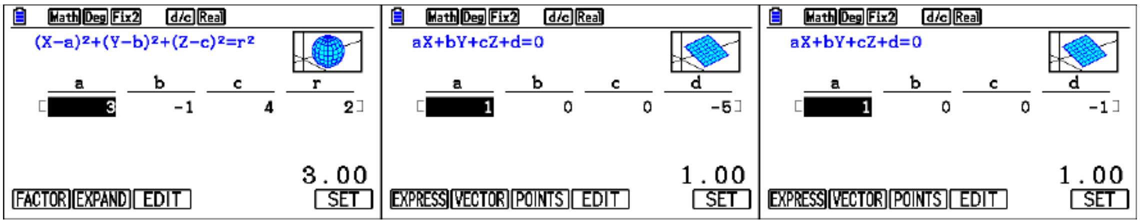
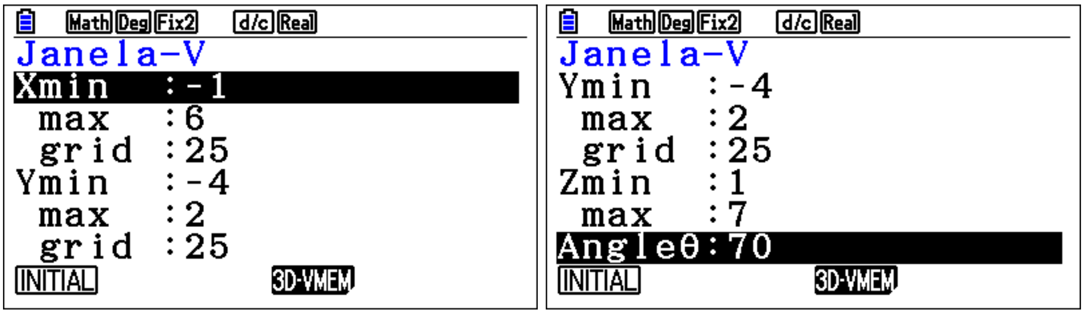
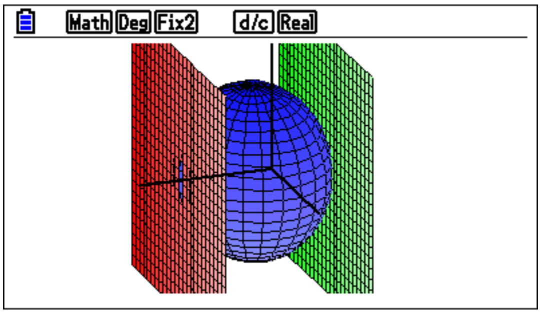
Tarefa 1 – Esfera e planos tangentes

Represente, no mesmo referencial, a esfera de centro (3,-1,4), de raio 2 e os seus planos tangentes, paralelos a yOz.

Proposta de resolução:



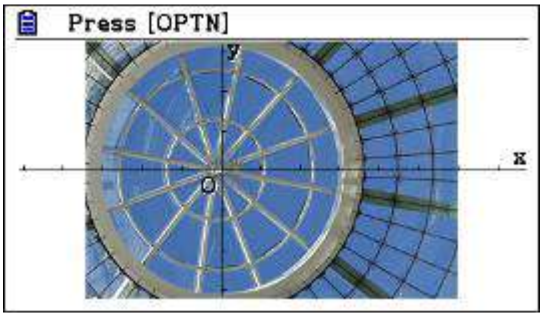




Centro de Formação da Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, nº 27-A - 1500-236 Lisboa
☎21 716 36 90 21 716 64 24 @ cformacao@apm.pt
http://www.apm.pt

Tarefa 2 – Retas

Considere a imagem do Menu Plot Imagem **Glass_~1.g3p**

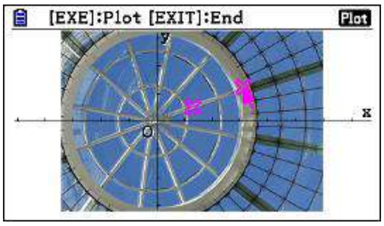


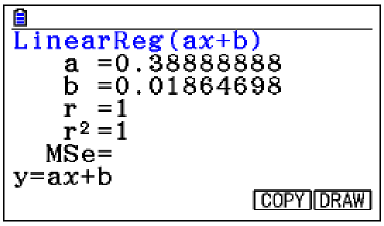
1. Utilizando as potencialidades da sua calculadora e a imagem da sua calculadora, trace e escreva as equações das duas primeiras retas que visualiza no primeiro quadrante.
2. Um ponto P desloca-se sobre a reta de menor declive e um ponto Q desloca-se sobre a outra reta acompanhando o movimento do ponto P, de forma que P e Q tenham sempre abcissas iguais. Designando por a a abcissa do ponto P, determine os valores de a em que a distância entre P e Q seja 2.

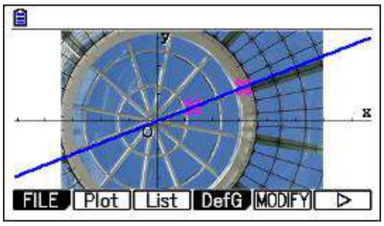
Proposta de resolução:

1. No menu **Plot Imagem** abra o ficheiro **Glass_~1.g3p.** Em **OPTN**, **F1**(**FILE**), **F1**(**OPEN**), na pasta **CASIO**, selecione a pasta **g3p**, procure o ficheiro **Glass_~1.g3p** (para ser mais rápido faça **ALPHA**, **G**-primeira letra do ficheiro) **F1**(**OPEN**).

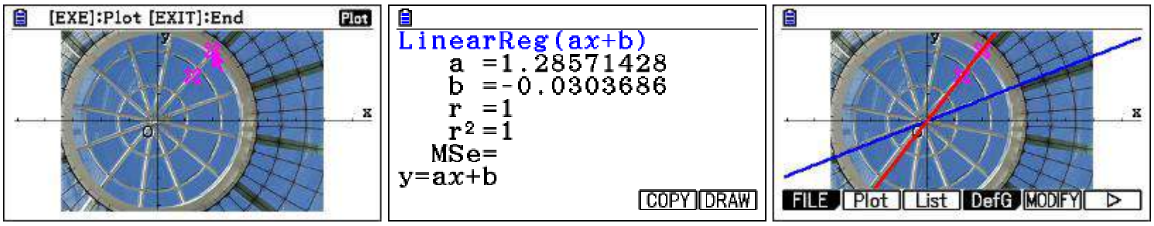
Para marcar os pontos faça **OPTN**, **F2**(**Plot**) (com as setas do teclado posicione o cursor) sempre que **EXE** marca um ponto. Faça **EXIT** para parar de marcar. Em **F3**(**List**) pode ver as coordenadas dos pontos marcados.
Para calcular a regressão linear, em **OPTN**, procure o submenu **REG**, escolha **F1**(**x**), seguido de **F1**(**ax+b**), visualiza a expressão analítica da equação da reta, guarde em **Y1**, escolha **F5**(**COPY**), **EXE**.



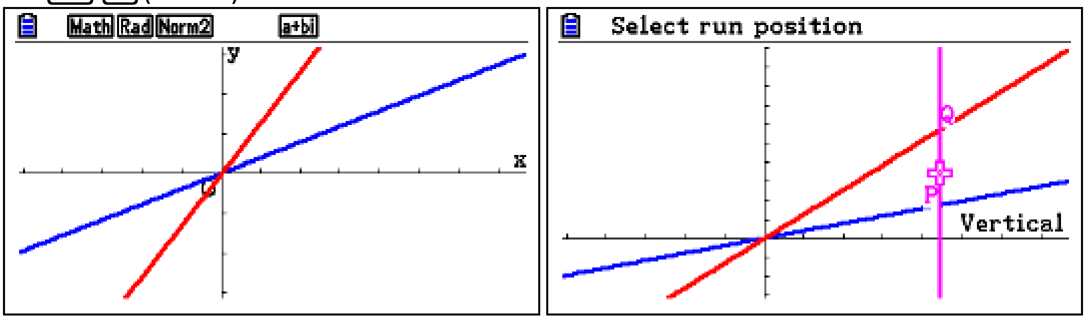




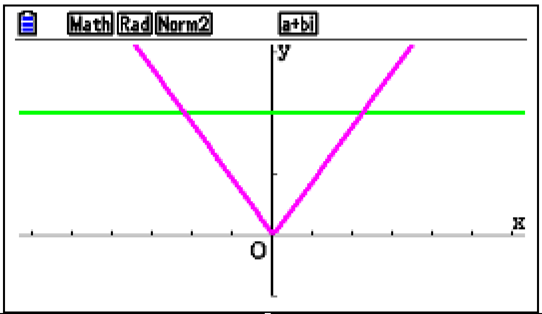
Para encontrar a equação da outra reta, na imagem só podem estar marcados os pontos que vai utilizar para fazer a regressão, assim, apague os pontos desnecessários e proceda de modo análogo, guarde a expressão em **Y2**. **Cuidado,** quando estiver a copiar a equação da reta, caso contrário pode colar por cima da primeira, pois automaticamente vai para Y1. Com as setas do teclado reposicione em Y2.

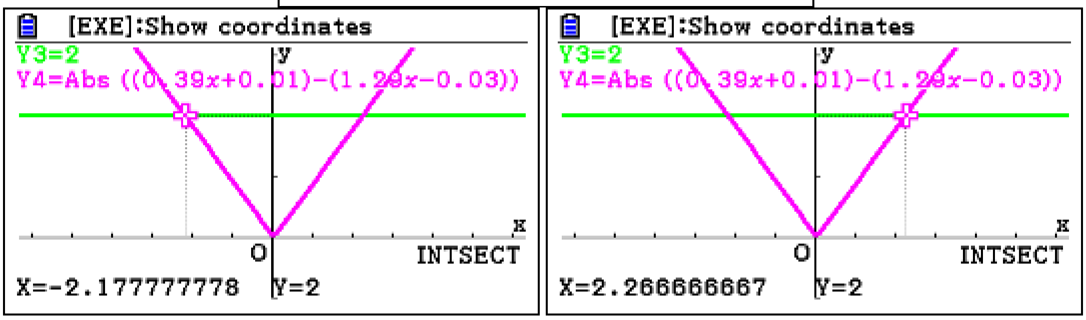


2. Para responder a esta questão, vamos utilizar o MENU Gráfico e traçar uma reta vertical, de modo a facilitar a interpretação do enunciado. Trace as duas retas, seguido de SHIFT F4 (Sketch).



Pretende-se resolver a condição $|(0{,}39x+0{,}01)-(1{,}29x-0{,}03)|=2$. Em Y3 insira a expressão |Y1-Y2| e em Y4 insira a expressão 2





R: -2,18 e 2,27

Tarefa 3 – Função Módulo

Considere a função j, de domínio IR, definida por $j(x) = -|x+1| + 3$.

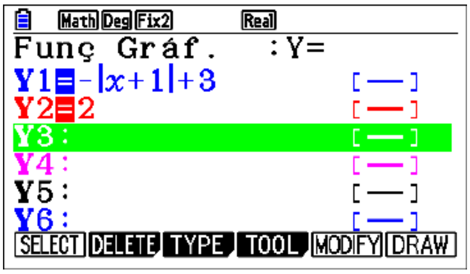
1. Resolva graficamente a inequação $j(x) > 2$.

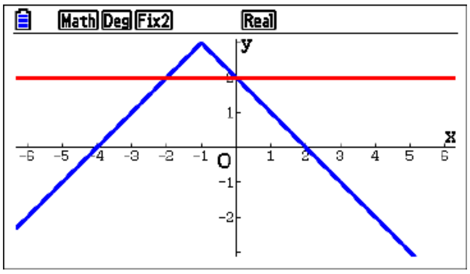
2. Represente o domínio plano definido pela condição $y > -|x+1| + 3 \ \wedge \ y \leq 2 \ \wedge \ x \geq 1$.

Adaptado da Série de Problemas nº 5 de março de 2010 – GAVE

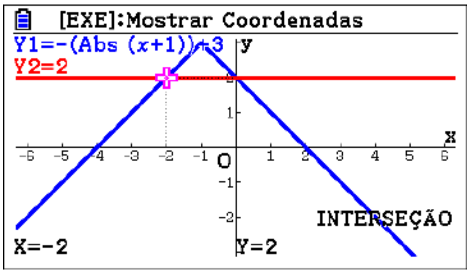
Proposta de resolução:

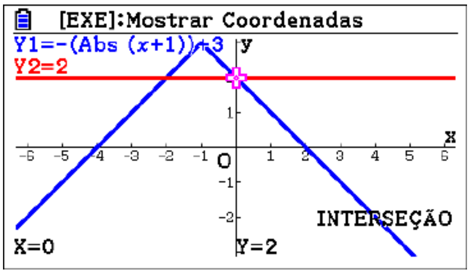
1. Para resolver graficamente a inequação $j(x) > 2$, pode representar-se as funções definidas por y =j(x) e $y = 2$.





As coordenadas dos pontos de interseção podem ser confirmadas, carregando em SHIFT F5 (G-SOLVE) F5 (INTSECT) ▶ . Assim, $j(x) > 2 \Leftrightarrow x \in \,]-2; 0[$.





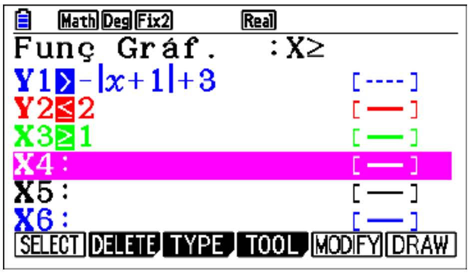
2. No ecrã de configuração, SHIFT MENU (SET-UP), coloca-se o cursor sobre «Ineq Type» e carrega-se em F1 (Intsect) EXE . Depois, no editor de funções:

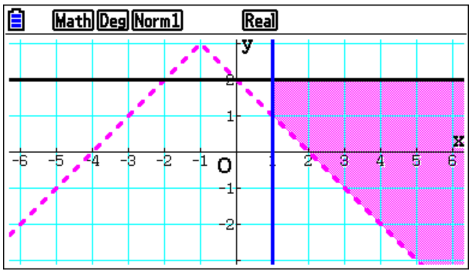
– com o cursor sobre Y1, carrega-se em F3 (TYPE) F5 (CONVERT) F2 (▶Y>);

– com o cursor sobre Y2, carrega-se em F3 (TYPE) F5 (CONVERT) F5 (▶Y≤);

– em Y3, carrega-se em F3 (TYPE) F6 (▷) F6 (▷) F3 (X≥) 1 EXE .

Para finalizar, carrega-se em F6 (DRAW)


Math Deg Fix2 Real
Funç Gráf. :X≥
Y1 > -|x+1|+3
Y2 ≤ 2
X3 ≥ 1
X4 :
X5 :
X6 :
SELECT DELETE TYPE TOOL MODIFY DRAW


Math Deg Norm1 Real
y
x
O

Tarefa 4 – Números do Mundial

Registaram-se as alturas e a respetiva massa corporal dos jogadores convocados para a seleção Nacional do Mundial de 2014, no Brasil. Obtendo-se a seguinte tabela

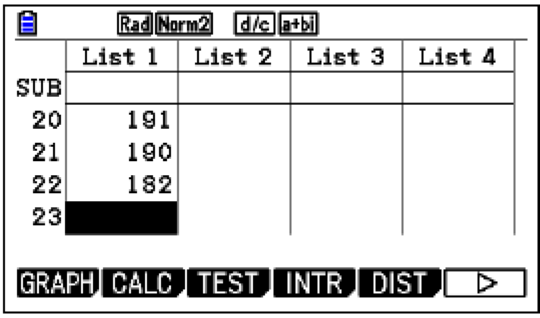
X (cm)	**189**	**182**	**187**	**179**	**188**	**189**	**172**	**186**	**183**	**187**	**170**	**179**	**187**	**180**	**170**	**172**	**179**	**175**	**185**	**191**	**190**	**182**
Y (kg)	**86**	**81**	**84**	**70**	**81**	**83**	**64**	**75**	**80**	**71**	**61**	**65**	**87**	**78**	**66**	**67**	**79**	**66**	**80**	**86**	**82**	**74**

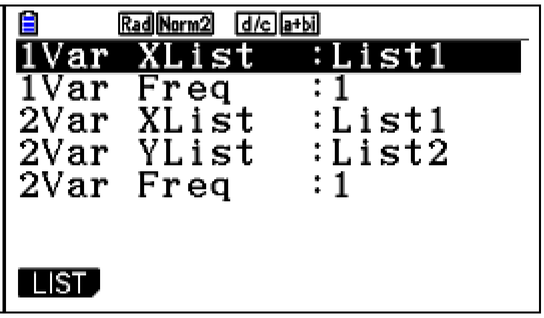
https://www.publico.pt/2014/05/19/desporto/noticia/fichas-dos-convocados-1636624

1. Utilizando o Menu Estatística, determine, com arredondamento às centésimas, a média e o desvio padrão populacional relativo às alturas.
2. Ainda relativamente às alturas, represente o diagrama de extremos e quartis e indica os valores dos quartis.
3. Represente o diagrama de dispersão que relaciona as duas variáveis apresentadas (altura e peso) e indique o coeficiente de correlação e a equação da reta de regressão

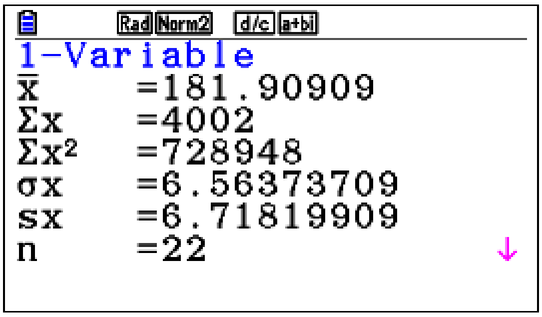
<u>Proposta de resolução</u>:

1. No menu Estatística, edite na List 1 os valores relativos às alturas. De seguida, em F2 (CALC) F6 (SET) indique 1VarList: List1 (ou a lista onde editou os valores) 1VarFreq:1.

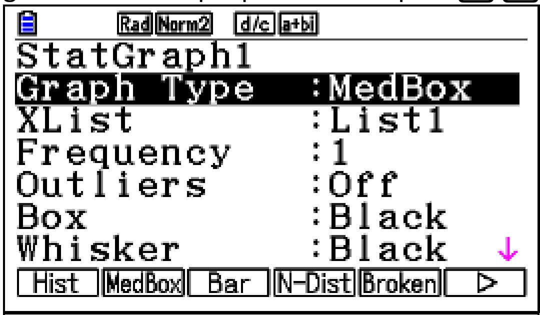


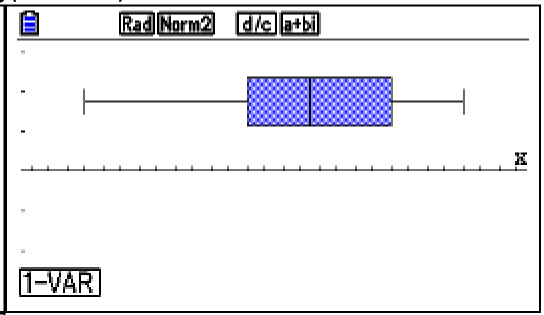


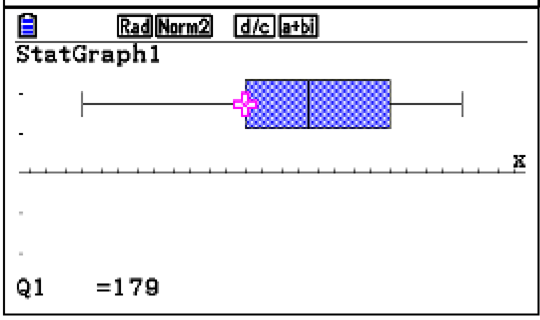
De seguida, EXE F1 (1-VAR)



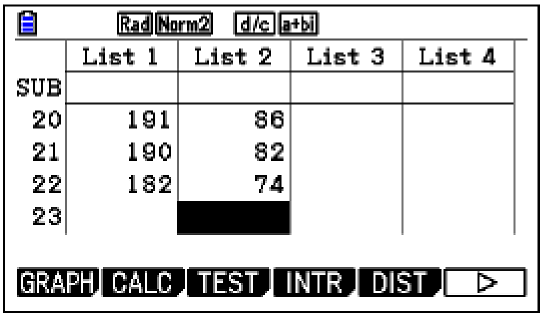
Para representar o diagrama de extremos e quartis, F1 (GRAPH1) e em F6 (SET) defina o tipo de gráfico e a lista que pretende. Depois EXE F1 (GRAPH1)

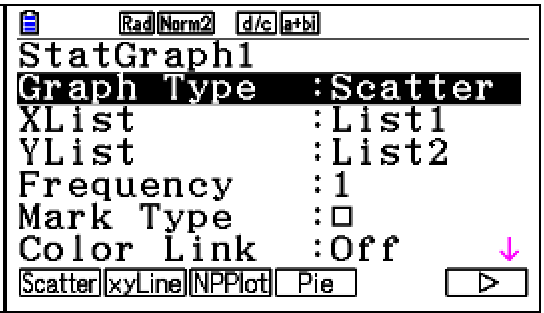


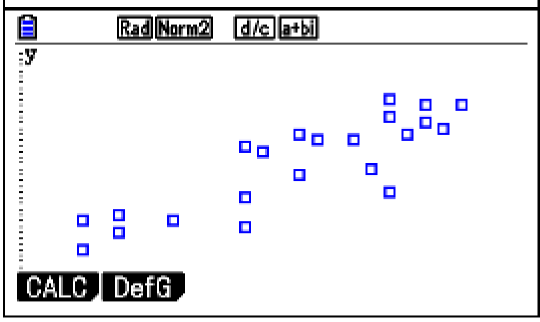


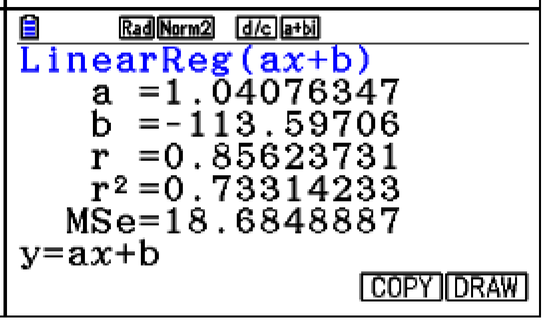


2.









Para encontrar a equação da reta de regressão, após ter representado o diagrama de dispersão, faça F1 (CALC) F2 F1 (ax+b). Se clicar em DRAW, desenha a reta de regressão. Em COPY, copia a equação da reta obtida para o menu GRAPH.

APM Centro Formação

Tarefa 5 – Trigonometria

1. Considere a função r.v.r. *f* , definida no intervalo [0, 2] por:

$$f(t) = 3t + \cos^2(t) - \mathrm{sen}^2(t)$$

Resolva os itens 1.1. e 1.2. recorrendo à calculadora gráfica.

1.1. Existe um ponto A, pertencente ao gráfico de *f* , cuja ordenada é igual ao declive da reta tangente ao gráfico de *f* nesse ponto.
Determine a abcissa de A e o valor do declive da referida reta. Apresente os valores solicitados com aproximação às décimas.

1.2. Considere que *f* traduz o deslocamento de uma partícula em função do tempo, *t.* Sabe-se que num intervalo [*a, b*], com *a* e *b* números reais, o valor da velocidade é sempre inferior ao valor da aceleração. Utilizando as capacidades gráficas da calculadora indique os valores de *a* e *b*, com duas casas decimais. Na sua resposta deverá:

- traduzir o problema por uma condição;
- reproduzir num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
- indicar os valores de *a* e *b* solicitados.

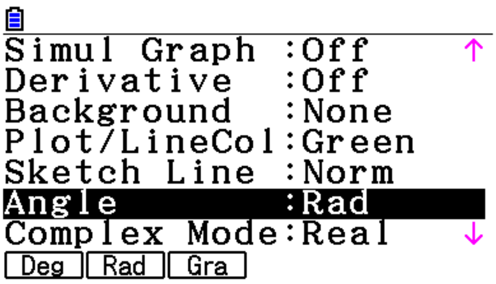
Proposta de resolução:

1.1. Pretende-se resolver a equação

f(x)=f ´(x)

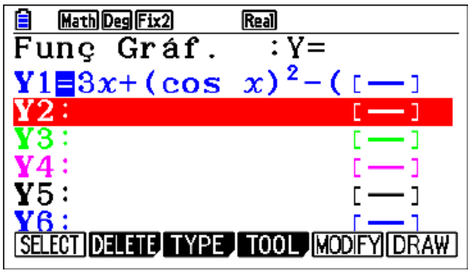
No menu GRAPH (5) escreva em *Y*1 a expressão da função *f*.

Certifique-se que está a trabalhar no modo radiano (SHIFT MENU, selecione ANGLE F2).

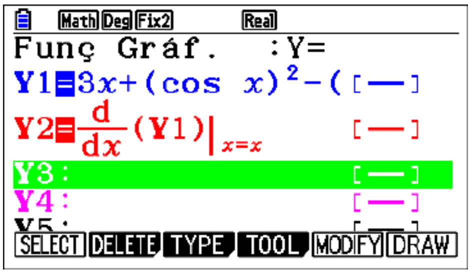


Dado que se pretende encontrar a abcissa de um ponto do gráfico de ordenada igual à derivada nesse ponto, vamos utilizar a opção "derivada de uma função" para obter o gráfico da função *f´,* função derivada de *f*.

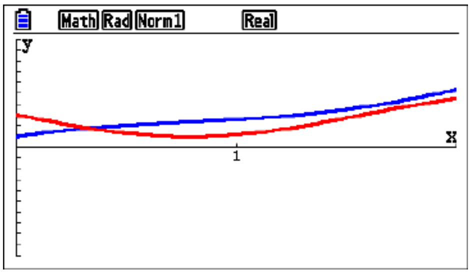
Tecle OPTN seguido de F2 (CALC). Obtém as seguintes opções



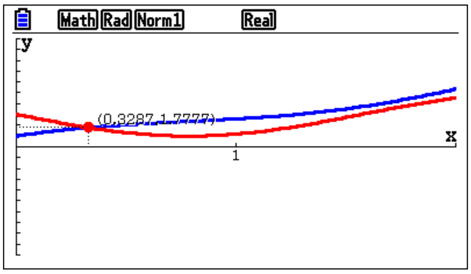
Selecione F1 (d/d*x*) e preencha como indicado na imagem:



Obtém os seguintes gráficos:



Determine o ponto de interseção utilizando a tecla F5 (G-SOLV) F5 (INTSECT)

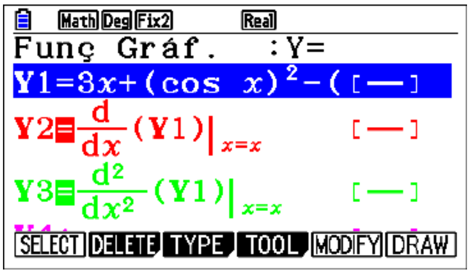


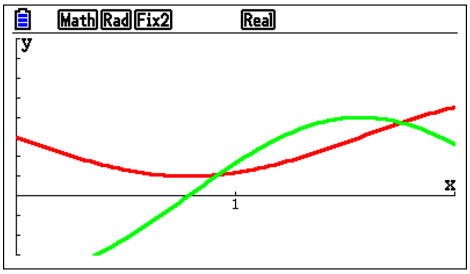
Portanto a abcissa do ponto A é, aprox. 0,3 e o valor do declive nesse ponto é, aprox. 1,8.

1.2. Pretende-se resolver graficamente a condição

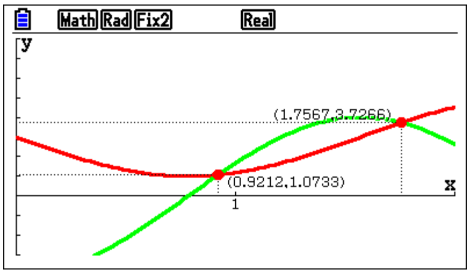
$f\,'(x) < f\,''(x)$

Introduza em *Y3* a segunda derivada de *f*, *f ´´*, desselecione *Y1* (**F1** (SELECT) para evitar sobreposição de muitos gráficos) e obtenha os gráficos das funções *f ´e f ´´*:





Determine os pontos de interseção das duas funções (pontos onde a 1ª e a 2ª derivadas são iguais):



R: $a \approx 0.93$; $b \approx 1.75$

Tarefa 6 – Modelo para o estudo de uma população

O número de animais num jardim zoológico, num certo período de tempo, é dado, t anos após 1 de janeiro de 2000, por $P(t) = \frac{100}{1+\alpha e^{-\beta t}}$, sendo $\alpha \in IR$, $\beta \in IR^{+}$.

1. Que efeito tem o aumento de β?

Considere que a função P verifica a condição $P'(t) = \frac{1}{125}P(t)(100 - P(t))$.

2.1. O valor de β é:

A) 0,1 B) 0,3 C) 2 D) 0,8

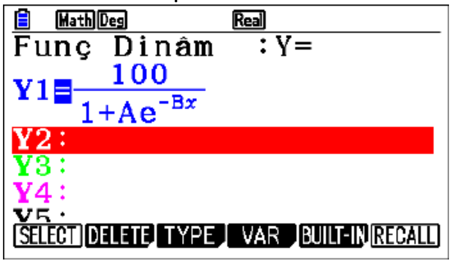
2.2. Prove que β=0,8.

Sabendo agora que a 1 de janeiro de 2000 havia 10 animais.

3. Calcule o valor de α.
4. Foi administrado um medicamento no instante em que a variação do crescimento do número de animais era máxima. Em que dia e ano foi administrado esse medicamento?

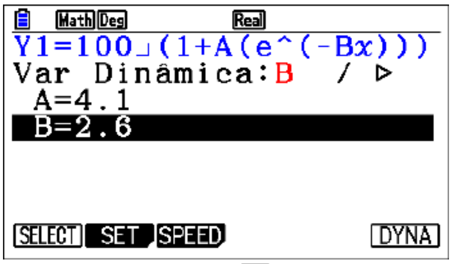
<u>Proposta de resolução</u>: Modelo para o estudo de uma população

1. Utilize o MENU Gráf Dinâm (6) e escreva a expressão de P

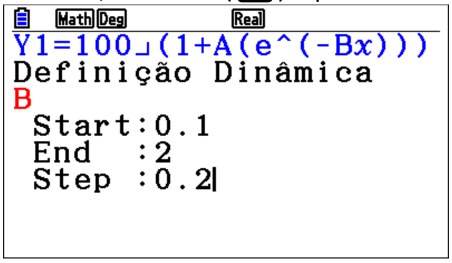


Defina que o parâmetro B vai ser animado, em VAR (F4), desce para o B com as setas do teclado, ▼, faça SELECT(F1), em cima aparecerá a Var Dinâmica: B.

Centro de Formação da Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, nº 27-A - 1500-236 Lisboa
☎ 21 716 36 90 21 716 64 24 @ cformacao@apm.pt
http://www.apm.pt

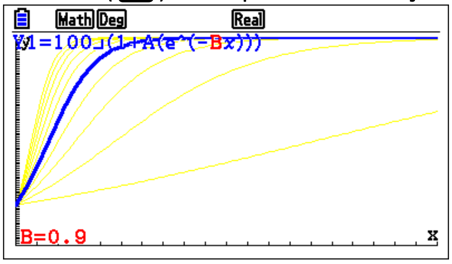


Para definir que valores vamos observar, vai a SET (F2) e preenche de acordo com a imagem



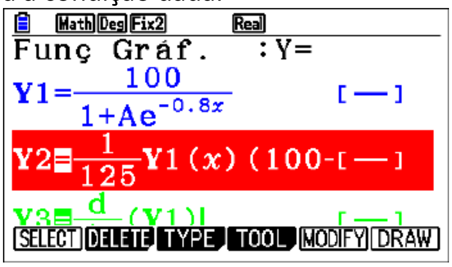
Pode também definir a velocidade em SPEED (F3)

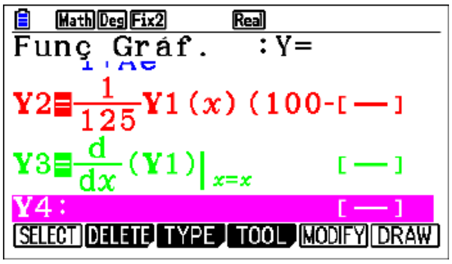
No SET UP, SHIFT MENU, em Locus, escolha On (F1), EXE.
Para visualizar os gráficos opte por Draw(F6). Para parar a animação faça AC/ON



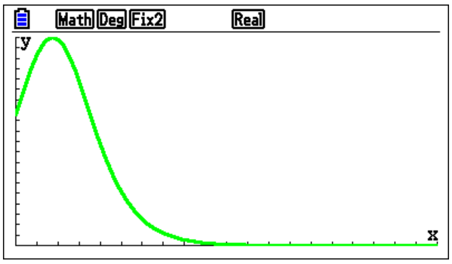
Conclui-se que o fator β traduz-se num aumento da velocidade do crescimento desta população de animais.

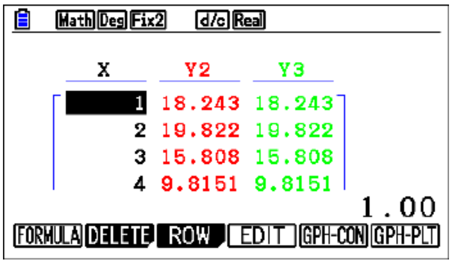
2.1. D.
No MENU Gráfico (5), em Y1 escreva a expressão de P com os diferentes valores, das diferentes opções, um de cada vez, em Y2= $\frac{1}{125}Y1(x)(100-Y1(x))$ e em Y3 a derivada de Y1 e constatará que com β=0.8, verifica a condição dada.



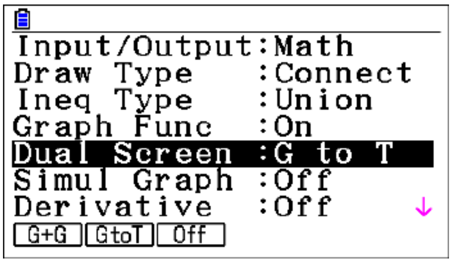


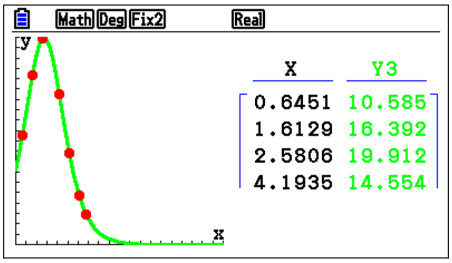
E constate graficamente e por observação dos valores na tabela que são iguais





Se preferir pode visualizar o gráfico e a tabela em simultâneo, SET UP, SHIFT MENU, em Dual Screen escolha G to T

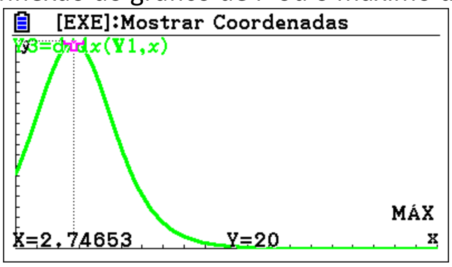




2.2. Para provar analiticamente que β=0,8, deriva-se a função P e iguala-se à expressão $\frac{1}{125}P(t)(100-P(t))$ obtendo uma equação, que resolve em ordem a β.

3. Sabe-se que $P(0)=10$, substituindo na função P obtém-se a equação $\frac{100}{1+\alpha}=10$, por equivalências obtém-se $\alpha=9$.

4. Queremos saber o ponto de inflexão do gráfico de P ou o máximo da derivada de P.



0,74653x365≈ 272

Assim se conclui que o medicamento foi administrado a 30 de setembro de 2002.

APM Centro Formação

Tarefa 7– Função por ramos

Considere a função *f*, de domínio IR\{0} definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{e^{4x} - 1} & \text{se } x < 0 \\ \\ x\ln(x) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

1. Represente a função *f* graficamente.

2. Seja *g* a função, de domínio IR^+, definida por $g(x) = f(x) - x + \ln^2 x$.

Estude a função *g* quanto à existência de extremos relativos em $]0; e]$.

3. Considere, num referencial o.n. *xOy*, a representação gráfica da função *g*. Sabe-se que:

- *A* é o ponto de coordenadas (2; 0);
- *B* é o ponto de coordenadas (5; 0);
- *P* é um ponto que se desloca ao longo do gráfico da função *g*.

Para cada posição do ponto *P*, considere o triângulo [*ABP*].

Determine as abcissas dos pontos *P* para os quais a área do triângulo [*ABP*] é 1.

Apresenta os valores com arredondamento às centésimas.

Adaptado do Exame Nacional de Matemática A, 1ª fase, 2013

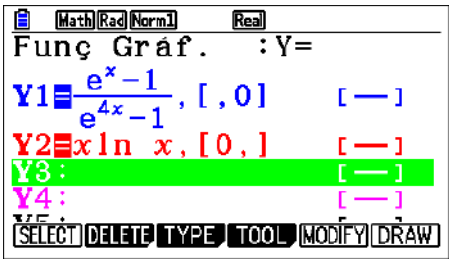
PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

1. MENU 5 (*Gráfico*)

No editor de funções, escreve-se o primeiro ramo da função *f* em Y1 e o segundo ramo em Y2.

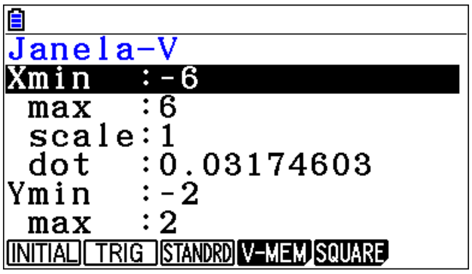
Assim, em Y1, escreve-se a expressão «$\dfrac{e^x - 1}{e^{4x} - 1}$», seguida de «[, 0]» e carrega-se em EXE.

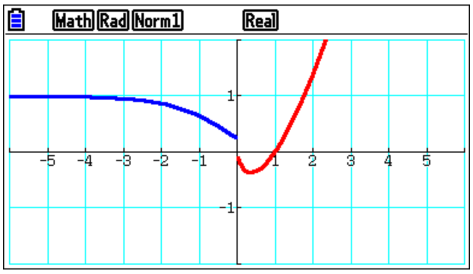
De seguida, em Y2, escreve-se «*x* ln*x*», seguido de «[0;]» e carrega-se em EXE



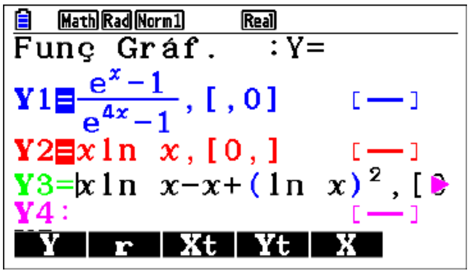
De seguida, pressiona-se SHIFT F3 (V-WIN) para configurar a janela de visualização. Pode escolher-se, por exemplo, a janela [–6; 6] × [–2; 2].

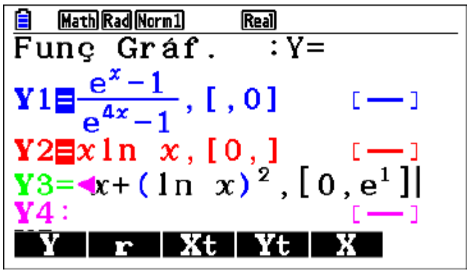
Por fim, no editor de funções, pressiona-se F6 (DRAW).





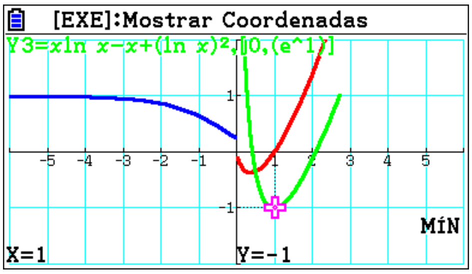
2. No editor de funções, escreve-se a expressão analítica da função g em Y3: «$x \ln x - x + (\ln x)^2$. Visto que a procura de extremos relativos é limitada ao intervalo $]0; e]$, pode acrescentar-se a restrição «$[0, e^1]$» e, por fim, carregar em EXE.



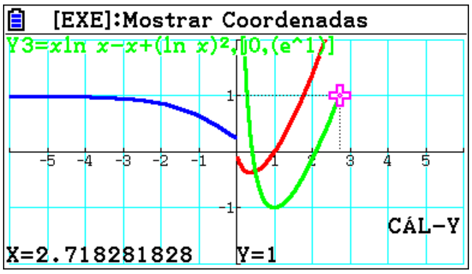


Após traçar o gráfico da função g, observa-se que tem um mínimo e um máximo.

Relativamente ao mínimo, carrega-se em SHIFT F5 (G-SOLV) F3 (MIN) e seleciona-se Y3 (▽ ▽ EXE) Conclui-se que o mínimo relativo é –1.



Em relação ao máximo relativo, é atingido para $x = e$. Assim, carrega-se em SHIFT F5 (G-SOLV) F6 (▷) F1 (Y-CAL), seleciona-se Y3, introduz-se o valor e^1 e pressiona-se EXE. Conclui-se que o máximo relativo é 1.



3. Para começar, no editor de funções, pode desativar-se a função *f*.

Para escolher uma janela de visualização mais adequada, pode recorrer-se ao Zoom BOX: SHIFT F2 (ZOOM) F1 (BOX) (figura 1). Coloca-se o cursor no local onde ficará o vértice superior esquerdo do retângulo de visualização (figura 2) e carrega-se em EXE. A seguir, desloca-se o cursor para baixo e para a direita (figura 3). Por fim, carrega-se em EXE (figura 4).

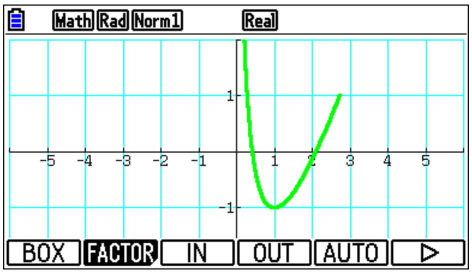


Figura 1

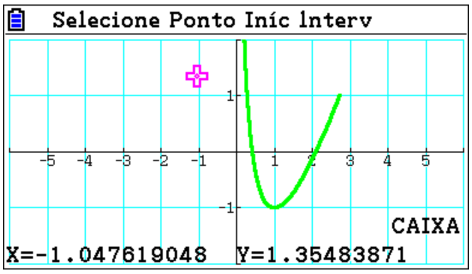


Figura 2

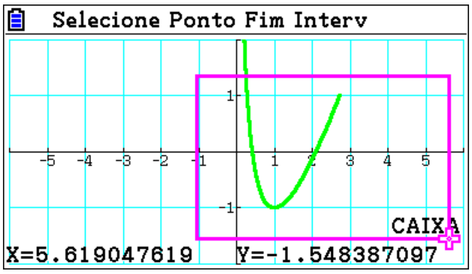


Figura 3

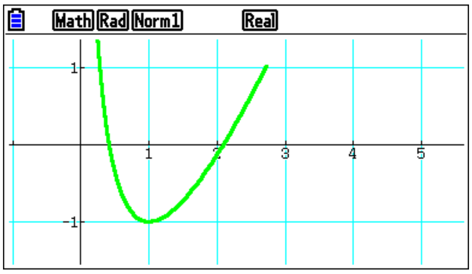


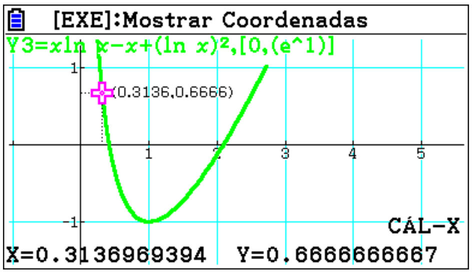
Figura 4

Pretende-se que a área do triângulo [*ABP*] seja igual a 1.

Uma vez que a base [*AB*] do triângulo tem 3 unidades, é necessário que a altura seja igual a $\frac{2}{3}$.

Assim, procuram-se as abcissas dos pontos *P* tais que $y_P = \frac{2}{3}$ ou $y_P = -\frac{2}{3}$.

Carrega-se em SHIFT F5 (G-SOLV) F6 (▷) F2 (X-CAL) e introduz-se o primeiro valor. Para marcar o ponto no gráfico, com as respetivas coordenadas, carrega-se em EXE (figura 5). Para obter o ponto seguinte, carrega-se em ▶ e pressiona-se novamente EXE (figura 6).



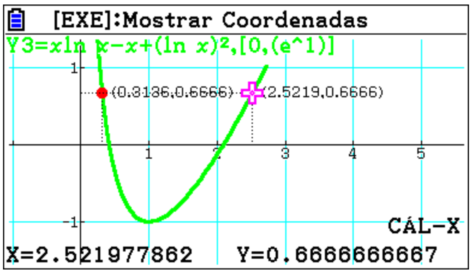
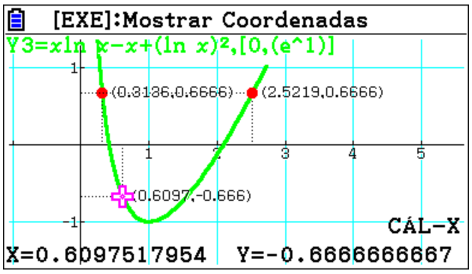
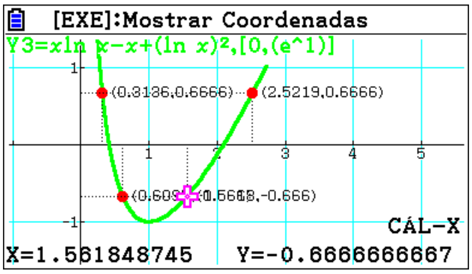


Figura 5 Figura 6

Seguidamente, repete-se o processo com o valor $-\frac{2}{3}$.

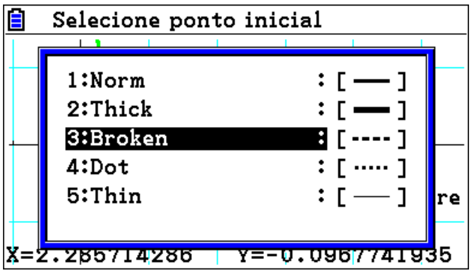


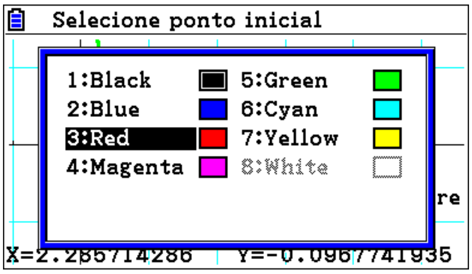


Conclui-se que $x_P \approx 0{,}31 \vee x_P \approx 0{,}61 \vee x_P \approx 1{,}56 \vee x_P \approx 2{,}52$.

Nota: É possível representar os quatro triângulos que verificam a condição $A_{[ABP]} = 1$.

Primeiro, carrega-se em $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{F4}}$ (SKETCH) $\boxed{\text{F6}}$ (▷) $\boxed{\text{F2}}$ (LINE) $\boxed{\text{F2}}$ (F-LINE). Uma vez que o tipo de linha em modo *Sketch* é idêntico ao do gráfico (contínuo e verde), é preferível alterá-lo carregando em $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{5}$ (FORMAT).





Para traçar cada lado, coloca-se o cursor sobre o ponto inicial e carrega- -se em $\boxed{\text{EXE}}$. Depois, desloca-se o cursor até ao ponto final e pressiona-se $\boxed{\text{EXE}}$.