

A janela de visualização da calculadora gráfica nas propostas de trabalho de uma professora de Matemática

Helena Rocha

Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, hcr@fct.unl.pt

Resumo. *As usuais dificuldades dos alunos relativamente à escolha duma janela de visualização adequada quando usam a calculadora gráfica no estudo de funções e a importância do papel do professor na sua superação, conduziram à realização deste estudo, onde se procurou conhecer e compreender as opções do professor relativamente à forma como promove a apropriação por parte dos alunos do significado de janela de visualização. Neste âmbito foi adoptada uma metodologia de natureza qualitativa e interpretativa e realizado um estudo de caso de uma professora que lecionava a disciplina de Matemática A ao 10.º ano de escolaridade. As conclusões alcançadas apontam para a exclusão de situações complexas, em termos de escolha da janela de visualização, numa fase inicial; para uma explicitação do processo de procura da janela de visualização; e para a inclusão de situações que envolvam visões parciais e incompletas de gráficos.*

Palavras-chave: calculadora gráfica; janela de visualização; conhecimento e prática profissional

Introdução

A utilização da calculadora gráfica no ensino da Matemática obriga alunos e professor a depararem-se com aspectos que até então não eram usuais (Bosley *et al.*, 2007; Cavanagh & Mitchelmore, 2003), fazendo surgir um conjunto específico de dificuldades. Muitos dos problemas estão frequentemente associados àquilo a que Cavanagh e Mitchelmore (2000) designam por questões de escala e que englobam todas as tomadas de decisão relativamente à escolha da janela de visualização e à ponderação de eventuais alterações. Essas tomadas de decisão requerem um conjunto de conhecimentos de carácter matemático que aqui designarei por conhecimento do significado da janela de visualização.

Com este estudo pretende-se conhecer e compreender as opções do professor relativamente à forma como durante o estudo das funções promove a apropriação por parte dos alunos do significado da janela de visualização da calculadora gráfica. Concretamente, pretende-se conhecer e compreender:

- de que forma tem em conta o grau de dificuldade associado à escolha da janela de visualização em diferentes situações,

- como se caracterizam as orientações que dá aos alunos relativamente à escolha da janela de visualização,
- que atenção dá às situações em que na janela *standard* são obtidas visualizações parciais ou incompletas do gráfico.

Quadro teórico

Na literatura existente são muitas as referências às questões relacionadas com a escolha da janela de visualização da calculadora gráfica. Cavanagh (2006) menciona a grande preferência dos alunos pela adopção de valores simétricos e iguais nos dois eixos, a que se associa dificuldade em compreender o impacto sobre o gráfico da adopção de valores diferentes para cada eixo. Hodges e Kissane (1994) referem ainda a falta de consciência dos alunos relativamente ao impacto que uma qualquer alteração da janela de visualização tem sobre o gráfico observado. Por seu turno Ward (2000) e Rocha (2000) descrevem situações em que os alunos adoptam estratégias absurdas para a escolha da janela, como seja considerar os valores que surgem na expressão da função.

Nestas dificuldades transparece obviamente um deficiente domínio das noções envolvidas, no entanto, Cavanagh e Mitchelmore (2000) atribuem a sua origem à anterior experiência matemática dos alunos, onde todos os gráficos eram traçados com papel e lápis em referenciais onde os valores representados eram quase sempre os mesmos, enfatizando a atenção que o professor precisa de atribuir a essas noções, reflectindo em torno das novas ênfases que o recurso à tecnologia tende a colocar sobre os conteúdos matemáticos. Como refere Hector (1992), a utilização da calculadora gráfica veio permitir a exploração de outro tipo de situações e transformou a escolha dos valores representados em cada eixo e da escala, em aspectos fundamentais. Esta alteração revelou que a opção por simplificações permanentes impediu os alunos não só de se aperceberem da importância das noções envolvidas, como também, e principalmente, de as compreenderem convenientemente.

Directamente associada a uma adequada escolha da janela de visualização encontram-se as dificuldades em identificar os casos em que o ecrã não exhibe uma vista global do gráfico da função (Cavanagh, 2006; Rocha, 2000). A identificação de vistas parciais ou incompletas de gráficos requer uma adequada articulação da informação obtida a partir de diferentes representações, algo que os alunos não estão habituados a fazer (Cavanagh & Mitchelmore, 2003).

Cavanagh e Mitchelmore (2000) e Consciência (2008) apontam a falta de articulação entre o conhecimento algébrico dos alunos e a interpretação das imagens visualizadas, que se traduz numa aceitação acrítica do que é apresentado no ecrã da máquina (como por exemplo, admitir como representação gráfica de uma função quadrática algo distinto de uma parábola). Boers e Jones (1994) mencionam dificuldades de integração da informação proveniente de diferentes vias e Rocha (2000) refere-se mesmo a uma adequação dos conhecimentos matemáticos de modo a permitir a integração da informação veiculada pela máquina (uma aluna afirma que o gráfico de uma função quadrática *geralmente* é uma parábola, adaptando o seu conhecimento de modo a evitar o conflito com a recta que observa no ecrã da calculadora).

Existem ainda referências a efeitos visuais ilusórios, associados à escolha da janela de visualização. Ward (2000) aborda a forma como os gráficos são traçados, da esquerda para a direita, que leva alguns alunos a assumir que a parte do gráfico que não foi representada se encontra para o lado direito do visor, assumindo que a representação começa a ser feita do lado esquerdo, no “início do gráfico”, e que portanto qualquer parte em falta terá obrigatoriamente que se situar para a direita da imagem apresentada.

Cavanagh e Mitchelmore (2003) apontam a não apresentação conjunta com o gráfico dos valores marcados nos eixos como potencialmente problemática. Este é aliás um dos aspectos a que Ruthven (1996) e Rocha (2000) aludem, considerando-o potencialmente enganador, especialmente na sequência da realização de *zooms*. Com efeito, como observou Rocha (2000), a realização sucessiva de *zooms* rapidamente faz perder a noção da ordem de grandeza dos valores representados. Quer a opção recaia sobre a utilização do comando *zoom in* ou *zoom out*, rapidamente deixa de estar presente no gráfico qualquer indicação da escala. A partir desse momento a interpretação da informação veiculada pelo gráfico encontra-se dificultada, mesmo para um aluno que está ciente do efeito de um *zoom* (*in* ou *out*) sobre a janela de visualização.

Cabe ao professor o importante papel de minimizar as dificuldades com que os alunos se deparam na sequência da utilização da calculadora (Dick, 1992). Segundo Doerr e Zangor (2000) e Kastberg e Leatham (2005), o conhecimento do professor é determinante na forma como integra a tecnologia na sua prática, valorizando a articulação entre conhecimentos e o desenvolvimento do espírito crítico. E a este nível Cavanagh e Mitchelmore (2003) consideram que o professor deve fazer mais do que simplesmente informar os alunos relativamente às limitações da calculadora e à forma

como esta pode apresentar informação de forma enganadora. Com efeito, é necessário que este reforce as ligações entre diferentes representações, chamando continuamente a atenção para as discrepâncias entre, por exemplo, o gráfico que seria de esperar e aquele que é exibido pela calculadora gráfica. É ainda fundamental, no que respeita aos aspectos relativos à escolha da janela de visualização, que o professor apele ao significado dos valores representados, para que estes façam sentido para os alunos (Almeida & Oliveira, 2009).

Muito do que tem sido feito na investigação nesta área passa, no entanto, por dizer ao professor o que a integração da calculadora gráfica deve envolver e não por analisar a sua prática para, a partir desta, apoiar e promover de forma relevante o desenvolvimento profissional do professor (Kissane, 2003).

Metodologia e contexto

A investigação que aqui se apresenta faz parte de um estudo mais abrangente (ver Rocha, 2012) e adopta uma abordagem de natureza qualitativa e interpretativa, envolvendo a realização de um estudo de caso sobre a professora Teresa. A recolha de dados envolveu a realização de entrevistas, a observação de 14 aulas e recolha documental. As entrevistas foram de diversos tipos, mas todas se caracterizaram por ser semi-estruturadas. Foram realizadas duas entrevistas focadas na professora e nas suas opiniões (uma no início e outra no final do estudo) e foram também realizadas entrevistas antes e depois de cada aula observada, com a intenção de conhecer o que preparara e as razões base dessas opções (entrevistas pré-aula) e o balanço que fazia da forma como a aula decorrera (entrevistas pós-aula). Tanto as entrevistas como as aulas foram áudio-gravadas e posteriormente transcritas. Foi ainda elaborado um diário de bordo das aulas observadas e recolhidos diversos documentos como fichas de trabalho, enunciados de testes e outros materiais disponibilizados pela professora aos alunos. A análise de dados revestiu-se essencialmente dum carácter descritivo e interpretativo.

Teresa é uma professora com mais de 30 anos de experiência profissional, que no decorrer deste estudo leccionava o tema Funções na disciplina de Matemática A a uma turma do 10.º ano de escolaridade de uma escola da grande Lisboa e que possui uma longa experiência de utilização de calculadoras gráficas com alunos e um profundo conhecimento do funcionamento da máquina.

Ao longo do ano Teresa dispôs de 45 minutos semanais para apoio aos alunos, a que estes recorriam quando sentiam necessidade. Durante o 1.º período a professora foi utilizando este tempo para, à medida que os alunos iam adquirindo a sua calculadora, lhes ensinar individualmente a trabalhar com ela. Consequentemente, quando a máquina começou a ser usada na aula já todos conheciam os comandos mais básicos. Assim, nas aulas de Matemática raramente existiram referências a como proceder para introduzir a expressão de uma função, como alterar os valores da janela, como calcular um máximo ou um zero, ou como realizar um zoom. No decorrer das aulas o foco esteve em como a Matemática determinava a utilização do comando (por exemplo, em como perante a situação escolher os valores a introduzir na janela de visualização) ou no conhecimento e utilização de comandos mais sofisticados.

Resultados

Ao longo do estudo das funções, Teresa propôs aos alunos um amplo conjunto de tarefas. Nesta secção apresentam-se sucintamente algumas dessas tarefas, dando atenção à ênfase que em cada uma delas foi atribuída à janela de visualização.

Função quadrática

Esta tarefa consiste numa investigação em torno do efeito da mudança de determinados parâmetros numa família de funções sobre o aspecto do respectivo gráfico. Neste sentido a utilização da calculadora é fundamental, mas não exige nada de muito sofisticado em termos de utilização da máquina. De um modo geral todas as funções escolhidas pelos alunos são passíveis de ser representadas graficamente de forma adequada utilizando a janela *standard*.

No eixo da parábola

Nesta proposta de trabalho os alunos devem conjecturar relativamente ao declive da recta que passa por dois pontos situados em lados opostos do eixo de simetria duma parábola. Posteriormente devem demonstrar a veracidade da conjectura formulada. Num primeiro momento a calculadora gráfica surge como um elemento fundamental para a realização do trabalho de natureza investigativa, o mesmo já não sucedendo no segundo momento dedicado à demonstração.

A janela de visualização a considerar é um dos aspectos ponderados pela professora. Tendo em conta que a experiência dos alunos com a calculadora ainda não é muita e

que já existem vários aspectos a que vão ter que dar atenção ao nível da calculadora (marcar pontos no gráfico, traçar a recta, determinar o seu declive, etc.), opta então por escolher uma janela de visualização e por a disponibilizar desde logo no enunciado da tarefa:

Isto é assim, não podes fazer tudo ao mesmo tempo. Os alunos ainda não estão muito habituados a trabalhar com a calculadora e aqui já vão ter que conseguir fazer várias coisas com a máquina. É preferível focar. E nesta tarefa o foco não é na escolha da janela de visualização. Por isso acho que é melhor dar logo a janela, evitas perder tempo que pode vir a fazer falta e evitas que o foco se desvie daquilo que é o foco da tarefa. (pré-aula 2)

Ainda assim, aproveita a ocasião para introduzir a expressão “janela de visualização” e para apontar aos alunos duas formas diferentes de a indicarem:

Para facilitar o estudo nesta ficha, eu dou logo à partida a janela de visualização. Uma janela de visualização boa. Eu nunca utilizei este termo, janela de visualização, vai aparecer agora na ficha, mas o que é a janela de visualização?... Quando eu faço a representação de um gráfico, este fica sem leitura se nós não tivermos aqui indicada a escala. Tenho sempre insistido nisto. Um valor no eixo dos xx e um valor no eixo dos yy, para nós percebermos a escala. É também o que acontece aqui, mas no fundo quando eu estou a ver um gráfico na calculadora ou num ecrã do computador, estou a vê-lo numa determinada janela, porque nós sabemos que o gráfico vai continuar, neste caso sabemos como é que vai continuar e nalguns casos até podemos nem saber como é que vai continuar para além desta janela. Ora esta janela tem um x que vai desde -10 até 10 e um y que vai desde -6.65 até 6.67. Portanto eu posso à partida, em vez de estar a colocar aqui os valores, ou simultaneamente, dizer estou a estudar o gráfico na janela de visualização e posso escrevê-la de duas formas: $[-10, 10] \times [-6.65, 6.67]$ ou $x \in [-10, 10]$ e $y \in [-6.65, 6.67]$. (aula 2)

Mesmo assim, sente necessidade de, no decorrer da aula, tornar a alertar os alunos para aspectos relacionados com a janela de visualização, pois há quem escolha valores para a abcissa do ponto a considerar que vão para além desta: “Tenham cuidado com a janela. Não atribuir coisas fora da janela” (aula 2).

A caixa

Esta é uma tarefa onde a calculadora assume um papel importante, pois o lado do quadrado a cortar na cartolina para construir a caixa com volume máximo não pode ser determinado sem recurso à máquina. É também uma tarefa onde encontrar uma janela de visualização aceitável exige algum trabalho da parte dos alunos. E este é precisamente um dos aspectos a que Teresa dá atenção ao apoiar os alunos, procurando que ponderem os valores que faz sentido considerar:

Prof- Então vamos alterar um bocadinho a janela para se ver melhor. (...) Vamos pensar mais um bocadinho. Entre que valores pode variar o x ?

Aluna- (...) Então é entre o 0 e o 1.

Prof- Não. Quanto é que isto mede na folha de papel? Isto é uma folha de papel.

Aluna- 80.

Prof- 80. Até onde é que tu podes cortar? Cortas dum lado e doutro. Podes cortar até quanto?

Aluna- Ah! 40.

Prof- Então varia entre 0 e 40. Quer dizer, só te interessa o x entre 0 e, em vez de ser até 1, posso pôr?...

Aluna- 0,4.

Prof- 0,4. Ponho mais um bocadinho que é para não ficar mesmo no limite. Certo?... Vou ver. Repara, já tenho a função só na parte que me interessa.

Aluna- Uhm uhm.

Prof- Está aqui tão baixinho tão baixinho. Então o que é que eu vou fazer? Pôr aqui um bocadinho negativo e cortar aqui (aponta a parte superior do ecrã) (...) Então vamos lá, janela... Estás a começar em 0, vou pôr -0.5, certo? (...) y_{Min} -0.5. E o y_{Max} ? Tu tens 1. 1 está lá em cima, portanto é um valor muito mais pequenino. Que valor é que queres pôr? Experimenta lá tu.

Aluna- 0.2?

Prof- Põe lá. Experimenta! (aula 7)

Mas Teresa tem também presente que a calculadora disponibiliza várias formas de alterar a janela de visualização. Assim, ao longo da aula vai apontando aos alunos as diferentes possibilidades a que podem recorrer e, no final, ao abordar com toda a turma o problema, opta por ponderar os valores adequados para o x e depois por recorrer a sucessivos *zoom box*, até alcançar uma janela de visualização que seja considerada adequada:

Prof- Bom, o que a maior parte das pessoas fez foi isto e apareceu ali a função. (...) E agora nós não podemos esquecer que estamos no contexto de um problema concreto. (...) Quer dizer que eu agora podia adaptar a janela da calculadora de acordo com as condições do problema. E uma das hipóteses... claro que tinha várias maneiras de adaptar a janela, mas uma delas era ir à janela e nas definições da janela dizer que o x_{Min} era 0, ou se quiserem menos um bocadinho para se ver melhor, e que o x_{Max} era... era quanto?

Aluno- 0.4.

Prof- 0.4. Ok. Se fizesse isto o que é que acontecia? A seguir não via praticamente nada, mas percebia que a curva estava aqui assim, só que

estava tão juntinha ao eixo dos xx que eu não conseguia perceber. Agora tinha duas hipóteses. Ou ia perceber entre que valores variava o y ou utilizava (...) o *zoom box*. E o que me interessa, reparem, é ampliar aqui nesta zona, ali à volta. Então se eu fizer aqui o primeiro canto, aqui assim... (...) E agora já tenho um gráfico que me permite de forma muito razoável perceber que há aqui assim um volume que é máximo e que acontece para um determinado x. (aula 7)

Mas não é só a diversidade de formas disponíveis para alterar a janela de visualização e a sua explicitação junto dos alunos que são valorizadas pela professora. Mais do que conhecer os comandos da calculadora, esta pretende que os alunos compreendam o que foi feito e as razões por que foi feito, para que no futuro sejam capazes de lidar sozinhos com uma situação semelhante. Opta assim por abordar a procura de uma boa janela de visualização como um processo, em que ponderando a situação e utilizando as funcionalidades disponibilizadas pela calculadora, se vai progressivamente alterando a janela até se encontrar uma que possa ser considerada satisfatória. E esta é uma opção consciente de Teresa:

P - Eh pá, porque é assim, eu acho que se a gente faz logo bem, eles depois da próxima vez sentem outra vez dificuldades, não é?

I - Portanto é uma forma de lhes mostrares, digamos, o processo?

P - É uma forma. (...) Poderá haver situações em que eu percebo logo qual é a janela óptima, mas se não perceber, tenho que sentir que tenho alguns meios de a ir procurando. E foi um bocadinho isso que eu procurei fazer. (...) Porque se não, se eu fizer ali, se fizer logo certo, eles nem percebem que há alguma dificuldade. Não conseguiram, mas pronto, era aquela e ponto final. (pós-aula 7)

Dobrando o canto da folha

Nesta tarefa é pedido para dobrar uma folha de modo a que o canto superior esquerdo toque no lado inferior (ver figura 1), sendo perguntado qual o triângulo de maior área que a dobragem faz surgir no canto inferior esquerdo da folha.

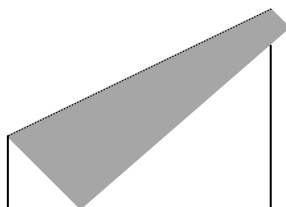


Figura 1. Dobragem da folha de papel

Os alunos trabalham em pares e começam por fazer várias dobragens e respectivas medições para obter um conjunto de dados que lhes permita encontrar uma função que se adequa aos dados e, posteriormente, responder ao problema.

No decorrer da tarefa os alunos são confrontados com um conjunto de dados que sugere uma função quadrática, quando a função correspondente é afinal uma cúbica. Os alunos apercebem-se que a função quadrática não se adequa perfeitamente aos dados que recolheram, mas quando pensam em funções alternativas são guiados pela visualização dos dados e consideram uma função quártica:

Aluno- Oh stora, nós aqui experimentámos uma quadrática (...) porque os pontos ficam assim... em forma de parábola, mas isto não fica mesmo...

Prof- Sim, não passa mesmo por todos os pontos. E então?

Aluno- Pode ficar assim?

Prof- Então o que é que isso quer dizer? Nós estamos a trabalhar com dados experimentais, portanto ou vocês não foram muito exactos nas medições, e há sempre um erro nas medições que fazemos, ou essa não é a função que melhor se adequa aos vossos dados. Experimentaram outra função?

Aluno- Sim, experimentámos esta, a quártica.

Prof- A quártica, e então? O que aconteceu?

Aluno- É melhor aqui no início, mas depois também não passa pelos pontos.

Prof- Certo. E experimentaram outras funções?

Aluno- Não, só vimos estas (...) como os pontos são assim... (o aluno aponta a forma em U da distribuição dos pontos), estas vão ser as melhores. A menos que seja de grau 6... é? (aula 12)

A maioria dos alunos procurou a função que melhor se adequava aos dados entre as funções polinomiais do 2.º e do 4.º grau. Apenas consideraram uma função polinomial do 3.º grau os alunos que simplesmente optaram por experimentar todos os tipos de funções disponibilizados pela calculadora para então escolher a que mais se adequava:

Prof- Então e vocês, a que conclusão chegaram?

Aluno- Nós achamos que é esta a função...

Prof- Uma cúbica. E porque é que escolheram essa função?

Aluno- Então, começámos por ver a quadrática porque achámos que era, mas não passava bem nos pontos todos. E então fomos experimentando as que vêm aqui na calculadora e esta é a que dá melhor... passa em todos. (aula 12)

A discussão da tarefa, realizada na aula seguinte, parte do trabalho realizado pelos alunos. São apresentadas as funções escolhidas por alguns dos pares de alunos e a respectiva representação gráfica em conjunto com os dados recolhidos. As primeiras apresentações são de funções polinomiais do 2.º e 4.º graus, pois são essas as respostas dominantes na sala. A professora tem que insistir, perguntando por algo diferente, para que surja a referência à função do 3.º grau. Perante a forma obviamente melhor como

esta função se adequa aos dados, a professora aproveita para realçar alguns aspectos relativos à janela de visualização e aos casos em que esta não nos mostra uma imagem global do gráfico:

A maioria olhou para estes pontos e achou que se tratava de uma função quadrática, mas vocês não podem concluir isso assim. Vocês tem que ter presente que só estão a ver o gráfico numa janela e que aquilo que vêem não vos diz nada sobre o que não vêem, ou seja, sobre o gráfico que está fora da janela. (...) Quando eu introduzo um polinómio do 2.º grau na máquina e peço o gráfico, eu sei que vai ser uma parábola porque eu conheço estas funções, porque a Matemática me permite saber isso (...) mas ao ver uma representação gráfica com a forma de um U, sem mais informação eu não posso concluir que aquela função é uma quadrática... porque o gráfico pode inverter a concavidade fora da minha janela... eu não sei... (aula 13)

A professora faz assim uma análise da importância da janela de visualização e de como uma visão parcial do gráfico nos pode levar facilmente a conclusões erradas.

Análise e discussão dos resultados

Teresa está ciente que são várias as dificuldades que a escolha de uma janela de visualização adequada tende a originar nos alunos. Como tal, a professora tem a preocupação de fazer uma introdução progressiva à questão. As primeiras tarefas que coloca não são muito exigentes em termos de encontrar uma janela de visualização adequada, como é o caso da tarefa “Função quadrática”, onde o trabalho podia ser todo realizado na janela *standard*, pelo menos se os alunos não optassem por atribuir valores grandes aos parâmetros que considerassem. Posteriormente, opta por dar directamente a indicação da janela de visualização a considerar, como sucede na tarefa “No eixo da parábola”. Com esta opção Teresa pretendia minimizar as dificuldades dos alunos numa fase inicial da utilização da calculadora e também reduzir o tempo dispendido em aspectos para além daqueles onde pretendia colocar o foco da tarefa. Só mais tarde vão então surgindo situações onde efectivamente é necessário ponderar a janela de visualização a considerar, como na tarefa “A caixa”.

São ainda consideradas as dificuldades associadas ao facto do aspecto do gráfico que se vê numa determinada janela poder ser muito diferente daquele que efectivamente é o gráfico global da função. E a professora procura abordar esta questão na tarefa “Dobrando o canto da folha”, numa fase em que já foi realizado bastante trabalho em torno da janela de visualização.

Conclusão

A professora participante nesta investigação reconhece claramente as dificuldades enfrentadas pelos alunos em relação com a janela de visualização, tal como referido por autores como Cavanagh (2006) e Rocha (2002). Parece ainda ciente da importância e delicadeza da forma e momento em que o contacto com essas dificuldades deve ocorrer, em consonância com as ideias preconizadas por Cavanagh e Mitchelmore (2003).

Uma análise às práticas da professora permite identificar algumas estratégias adoptadas por esta e potencialmente facilitadoras do desenvolvimento da compreensão dos alunos relativamente à janela de visualização e ao seu impacto sobre o gráfico visualizado no ecrã da máquina. Assim, a ponderação que faz das dificuldades usualmente sentidas pelos alunos levam-na a optar por evitar o contacto com situações complexas, numa fase inicial, colocando aos alunos situações simples ou optando por indicar explicitamente a janela de visualização a considerar. Mais tarde, ao confrontar os alunos com situações onde é necessário proceder a alterações da janela, procura apresentar o processo, não se limitando a mostrar uma boa janela, sugerindo diferentes vias possíveis e discutindo o mérito de cada uma em função das circunstâncias. Quando os alunos já vivenciaram algumas experiências de alteração da janela de visualização inclui também situações que englobam o trabalho em torno de vistas parciais ou incompletas de gráficos, discutindo-as cuidadosamente.

Os resultados deste estudo apontam pois para a importância do professor e para a complexidade do seu papel na gestão curricular que protagoniza e na forma como esta promove a abordagem à janela de visualização.

Referências bibliográficas

- Almeida, A., & Oliveira, H. (2009). O processo de génese instrumental e a calculadora gráfica na aprendizagem de funções no 11.º ano. *Quadrante*, XVIII (1 e 2), 87-118.
- Boers, M., & Jones, P. (1994). Is calculus made easier with the graphics calculator?. In T. Andrews & B. Kissane (Eds.), *Graphics calculators in the classroom* (pp. 65-72). Adelaide: AAMT.
- Bosley, J., Hong, Y., Santos, A., & Thomas, M. (2007). Calculators in the Mathematics classroom: a longitudinal study. In W-C. Yang, T. Alwis & J-C. Chuan (Eds.), *Proceedings of the Twelfth Asian Technology Conference in Mathematics* (pp. 37-47). Taipei: ATCM.
- Cavanagh, M. (2006). Enhancing teachers' knowledge of students' thinking: the case of graphics calculator graphs. In P. Jeffery (Ed.), *Creative dissent, constructive solutions*. Parramatta, NSW: AARE.

- Cavanagh, M., & Mitchelmore, M. (2000). Graphics calculators in mathematics learning: studies of student and teacher understanding. In M. Thomas (Ed.), *Proceedings of TIME 2000: an International Conference on Technology in Mathematics Education* (pp. 112-119). Auckland, NZ: TIME.
- Cavanagh, M., & Mitchelmore, M. (2003). Graphics calculators in the learning of mathematics: teacher understandings and classroom practices. *Mathematics Teacher Education and Development*, 5, 3-18.
- Consciência, M. (2008). Calculadoras gráficas: alguns aspectos técnicos a ter em conta na sua utilização. In A. Canavarró, D. Moreira & M. Rocha (Eds.), *Tecnologias e Educação Matemática* (pp. 250-265). Lisboa: SEM-SPCE.
- Dick, T. (1992). Super calculators: implications for calculus curriculum, instruction, and assessment. In J. Fey & C. Hirsch (Eds.), *Calculators in Mathematics Education* (pp. 145-157). Reston, Va.: NCTM.
- Doer, H., & Zangor, R. (2000). Creating meaning for and with the graphing calculator. *Educational Studies in Mathematics*, 41, 143-163.
- Hector, J. (1992). Graphical insight into elementary functions. In J. Fey & C. Hirsch (Eds.), *Calculators in Mathematics Education* (pp. 131-137). Reston, Va.: NCTM.
- Hodges, A., & Kissane, B. (1994). Learning about functions and graphs using a graphics calculator. In T. Andrews & B. Kissane (Eds.), *Graphics calculators in the classroom* (pp. 39-48). Adelaide: AAMT.
- Kastberg, S., & Leatham, K. (2005). Research on graphing calculators at the secondary level: implications for mathematics teacher education. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, 5(1), 25-37.
- Kissane, B. (2003). A model for professional development for graphics calculator use. In A. Rogerson (Ed.), *The humanistic renaissance in mathematics education: Proceedings of the International Conference* (pp. 191-199). Palermo, Sicily: The Mathematics Education into the 21st Century Project.
- Rocha, H. (2000). *A utilização da calculadora gráfica por alunos do ensino secundário*. Coleção Teses. Lisboa: APM.
- Rocha, H. (2002). A utilização que os alunos fazem da calculadora gráfica nas aulas de Matemática. *Quadrante*, XI (2), 3-28.
- Rocha, H. (2012). *A integração da calculadora gráfica no ensino da Matemática: estudo sobre as práticas curriculares de professores do ensino secundário*. Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal.
- Ruthven, K. (1996). Calculators in the mathematics curriculum: the scope of personal computational technology. In A. Bishop *et al.* (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 435-468). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Ward, R. (2000). *Observing high school student's strategies and misconceptions as they use graphing calculators*. Acedido em Outubro 21, 2000, em: <http://www.calpoly.edu/~raward/nctm.html>. [Texto online]