

© Câmara Municipal de Castelo Branco

XXXV  
**Profmat**  
11  
12  
13 julho

XXX  
**SIEM**  
10.11 julho

Castelo Branco  
2019

Escola  
Secundária  
Amato Lusitano

APM  
Associação de Professores  
de Matemática



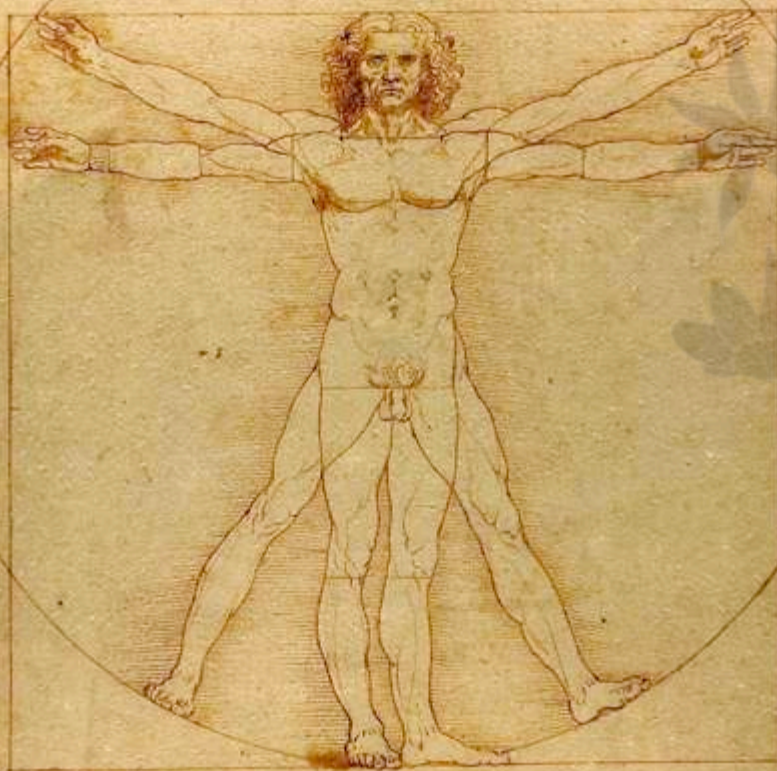
**O HOMEM DE VITRÚVIO,**

**a propósito de Leonardo**

**Lurdes Figueiral**  
lurdesfigueiral@gmail.com

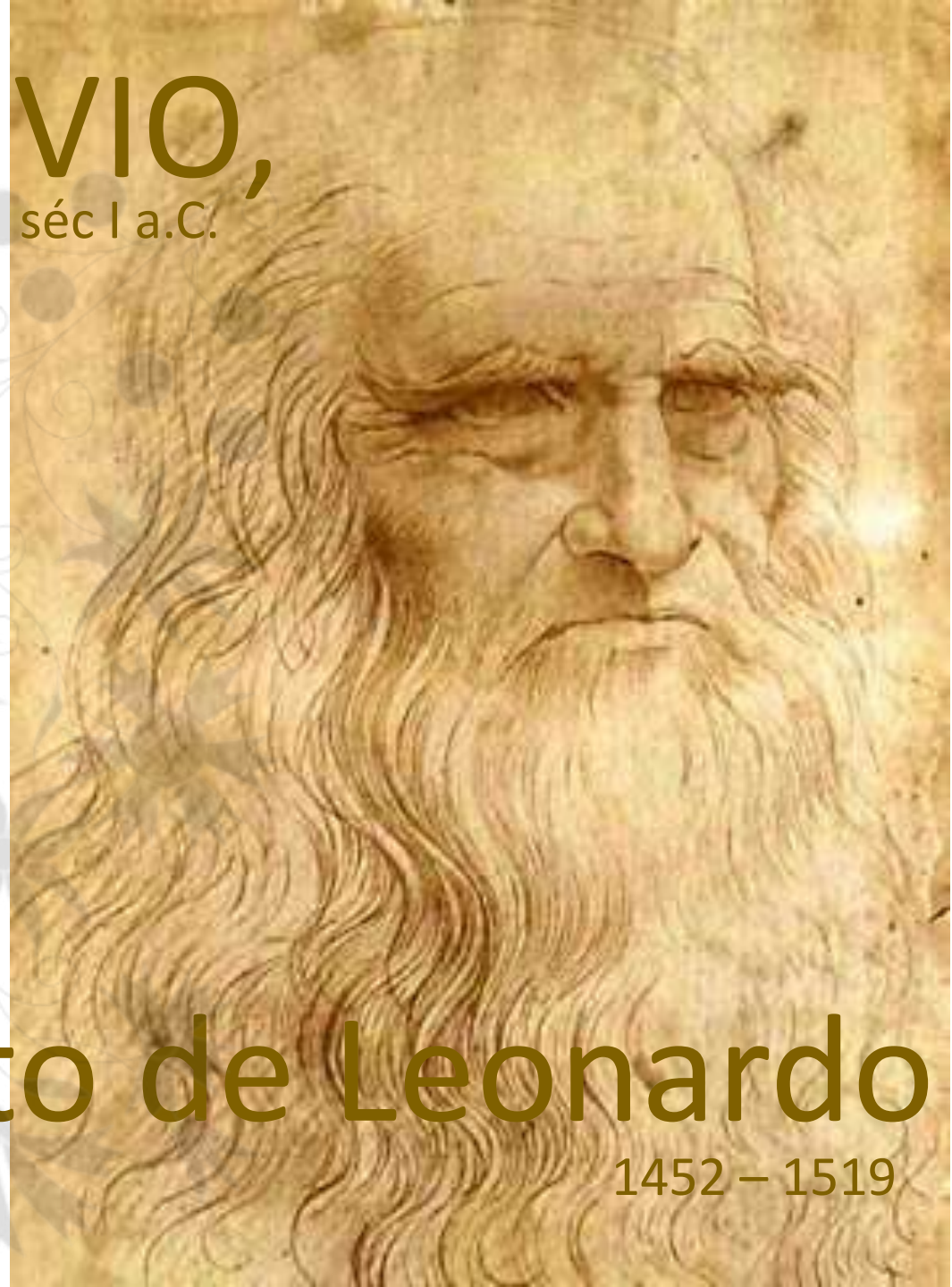
# O HOMEM DE VITRÚVIO,

séc I a.C.



# a propósito de Leonardo

1452 – 1519



(...)

Sei que seria possível construir a **forma justa**  
De uma cidade humana que fosse  
Fiel à **perfeição do universo**

Por isso recomeço sem cessar a partir da página em branco  
E este é meu ofício de poeta para a reconstrução do mundo





*Quando a razão percorre o céu e a terra, descobre que nada lhe agrada fora da beleza; e na beleza, as figuras; nas figuras as dimensões; nas dimensões os números.*

Santo Agostinho, *De Ordine*, II, XV, 42

*Podemos amar outra coisa senão a beleza? Mas é a harmonia que agrada na beleza; ora, nós já vimos, a harmonia é o resultado da igualdade nas proporções. Esta proporção igual não se acha apenas nas belezas que são do domínio do ouvido ou que resultam do movimento dos corpos, mas ela existe ainda nessas formas visíveis, às quais damos mais comumente o nome de beleza.*

Santo Agostinho, *De Musica*, VI, 13, 38

século IV

# da proporção

proporção, beleza e figura

cânones de Policleto e Vitruvius

as proporções em Pitágoras

proporções e música

retângulos e proporções na arquitetura

Vitruvius

# da proporção

proporção, beleza e figura

cânones de Policleto e Vitruvius

as proporções em Pitágoras

proporções e música

retângulos e proporções na arquitetura

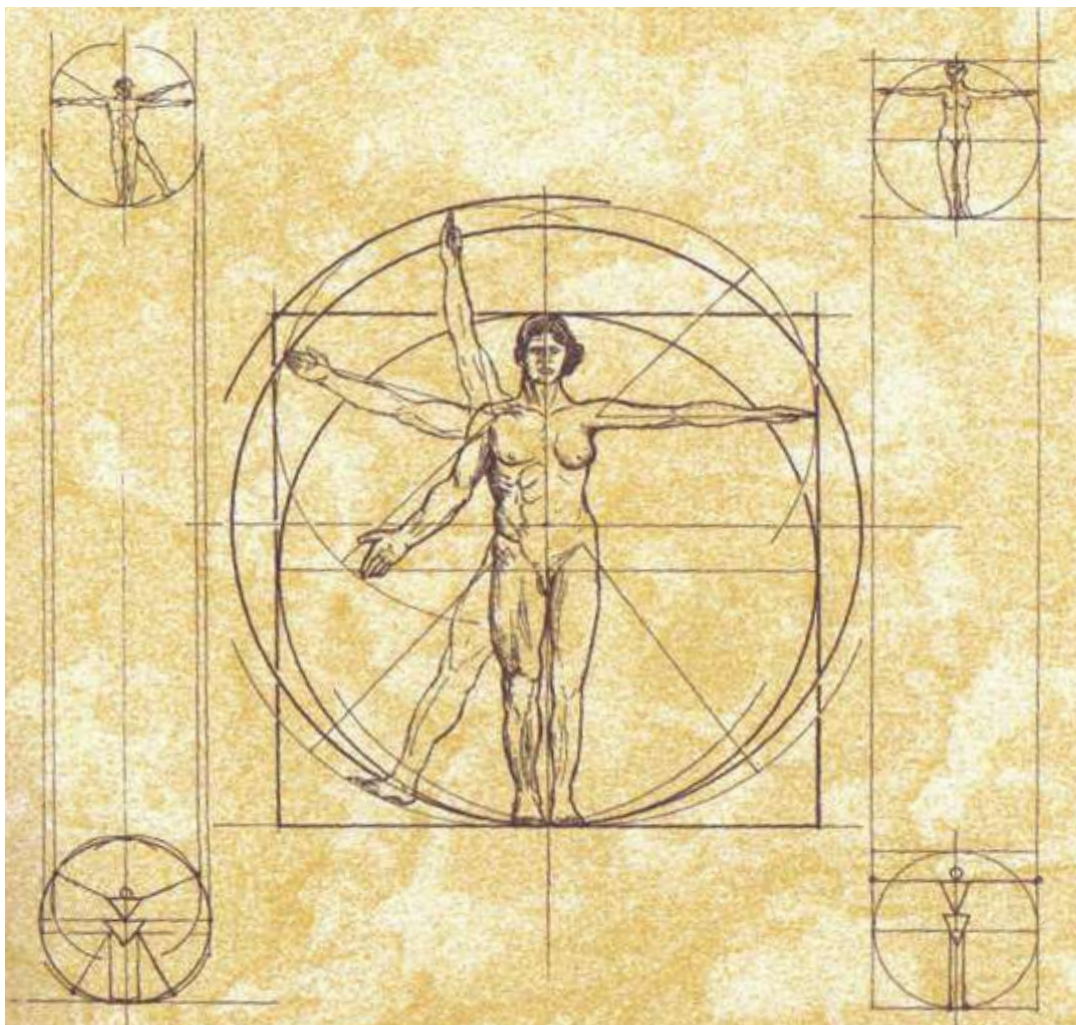
Vitruvius

Doriphorus, Policleto (séc V a.C.)



*(...) na construção de Policleto cada elemento é perfeito, claro e autónomo. Esta autonomia de cada elemento é comum a toda a arte helénica.*

*(...) Policleto mostra com uma maior evidência o caminho próprio do génio grego: a busca de uma harmonia pela qual o ser individual se integra num conjunto sem se perder nele, como a coluna feita para ser integrada no templo mas que no entanto é inteira em si mesma, existe em si e por si, mesmo separada do templo.*



Thomas Nobel Howe, 2001

Ilustração da versão portuguesa da obra de Vitruvius

*Portanto, se a natureza compôs o corpo do homem, de modo a que os membros correspondam proporcionalmente à figura global, parece que foi por causa disso que os Antigos estabeleceram que também nos acabamentos das obras houvesse uma perfeita execução de medida na correspondência de cada um dos membros com o aspecto geral da estrutura.*

Vitruvius, *De Architectura*



# da proporção

proporção, beleza e figura

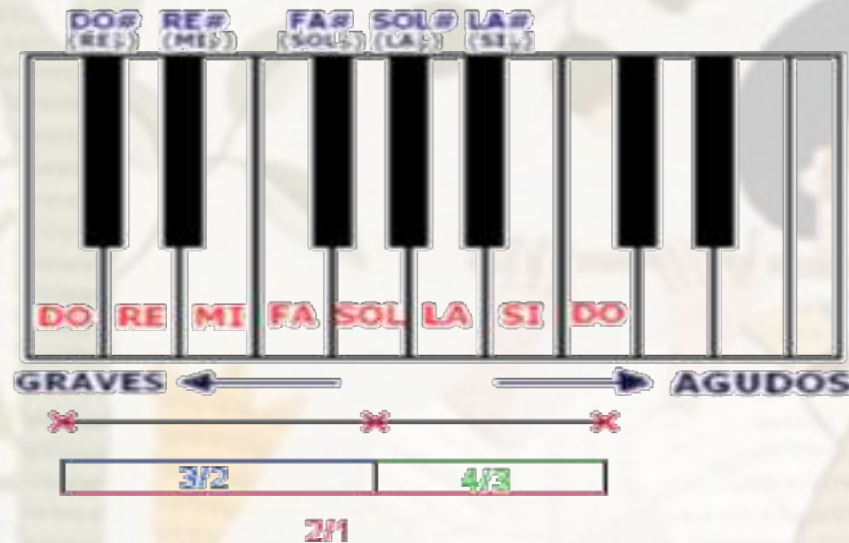
cânones de Policleto e Vitruvius

**as proporções em Pitágoras**

proporções e música

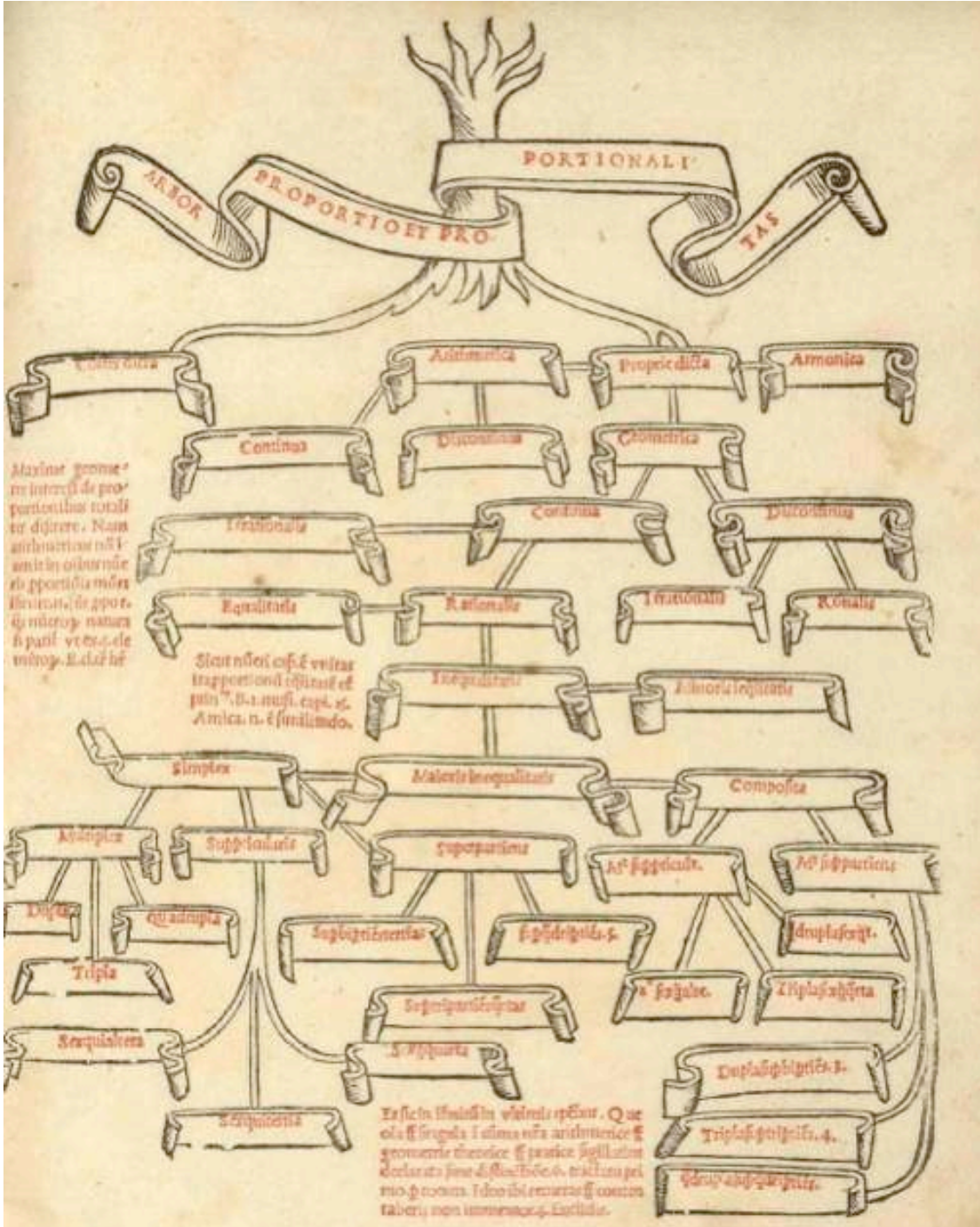
retângulos e proporções na arquitetura

Vitruvius



## Razão Intervalo Musical

- 1:1 Uníssona
- 4:3 Quarta (diatesseron)
- 3:2 Quinta (diapente)
- 2:1 Oitava (diapason)

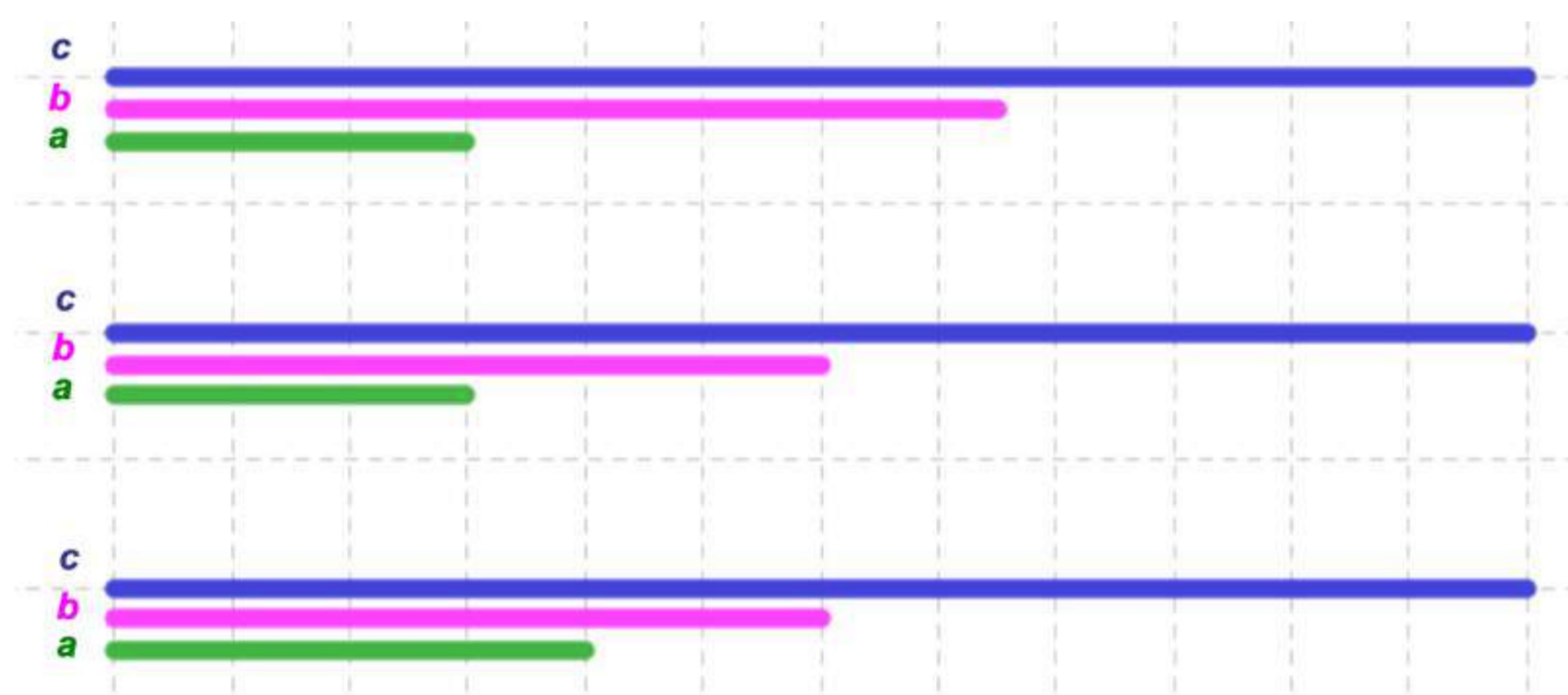


Para os pitagóricos, a igualdade de razões formava uma proporção.

Distinguiam uma proporção aritmética de uma geométrica e de uma harmónica e interpretavam-nas filosófica e socialmente

(Dirk J Struik, *História concisa das Matemáticas*)

Gravura do *De Divina Proportione* de Luca Pacioli (1509)  
Leonardo da Vinci



**Proporção aritmética:**  $c - b = b - a$  ou  $b = \frac{a+c}{2}$

**Proporção geométrica:**  $b^2 = ac$  ou  $\frac{c}{b} = \frac{b}{a}$

**Proporção harmónica:**  $\frac{c-b}{b-a} = \frac{c}{a}$  ou  $b = \frac{2ac}{a+c}$  ou  $b = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}}$

# da proporção

proporção, beleza e figura

cânones de Policleto e Vitruvius

as proporções em Pitágoras

proporções e música

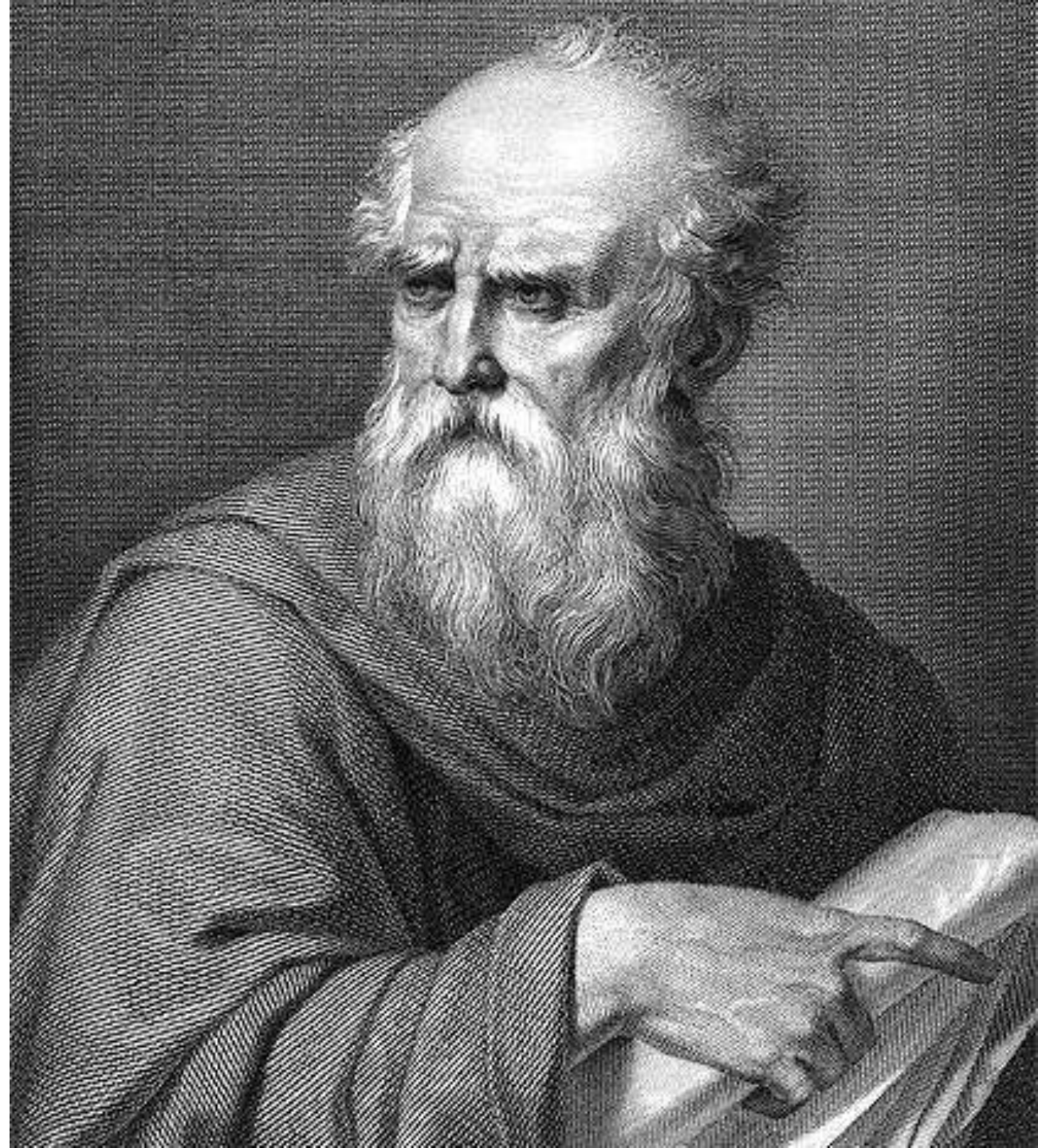
retângulos e proporções na arquitetura

Vitruvius

# Vitrúvio (século I a.C)

*Pois estes cálculos proporcionais são aplicados nas espessuras por causa da visão ocular subindo em altura. Com efeito o olhar procura a beleza e, se não formos de encontro ao seu agrado através da proporção e da aplicação de módulos suprimindo o que falta com um justo aditamento, resultará um aspecto desmedido e sem graça para os observadores.*

*De Architectura, III, III, 13*

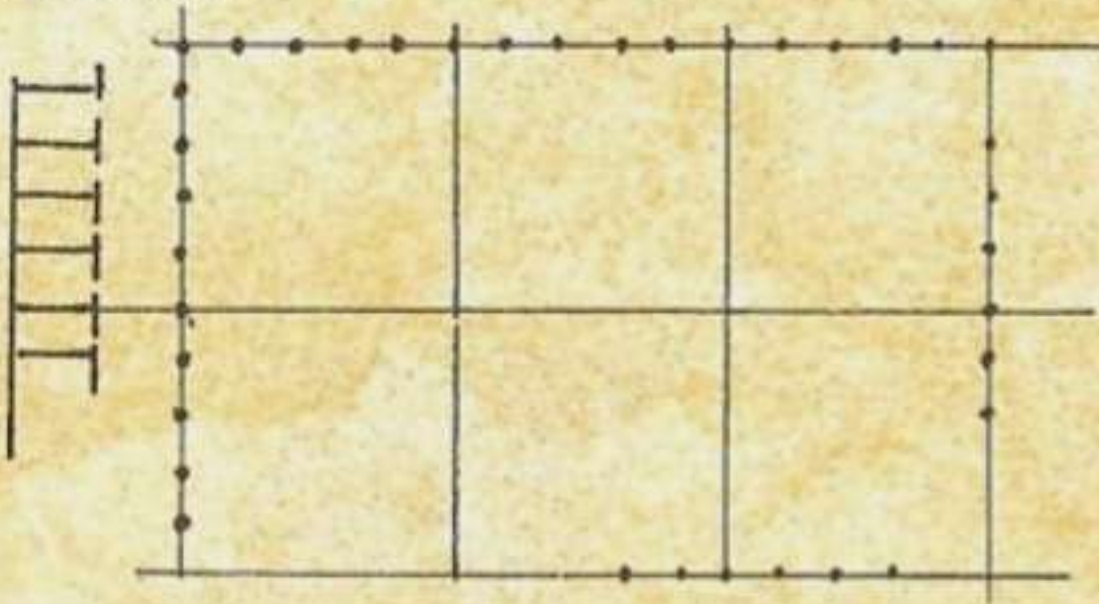




Convém que o architecto conheça a **arte literária**, para que possa deixar uma marca mais forte através dos seus escritos. Também deverá ser instruído na **ciência do desenho**, a fim de que disponha da capacidade de mais facilmente representar a forma que deseja para as suas obras, através de modelos pintados. A **geometria**, por seu lado, proporciona à architectura muitos recursos. Em primeiro lugar, logo a seguir às linhas **rectas**, ensina o uso do **compasso**, com o qual muito mais facilmente se efectuam as representações gráficas dos edifícios (...) Em segundo lugar, porque, através da **óptica**, se orientam correctamente os vãos de iluminação nas construções a partir de determinadas zonas da abóbada celeste. E, por último, porque através da **aritmética**, se calculam as despesas dos edifícios, se define a lógica das medidas e se encontram soluções para as difíceis questões das comensurabilidades através da lógica e métodos geométricos.

## O FORVM ITALIANO

- dimensões proporcionais à cidade
- oblongo, 2:3
- adaptado ao costume itálico de combates de gladiadores
- intercolúnios amplos
- lojas (para cambistas e outros) e balcões
- colunas superiores 1/4 menores que as inferiores



## FORUM ITALIANO

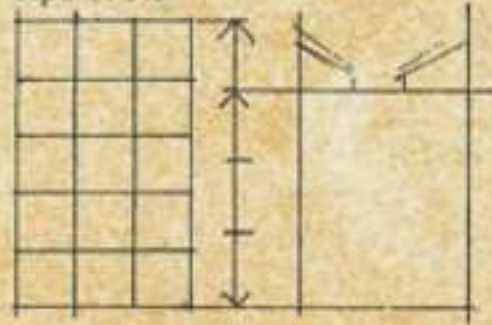
A sua largura será definida, de modo que tenha *duas partes das três* [3/2] em que for dividido o comprimento.



## PROPORÇÕES DOS ATRIA (6.3.3-6)

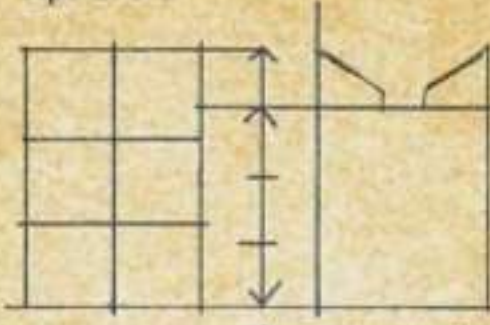
Dimensões dos *atria*

Tipo 1: 5:3



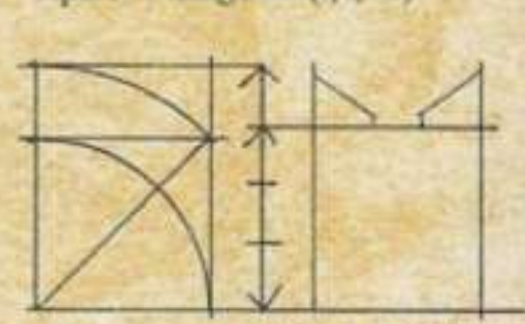
altura = comprimento menos 1/4

Tipo 2: 3:2



altura = comprimento menos 1/4

Tipo 3: 1:diagonal (i.e.,  $\sqrt{2}$ )



altura = comprimento menos 1/4

# ÁTRIOS

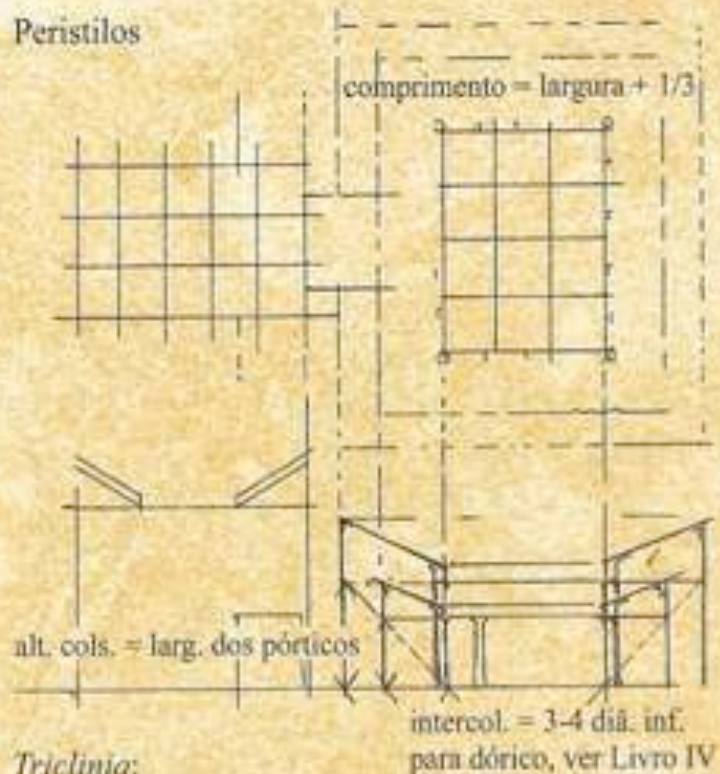
*A largura e o comprimento dos átrios regulam-se de três maneiras.*

*A primeira consiste em dividir o comprimento em cinco partes e dar três à largura [5/3];*

*a segunda, em dividi-lo em três partes e atribuir duas a esta [3/2];*

*a terceira, em descrever um quadrado com os lados iguais à largura, traçando-se nele uma linha diagonal, fazendo-se corresponder o comprimento dessa linha ao do átrio [ $\sqrt{2}$ ].*

Peristilos

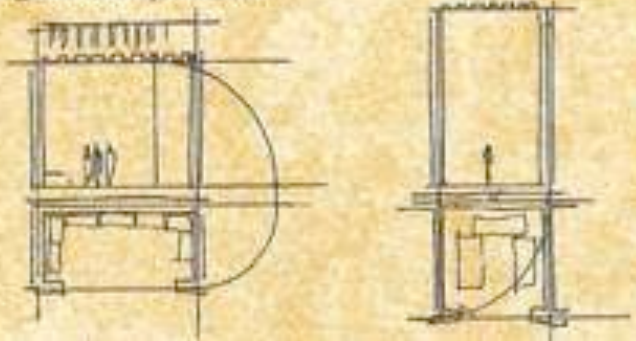


Triclínia:

- comp. = duas vezes a largura
- alts. de todos os compartimentos oblongos = metade da soma da largura e comprimento

Exedrae/Oeci:

- alts. das exedrae ou oeci quadrados = uma vez e meia a largura



# PERISTILOS

Por sua vez, os peristilos deverão ser dispostos transversalmente *um terço mais longos do que largos* [comp = larg + 1/3].

O *comprimento dos triclinios* deverá corresponder ao *dobro da sua largura* [comp = 2 larg].

A altura de todos os compartimentos que forem oblongos deverá ser planeada de modo que, *somando as medidas de comprimento e largura, se divida ao meio essa soma, sendo o resultado a medida da altura* [altura = (comp + larg)/2].

# *HOMO BENE FIGURATOS*

*Portanto, se a natureza compôs o corpo do homem, de modo a que os membros correspondam proporcionalmente à figura global, parece que foi por causa disso que os Antigos estabeleceram que também nos acabamentos das obras houvesse uma perfeita execução de medida na correspondência de cada um dos membros com o aspecto geral da estrutura.*

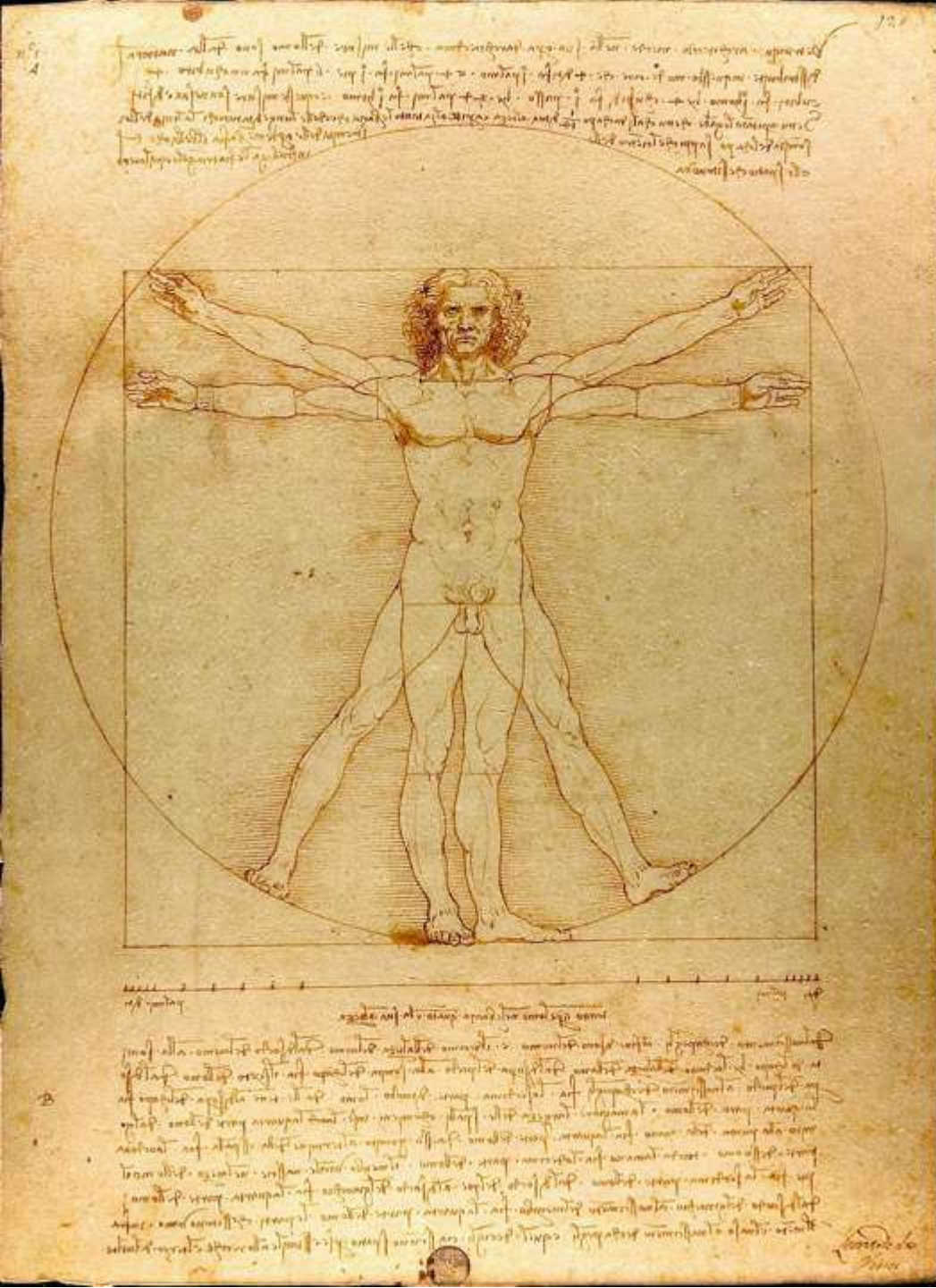
# HOMO BENE FIGURATOS

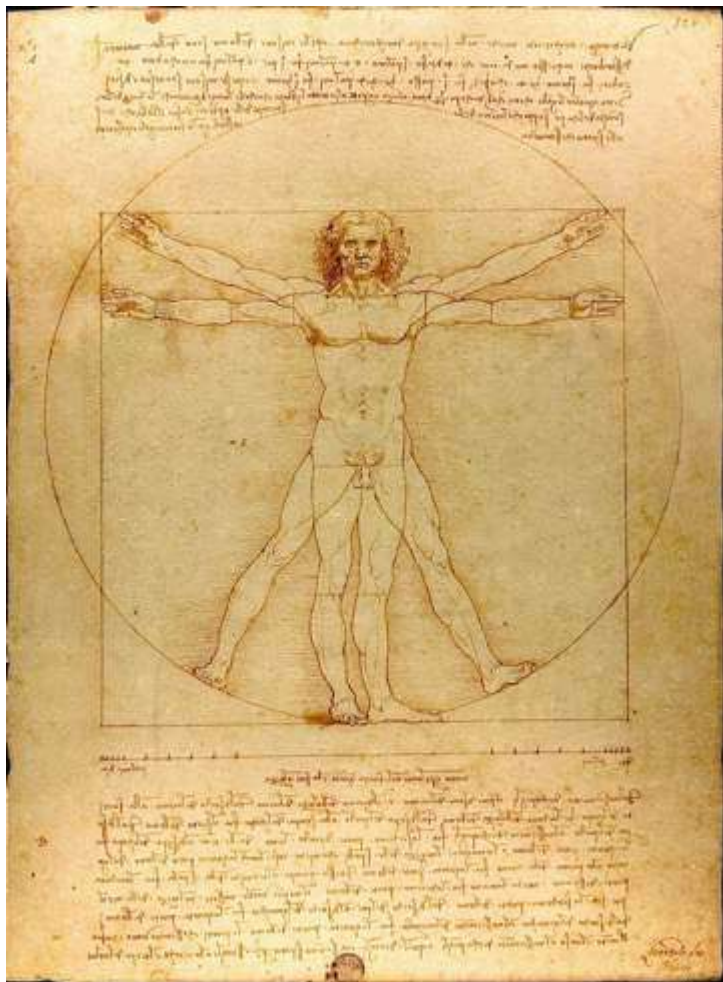
Acontece que o umbigo é, naturalmente, o centro do corpo; com efeito, se um homem se puser deitado de costas com as mãos e os pés estendidos e colocarmos um centro de compasso no seu umbigo, descrevendo uma circunferência, serão tocados pela linha curva os dedos de qualquer uma das mãos ou dos pés. Igualmente, assim como o esquema da circunferência se executa no corpo, assim nele se encontra a figura do quadrado; de facto, se medirmos da base dos pés ao cocuruto da cabeça e transferirmos esta medida para a dos braços abertos, encontrar-se-á uma largura igual à altura, como nas áreas definidas em rectângulo com o auxílio do esquadro.

Leonardo da Vinci

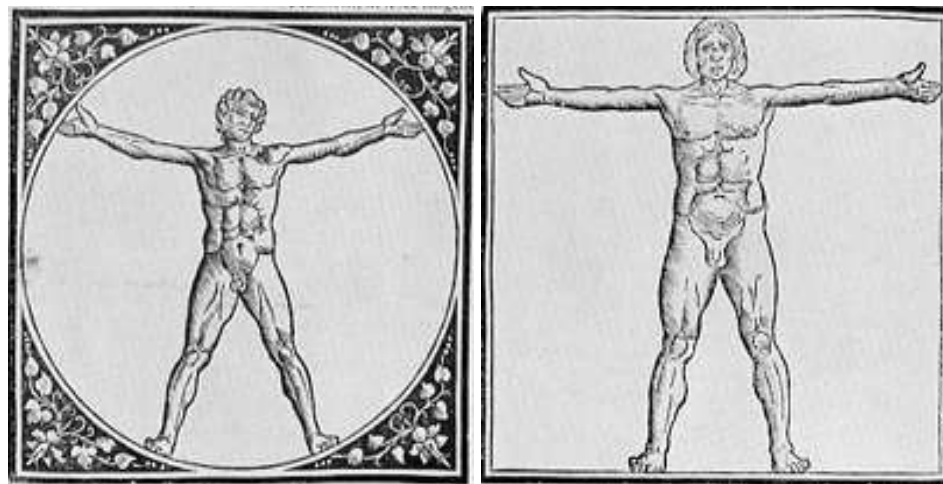
O Homem de Vitruvius, c. 1490

*De Architectura*, III, I, 3

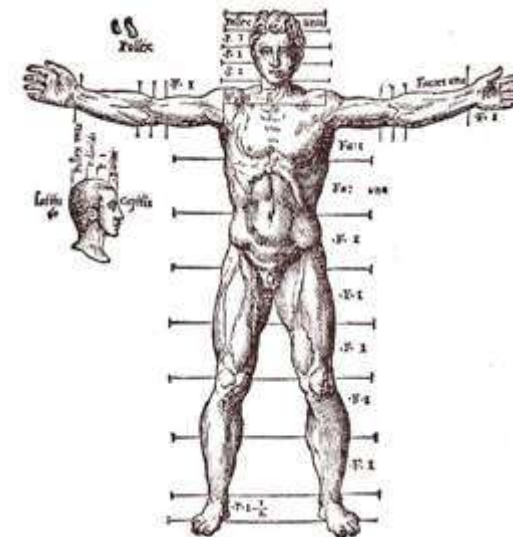




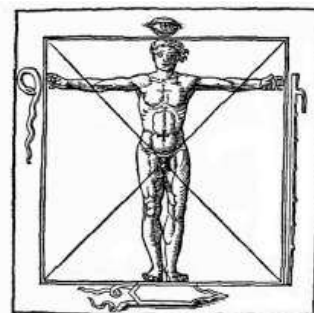
Leonardo da Vinci  
*O Homem de Vitrúvio*  
 c. 1490



Fra Giocondo (1511)



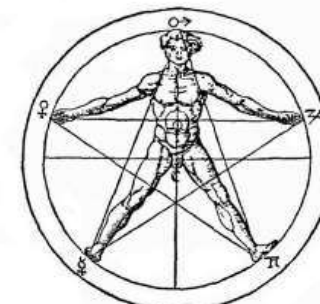
Andrea Palladio (1567)



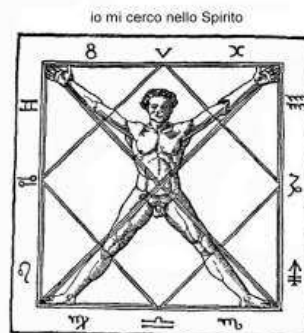
io penso la parola



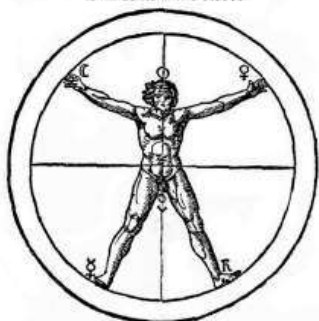
io parlo



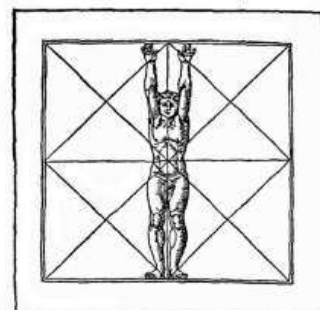
io ho parlato



io mi cerco nello Spirito

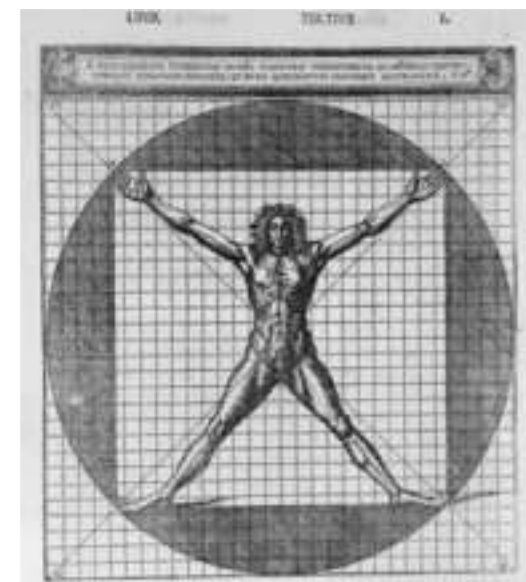


io mi sento in me stesso



io sono sulla via verso lo Spirito

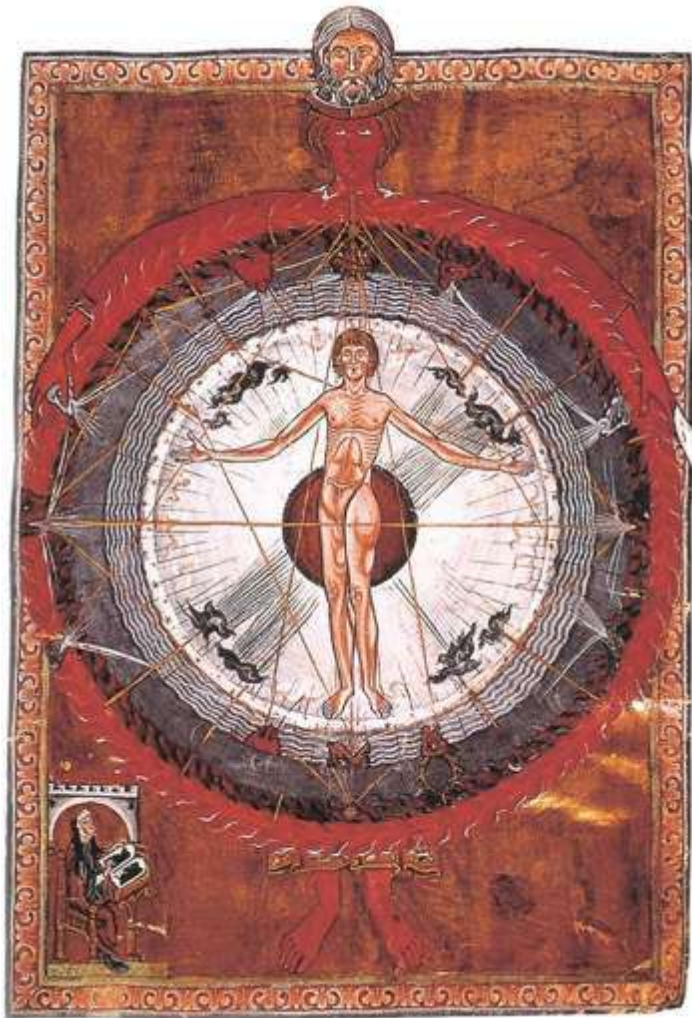
Enrique Cornelio Agripa de Nettesheim (1651)



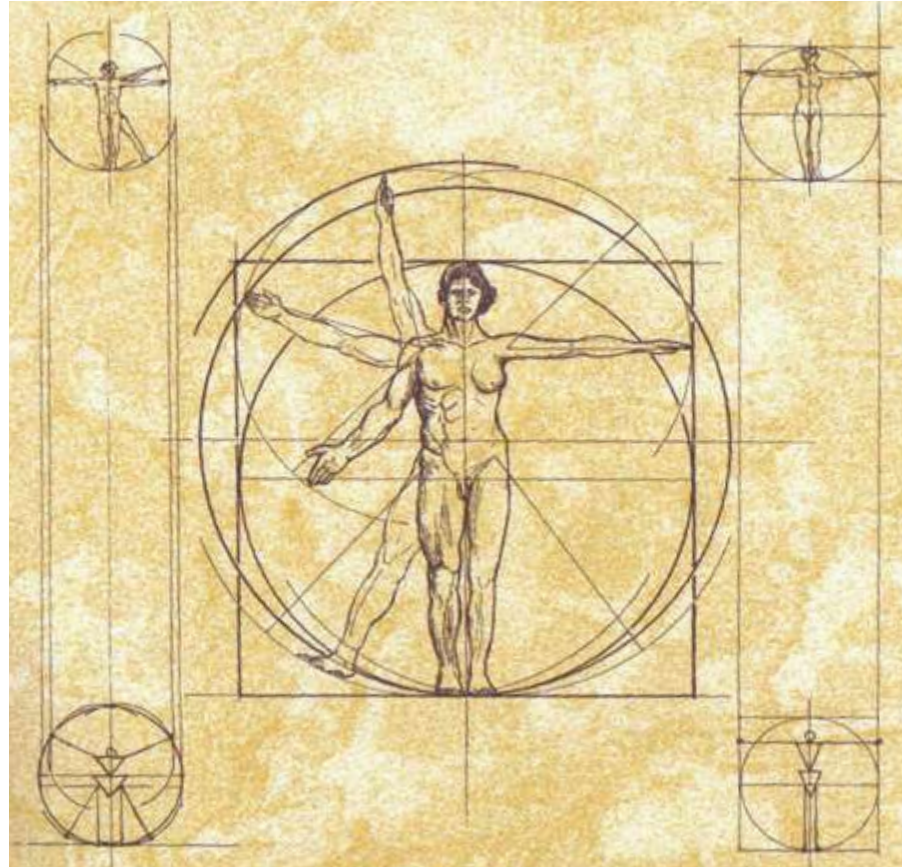
Cesare Cesariano (1521)



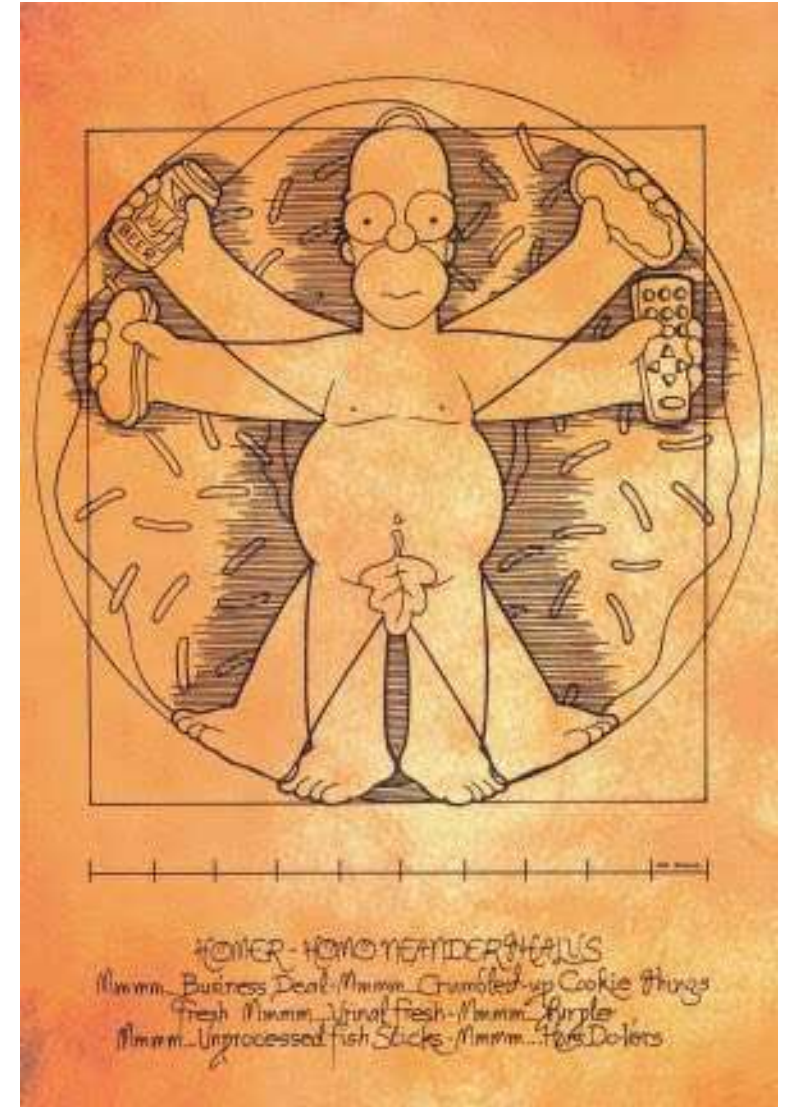
Almada Negreiros, *O Número*, tapeçaria, 1958  
Tribunal de Contas, Lisboa



Illuminura do *Liber divinatorum operum* de Hildegard von Bingen (c. 1160)



Thomas Nobel Howe, 2001



Homer de Vitruvius

# Leon Battista Alberti (1404-1472)

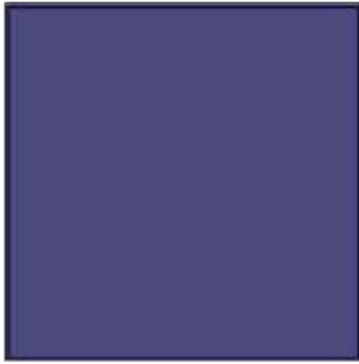
A beleza é o acordo e a harmonia das partes, em relação a um todo ao qual estão associadas segundo um certo número.





# Proporções para áreas pequenas

o quadrado



razões envolvidas:

$1/1$

o quadrado mais a sua metade



$3/2$

o quadrado mais um terço



$4/3$

# Proporções para áreas medianas

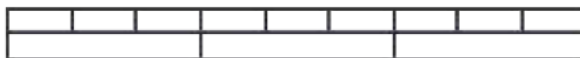
o duplo quadrado



razões envolvidas:

$$2/1$$

o quadrado mais a sua metade  
mais a metade do quadrado e meio



$$9/4 = 3/2 \times 3/2$$

o quadrado mais um terço do  
quadrado mais um terço do quadrado  
e um terço



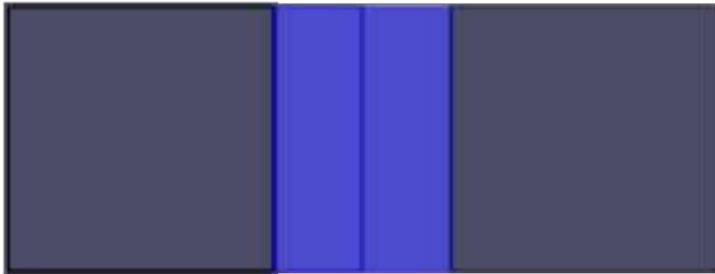
$$16/9 = 4/3 \times 4/3$$

# Proporções para áreas grandes



o triplo quadrado

$$3/1 (= 2 \times 3/2)$$



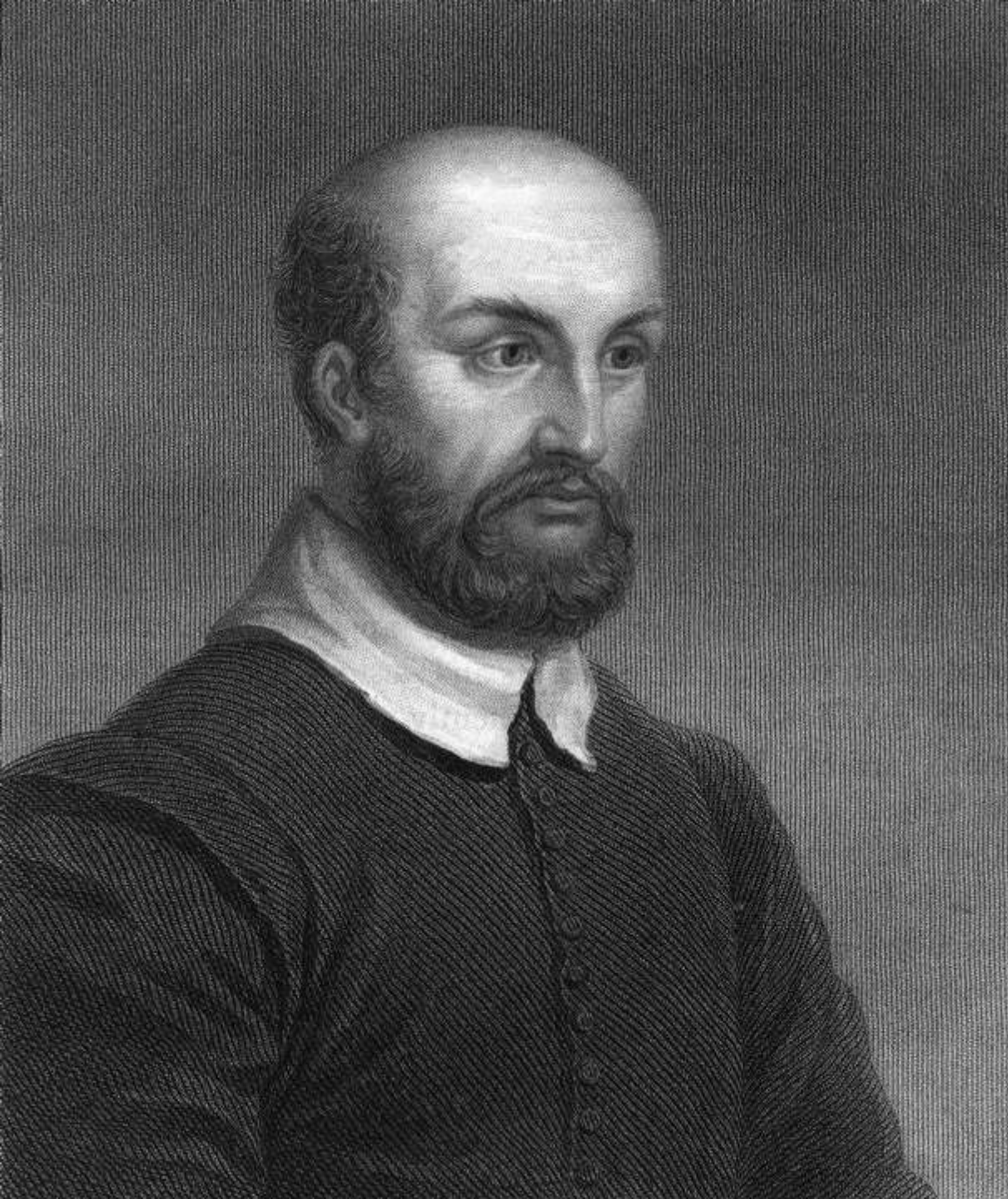
o duplo quadrado mais dois terços

$$8/3 (= 2 \times 4/3)$$



o quadrado quádruplo

$$4/1 (= 2 \times 2/1)$$



## Andrea Palladio (1508-1580)

*Levado pela minha natural inclinação dediquei os meus primeiros anos à Arquitetura:*

*e porque fui sempre da opinião que os antigos Romanos, assim como em outras muitas coisas, também na arte de edificar excederam em muito a quantos vieram depois, propus-me por guia e mestre a Vitruvius (...) e ao mesmo tempo apliquei-me na investigação das relíquias dos edifícios antigos que, a despeito dos séculos e da crueldade das nações bárbaras, chegaram até nós (...) não achando coisa que não tivesse sido feita com razão e belas proporções (...)*

peso de la techumbre; pues si en una parte fueren las piezas grandes y en la otra pequeñas, esta segunda parte será mas firme para regir el peso por la mutua cercanía de sus paredes, y la primera será menos firme: de lo qual nacerán con el tiempo gravisimos inconvenientes, y aun la ruina de toda la obra. La mas bella proporcion para las piezas, y que mejor sale es de siete especies, á saber: *Redondas*, aunque raras veces: *quadradas*: *quadrilongas por la diagonal de un quadrado de su anchura*: *de un quadrado y un tercio*: *de un quadrado y medio*: *de un quadrado y dos tercios*; *y de dos quadrados*.

*A mais bela proporção para os compartimentos e que melhor resulta é de sete espécies, a saber: Redondas (ainda que raras vezes); quadradas; quadrangulares pela diagonal de um quadrado da sua largura; de um quadrado e um terço; de um quadrado e meio; de um quadrado e dois terços; e de dois quadrados.*

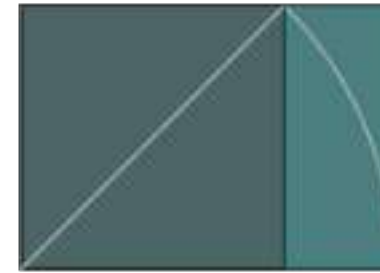
# Proporções em Palladio



*redonda*



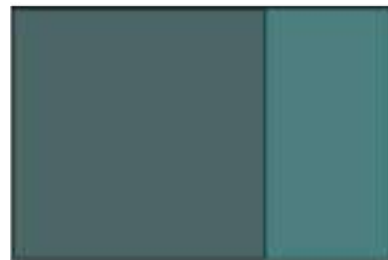
*quadrada: 1/1*



*quadrangulares pela diagonal de um quadrado da sua largura (retângulo  $\sqrt{2}$ )*



*de um quadrado e um terço (4/3)*



*de um quadrado e meio (3/2)*



*de um quadrado e dois terços (5/3)*



*de dois quadrados (2/1)*

## CAPITULO XXIII.

*De la elevacion ó altura de los aposentos.*

Los aposentos ó se construyen á bóveda ó de enmaderamiento. Si son de enmaderamiento, la altura desde el piso al sofito del suelo superior será tanta como la anchura del aposento. El quarto segundo será una sexta parte mas baxo de techo que el principal. Si los aposentos fueren á bóveda (como se suelen hacer los del primer piso por ser asi mas hermosos y menos expuestos á los incendios) la elevacion de la bóveda en las piezas quadradas será un tercio mas que la anchura: pero en las quadrilongas es preciso que de la longitud y latitud se saque la altura proporcionada con ambas. Hallarás juntando longitud y latitud en una línea, y dividiendola por medio: una de estas mitades será la altura de la bóveda. Por exemplo, sea BC (LAM. XXVI. FIG. I.) el espacio que se haya de cubrir de bóveda: añadase la anchura AC á la longitud AB, y hagase la línea BE. Dividese esta línea en dos partes iguales en el punto F, y diremos que FB es la altura que buscamos. Por Aritmética: sea la pieza que se ha de bovedar larga 12 pies y ancha 6: unidos 6 y 12 suman 18, cuya mitad es 9; luego nueve pies debe ser alto el aposento. Otra altura se puede hallar aun proporcionada á la longitud y anchura de la pieza en esta forma. Puesto el espacio CB de la bóveda (FIG. II.) añadiremos la latitud á la longitud, y haremos la línea BF: luego la dividiremos en dos partes iguales en el punto E, en el qual haciendo centro, describiremos el semicírculo BGF, y alargaremos CA que toque la circunferencia en el punto G. Asi, AG será la altura de la bóveda de CB.

Por numeros se hará de esta manera: sabido quantos pies tenga de ancha la pieza y quantos de larga, buscaremos un numero que tenga la misma proporcion á la latitud que la longitud tendrá con esta. Hallaremos este numero multiplicando el extremo menor con el mayor, y la raíz quadrada del producto será la altura que buscamos. Exemplo: si el espacio que se ha de bovedar tiene 9 pies de longitud y 4 de latitud, será 6 la altura de la bóveda; y la proporcion que tiene 9 á 6 tiene tambien 6 á 4, esto es, sesquiáltera. Pero se debe advertir en esto, que no siempre se puede hallar por numeros exactamente esta altura <sup>42</sup>.

Todavía se puede hallar otra altura de bóvedas, que aunque menor será sin embargo proporcionada á las piezas. Obraremos así, tiradas las líneas AB: AC: CD; y BD (FIG. III.), las cuales demuestran la latitud y longitud de la pieza, se hallará la altura por el método primero, la qual será DE, y esta se juntará á la AC. Despues se tirará la línea ECF, y se alargará AB hasta que toque la dicha ECF en el punto F. La altura de la bóveda será AF.

Por numero se hallará del modo siguiente: hallada la altura por la longitud y latitud segun el modo primero, la qual segun el exemplo allí puesto es 9, se dispondrán longitud, latitud y altura como en la figura se muestra: luego se multiplica 9 por 12 y despues por 6, y el producto del 12 se pondrá debaxo del 12, y el del 6 debaxo de este. Multipliquese despues 6 por 12, y su producto 72 se pondrá debaxo del 9. Hallado luego un numero que multiplicado por 9 produzca 72, que en nuestro caso es 8, diremos que 8 pies debe ser la altura de la bóveda.

LIBRO I. CAPITULO XXIII.

12	9	6
108	72	54
	8	

*Se o compartimento que queremos cobrir tiver 12 pés de comprimento e 6 de largura, unidos 6 e 12 somam 18, cuja metade é 9.*

**Proporção aritmética: 6, 9, 12**

*Se o espaço que se há-de cobrir tiver 9 pés de comprimento e 4 de largura, será 6 a altura da abóbada.*

**Proporção geométrica: 4, 6, 9**

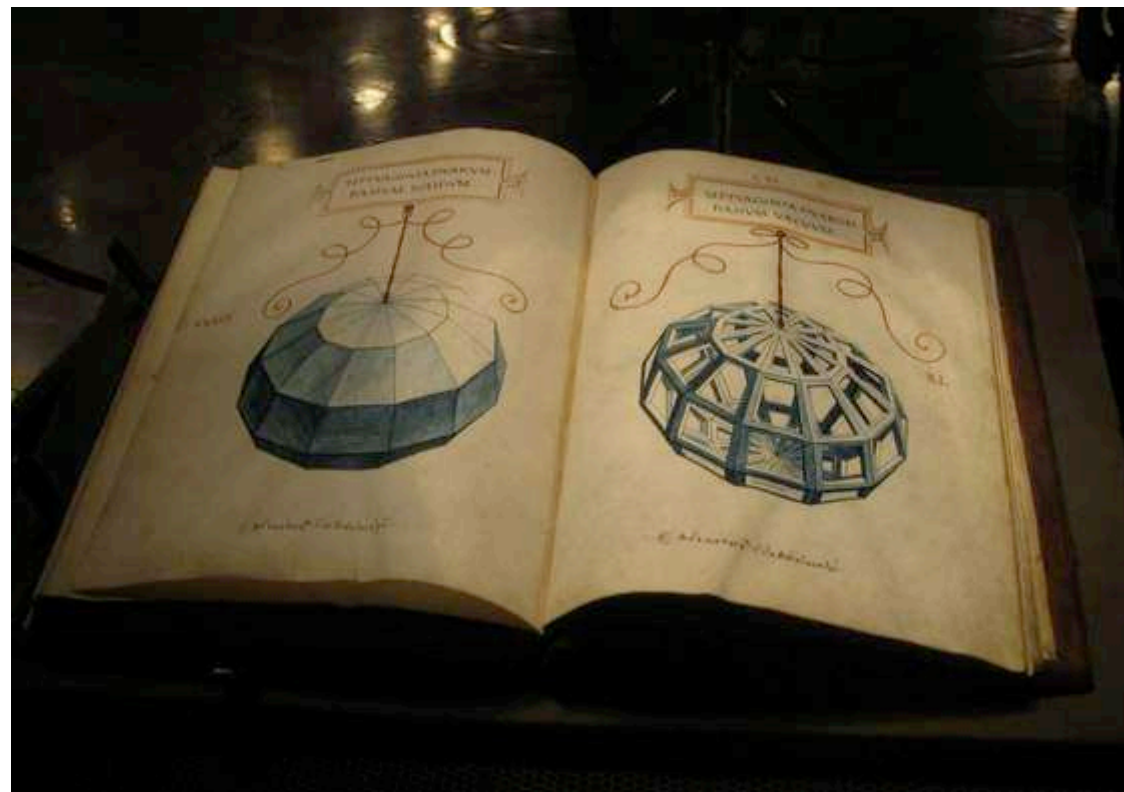
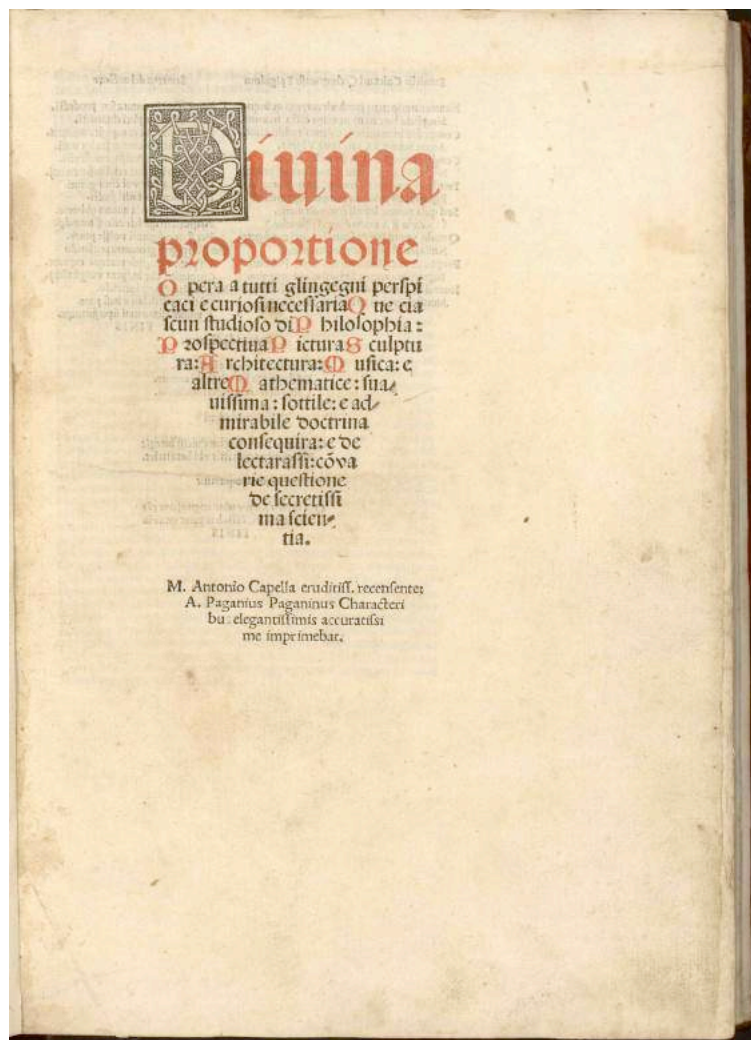
*Relação entre a média aritmética (m) e a harmónica (h) de duas quantidades a e c:*

$$m \times h = a \times c$$

Neste caso,  $h = (12 \times 6) / 9 = 8$

**Proporção harmónica: 6, 8, 12**

<sup>42</sup> Porque no todos los numeros tienen raíz quadrada entera; y la quebrada nunca es exacta.

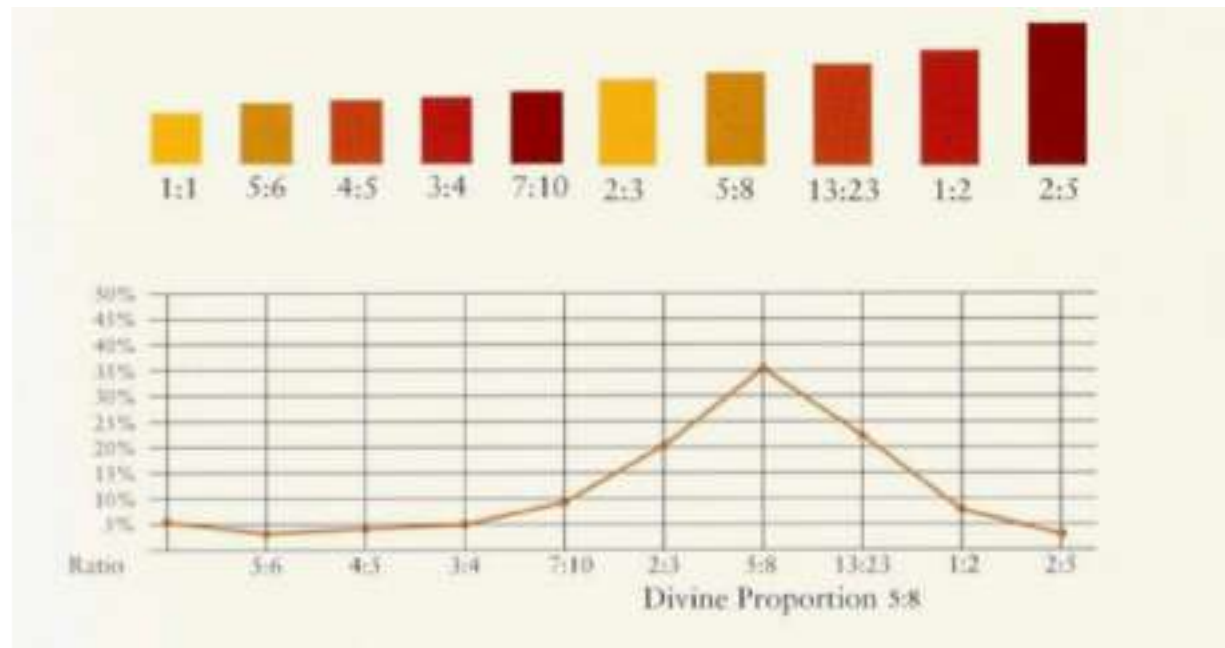


Luca Pacioli, *Divina proportione*

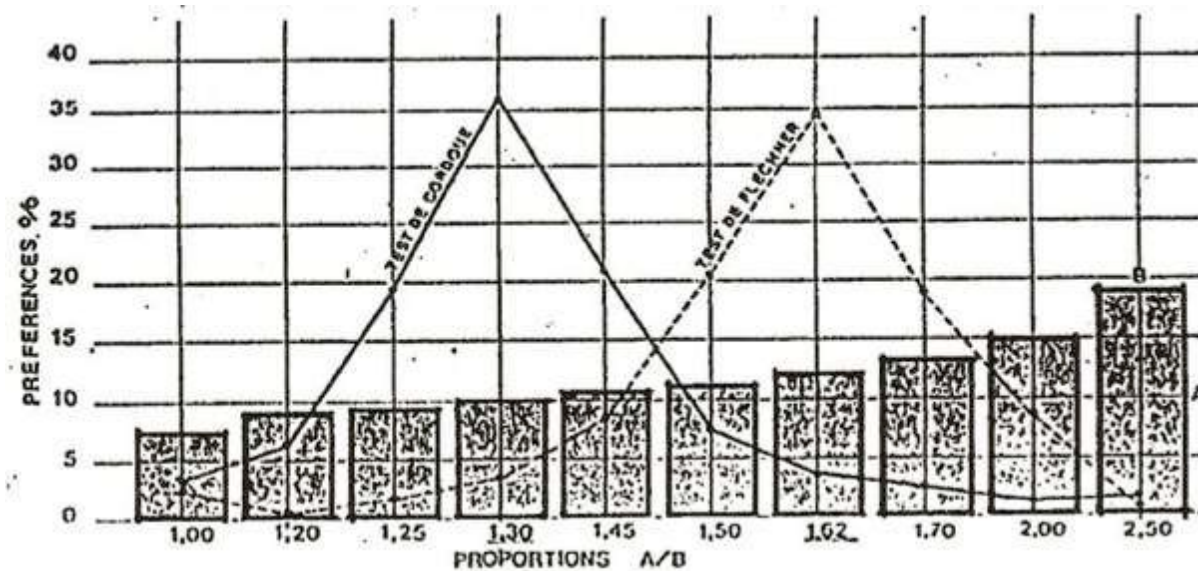
com ilustrações de Leonardo da Vinci  
Veneza, 1509



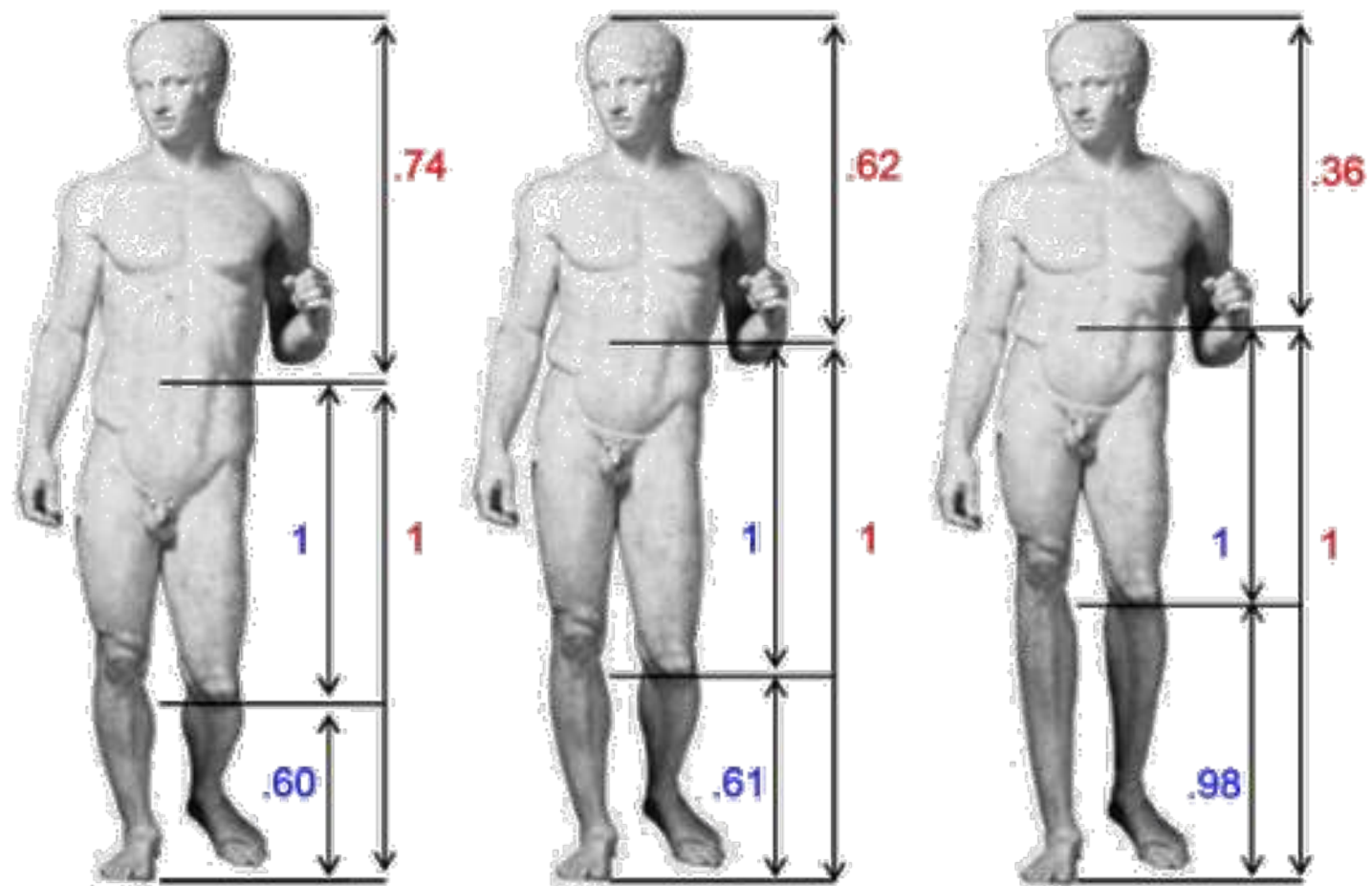




Resultados do teste de Fechner (finais do século XIX)



Resultados do teste de Rafael de la Hoz (finais do século XX)



100% dos inquiridos consideraram a imagem central a mais bela

64% dos inquiridos consideraram a imagem da esquerda a mais feia

**número áureo = 1,618...**

**$5/3 = 1,666...$**

**$3/2 = 1,5$**

**raiz de 2 = 1,414...**

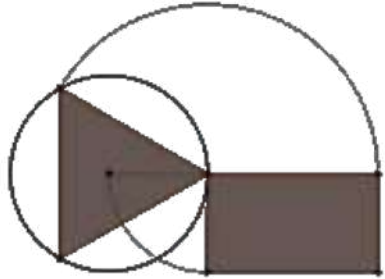
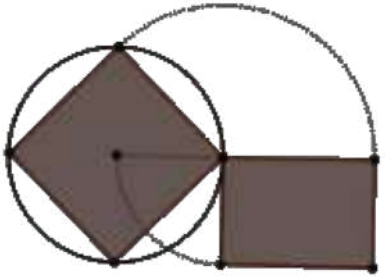
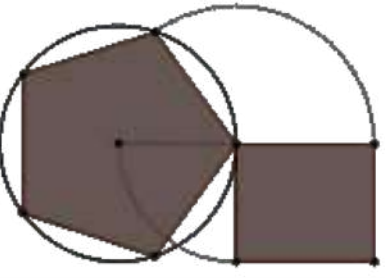
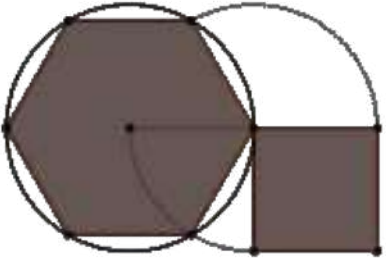
**$7/5 = 1,4$**

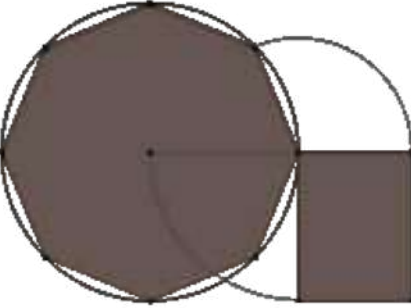
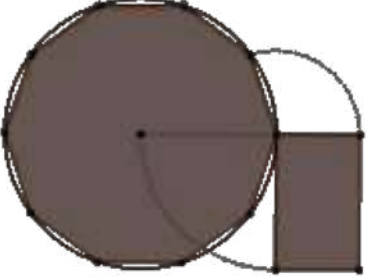
**número plástico = 1,3247...**

**número cordovês = 1,30656...**

**$4/3 = 1,333...$**



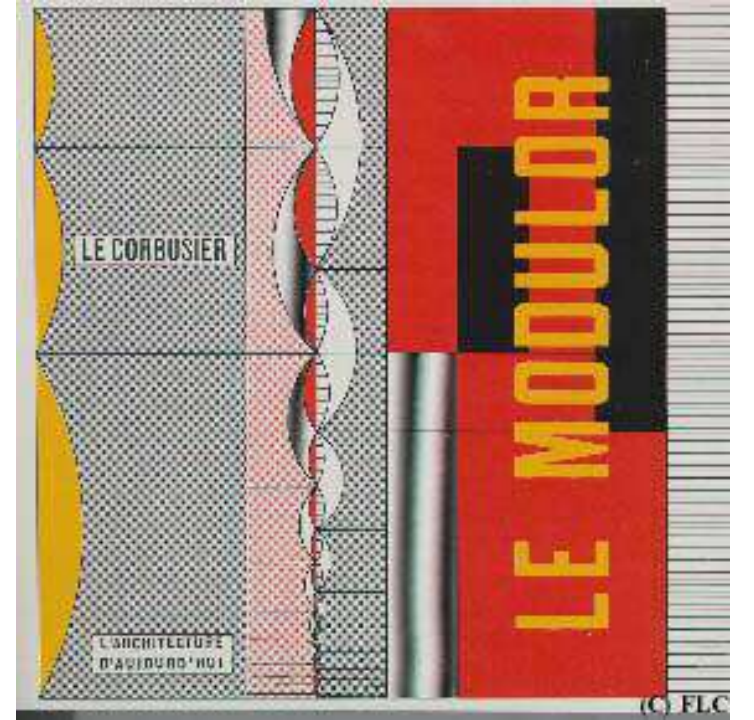
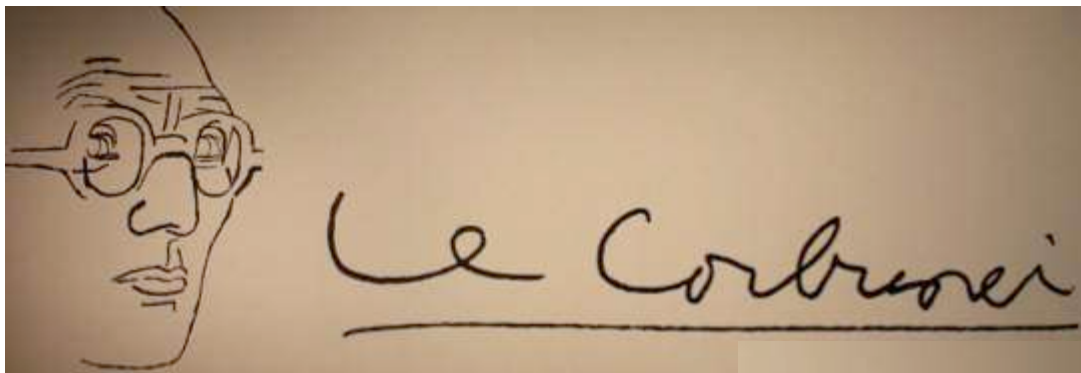
<p>Retângulo associado ao triângulo equilátero</p> $r = \sqrt{3}$	
<p>Retângulo associado ao quadrado</p> $r = \sqrt{2}$	
<p>Retângulo associado ao pentágono regular</p> $r = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$	
<p>Retângulo associado ao hexágono regular (Quadrado)</p> $r = 1$	

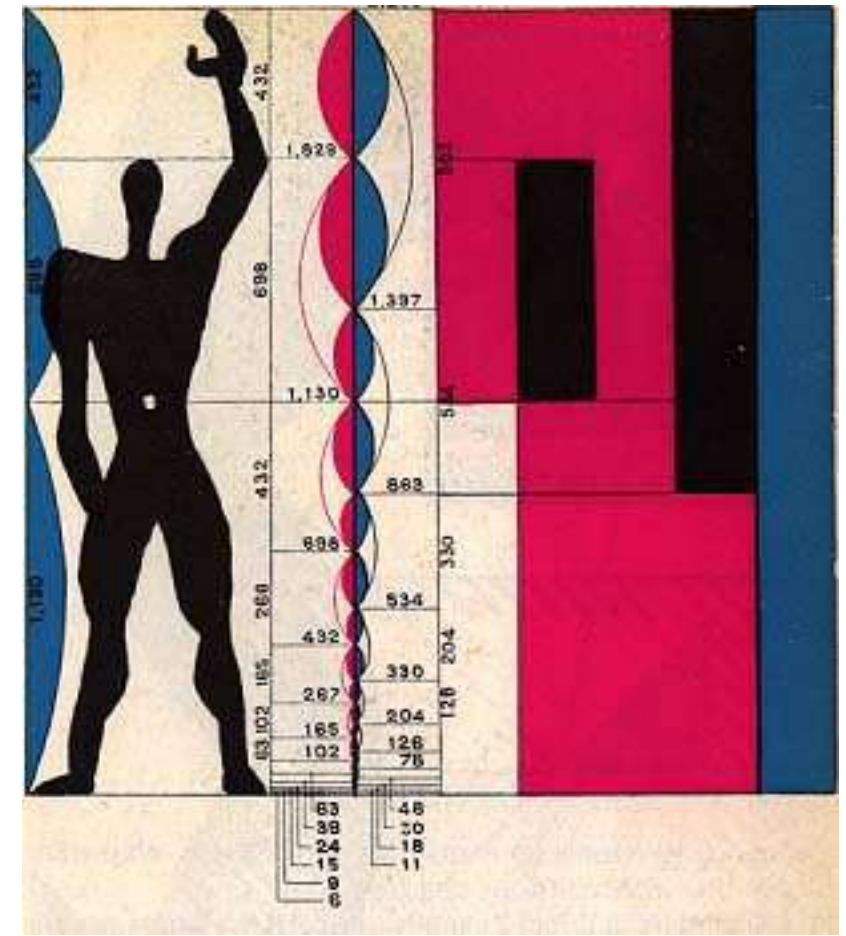
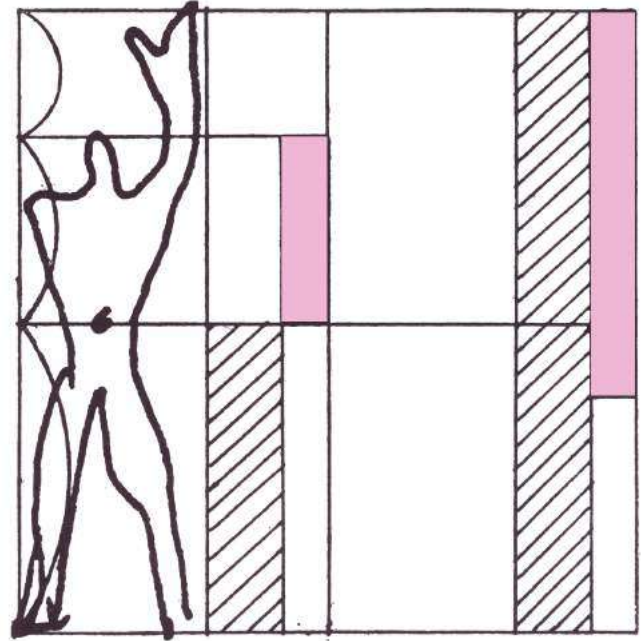
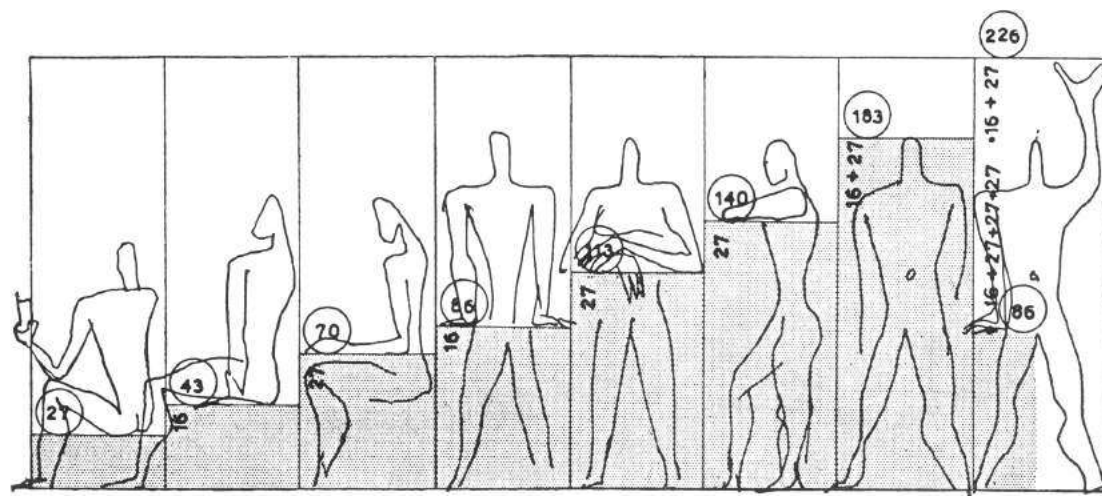
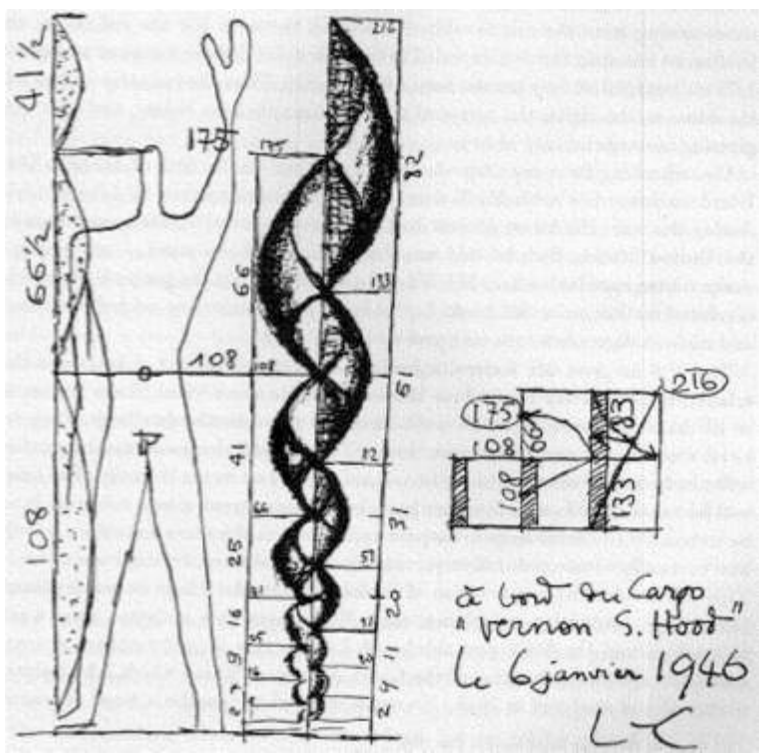
<p>Retângulo associado ao octógono regular</p> $r = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$	
<p>Retângulo associado ao decágono regular</p> $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$	

### Retângulo associado a um polígono regular

Dado um polígono regular inscrito numa circunferência, considera-se o retângulo a ele associado aquele cujos lados são o raio da circunferência circunscrita e o lado do polígono.

*O meu sonho é montar, nos terrenos de construção que um dia irão surgir por todo o país, uma 'grelha de proporções', desenhada na parede ou feita em ferro, que servirá de regra para o projeto todo, uma norma que ofereça uma série infindável de combinações e proporções diferentes; o pedreiro, o carpinteiro, o marceneiro irão consultá-la sempre que tiverem de escolher as medidas para o seu trabalho; e todas as coisas que fizerem, por mais diferentes e variadas que sejam, estarão unidas em harmonia.*







*A matemática é o magistral edifício imaginado pelo homem para compreender o Universo. Nela se encontra o absoluto e o infinito, o alcançável e o inacessível, e está rodeada de altos muros diante dos quais se pode passar e voltar a passar sem nenhum proveito. Neles se abre, às vezes, uma porta; empurra-se, entra-se e está-se já noutra sítio onde se encontram os deuses e as chaves dos grandes sistemas. Estas portas são as dos milagres e, franqueada uma delas, já não é o homem quem atua, mas o Universo que toca num qualquer ponto e, diante dele, desenrolam-se os prodigiosos tapetes das combinações sem limites.*

*Está no país dos números. Deixai-o permanecer aí, maravilhado diante de tanta luz tão intensamente aspergida.*

Le Corbusier (1887-1965)



Siza Vieira  
*Igreja de Santa Maria*  
Marco de Canaveses  
1996

*Há determinados elementos que, relacionados, ajudam a dar uma sensação de verticalidade, que eu queria...*

$$r_{\text{porta}} = 25/7,5 = 3,33$$

*Esta não é, portanto, uma porta comum. (...) É uma passagem para um lugar onde Deus habita, um espaço de tolerância. Quem transpõe esta porta deve saber qual é a estatura da tolerância: não demasiado larga, mas suficientemente alta.*



Siza Vieira  
*Igreja de Santa Maria*  
Marco de Canaveses  
1996



*Uma enorme parede branca, rectangular, com uma fresta estreita e horizontal ao fundo: eis a fachada sudeste (...)*

*Esta parede revela e esconde.*

*(...)*

*A verdade descendo lá do alto, até repousar a uma altura que convém ao homem. Não para que ele a possua (...) mas para que participe dela. A verdade despojada e inteira, despida de adereços. A verdade descendo lá do alto, até repousar a uma altura que convém ao homem. A verdade difícil de olhar, difícil de aceitar, difícil de reconhecer. E, no entanto, convivendo com o homem, descendo até ao alcance da sua estatura.*



XXXV  
XXX  
Prof  
a  
t

SIEM  
10.11julho

11  
12  
13 julho



Castelo Branco

2019



Escola  
Secundária  
Amato Lusitano

**BEM-HAJAM!**



**Lurdes Figueiral**  
lurdesfigueiral@gmail.com