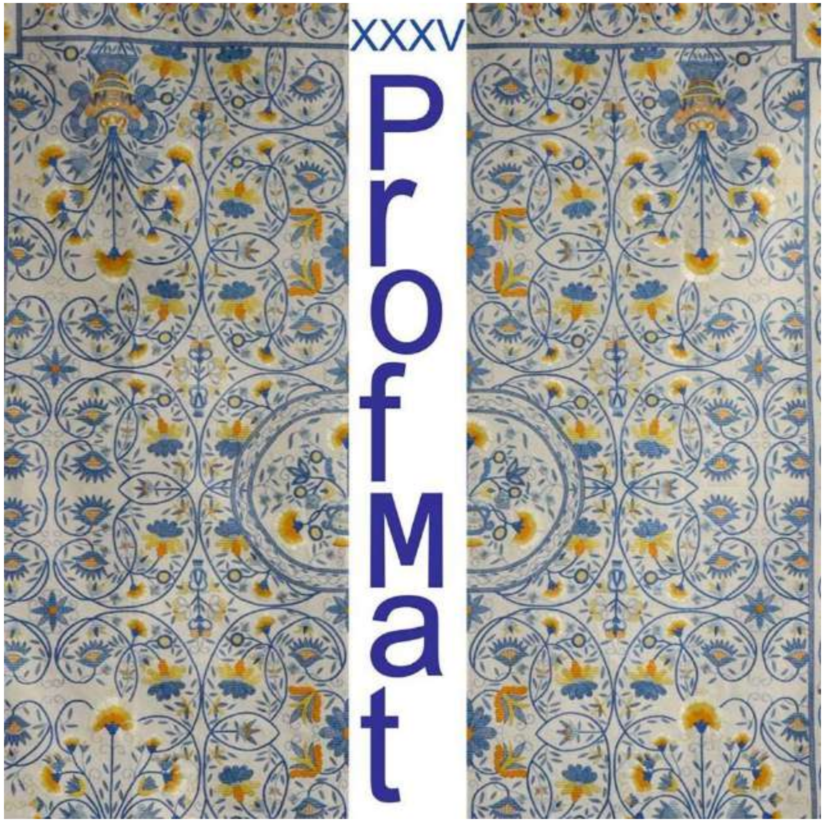
CONHECIMENTO MATEMÁTICO PARA ENSINAR: A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM FRAÇÕES



Ricardo Portugal

PROFMAT, Castelo Branco
julho de 2019

Contexto e enquadramento

- Trabalho realizado no âmbito da tese de doutoramento;
- 2 professores do 5ºano de escolaridade;
- Gravação áudio e vídeo de 17 aulas de cada um dos professores;
- Foco de investigação está nos conhecimentos que o professor mobiliza para ensinar números racionais;

Introdução

Diferentes estudos descrevem as dificuldades que os alunos revelam na aprendizagem dos números racionais, Pinto e Monteiro (2007):

- Forte tendência para enfatizar o cálculo algorítmico, as regras e os procedimentos, relegando para segundo plano a resolução de problemas.
- A pouca conexão que é feita entre representações.

Kieren (1976) identificou 4 significados do conceito de fração:

- Operador;
- Razão;
- Quociente;
- Medida.

Behr et al. (1992) acrescentou ainda um novo significado:

- parte-todo.

Introdução

Para comunicar raciocínios são necessárias representações e é necessário:

- Reconhecer que os números racionais podem ser representados de várias formas, McIntosh, Reys e Reys (1992).
- Transformar com facilidade uma representação noutra, Post, Cramer, Behr, Lesh e Harel (1993).
- Capacidade de escolher uma representação para a resolução de um problema e, se necessário, reconhecer a ineficácia dessa representação e procurar uma outra que a substitua, Arcavi (1994).

Para o ensino dos racionais os professores usam diversas representações: figuras geométricas, reta numérica, objetos, representação numerica…porém, segundo Piñón (1995) nem sempre de forma adequada ao significado de fração que se está a trabalhar na aula.

Introdução

Ponte (1995) defende que o professor tem que ter um papel essencial nos processos de mudança curricular, não só para o interpretar corretamente como também para informar e validar o respetivo conteúdo. Por isso, entendemos que analisar a sua prática é fundamental para compreender em que se baseia o seu conhecimento e quais os mecanismos que usa e que o ajudam na sua vida profissional.

Desenvolvimento do pensamento algébrico

O pensamento algébrico é um "processo pelo qual os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de casos particulares, estabelecem generalizações através de discurso argumentativo, e expressam-nas de formas progressivamente mais formais e adequadas à sua idade" (Blanton & Kaput, 2005, p. 413).

No cerne do pensamento algébrico estão os significados e o uso dos símbolos como recurso para representar ideias gerais resultantes do raciocínio com compreensão (Kaput, Blanton, & Moreno, 2008).

A investigação sobre pensamento algébrico valoriza o uso de diferentes formas de representação.

Desenvolvimento do pensamento algébrico

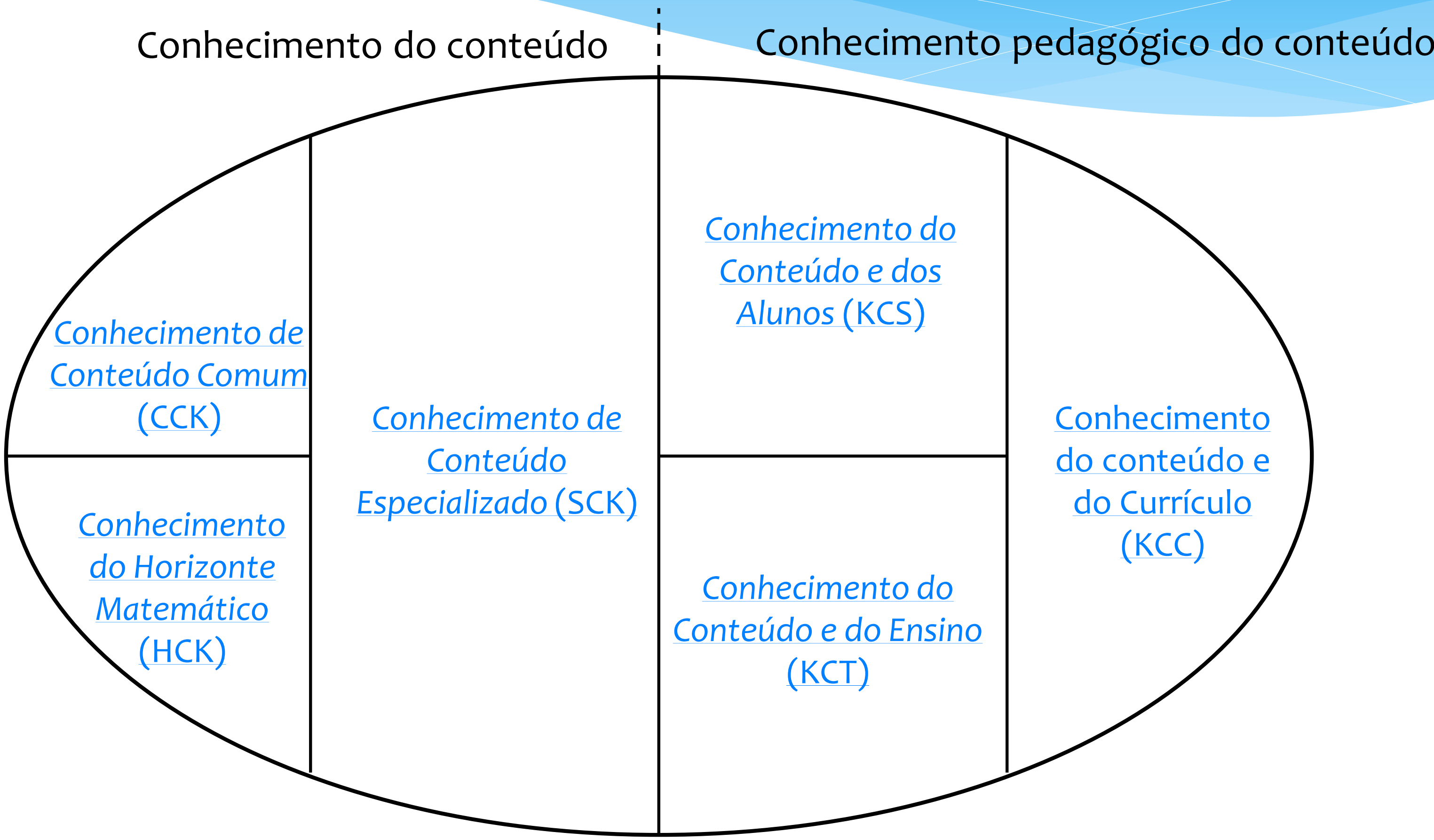
O desenvolvimento do pensamento algébrico depende, também do estabelecimento de conexões. As conexões matemáticas devem ser destacadas e valorizados para que os alunos desenvolvam a sua capacidade de raciocinar matematicamente.

Este trabalho exige uma atenção continuada por parte do professor.

Objetivo

A presente comunicação tem como objectivo identificar e classificar, no contexto do modelo teórico sugerido por Hill, Ball & Schilling (2008), os conhecimentos matemáticos mobilizados pelos professores no ensino do tópico dos números racionais no 5º ano de escolaridade, com particular foco naqueles conhecimentos que se revelem promotores do desenvolvimento do pensamento algébrico.

Marco teórico
Conhecimento matemático para ensinar (MKT)



Hill, Ball & Schilling, 2008

Metodologia

Neste estudo seguiu-se um paradigma qualitativo e interpretativo (Bogdan & Biklen, 1994) com um estudo de caso.

As aulas analisadas fazem parte de um conjunto aulas observadas presencialmente entre abril e junho de 2012 de dois professores do ensino público.

A análise das aulas descritas nesta comunicação foram baseadas em:

- Entrevistas com os professores
- Diário de bordo do investigador
- Gravação áudio e vídeo das aulas

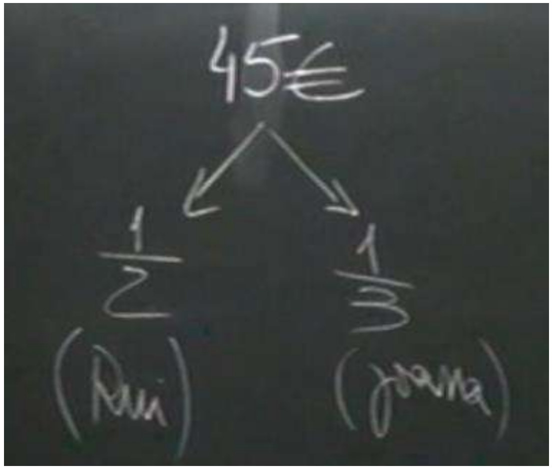
Apresentação do problema

Exposição do problema oralmente com auxilio do esquema (em baixo).

Inicialmente colocou apenas a alínea a)

Uma pessoa tem 45€ para dar aos filhos. Vai dar metade desse dinheiro ao filho que se portou melhor, que foi o Rui. A Joana, que tirou más notas, recebe um terço do dinheiro.

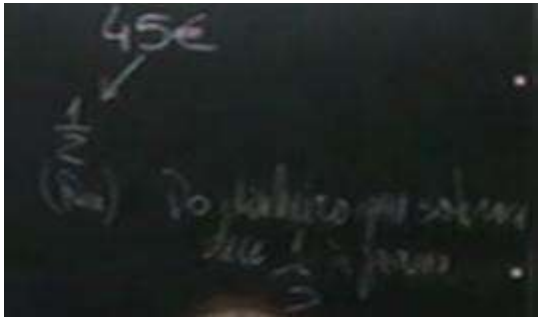
a) Quanto dinheiro é que recebe cada um?



Problemas iniciais

- Interpretação errada do enunciado

P: Este problema que resumi no quadro é assim: um senhor tem 2 filhos tem 45 euros e quer dar algum dinheiro aos filhos dá um meio deste dinheiro ao Rui, um terço deste dinheiro à Joana e ainda lhe sobrou algum pelo menos para um cafezinho.



Esquema alternativo apresentado pelo professor

Problemas iniciais

P: Outro problema era se fosse assim: Um senhor tem 45 euros vai dar ao Rui um meio desse dinheiro e do bolo que sobrou, deu um terço à Joana. Estes dois problemas são completamente diferentes.

P: Aqui este um terço e este um meio[aponta para o esquema que desenhou no quadro]estão sempre relacionados com o dinheiro todo que o pai tinha.
E aqui não! Aqui o pai deu metade do dinheiro ao Rui e do dinheiro que sobrou deu um terço. É diferente são duas quantidades diferentes. Perceberam a diferença? Isabel percebeste?
A: Não.

Análise

- Ao interromper a aula e esclarecer os alunos sobre o mal entendido (SCK)

- Fazer esquema alternativo para explicar a interpretação errada (KCT)

- Quando o aluno responde que não compreende obriga o professor a pensar num novo argumento (KCT)

A resposta do professor

Em resposta, o professor dá em exemplo à Isabel usando umas notas que tinha levado.

P: 40 euros! Se eu disser assim: vou-te dar metade a ti e metade à Teresa quanto dinheiro é que eu te dou?

A: A mim? Dá-me 20€.

P: A ti dou-te 20€. Toma lá! E a ela?

A: 20

P: 20 toma lá! Outra coisa era eu dizer assim: dou-te 20€ a ti e do que sobrar dou metade à Teresa. Eu ia-lhe dar agora 20 euros a ela?

A: Não.

P: Quanto é que lhe ia dar?

A: 10 euros

P: 10. Percebes-te a diferença?

A: Sim!

Análise

- Forma de questionamento (aferir se a aluna está efetivamente a compreender) (SCK)
- Utilização de material manipulável (antecipação das dificuldades) (KCS)
- O exemplo dado foi baseado na dúvida dos alunos evidência uma preocupação em compreender o raciocínio dos alunos e uma intenção em esclarecer a interpretação errada. (SCK)

Continuando a resolução…

O professor vai circulando pela sala (analisando as diversas resoluções); (CCK)

Apercebe-se que alguns já estão a terminar e coloca uma nova questão.

b) Qual a fração do dinheiro que sobra?

Entretanto o professor sugere aos alunos que usem um esquema que os possa ajudar…(KCT)

O professor informa os alunos que já encontrou 2 resoluções interessantes mas que ainda vai apresentar uma terceira. (HCK)

Escolhe um dos alunos para ir apresentar a sua resolução. (KCT)

Análise

Os conhecimentos mobilizados pelo professor nesta fase são muito importantes para o desenvolvimento da discussão em grande grupo. Esta oportunidade que é dada aos alunos é uma clara promoção do raciocínio matemático dos alunos e da comunicação matemática.

A resolução no quadro

A: Eu pensei assim: fiz 45 euros a dividir por 2

P: Então faz!

[aluno escreve no quadro]

P: Oh Rodrigo achas que fez bem ou fez mal?

A1: Acho que fez bem!

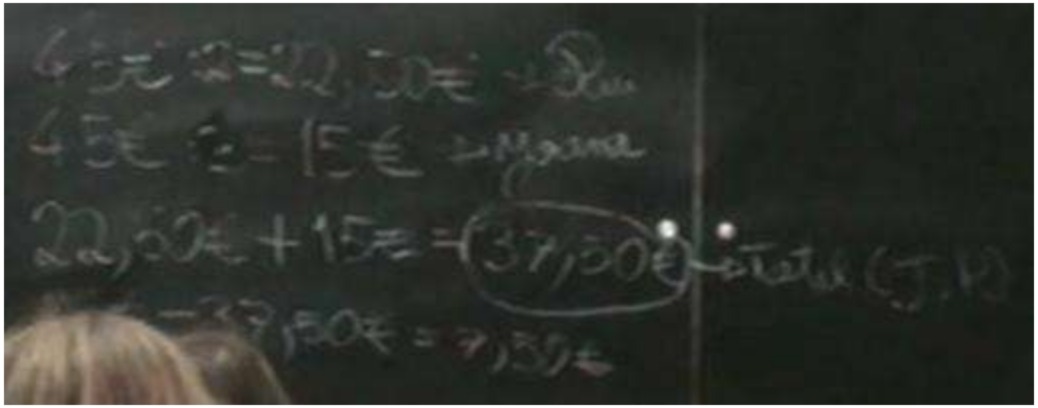
P: Pois um meio é o mesmo quê?

A1: Metade.

P: Olha o Rui já lá tem dinheiro dele não está nada mal. Olha porque é que estás agora a dividir por 3? [Dirige-se para o aluno que está no quadro]

A: Porque já é um terço que é para a Joana. [Continua a escrever no quadro]

P: Ahh está bem, está bem! É um terço para a Joana pois é.



A resolução no quadro

P: Ora calma! Primeiro calculou o dinheiro que vai receber o Rui, já está! Dividiu por 2, um meio é metade. Correto! A seguir foi calcular o dinheiro que recebe a Joana, um terço é sinónimo de dividir por 3. Muito bem 15 euros. Para que é esta conta de mais?

A: É para saber qual é o total deles os dois que é para depois retirarmos ao dinheiro total que é para saber com quanto é que ficou o pai.

P: Precisamente. Calcula o dinheiro todo que deu, está aqui. [Aponta para a resolução] Se deu este dinheiro ficou sem ele e ficar sem ele que conta é?

A: Menos. [em coro]

P: Menos! Então é o que ele está a fazer 45 menos 37,5 muito bem!

Análise

- Diferentes conceitos de fração (1/2 é o mesmo que?) (SCK)
- O professor percebe que o aluno está a usar o conceito de fração como operador ao calcular 1/2 de 45 e através do seu questionamento consegue que os alunos atribuam significado às operações tornando mais claro o raciocínio dos alunos. (KCT).

Resolução alínea b)

Qual a fração que sobra?

P: Um meio sabemos que já deu, um terço sabemos que já deu. Sobrou de certeza uma fração nem que seja zero. Para saber o que sobrou vamos fazer as contas precisamente da mesma maneira que se fez com o dinheiro. O raciocínio dele é simples vai juntar as frações como se fez com o dinheiro vai juntar as frações e o resultado vai tirá-lo à…?

A: 45 euros

P: Errado!

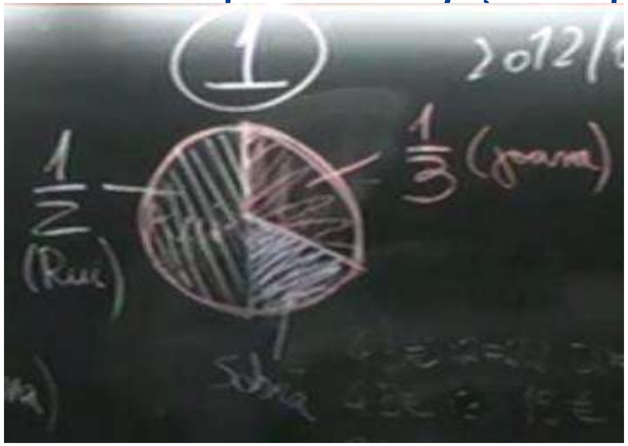
P: Quando falamos que deu um meio este um meio está-se a referir ao dinheiro total e neste momento os 45€ representam o quê?

A: O dinheiro total

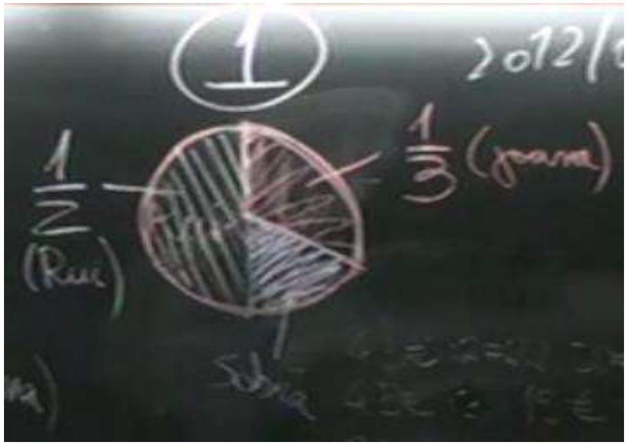
P: E quando nós dizemos um meio, um terço, dois sétimos daquele dinheiro é porque o dinheiro total representa o quê?

A: A unidade

P: A unidade, por isso é que eu falei mais do que uma vez façam esquemas!



Resolução alínea b)



P: Para sabermos aquela parte roxa [parte que sobra]o raciocínio do Pedro aplica-se impecável Explica lá outra vez a apontar para o esquema. Socorre-te do esquema.

A: Isto é o dinheiro que o Rui recebeu [aponta para o esquema] e este é o dinheiro que a Joana recebe [aponta para o esquema]. E nós queremos saber a fração do dinheiro que foi para o pai.

A: Então temos que somar este com este [aponta para o 1/2 e 1/3] para depois subtrairmos com o total.

P: A unidade! Então isto foi o raciocínio dele isto tudo vale uma unidade. Então junta o que deu ao Rui e o que deu à Joana e para saber esta parte aqui [aponta para o que sobra] vai tirar à unidade, pronto então agora já podes fazer as contas.

Análise

O professor ao perceber que a explicação do aluno não foi suficientemente clara tenta clarificá-la criando uma analogia entre as operações que foram feitas com o dinheiro e as operações que se devem fazer com as frações (SCK).

Porém os alunos têm dificuldade em compreender que a totalidade do dinheiro é representada pela unidade o que obriga o professor a recorrer a exemplos dados anteriormente que permitam aos alunos estabelecer essa conexão (KCT).

Ao pedir ao aluno que use o esquema para explicar o seu raciocínio tem como objetivo estabelecer a conexão entre as várias representações (KCT).

Enquanto um dos alunos vai expondo o seu raciocínio aos colegas o professor vai questionando os alunos para se certificar de que eles estão a compreender o raciocínio que está a ser apresentado (KCT). As suas questões conduzem à exploração da fração através da relação parte todo.

Análise

- Questionamento hábil permite que os alunos atribuam significado às operações.

- Preocupação com a linguagem usada e com os significados que os alunos atribuem aos objetos matemáticos é bastante importante na promoção de uma aprendizagem com compreensão (KCT).

- O recurso ao esquema para explicar o raciocínio, tem como objetivo o estabelecimento de conexões entre várias representações (KCT), assim está a ampliar as hipóteses dos alunos organizarem o seu pensamento, para além de facilitar a comunicação.

- Ao pedir "a conta" está a incentivar ao uso de uma linguagem progressivamente mais formal, que enriquece e aprofunda os seus conhecimentos (KCC).

- Estas atitudes estão de acordo com a perspectiva de desenvolver o raciocínio matemático defendida por vários autores, uma vez que o professor criou um ambiente onde impera a comunicação suportada pelo discurso argumentativo.

Cálculos…

A: Mas como não podemos fazer este mais este! [aponta para o 1/2 e 1/3] Precisamos de por ao mesmo denominador.

P: Eish pois é! Mas é o que tu vais fazer um mais ou o outo?

A: Vou usar frações equivalentes.

P: O problema é que o 2 não o conseguimos passá-lo para 3

A: Nem o 3 para 2

P: Vamos à tabuada…?

A: Do 2 e descobrimos

P: Só do 2?

A: E do 3

P: Mas o 3 não está na tabuada do 2 Luís!

A: Mínimo múltiplo comum

P: Outra maneira de dizer isso!

A: Um múltiplo de 3

P: Ou seja, por palavras mais simples vamos à tabuada do 2 e à tabuada do 3 e paramos quando encontrarmos um resultado que seja igual, então qual é que é na tabuada do 2 e do 3?

A: É o 6.

P: Ele agora vai arranjar frações equivalentes para substituir as que ali estão.

Análise

- A comunicação professor aluno revelou-se fundamental na construção do conhecimento e na clarificação do raciocínio do aluno. Note-se que o questionamento do professor visa refinar a linguagem utilizada pelo aluno.

- Também vai dando algumas dicas, como por exemplo o uso da tabuada (KCT). Todavia ao tentar que o aluno explique por outras palavras o que está a pensar, por exemplo em relação ao mínimo múltiplo comum denota SCK, uma vez que pretende que o aluno atribua outro significado matemático ao que está a dizer.

Continuação…

Depois de escreverem a soma (5/6) e de se analisar o significado do seu valor passam para a resposta (Qual a fração que sobra?) (KCT)

P: Que fração sobrou?

A: Um sexto

P: E de onde é que veio o um sexto?!

A: É o que falta para uma unidade.

P: Exatamente falta um sexto para chegarmos à unidade. Mas vocês sabem que os professores são uns chatos e eu agora queria uma conta que desse um sexto. Como é que é Pedro?

A: Agora tiramos cinco sextos ao resultado que é uma unidade.

Ao pedir aos alunos que escrevam "a conta" faz com que o aluno passe progressivamente de uma representação não convencional para representação matemática convencional (KCC).

Resolução alternativa alínea b)

Chama outro aluno para apresentar a sua resolução.

P: Então como é que tu descobriste 7,5€? Que fração é do total?

A: Eu fiz de cabeça! Fiz 7,5 mais 7,5 que vai dar 15. Já estava duas vezes, depois mais 15, que é outra vez, mais duas vezes depois é mais duas vezes que já ia dar 45. Portanto 7,5 vezes 6 que dá 45 e depois este 6 queria dizer que era 1/6.

P: Ele foi ver quantas vezes é que o 7,5€ cabe na unidade toda até fazer…?

A: 45€.

P: Quantas vezes é que ele teve que juntar 7,5; 7,5; 7,5 para ter 45?

A: 6.

P: Então os 7,5 é uma parte de seis vezes que lá cabem. 7,5 é então 1/6.

A: Então 45 a dividir por 6 deve dar 7,5.

Análise da resolução 2

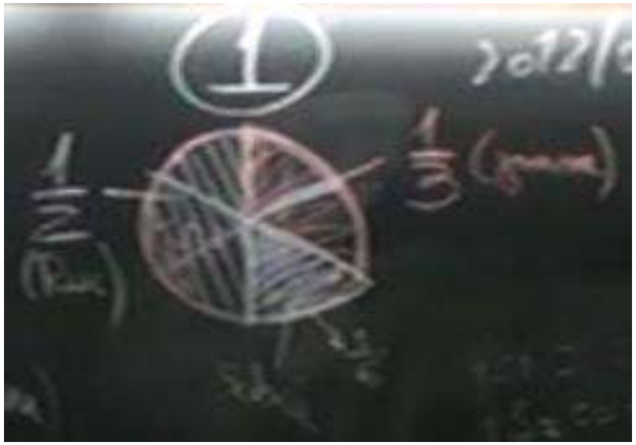
- O professor recapitula o raciocínio do Pedro.

- Fazer este ponto da situação (KCT) permite contrastar as diferenças entre os dois raciocínios. Ao fazê-lo apela à justificação, que é um dos objectivos do desenvolvimento do pensamento algébrico.

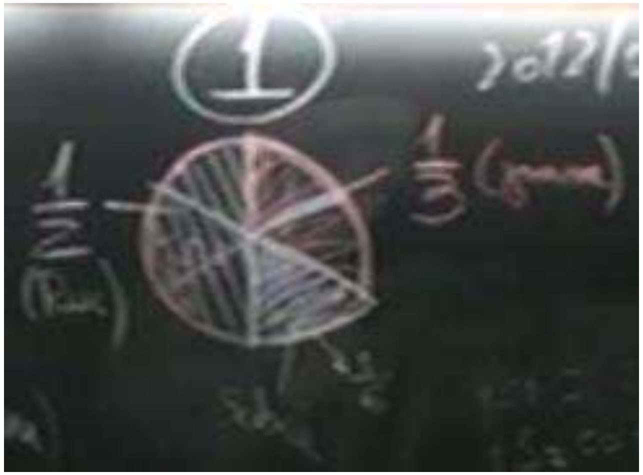
Resolução do professor (síntese)

P: Afonso o que é que achas que vai na minha cabeça o que é que achas que eu vou tentar fazer ali?
A: Dividir em seis.

P: Eu não sei se é em seis se é em oito. Eu tenho é que dividir aquilo…?
A: Em partes iguais.
P: Em partes iguais! Qual é a mais pequena que lá está? É a roxa [parte que sobra] é ou não é a roxa?



Resolução (síntese)



- Verifica qual a parte que deu ao Rui, e à Joana.
- Verifica qual a parte que sobrou
- Usa o esquema para criar conexões com as resoluções anteriores.

P: Não se esqueçam que esta parte roxa veio de metade de um terço olhem ali. Em quantas partes está dividido?
A: Seis.
P: Então quanto é que vale o que sobrou para o pai?
A: 1/6 [em coro].
P: Olhem agora quantos sextos é que deu ao Rui?
A: Três [em coro].
P: Quantos sextos deu à Joana? Foi a fração que o Pedro tinha calculado a fração equivalente há bocado na conta de mais.
A: Dois [em coro].
P: 2/6 foi a fração equivalente que ele tinha calculado há bocadinho em relação a 1/3. Um terço é o mesmo que 2/6, 1/2 é o mesmo que 3/6, sobra 1/6.

Análise da resolução (síntese)

- O professor sugere a utilização de um esquema. Esta atitude para além de ser outra forma de abordar o problema, apela à utilização de múltiplas representações (KCT). Esta sugestão veio revelar-se bastante útil, pois revelou a existência de relações que conseguiu articular e sintetizar (HCK).

- Também às conexões deve ser atribuído um papel central na compreensão da matemática. Através do estabelecimento de conexões, os alunos desenvolvem a sua capacidade de raciocinar matematicamente.

Conclusões

- O professor demonstra uma visão global do sentido de número racional, fazendo com que os alunos compreendam a forma como as ideias matemáticas se interrelacionam e se constroem umas a partir das outras produzindo um todo coerente.
- Alguns conhecimentos mobilizados pelo professor foram claramente potenciadores do raciocínio matemático nos alunos:

(i) o uso de material manipulável, ajudou bastante à compreensão do contexto do problema;

(ii) o ambiente criado e um questionamento hábil permitiu aos alunos comunicarem de forma clara as suas ideias;

(iii) as conexões que foram estabelecidas;

(iv) a atribuição de significados às frações obtidas;

(v) o incentivo que foi dado aos alunos para usarem uma linguagem cada vez mais formal.

Conclusões

A análise da prática do professor permitiu comprovar a existencia de várias oportunidades de aprendizagem que surgem na realização de tarefas sobre frações.
Principalmente analisando a discussão em grande grupo no final da resolução das tarefas, tendo-se criado um ambiente propicio à comunicação matemática em que tanto o professor como os alunos estão habituados a colocar e responder a perguntas.
O professor questiona para aferir a compreensão dos alunos e estes para colocar as suas dificuldades, dúvidas e inclusivamente outras formas de abordagem dos problemas.
Esta não é uma aula isolada era uma pratica comum.

Resumindo, ficou comprovado que tanto as situações como a comunicação matemática criam oportunidades para a aprendizagem na sala de aula. Para isso, é claro que são essenciais tanto os conhecimentos do professor sobre o conteúdo, como sobre o ensino do conceito e a sua experiencia anterior.

Bibliografia

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the learning of Mathematics*, 14(3), 24035.

Arzarello, F., Bazzini, L., & Chiappini, G. (2001). A model for analysing algebraic

processes of thinking. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell & R. Lins (Eds.) *Perspectives on school algebra*. Dordrecht: Kluwer.

Ball, D.L., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59* (5), 389-407.

Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 412–446.

Blanton, M., & Kaput, J. (2008). Building disctrict capacity for teacher development in algebraic reasoning. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 133–160). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Bogdan, R., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Carraher, D., & Schliemann, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester (Ed.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 669–705). Charlotte, NC: NCTM & Information Age Publishing.

Cusi, A. & Malara, N. (2007). Approaching Early Algebra: Teachers' educational processes and class-room experiences. Quadrante, XVI(1), 57–80.

Hill, H.C., Ball, D.L., & Schilling, S.G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 372-400

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema, & T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133–155). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Kieran, C. (2007). Developing algebraic reasoning: The role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels. *Quadrante*, *16*(1), 5-26.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In F. K. Lester, (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 707-762)*. Greenwich, CT: Information Age Publishing.

McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, *12*(3), 2-8 & 44.

Monteiro, C., & Pinto, H. (2007). *Desenvolvendo o sentido do número racional*. Lisboa:

APM.

ME-DGIDC (2007). Programa de Matemática do Ensino Básico. http://sitio.dgidc.min-du.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf

Ponte, J. P. (1995). Saberes profissionais, renovação curricular e prática lectiva. In L. Blanco & V. Mellado (Eds.), *La formación del profesorado de ciencias y matemática en España y Portugal* (pp. 187-202). Badajoz: Universidad de Extremadura.

Ponte, J. P. (1998). Da formação ao desenvolvimento profissional. In APM (Ed), *Atas do ProfMat 98 (pp. 27-44)*. Lisboa: APM.

Post, T., Cramer, K., Behr, M., Lesh, R., & Harel, G. (1993). Curriculum implications of research on the Learning, teaching, and assessing of rational number concepts. In T. Carpenter & E. Fennema (Eds.), *Research on the learning, teaching, and assessing of rational number concepts (pp. 327-362)*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Bem haja!