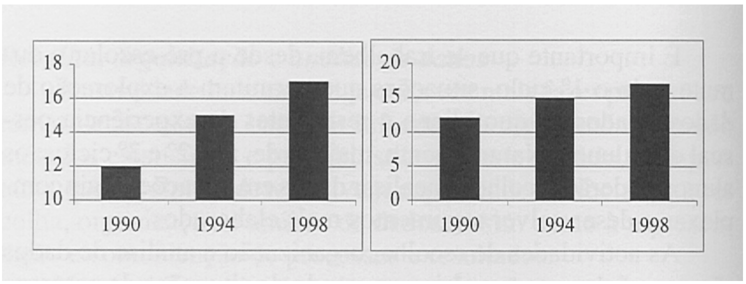
Os problemas potencialmente significativos para os alunos não estão apenas associados a situações deste tipo. Questões ligadas a jogos — de resto, também uma área que foi determinante na evolução da noção de probabilidade — podem tornar-se também muito relevantes. Começar por fazer previsões, jogar, recolher informação e modificar as previsões iniciais com base na nova informação, por exemplo na investigação sobre se um determinado jogo é ou não justo para os concorrentes, são processos que levam ao desenvolvimento da capacidade de raciocínio probabilístico.

É importante que se trabalhem, desde o pré-escolar e durante todo o 1º ciclo, situações que permitam a exploração de dados ligados ao quotidiano e resultantes da experiência pessoal dos alunos. Naturalmente, mais tarde, nos 2º e 3º ciclos, os alunos poderão recolher e analisar dados em situações mais complexas e desenvolver argumentos mais elaborados.

As actividades de recolha, organização e análise de dados são especialmente propícias ao estudo de situações de natureza interdisciplinar, dada a sua relevância tanto nas ciências naturais como nas ciências sociais e humanas. Este facto poderá implicar o trabalho colaborativo entre professores de diferentes disciplinas.

Um dos aspectos importantes do trabalho em estatística desde os primeiros anos tem a ver com as representações gráficas. Autores que têm investigado as percepções dos alunos sobre os gráficos consideram três níveis progressivos de compreensão: a) leitura directa dos dados, sem qualquer interpretação, para responder a questões explícitas; b) leitura dos dados em situações que requerem comparações e conceitos estatísticos; c) extrapolação, previsão ou inferência a partir da representação para responder a questões implícitas. Os gráficos não devem surgir como um fim em si mesmo, mas como um meio de comunicar o pensamento ou para investigar dados através de diferentes representações. Por isso, deve insistir-se, inicialmente, na compreensão e interpretação dos gráficos, mais do que na sua construção.

Actividades a desenvolver com os alunos incluem a discussão sobre o tipo de gráfico mais adequado a uma dada situação e a comparação de gráficos que são construídos sobre os mesmos dados, mas que transmitem ideias diferentes da situação. A realização de actividades como estas pode contribuir para o desenvolvimento de uma capacidade extremamente importante: o sentido crítico face ao modo como a informação é apresentada.



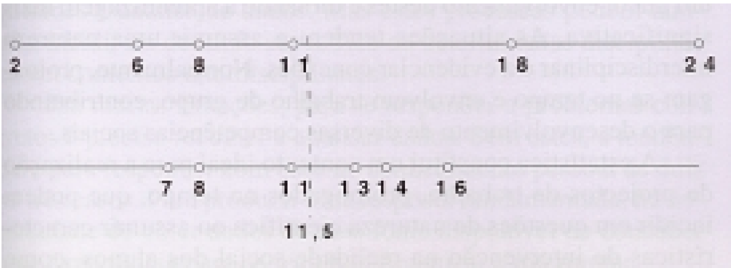
A impressão visual causada por um gráfico pode ser enganadora. Imagine-se que os dois gráficos, relativos aos mesmos dados, se referem ao volume de vendas de uma empresa. O primeiro gráfico pode sugerir que o volume de vendas mais do que triplicou em oito anos, o que na verdade não sucedeu

Medidas de tendência central

A exploração das medidas de tendência central (média, moda, mediana) deve iniciar-se cedo e continuar ao longo da educação básica. Por exemplo, relativamente ao conceito de média, a investigação tem evidenciado que, muitas vezes, a ideia que os alunos retêm é a de uma fórmula de que não compreendem as propriedades e que não são capazes de relacionar com as situações concretas. Por isso, deve dar-se uma atenção especial a actividades que ultrapassem o simples cálculo e em que a ênfase esteja na interpretação. Nos primeiros anos de escolaridade, os alunos devem trabalhar com modelos concretos que possam manipular, visualizando as operações realizadas e compreendendo como a média se relaciona com os dados. Mais tarde, é importante que os alunos se envolvam em actividades implicando a argumentação sobre se um dado valor pode ou não ser a média (a mediana ou a moda) de uma distribuição, a construção de uma distribuição cuja média seja um determinado número ou a escolha da medida de tendência central mais adequada para caracterizar uma situação.

Imagine-se por exemplo que, num dado ponto de uma estrada em que a velocidade máxima permitida é de 90 km/h, se registam os seguintes valores (em km/h) para os primeiros nove carros que passaram nesse ponto: 82, 83, 85, 87, 88, 93, 96, 99, 187. A média (100) e a mediana (88) dão-nos informações diferentes sobre a situação. Enquanto o uso isolado da média, que é afectada por um valor extremo, sugere uma transgressão generalizada, a mediana diz-nos que metade dos carros circulavam a uma velocidade não superior a 88 km/h.

O estudo de medidas de dispersão (amplitude, desvio médio, desvio padrão, etc.) não faz parte dos currículos da educação básica e, neste nível, a sua aprendizagem formal não se justifica. No entanto, isto não quer dizer que ideias sobre dispersão não devam ser trabalhadas de um modo informal e intuitivo. Comparações entre distribuições que têm a mesma média mas cujos valores se dispersam de um modo muito desigual em relação a essa média podem gerar actividades de reflexão e discussão importantes, na fase final da educação básica. A abordagem deve basear-se não em medidas de dispersão mas sim na observação e análise de esquemas e gráficos.



Os dois conjunto de valores têm exactamente a mesma média mas a dispersão é muito diferente.

Pensamento estatístico e situações de aprendizagem

Como já foi referido, a estatística e as probabilidades têm hoje uma presença muito significativa na vida social e profissional das pessoas mas os seus conceitos envolvem alguma complexidade e geram com frequência concepções erradas. Os alunos, tal como muitos adultos, tendem a acreditar que qualquer diferença de médias entre dois grupos é significativa ou a aceitar sem crítica resultados de estudos baseados em amostras pequenas ou construídas de modo incorrecto. Outras vezes, tendem a manifestar crenças erradas como por exemplo a de que, no totoloto, a combinação 1-2-3-4-5-6 é menos provável do que a combinação 7-12-25-31-37-44.

Na educação básica, é muito importante que os alunos contactem com as primeiras noções de estatística e probabilidades, sem se pretender ir muito longe na aquisição formal dos conceitos, mas procurando-se que o foco esteja na compreensão das ideias e no sentido crítico. O ensino deve ser fortemente experimental mas apelando às capacidades de raciocínio e comunicação.

As experiências, as simulações e as sondagens constituem formas de recolher dados que os alunos devem utilizar. É desejável partir de questões que interessem os alunos, provocando um maior envolvimento destes e tornando a aprendizagem mais significativa. As situações tendem a assumir uma natureza interdisciplinar e a evidenciar conexões. Normalmente, prolongam-se no tempo e envolvem trabalho de grupo, contribuindo para o desenvolvimento de diversas competências sociais.

A estatística constitui um contexto ideal para a realização de projectos de trabalho, prolongados no tempo, que podem incidir em questões de natureza científica ou assumir características de intervenção na realidade social dos alunos, como investigar os modos de ocupação dos tempos livres ou a opinião que têm sobre o funcionamento do bar da escola. Estes projectos devem envolver os alunos em todo o processo de investigação, desde a discussão das questões a levantar, a construção dos instrumentos de recolha de dados e a representação e análise destes, até às conclusões ou recomendações que podem influenciar decisões.

Capacidades a desenvolver

Organização e análise de dados

Esta capacidade integra a recolha e organização de dados, assim como a aptidão para os analisar e representar de maneiras adequadas e para comunicar as interpretações relativas a esses dados. Ser capaz de se exprimir numericamente, ser autor e não apenas leitor, é hoje pedido em muitas profissões e áreas de estudo.

Para se fazer um juízo sobre uma situação, é, muitas vezes, apropriado construir uma tabela ou um gráfico, de modo a visualizar a situação. Os dados podem ser apresentados de diversas formas dependendo das questões a que se pretende responder. Em vários casos, é importante ser capaz de indicar valores extremos da distribuição, ou o valor mais frequente, ou outros valores considerados especialmente significativos.

Notícias sobre desportos, música ou outras áreas do quotidiano podem constituir motivação forte para a formulação de questões e análise de dados. Mas estes processos podem também incidir no domínio específico de determinadas disciplinas ou em contextos interdisciplinares.

Em muitas situações, para se responder a problemas concretos é preciso recolher e analisar dados. Sem estes, a tendência é para responder com base no conhecimento pessoal de dois ou três casos. Para produzir uma resposta fundamentada, há necessidade de obter dados de uma fonte disponível ou conceber uma experiência para os recolher, organizar e interpretar.

Utilização da noção de probabilidade para raciocinar

O conceito de probabilidade é complexo e desenvolve-se de um modo gradual, ao longo de um período de tempo considerável. Por vezes, problemas envolvendo probabilidades parecem muito simples mas acabam por revelar-se difíceis e gerar confusões. Na educação básica, é importante que os alunos desenvolvam a capacidade de usar a noção de probabilidade como um instrumento para raciocinar sobre situações concretas mas não se deve esquecer que uma compreensão profunda será, eventualmente, objecto de aprendizagem posterior.

O contacto com os diversos aspectos que o raciocínio probabilístico pode assumir é importante. Esta noção pode estar ligada à interpretação de percentagens, à existência ou não de relações de causa-efeito ou ao raciocínio sobre o acaso.

Os alunos devem desenvolver a compreensão do uso da probabilidade em situações que envolvem percentagens. Por exemplo, é importante compreender que a afirmação de um médico de que uma determinada intervenção cirúrgica tem uma probabilidade de 80% de ser bem sucedida se baseia em dados estatísticos existentes sobre esse tipo de intervenção.

Um outro aspecto tem a ver com a validade ou não de se estabelecerem relações de causa-efeito. É importante que os alunos se apercebam de que um alto grau de correlação não comporta necessariamente uma relação causal. Por exemplo, os resultados de um estudo internacional recente sobre desempenho em matemática indicam que são os alunos que não vêem televisão aqueles que apresentam classificações médias mais baixas. Este facto não pode levar-nos a concluir que o tempo passado em frente à televisão tem um impacto directo no desempenho. Na verdade, um outro factor, ligado aos contextos sócio-culturais dos jovens, pode ser, ao mesmo tempo, responsável pela inexistência de televisão e por desempenhos escolares baixos.

O raciocínio probabilístico implica ainda que os alunos sejam capazes de fazer julgamentos sobre acontecimentos incertos. O desenvolvimento do raciocínio sobre o acaso implica que realizem um grande número de experiências e simulem situações envolvendo probabilidades. O cálculo teórico da probabilidade deve ser precedido e relacionado com a sua determinação experimental ou empírica. Os alunos devem aprender a raciocinar logicamente sobre as diversas formas de acaso, e perceber que o grau de certeza ou incerteza varia à medida que se obtêm mais dados. A construção de intuições a partir de experiências reais é fundamental para um desenvolvimento posterior do raciocínio formal no estudo das probabilidades.

Compreensão de argumentos numéricos

A compreensão de argumentos baseados na análise de dados numéricos é uma das capacidades que o ensino da estatística e das probabilidades deve desenvolver. Esta capacidade implica que os alunos saibam utilizar métodos estatísticos que lhes permitam compreender a informação estatística veiculada pelos meios de comunicação social, fazendo uma leitura crítica.

A compreensão crítica dos conceitos deve levar os alunos, muito para além do conhecimento dos procedimentos de cálculo, a questionar o que significa a média ou a mediana numa dada situação, bem como a pensar qual a medida de tendência central mais adequada para caracterizar uma distribuição. Além disso, implica perceber de que maneira um dado valor afecta a média ou ser capaz de estimar um valor que pode ser a média de uma dada distribuição. Alguns exemplos apresentados na secção anterior ilustram o que pode significar esta orientação.

Compreender a linguagem e os conceitos estatísticos e probabilísticos em contextos científicos e sociais é uma parte importante da educação matemática, para além de ilustrar a aplicação da matemática na resolução de situações reais.

Uso da estatística e das probabilidades para comunicar e resolver problemas

A capacidade de gerar opiniões claras, fundamentadas e criativas constitui um aspecto central na análise e interpretação de dados estatísticos. Após a análise e a avaliação dos diferentes argumentos, há necessidade de comunicar a informação de uma forma convincente, sabendo utilizar uma terminologia adequada.

Mais do que saber definições, este processo pressupõe alguma experiência em lidar com a terminologia da estatística e das probabilidades em situações concretas e em contextos variados. Compreender o que significam expressões como "é muito provável", "é mais provável do que", "é possível mas a probabilidade é quase nula", faz hoje parte da competência matemática que todos devem desenvolver.

Normalmente, é pedido aos alunos que comuniquem o significado de determinados resultados. A interpretação e a argumentação podem ocorrer, por exemplo, na elaboração de relatórios, quando os alunos dão sentido a padrões observados em dados por eles analisados e discutem as implicações dos resultados. Pode também acontecer noutros contextos, quando os alunos reagem a mensagens que envolvem elementos estatísticos ou que são baseadas em estudos, como os que encontram na comunicação social. Em ambos os casos, pretende-se que os alunos criem ou comuniquem opiniões.

O desenvolvimento do pensamento crítico exige uma atitude de questionamento, em particular, refutando afirmações sem fundamentos estatísticos apropriados. Muitas vezes, a informação fornecida é insuficiente, denotando pouco cuidado ou, mesmo, uma intenção de confundir. Noutros casos, os dados são apresentados sob a forma de gráficos enganadores que, involuntária ou propositadamente, levam a interpretações erradas. O sentido crítico face a este tipo de situações constitui uma capacidade relevante.

As capacidades e as atitudes ligadas à resolução de problemas que requerem planeamento e persistência, como é o caso da concepção, realização e avaliação de projectos mais ou menos prolongados, são ainda relevantes na educação matemática para todos. O mesmo deve ser dito a propósito do uso dos recursos tecnológicos correntes, como instrumentos de resolução de problemas e de comunicação.

A competência no domínio da estatística e das probabilidades

A competência matemática no domínio da estatística e das probabilidades que todos devem desenvolver inclui diversos aspectos.

Em todos os ciclos da educação básica:

- a predisposição para organizar dados relativos a uma situação ou a um fenómeno e para representá-los de modos adequados, nomeadamente, recorrendo a tabelas e gráficos;
- a aptidão para ler e interpretar tabelas e gráficos à luz das situações a que dizem respeito e para comunicar os resultados das interpretações feitas;
- a tendência para dar resposta a problemas com base na análise de dados recolhidos e de experiências planeadas para o efeito;
- a aptidão para usar processos organizados de contagem na abordagem de problemas combinatórios simples;
- a sensibilidade para distinguir fenómenos aleatórios e fenómenos deterministas e para interpretar situações concretas de acordo com essa distinção;
- o desenvolvimento do sentido crítico face ao modo como a informação é apresentada.

Para além dos pontos atrás referidos, que dizem respeito a todos os alunos e a todos os ciclos da educação básica, há aspectos específicos nos segundo e terceiro ciclos que importa identificar.

No segundo ciclo:

- a compreensão das noções de frequência absoluta e relativa, assim como a aptidão para calcular estas frequências em situações simples;
- a compreensão das noções de moda e de média aritmética, bem como a aptidão para determiná-las e para interpretar o que significam em situações concretas.

No terceiro ciclo:

- a compreensão das noções de moda, média aritmética e mediana, bem como a aptidão para determiná-las e para interpretar o que significam em situações concretas;
- a sensibilidade para decidir qual das medidas de tendência central é mais adequada para caracterizar uma dada situação;
- a aptidão para comparar distribuições com base nas medidas de tendência central e numa análise informal da dispersão dos dados;
- o sentido crítico face à apresentação tendenciosa de informação sob a forma de gráficos enganadores ou a afirmações baseadas em amostras não representativas;
- a aptidão para entender e usar de modo adequado a linguagem das probabilidades em casos simples;
- a compreensão da noção de probabilidade e a aptidão para calcular a probabilidade de um acontecimento em casos simples.

4.4

ÁLGEBRA E FUNÇÕES

Estes temas matemáticos apenas começam a ser tratados de modo explícito na fase final da educação básica — especialmente no 3º ciclo — e, em geral, a um nível ainda introdutório. No entanto, os alunos começam a contactar desde muito mais cedo, de maneira intuitiva, com ideias que estão na base da álgebra e das funções. Por exemplo, quando estão à procura do número que deve estar no lugar do ponto de interrogação em "5+?=8", estão a resolver uma equação. Quando estão a completar uma tabela dos quadrados dos números naturais de 1 a 10 estão a trabalhar com uma função.

Tradicionalmente, o estudo de tópicos de álgebra, como as operações com polinómios e as equações, está associado a dificuldades de aprendizagem, constituindo em muitos casos uma fonte de insucesso escolar em Matemática. O aparecimento das *letras*, associado a uma grande quantidade de regras em que não encontram sentido, é visto por muitos alunos como uma complicação desnecessária numa disciplina que se habituaram a encarar como sendo para "fazer contas com números".

Nos últimos anos, as perspectivas curriculares em Matemática evoluíram no sentido de prolongar o trabalho com os números e com a geometria para além dos primeiros anos. Este facto não se deve apenas ao propósito de desenvolver o pensamento numérico e geométrico dos alunos e de envolvê-los em actividades exploratórias e investigativas em campos tão propícios como são o dos números e o da geometria. Deve-se também à tentativa de promover uma melhor ligação entre estes domínios e a álgebra, procurando evitar que esta surja como um conjunto de regras para memorizar. Por isso mesmo, as tendências mais recentes apontam também no sentido de se iniciar o estudo da álgebra e das funções de um modo fortemente intuitivo e informal, adiando-se o tratamento mais formal de tópicos da álgebra e abandonando-se a abordagem das funções centrada na teoria dos conjuntos, típica da Matemática Moderna.

Porém, para se conseguir alcançar estes objectivos, é necessário reflectir sobre o que é essencial num primeiro contacto com a álgebra e as funções.

A aprendizagem da álgebra e das funções

A competência matemática que todos devem desenvolver inclui o raciocínio algébrico e a compreensão de relações funcionais. Formular e comunicar generalizações, assim como reconhecer e representar relações entre variáveis, são processos essenciais do pensamento matemático e da sua utilização para interpretar situações e resolver problemas de diversas disciplinas e da vida corrente. A compreensão de fórmulas, a construção de tabelas de valores a partir de uma dada relação ou a leitura de gráficos são aspectos integrantes desse processo.

Além disso, o uso de formas simbólicas para representar e analisar situações matemáticas e para modelar fenómenos diversos, assim como a compreensão de relações entre vários tipos de representação matemática — tabelas de valores, gráficos, expressões algébricas — constituem igualmente aspectos importantes da competência matemática.

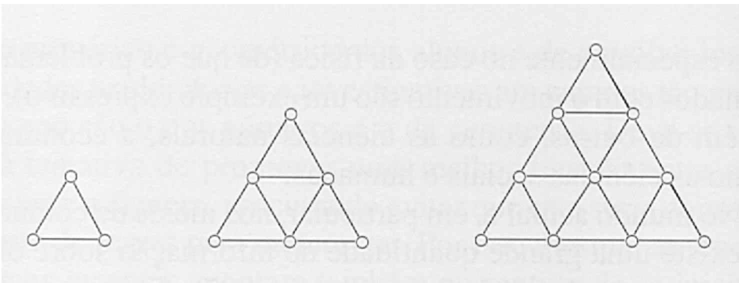
Os métodos algébricos e as funções são elementos essen-ciais para o estudo de problemas de diversas áreas científicas, muito especialmente no caso da física (de que os problemas relacionados com o movimento são um exemplo expressivo), mas também de outras, como as ciências naturais, a economia e mesmo as ciências sociais e humanas.

No mundo actual e, em particular, nos meios de comunicação, existe uma grande quantidade de informação sobre diversos fenómenos de mudança em campos tão diversos como a economia ou a meteorologia. Essa informação é geralmente apresentada por meio de tabelas e gráficos. A formação matemática que os alunos adquirem na sua educação básica deve permitir-lhes fazer uma leitura adequada e interpretar criticamente esse tipo de informação.

O estudo das funções pode revelar-se particularmente rico em oportunidades para se estabelecerem conexões entre diversos domínios da matemática. Com efeito, tabelas de valores, gráficos e expressões analíticas, que o estudo das funções leva a relacionar naturalmente, têm a ver com padrões numéricos, representações geométricas e métodos algébricos.

Aprendizagens iniciais

Os alunos constróem a sua álgebra a partir da sua aritmética, ou seja, dão sentido aos símbolos e às operações da álgebra em termos dos seus conhecimentos aritméticos. Desde os primeiros anos de escolaridade, as crianças podem e devem ser encorajadas a observar padrões, a representá-los tanto geométrica como numericamente, começando a estabelecer conexões entre a geometria e a aritmética. No seu quotidiano, os alunos encontram padrões com muita facilidade, no papel de embrulho, no lenço, no tapete ou em figuras que podem ser identificadas, descritas e desenhadas. A observação de sequências numéricas permite, igualmente, a procura e o reconhecimento de padrões e de diversas relações entre os números. Reconhecer padrões envolve conceitos como a forma, a cor, o tamanho, o número.



1	**1+3**	**1+3+5**
1	**4**	**9**

Padrões geométricos e numéricos podem originar actividades de aprendizagem relevantes

O reconhecimento de regularidades em matemática, a investigação de padrões em sequências numéricas e a generalização através de regras que os próprios alunos podem formular permitem que a aprendizagem da álgebra se processe de um modo gradual e ajudam a desenvolver a capacidade de abstracção. Esta capacidade é essencial no desenvolvimento da competência matemática.

Antes de se entrar na manipulação algébrica formal (usando expressões literais, resolvendo equações, etc.), é importante todo um percurso que inclua um grande número de experiên-cias algébricas informais. Para destacar este facto, alguns autores falam do desenvolvimento do *pensamento pré-algébrico*. Esta noção envolve pensar nas relações numéricas de uma situação, explicitá-las em linguagem corrente, representá-las através de diferentes processos, incluindo o uso de símbolos.

O trabalho com padrões generalizáveis pode ajudar a desenvolver ainda a ideia de relação funcional. A partir de dados recolhidos em situações que lhes são familiares, os alunos podem explorar relações que envolvam correspondência e variação. Estas situações dizem respeito tanto a contextos reais como a contextos puramente matemáticos. Por exemplo, podem estabelecer uma correspondência entre as horas do dia e as temperaturas do ar e verificar como uma mudança numa das variáveis se relaciona com a mudança na outra. Ou podem estudar o que sucede quando a cada número natural se associa a sua soma com 3 ou o seu quadrado.

A noção de variável

Nos últimos anos, a investigação sobre a aprendizagem da álgebra levou à identificação de diversos tipos de dificuldades conceptuais dos alunos. Uma delas tem a ver com a interpretação do conceito de variável.

Na verdade, a compreensão do conceito de variável é um processo complicado porque o próprio conceito apresenta diversas facetas. Muitos alunos tendem a ver as variáveis simplesmente como letras que se usam no lugar de números desconhecidos. Esta interpretação é muito redutora e está na origem de várias dificuldades de aprendizagem.

As letras desempenham papéis diversos em diferentes tipos de expressões matemáticas. Na equação x+7=13, a letra x representa um número que não varia; trata-se de um número ainda desconhecido (uma *incógnita*) mas que pode ser determinado se resolvermos a equação. Numa expressão como a+b=b+a, as letras podem ser substituídas por quaisquer valores numéricos, uma vez que a expressão traduz uma *propriedade*, uma generalização de um padrão aritmético. Em A=bxh, pensamos numa *fórmula*, que neste caso nos dá a medida da área de um rectângulo a partir das medidas da base e da altura, e não encaramos as letras como incógnitas. Uma expressão como 2n-1, por sua vez, representa um conjunto de valores; se a letra n for sendo substituída pelos sucessivos números naturais, a expressão gera a sequência dos números ímpares. A ideia de variação é ainda mais nítida numa expressão como y=3x; à medida que damos valores a x podemos calcular os valores correspondentes de y e podemos mesmo construir um gráfico que represente esta equação.

A compreensão destes diversos significados não é fácil e, sobretudo, requer um trabalho prolongado e paciente. Os alunos vão, naturalmente, aprendendo procedimentos, mas uma prática meramente repetitiva de procedimentos de cálculo algébrico, assim como uma ênfase excessiva na correcção do resultado final, gera incompreensões que, muitas vezes, levam ao uso incorrecto das letras e das relações entre expressões.

Um erro frequente surge quando é necessário um encadeamento de operações. Muitos alunos tendem a dar o resultado de cada uma das partes antes de prosseguir, escrevendo por exemplo uma expressão como x/6=y+8 para traduzir a questão "dividir um número desconhecido por 6 e ao resultado juntar 8".

Uma outra incompreensão está ligada à tendência para converter todas as expressões algébricas em equações, interpretando a variável sempre como uma incógnita. Por exemplo, na expressão do perímetro de um trapézio isósceles, 7+b+b+10, quando se pede quais os valores que b pode tomar, muitos alunos igualam a expressão a zero e resolvem a equação assim obtida.

O trabalho a desenvolver com os alunos requer que estes tenham oportunidade de explorar relações, explicitar as suas ideias, por escrito e oralmente, discuti-las e reflectir sobre elas. Um aspecto essencial deste trabalho é que as situações de aprendizagem sejam variadas, tanto do ponto de vista dos contextos como dos significados que as expressões matemáticas assumem.

Equações

Embora, como vimos atrás, tenha hoje um amplo significado, a álgebra tem as suas raízes históricas nas equações, de onde vem aliás, através do árabe, o próprio termo "álgebra". Este tema tem, assim, uma grande importância histórica e cultural. Além disso, as equações constituem uma representação simbólica de numerosas situações matemáticas e de diversos outros domínios. Escrever, analisar e resolver equações são actividades correntes em várias disciplinas, especialmente em Física.

A resolução de equações, incluindo a memorização e prática mais ou menos repetitiva de um certo número de regras, foi durante muito tempo um dos pilares da Matemática escolar em especial nos anos que hoje correspondem ao 3º ciclo do ensino básico. Na época áurea da Matemática Moderna, uma grande ênfase foi dada à compreensão dessas regras do ponto de vista da lógica interna das estruturas matemáticas. Como era de esperar, a teoria de conjuntos, a lógica das condições e o uso de símbolos constituiam o fundamental, estudavam-se muito cedo os princípios de equivalência, justificava-se cada passagem da resolução de uma equação. Tanto numa época como na outra, os problemas surgiam como uma "aplicação" das equações, isto é, como um pretexto para treinar a tradução da linguagem corrente para a linguagem matemática e a resolução de equações, mesmo que a generalidade dos problemas que se encontram nos manuais para estes níveis escolares, ou dos problemas equivalentes que alegadamente se encontram na vida diária, se resolvam naturalmente sem recurso às equações.

Hoje, nem a abordagem puramente mecanicista nem a perspectiva tipicamente estruturalista da Matemática Moderna se consideram opções adequadas. Porém, as equações têm uma indiscutível importância de vários pontos de vista.

Como já referimos, trata-se de um tema com um grande interesse histórico. Por isso, os problemas usados na antiguidade (alguns deles famosos) que deram origem à resolução de equações podem inspirar actividades de aprendizagem relevantes. Também a evolução dos símbolos usados para escrever e resolver equações em diversas épocas mostra aspectos de diferentes fases do conhecimento científico e evidencia o papel que o uso de símbolos desempenhou no avanço da matemática. O conhecimento de vários métodos que foram criados para resolver equações, de que é exemplo o processo geométrico que os árabes usavam no caso das equações do 2º grau, pode ser ainda significativo deste ponto de vista.

Por outro lado, é importante que os alunos aprendam o que é uma equação, o que significa realmente resolvê-la, o que se está a fazer quando se está a resolver uma equação, qual é o problema de haver uma equação com duas incógnitas, o que quer dizer resolver um sistema de duas equações. Uma vez mais, uma ênfase excessiva nos procedimentos de cálculo está na origem do tipo de resposta que alguns professores recebem quando perguntam aos seus alunos o que é uma equação: “Eu sei fazer mas não sei o que é!”.

A experiência concreta de traduzir problemas por meio de equações e de resolvê-las é, evidentemente, relevante, tanto no contexto da própria Matemática como no de outras disciplinas. Porém, o que é importante não é treinar a resolução de muitas equações dos mesmos tipos nem procurar expressões artificialmente complicadas requerendo truques de cálculo, mas, antes, compreender e dominar as técnicas essenciais e usá-las em situações diversas e em relação com vários tipos de problemas.

Um outro aspecto interessante da aprendizagem das equações tem a ver com as conexões que podem surgir com as funções e com a representação geométrica. Encarar uma equação do 1º grau como uma recta e a sua solução com a abcissa do ponto em que a recta intersecta o eixo dos *xx*, ajuda a compreender as noções envolvidas de modo significativo. Um argumento idêntico pode ser invocado para a interpretação geométrica da resolução de um sistema de equações ou para a identificação de uma equação do 2º grau com uma parábola.

No que diz respeito a dificuldades de aprendizagem das equações, vários estudos têm identificado questões que é útil tomar em consideração. Uma delas diz respeito a obstáculos cognitivos que parecem ter raízes na aritmética e que o contexto algébrico amplia e revela. Um exemplo é a dificuldade com a ordem das operações, revelando muitos alunos a tendência para operarem sequencialmente da esquerda para a direita. Um outro exemplo refere-se ao significado do sinal de igual. Os alunos têm por vezes aquilo que podemos designar por uma percepção operacional do sinal, isto é, tendem a vê-lo apenas como indicando o resultado de um conjunto de operações escritas à sua esquerda e perdendo de vista o que ele significa em relação aos dois membros de uma equação.

A resolução de equações de modo intuitivo, promovendo a ligação gradual da linguagem corrente à linguagem matemática, contribui para a compreensão do processo formal de resolução de uma equação. Começar por expressões que envolvem apenas uma operação e introduzir cedo o questionamento sobre os números desconhecidos, ajudando a uma leitura da equação como uma pergunta que requer um número como resposta, pode contribuir para a compreensão do processo por parte dos alunos.

Por outro lado, a introdução das equações deve fazer-se a partir de problemas em contextos reais e matemáticos, com a utilização de materiais e esquemas e encorajando os alunos a desenvolver e explicar os seus próprios métodos. Neste sentido, a abordagem das equações não é exclusiva dos últimos anos da educação básica, tendo, na verdade, o seu início no 1º ciclo. Esta perspectiva implica que os problemas não sejam encarados como aplicações das equações mas, ao contrário, que estas sejam vistas como uma ferramenta útil na procura de soluções para problemas.

Quase tudo o que aqui ficou dito a respeito da resolução das equações aplica-se, com as devidas adaptações, à resolução de inequações, um tópico que é abordado habitualmente na fase final do 3º ciclo. Ao estudo das inequações está, ainda, associada a notação dos intervalos, que os alunos devem conhecer. Neste caso, a representação dos intervalos na recta real constitui uma conexão interessante.

O conceito de função

Atendendo ao seu papel unificador, o conceito de função é considerado por muitos autores como um dos mais importantes da matemática. Na verdade, as funções surgem ao longo de todo o currículo, por exemplo nas operações aritméticas (quando a um par de números corresponde um único número), nas transformações geométricas (quando se relacionam conjuntos de pontos com as respectivas imagens), em álgebra (quando se relacionam variáveis que representam números).

O conceito de função apresenta diversas facetas e pode ser encarado de diferentes modos. De acordo com a definição, trata-se de uma correspondência unívoca entre dois conjuntos, mas uma função é, geralmente, encarada numa situação concreta como uma relação entre variáveis, o que corresponde, de resto, ao modo como o conceito surgiu historicamente. Tanto nas situações da vida corrente como nos problemas de outras ciências, quando se diz que uma coisa é *função* de outra está-se a evidenciar uma relação de dependência, isto é, que a primeira varia à medida que a segunda também varia.

Estas linguagens não são necessariamente contraditórias mas podem gerar confusões e dificuldades de aprendizagem. Hoje, aceita-se que uma abordagem inicialmente informal aponta para que se comece com a exploração e representação de situações concretas, usando-se tabelas de valores e gráficos. A relação entre o lado e o perímetro (ou a área) de um quadrado é um exemplo de uma relação funcional que pode ser estudada nesta perspectiva. A noção de função pode emergir, também, da exploração de padrões numéricos e da sua subsequente generalização através do uso de expressões com variáveis.

Um aspecto essencial na aprendizagem das funções é o contacto com diferentes modos de as encarar e representar. Estabelecer relações entre tabelas de valores, gráficos e expressões algébricas ajuda os alunos a desenvolver diversos tipos de conexões e a compreender o conceito de função.

Associada à noção de função está, também, a de transformação. Actividades de aprendizagem relevantes podem ser as que envolvem a descoberta de regras que transformam certos números noutros números. Estas regras podem ser explicadas por palavras ou através de expressões algébricas e ajudam os alunos a ver a função como algo que transforma cada elemento de um dado conjunto num outro elemento de outro (ou do mesmo) conjunto. Neste processo está subjacente a ideia de correspondência, que os alunos desenvolveram em maior ou menor grau em múltiplas actividades escolares e não escolares, e que está na base da definição moderna de função.

A	**B**
1	5
2	7
3	9
4	?

Qual é o número que deve estar no lugar do ponto de interrogação?
Qual é a regra que relaciona A com B?

Há vários níveis possíveis para se abordar uma actividade como esta. A descoberta do padrão numérico ou o enunciado da regra de transformação podem corresponder a uma fase inicial: soma-se 4, depois 5, depois 6… sucessivamente aos números 1, 2, 3…; ou então, multiplica-se cada número por 2 e soma-se 3 ao resultado. Igualmente relevante será analisar de que modo a mudança numa variável se relaciona com a mudança na outra: um aumento de 1 na primeira provoca um aumento de 2 na segunda (a partir de 5). Mais tarde, a expressão algébrica da regra (B=3+2A) usa já, de modo explícito, as letras como variáveis. Numa fase posterior, poderão surgir as noções de variável independente e dependente, de domínio e contra-domínio, e mesmo a notação habitual das funções.

No último ciclo da educação básica, é importante que os alunos tenham experiências de aprendizagem em que funções e gráficos surjam como modelos de situações reais diversas. Em particular, devem ser consideradas situações em que trabalhem com conceitos também abordados noutras perspectivas, como é o caso da proporcionalidade directa e inversa.

A exploração de situações que envolvem funções e gráficos deve ser apoiada, algumas vezes, pelo recurso à tecnologia gráfica. Com efeito, o conhecimento e uso da folha de cálculo e outros programas de computador especificamente vocacionados para o trabalho com gráficos, assim como das calculadoras gráficas, devem fazer parte, pelo menos a um nível introdutório, das experiências de aprendizagem de todos os alunos do ensino básico.

Pensamento algébrico e situações de aprendizagem

Uma componente do pensamento algébrico é a capacidade para operar mentalmente com objectos abstractos de acordo com as propriedades das classes de objectos às quais pertencem. No raciocínio formal, os elementos são conceitos e proposições abstractas e o aspecto operacional tem a ver com a determinação de relações actuais ou deduzidas entre eles; nem os elementos, nem as operações necessitam de um referente do mundo real.

Parece haver uma relação forte entre o desenvolvimento desta capacidade e o conhecimento metalinguístico na linguagem corrente quando palavras ou séries de palavras são tratadas como exemplos de variáveis com propriedades gerais. Ter conhecimento do simbolismo algébrico é semelhante a ter conhecimento da palavra. Alunos com baixos níveis de consciência metalinguística têm dificuldade em interpretar e usar simbolismo algébrico.

Porém, é preciso ter em conta a idade e a maturidade intelectual das crianças e dos jovens. O que se espera do ensino básico é que proporcione aos alunos uma introdução e uma sensibilização a este tipo de raciocínio. É muito importante que os alunos ganhem gosto por actividades intelectuais que envolvem um raciocínio abstracto — não as vendo como complicações inúteis ou algo que apenas interessa aos matemáticos — mas, até por isso mesmo, é essencial que as situações não sejam desnecessariamente complexas e que a actividade concreta não se reduza a executar regras sem aparente sentido.

Actividades de tipo exploratório e investigativo, que apelem à descoberta e comunicação de generalizações, podem desempenhar um papel central no desenvolvimento de capacidades ligadas ao pensamento algébrico.

A álgebra deve surgir como uma necessidade para resolver problemas em que os recursos aritméticos são insuficientes. Ou, como dizem alguns autores, a educação algébrica dá-se na medida em que a produção do conhecimento algébrico surge para organizar uma situação, como uma ferramenta e não como objecto primário do estudo.

Capacidades a desenvolver

Simbolização

Esta capacidade vai sendo desenvolvida na experiência que a criança tem com o mundo real e é, desde muito cedo, trabalhada na escola através de diversas actividades, em todas as disciplinas. Os conceitos são experienciados por meio de sistemas simbólicos como a linguagem escrita e a notação matemática, os quais ainda estão ligados ao mundo empírico. As situações referem-se a observações e a experiências concretas e qualquer processo pode ser validado por referência ao mundo real ou visto como “real” pelo aluno.

Quando os alunos lidam com símbolos estão a promover ideias algébricas. Gradualmente, é importante saber que algarismos, números, letras, expressões e outros signos matemáticos podem ser tratados como símbolos separados dos referentes do mundo real e, em consequência, podem ser manipulados em ordem a rearranjar ou simplificar expressões algébricas, independentemente dos referentes originais. É preciso começar a entender que os símbolos algébricos têm diferentes interpretações de acordo com o domínio conceptual a que se referem e que podem, por exemplo, representar objectos em vez de números. É, ainda, necessário perceber que grupos de símbolos podem ser usados como unidades básicas com significado (por exemplo, $x+5$ pode ser considerado como uma quantidade única em situações de manipulação algébrica).

Esta capacidade inclui a compreensão da noção de equação e o conhecimento de uma sintaxe, permitindo reconhecer se uma expressão algébrica está ou não escrita correctamente: implica, por exemplo, saber que $4x=20 \Rightarrow x=5$ está correctamente escrita, mas que isso já não se passa com $4x=20=:4=5$ ou com $4x=20 \Rightarrow 5$.

Raciocínio algébrico

Esta capacidade engloba a aptidão para representar situações e padrões através de gráficos, tabelas, regras e equações, assim como para decidir, na resolução de um problema, que números serão designados por letras e quais serão representados por uma expressão, construída para traduzir uma relação. Além disso, inclui ainda a aptidão para usar procedimentos algébricos no cálculo de valores de expressões, no uso de fórmulas e na resolução de equações em casos simples.

Na resolução de problemas, a compreensão e a análise das relações depende do conhecimento semântico das palavras no enunciado, bem como da compreensão de conceitos e métodos matemáticos, e ainda do conhecimento pragmático relacionado com o problema concreto. Ser capaz de utilizar as propriedades algébricas das operações na resolução de problemas constitui também um aspecto importante do raciocínio algébrico.

A linguagem algébrica não é tão diversificada como a linguagem natural, o que leva, muitas vezes, os alunos a traduzir predicados ou relações em linguagem natural que não existem em linguagem algébrica. Estas dificuldades são chamadas por alguns autores como o modo não-algébrico de pensamento, isto é, quando o uso de linguagem algébrica não está de acordo com o significado matemático habitual.

Compreensão das relações funcionais

Esta capacidade envolve o conhecimento de uma variedade de relações e a aptidão para identificar relações funcionais e distingui-las de outras.

Compreender o que é uma função implica ter experiência de lidar com diversas formas de representação (em tabelas, gráficos, regras verbais, expressões algébricas ou outras) e entender as facetas que este conceito pode apresentar, em especial, como correspondência entre dois conjuntos e como relação entre variáveis.

De facto, os alunos devem perceber que uma função é uma correspondência com determinadas características e que, para definir uma função, necessitam dos dois conjuntos (domínio e conjunto de chegada) entre os quais se define a correspondência e de um processo pelo qual a partir de cada elemento do primeiro conjunto (objecto) se obtém o correspondente no segundo (imagem). Por outro lado, devem ser capazes de associar o conceito de função às ideias de variação e de mudança. A competência para o fazer implica que sejam capazes de interpretar como a mudança numa variável se relaciona com a mudança noutra variável.

Representação e transferência

A compreensão da noção de função está ligada ainda à capacidade para representar relações funcionais de vários modos e em passar de uns tipos de representação para outros. Isto pressupõe identificar funções iguais (ou a mesma função) em representações distintas.

Esta capacidade implica que os alunos sejam capazes de se mover de uma representação para outra, usando regras verbais, tabelas, gráficos ou expressões algébricas. O uso da tecnologia gráfica, a um nível introdutório, não só ajuda a desenvolver esta capacidade como deve fazer parte do conjunto das competências matemáticas dos alunos.

Modelação e interpretação

Um dos principais usos das funções é na modelação de situações do mundo real. Perceber a função deste modo constitui um passo importante para que os alunos atribuam sentido ao conceito de função. A modelação refere-se à capacidade para representar de uma forma abstracta uma situação problemática que envolve variáveis. Esta representação pode fazer-se de diversas modos, nomeadamente, através de equações, tabelas e gráficos.

A capacidade de modelação é indissociável da interpretação dos modelos matemáticos em termos das respectivas situações da vida real.

Mais tarde, no ensino secundário, o conceito de função, percebido inicialmente como um processo ou procedimento, será entendido como um objecto mental. Para alguns autores este processo, a que chamam *reificação*, permite ver este objecto matemático como uma entidade que possui certas propriedades e sobre a qual se podem efectuar operações.

A competência no domínio da álgebra e das funções

A competência matemática no domínio da álgebra e das funções que todos devem desenvolver inclui diversos aspectos.

Em todos os ciclos da educação básica:

• a predisposição para procurar padrões e regularidades e para formular generalizações em situações diversas, nomeadamente em contextos numéricos e geométricos;

• a aptidão para analisar as relações numéricas de uma situação, explicitá-las em linguagem corrente e representá-las através de diferentes processos, incluindo o uso de símbolos;

• a aptidão para interpretar e construir tabelas de valores, gráficos, regras verbais e outros processos que traduzam relações entre variáveis, assim como para passar de umas formas de representação para outras;

• a aptidão para concretizar em casos particulares relações entre variáveis e fórmulas e para procurar soluções de equações simples;

• a sensibilidade para entender e usar as noções de correspondência e de transformação em situações concretas diversas.

Para além dos pontos atrás referidos, que dizem respeito a todos os alunos e a todos os ciclos da educação básica, há aspectos específicos no terceiro ciclo que importa identificar:

• o reconhecimento do significado de fórmulas no contexto de situações concretas e a aptidão para usá-las na resolução de problemas;

• a aptidão para usar equações como meio de representar situações problemáticas e para resolver equações e sistemas de equações, assim como para realizar procedimentos algébricos simples;

• a compreensão do conceito de função e das facetas que pode apresentar, como correspondência entre conjuntos e como relação entre variáveis;

• a aptidão para representar relações funcionais de vários modos e passar de uns tipos de representação para outros, usando regras verbais, tabelas, gráficos e expressões algébricas, e recorrendo, nomeadamente, à tecnologia gráfica;

• a sensibilidade para entender o uso de funções como modelos matemáticos de situações do mundo real, em particular nos casos em que traduzem relações de proporcionalidade directa e inversa.

Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a Matemática* (tese de doutoramento). Lisboa: APM.

Abrantes, P. (1996) Interpretação dos níveis de literacia: o domínio quantitativo. Em A. Benavente et al. (eds), *A literacia em Portugal: resultados de uma pesquisa extensiva e monográfica*, 94-102. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian e Conselho Nacional de Educação.

Abrantes, P., Leal, L. C. & Ponte, J. P. (org.) (1996). *Investigar para aprender Matemática*. Lisboa: APM.

Abrantes, P., Leal, L., Teixeira, P. & Veloso, E. (1997). *MAT789 – Inovação curricular em Matemática*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Azcárate, C. & Deulofeu, J. (1990). *Funciones y graficas*. Matematicas: cultura y aprendizaje, 26. Editorial Synthesis.

Associação de Professores de Matemática (1988). *Renovação do Currículo de Matemática*. Lisboa: APM.

Bishop, A. (1991). *Mathematical Enculturation – A Cultural Perspective on Mathematics Education*. London: Kluwer Academic Publishers.

Carvalho, C. (1996). Algumas Questões em Torno de Tarefas Estatísticas com Alunos do 7ºano. *Actas do ProfMat 96*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Chamorro, C. & Belmonte, J. M. (1991). *El problema de la medida:didactica de las magnitudes lineales.* Matematicas: cultura y aprendizaje, 17. Editorial Synthesis.

Delors, J. et al. (1996). *Educação um tesouro a descobrir*. Rio Tinto: Edições Asa.

Fiol, Mª Luisa & Fortuny, J. M. (1990). *Proporcionalidad directa. La forma y el número.* Matematicas: cultura y aprendizaje, 20. Editorial Synthesis.

Godiño, J. L. et al. (1991). *Azar y probabilidad*. Matematicas: cultura y aprendizaje, 27. Editorial Synthesis.

Gordo, Mª de Fátima (1994). A visualização espacial e a aprendizagem da Matemática: um estudo no 1º ciclo do ensino básico. *Quadrante,* 3(1).

Grows, D. A. (Ed.) (1992). *Handbook of Research on Matematics Teaching and Learning*. New York: MacMillan.

Haylock, D. (1995). *Mathematics explained for primary teachers*. Paul Chapman Publishing Ltd. London.

Junqueira, M. (1996). Exploração de construções geométricas em ambientes computacionais dinâmicos. *Quadrante,* 5(1).

Lesh, R. & Landau, M. (Eds.) (1983). *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. New York: Academic Press Inc.

Lins, R.C. & Gimenez, J. (1997). *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI*. Campinas: Papirus Editora.

Malkevitch, Joseph, ed. (1991). *Geometry's Future*. COMAP, Inc. Lexington, USA.

Matos, J. M. et al. (a publicar). Relatório do Projecto "Aprendizagens em Matemática: um estudo sobre a construção de conceitos". Lisboa: IIE.

Matos, J. M. & Serrazina, L. (1996). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ministério da Educação (1991). *Declaração Mundial sobre Educação para Todos. Quadro de Acção para responder às necessidades de Educação Básica. Conferência Mundial sobre Educação Para Todos.* Editorial do Ministério da Educação.

Ministério da Educação - DEB (1997). Relatório do Projecto "Reflexão Participada sobre os Currículos do Ensino Básico". Lisboa: ME/DEB (colecção Reflexão Participada).

Ministério da Educação – DGEBS (1991). *Programa de Matemática. Ensino Básico. 1º ciclo.* Lisboa: Ministério da Educação.

Ministério da Educação – DGEBS (1991). *Programa de Matemática. Ensino Básico. 2º ciclo.* Lisboa: Imprensa Nacional Casa da Moeda.

Ministério da Educação – DGEBS (1991). *Programa de Matemática. Ensino Básico. 3º ciclo.* Lisboa: Imprensa Nacional Casa da Moeda.

National Council of Teachers of Mathematics (1998). *Principles and Standards for School Mathematics: Discussion Draft.* Reston, Va: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar*. Lisboa: APM & IIE (tradução portuguesa de *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*, 1989)

National Research Council (1989). *Everybody counts*. Washington DC: National Academy Press.

Nunes, T. & Bryant, P. (1996). *Children Doing Mathematics*. Blackwell Publishers.

O'Callaghan, B. R. (1998). Computer-intensive algebra and students' conceptual knowledge of functions. *Journal for Research in Mathematics Education,* 29(1), p. 21-40.

Ponte. J., Matos, J. M. & Abrantes, P. (a publicar). *Investigação em Educação Matemática e Desenvolvimento Curricular*. Lisboa: IIE.

Ramalho, G. (1994). *As nossas crianças e a matemática*. Lisboa: Ministério da Educação, Dep/Gef.

Sierpinska A. (1994). *Understanding in Mathematics* . London: The Falmer Press.

Veloso, E. (1998). *Geometria: temas actuais*. Lisboa: IIE.