Visualización y razonamiento.
Creando imágenes para comprender las matemáticas

Inés Mª Gómez-Chacón
Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid
igomezchacon@mat.ucm.es

Resumen. *Varias investigaciones han demostrado que las actividades que promueven la construcción de las imágenes pueden mejorar enormemente el aprendizaje de las matemáticas. En esta conferencia se reflexionará sobre dos aspectos: el sentido epistémico de la visualización y el razonamiento matemático visual en contextos tecnológicos. De forma específica a través de datos empíricos procedentes de investigaciones realizadas con profesores, se reflexiona sobre las características de visualización geométrica en la transición de la Geometría II (geometría proto-axiomática natural) a la Geometría III (geometría completamente axiomática) en entornos interactivos y sobre algunos obstáculos y oportunidades de la enseñanza de la visualización tanto de carácter cognitivo como afectivo.*

Abstract. *Research has shown that activities that promote the formation of images can greatly improve the process of learning mathematics. This conference will consider two aspects: the epistemic sense of visualization and visual mathematical reasoning in technological contexts. These concepts will be analysed through empirical data collected from research conducted with teachers concerning the characteristics of geometric visualization during the transition from Geometry II (natural, proto-axiomatic geometry) to Geometry III (fully axiomatic geometry) in interactive environments. The conference will also include obstacles and opportunities that may arise during the teaching of visualization techniques, both cognitive and affective.*

Palabras claves: Representaciones; Visualización; Intuición; Formación de professores; Secundaria; Pensamiento Matemático Avanzado.

1. Introducción

El tema central de esta conferencia – visualización matemática y las relaciones entre los procesos de intuición y razonamiento – tiene una historia larga de discusión en los ámbitos de investigación. ¿Por qué traer este tema de nuevo a debate? Las razones por las que planteamos estudios sistemáticos desde 2006 son: razones epistemológicas sobre el conocimiento matemático y la reflexión generada por el impacto real o potencial de la tecnología en la educación matemática.

Martinho, M. H., Tomás Ferreira, R. A., Boavida, A. M., & Menezes, L. (Eds.) (2014).
Atas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática. Braga: APM., pp. 5–28

Reflexionar hoy en este contexto de la SIEM, en el que estamos conjuntamente trabajando investigadores y profesores, requiere volver a examinar brevemente las conceptualizaciones trabajadas y los resultados de investigaciones que nos han precedido. Esto es lo que voy a hacer en la primera parte de este texto, antes de situarme, en la segunda, en una actitud más proactiva. Apoyo esta reflexión en mi experiencia personal como profesora universitaria en una facultad de Ciencias Matemáticas e investigadora en educación matemática. La respuesta a las cuestiones tratadas no sólo vendrán de las investigaciones realizadas bajo mi responsabilidad, sino de algunos estudios internacionales que ampliamente han tratado el tema (p. e. Presmeg, 2006).

2. Algo de historia y conceptualización de visualización

A lo largo de las dos últimas décadas, la visualización está siendo reconocida como un aspecto importante del razonamiento matemático. Además, los estudios especializados han puesto de manifiesto que actividades que fomentan la construcción de imágenes pueden mejorar notablemente el aprendizaje matemático y contribuir de manera significativa a que la comprensión en los estudiantes sea más profunda (Wheatley & Brown, 1994). En este sentido, y como se pone de manifiesto, por ejemplo, en el trabajo de Presmeg (Presmeg, 2006) – en que la autora sintetiza más de ciento cincuenta estudios distintos sobre el tema de la visualización en la educación matemática –, los procesos intuitivos y de visualización se están revelando como un campo de investigación enormemente interesante en sí mismo y como un recurso alternativo muy efectivo para ayudar a los estudiantes a hacer matemáticas.

El documento de Presmeg (2006) permite constatar que hasta la década de los 80 apenas pueden encontrarse investigaciones específicas sobre visualización en Educación Matemática (EM). Es a partir de ese momento, de la mano de la psicología, cuando se retoman o inician estudios. Podríamos diferenciar distintas etapas. Una primera, que denominamos de los inicios: en la primera mitad del s. XX, los enfoques conductistas influyen en que este tema no sea una prioridad. Sin embargo, en la década de 1970 a 1980 emerge de nuevo la investigación en imágenes desde su base psicológica con metodologías tanto cuantitativas como cualitativas, sobre todo las últimas. Se investigan tanto las ventajas y desventajas, como los aspectos cognitivos y afectivos. Se realizan los primeros estudios sobre pensamiento geométrico espacial (con sólidos), relación con la intuición y representaciones de funciones con ordenadores.

Una segunda etapa se podría considerar en los años 90, en la que la visualización se reconoce como un campo específico de investigación de EM. Se realizan estudios en varias líneas sobre: a) desarrollo curricular y áreas particulares de las matemáticas; b) búsqueda de tipologías de enseñanza y prácticas de clase que promueven (o inhiben) una visualización matemática efectiva – entre ellas se encuentran las que estudian la influencia de las tecnologías (visualizaciones dinámicas) o las que estudian diferencias individuales, de género y entre el experto/novicio en el uso de la visualización, y uso que hacen los matemáticos expertos –; c) establecimiento de categorías de imágenes (p. e. Presmeg) y esquemas de imaginería (p. e. Dörfler); y d) status de la visualización y rechazo a visualizar en matemáticas – identificación de imágenes prototípicas y dificultades con la generalización y estudios longitudinales para explorar la evolución individual de las formas y los usos de imágenes (por ejemplo, la confirmación de la hipótesis de Kosslyn).

Y la tercera etapa, Presmeg la sitúa del 2000 en adelante. En este periodo se amplía la visión de la visualización hacia sus aspectos semióticos. Se focaliza en cómo toman cuerpo las ideas matemáticas, de ahí los trabajos sobre gesticulación. Se afianzan los estudios sobre las conexiones entre diferentes registros matemáticos y flexibilidad cognitiva. Y se constata la necesidad de dar consistencia a teorías que puedan unificar todo el campo de visualización dentro de la educación matemática.

Desde 2006, no sólo queda abierta la necesidad de unificación de teorías, sino que se demandan trabajos prospectivos en la relación entre imágenes personales y aspectos emocionales del aprendizaje, o en consonancia con los enfoques crecientes de la neurociencia – neurocognitivo –, y en discriminar más finamente cómo ayudan o perjudican las imágenes en los procesos de abstracción, generalización y ‘reification’ de los objetos matemáticos. Será desde esta perspectiva prospectiva donde se sitúan las investigaciones realizadas en nuestro equipo, que en este artículo se presentan en las secciones 2 y 3.

El término visualización se usa de distintas maneras en el contexto de las matemáticas y la didáctica de las matemáticas. Algunas definiciones de uso frecuente son las siguientes:

> Visualización o imagen de un concepto, es la estructura cognitiva total asociada al concepto, que incluye todas las imágenes mentales y propiedades y procesos asociados (Tall & Vinner, 1981).
>
> En el prefacio a Geometría e Imaginación, David Hilbert escribió: “En matemáticas [...] encontramos dos tendencias presentes. Por un lado, la

> tendencia hacia la abstracción busca cristalizar las relaciones lógicas inherentes a la maraña de material que se está estudiando, y organizar tal material de una forma sistemática y ordenada. Del otro lado, la tendencia hacia el entendimiento intuitivo favorece una comprensión más inmediata de los objetos que se estudian, una conexión viva con ellos, por así decirlo, que hace hincapié en el significado concreto de sus relaciones. Con la ayuda de la imaginación visual [Anschauung] podemos iluminar los variopintos hechos y problemas de la geometría y, más allá de esto, es posible en muchos casos describir el esquema geométrico de los métodos de investigación y demostración...". Siguiendo a Hilbert, utilizamos el término visualización para describir el proceso de producir o utilizar representaciones geométricas o gráficas de conceptos, principios o problemas matemáticos (Zimmerman & Cunningham, 1991).
>
> La visualización es la capacidad/acción de relacionar distintas representaciones de un mismo objeto matemático dándole sentido (Duval, 1999).
>
> Cuando una persona crea un arreglo espacial (incluyendo una inscripción matemática), hay una imagen visual en la mente de la persona guiando tal creación. Por tanto, la visualización incluye el proceso de construir y transformar tanto el imaginario visual mental como las inscripciones de una naturaleza espacial que puedan estar involucradas en el quehacer matemático (Presmeg, 2006).

En los trabajos que se presentan a continuación vamos a entender la visualización desde una concepción global:

> Visualización es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre figuras, imágenes, diagramas, en nuestra mente, sobre el papel o con herramientas tecnológicas con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas y avanzar la comprensión (Arcavi, 2003, p. 217).

Clarificada la conceptualización de visualización, a continuación se irá integrando la reflexión teórica que subyace al estudio empírico con una reflexión en torno a varios aspectos principales: el sentido epistémico de la visualización, el papel de la coordinación de los registros gráfico y analítico en la comprensión de los conceptos y las características de la visualización en contextos tecnológicos. En particular, se destacarán algunas características de la visualización a tener en cuenta en el diseño de una propuesta de enseñanza y que van más allá de la flexibilidad entre registros de representación.

3. Reflexión epistemológica sobre ideas y visualizaciones matemáticas

3.1. La actividad del matemático ejemplo de visualización

Junto a la definición expresada en la sección anterior queremos hacer notar también que la visualización es la "intencionalidad" (Gianquinto, 1992), que no está presente en el mero ver. La consideramos "una manera de ver las cosas" (Davis, 1993). Esta expresión de Davis sugiere que los conceptos matemáticos son "cosas" para la persona en cuestión, y por lo tanto, "una manera de mirar" es una síntesis (a menudo) tácita de comprender las propiedades de estas cosas y requiere de una comprensión de los conceptos más allá de la presentación visual.

En este marco, se ha situado la reflexión epistemológica en torno a las ideas y visualizaciones matemáticas y la preparación de materiales que hemos llevado a cabo. Las preguntas que nos hemos planteado han sido: ¿Qué conocimiento Matemático necesita el profesor para "enseñar a visualizar"? ¿Cómo realizar una transposición del conocimiento procedente de la investigación Matemática (y de Educación Matemática) al espacio de docencia universitaria? ¿Cómo transmitir el sentido epistémico de la visualización en los contextos de enseñanza?

Una de las mayores aportaciones de la Filosofía y la Historia de la Matemática es considerar la matemática como una ciencia temporal y conectada con la sociedad que le ha permitido su desarrollo. Gianquinto (2005) distingue varias fases en la actividad global del matemático: descubrimiento, explicación, justificación y aplicaciones. Estas fases ponen de manifiesto facetas del trabajo matemático, algunas de ellas con influencia implícita en la docencia. El contexto de descubrimiento precisa las condiciones que permiten el hallazgo y la elaboración de los conceptos a partir de la resolución de problemas. La explicación matemática a menudo involucra imágenes, representaciones, diagramas o imágenes mentales. La justificación se relaciona con la forma en que un resultado se presenta, se defiende, se justifica en una comunidad investigadora. Estas diferentes fases o contextos de la actividad del matemático no se refieren a lo puramente científico, sino que, a lo largo del siglo pasado, distintos matemáticos han señalado la necesidad de tener en cuenta en la invención matemática la naturaleza psicológica, como es el caso de los ensayos de Hadamard (1908/1945) o, posteriormente, los trabajos de Lakatos y Kuhn que permitieron enriquecer el contexto de descubrimiento, introduciendo una perspectiva más sociológica, como un contexto destinado a favorecer el trabajo de los matemáticos: "como seres humanos que hacen avanzar la comprensión humana de las matemáticas" (Thurston, 1995).

Por tanto, definir las matemáticas a partir de la actividad de los matemáticos nos obliga a mirar sus trabajos para comprender mejor la naturaleza y el contenido de las mismas. A lo largo de dos cursos académicos 2009-10 y 2010-2011 coordiné junto a la profesora

Capi Corrales, dentro del Proyecto de la Cátedra Miguel de Guzmán, en la Facultad de Ciencias Matemáticas, el Seminario de Ideas y Visualizaciones Matemáticas (Corrales & Gómez-Chacón, 2011), cuyo punto de partida está muy bien recogido en las siguientes palabras de Miguel de Guzmán (1996):

> Con la visualización en matemáticas se pretende otra cosa (no es la visualización psicológica). Las ideas, conceptos y métodos de las matemáticas presentan una gran riqueza de contenidos visuales, representables intuitivamente, geométricamente, cuya utilización resulta muy provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos como en la manipulación con ellos para la resolución de los problemas del campo. […] Esta forma de actuar con atención explícita a las posibles representaciones concretas en cuanto desvelan las relaciones abstractas que al matemático interesan constituye lo que denominamos visualización en matemáticas (p. 15).

Basados en los principios del debate científico, a lo largo de dieciséis sesiones recogidas en los materiales incluidos en Corrales e Gómez-Chacón (2011), matemáticos expertos en distintas áreas de conocimiento, reflexionamos sobre algunos conceptos, textos y problemas esenciales al devenir de las matemáticas y, ya sea construyendo ejemplos de situaciones de visualización en términos “de ver”, ya sea presentando los elementos conceptuales que sirvieron para dar origen o cuerpo a la obra matemática, intentan extraer de las propias Matemáticas ideas e imágenes que, al contribuir a la interacción entre lo visual y lo analítico, puedan ayudar a los estudiantes del Grado en Matemáticas a comprender mejor esta disciplina. Los temas tratados estuvieron articulados en tres categorías: Temas (Número, El infinito, Límite, Dimensión, Espacio abstracto, Incertidumbre); Textos (Elementos de Euclides, Aritmética de Diofanto, Introductio de Euler, Disquisiciones Aritméticas de Gauss, Fundamentos de la geometría); y finalmente Problemas (Mecánica de fluidos, Los sistemas dinámicos de biología, La topología geométrica y dinámica, Algoritmos y su diseño, Visualización e Intuición: Investigación en Educación Matemática).

La visualización en estos trabajos tiene un sentido epistémico, tratando de responder a cuestiones de cómo y hasta qué punto se deben utilizar las representaciones visuales, además de como evidencia y medio de descubrimiento de un enunciado matemático, como parte de su justificación. Como los trabajos de Gianquinto han mostrado, la respuesta se considera afirmativa en el caso de la Geometría y la Aritmética, pero sin embargo, parece no estar tan clara la misma respuesta para el Análisis elemental o en otras áreas de conocimiento que hemos tratado en las que el pensamiento visual se considera un medio de descubrimiento más restringido.

Por último, en línea con una profundización matemática y epistemológica, reseñamos aquí brevemente un trabajo reciente de tesis doctoral europea dirigido por mi (Souto, 2013, Souto & Gómez-Chacón, 2012) cuya finalidad es la caracterización y potenciación de la "enseñanza de la visualización" en un curso de Álgebra Lineal (AL) para mejorar la comprensión de los estudiantes (trata de responder a la cuestión ¿Cómo "enseñar a visualizar" para potenciar el aprendizaje y la comprensión de los conceptos matemáticos del Álgebra Lineal?). Comprender, desde diversos puntos de vista (epistemológico, institucional, cognitivo y afectivo) el rol de la visualización en la comprensión (de la disciplina del AL, en general, y del concepto Espacios Vectoriales Cociente (EVC)) obteniendo ideas innovadoras de mejora. Para ello se ha observado durante dos años la docencia universitaria de cuatro matemáticos en el Grado en Matemáticas. Los resultados de este estudio permiten precisar algunos principios de diseño para potenciar la visualización relativos al conocimiento matemático del profesor tanto en aspectos de la visualización como producto y habilidad como proceso.

3.2. Pensamiento Geométrico: Génesis de razonamiento visual, instrumental y discursivo

En el estudio de los procesos de razonamiento matemático geométrico el papel de la intuición y la visualización es clave (Duval, 2005) y así ha sido señalado en los distintos modelos de aprendizaje. Son destacables el modelo de Van Hiele (Van Hiele, 1986), procedente de la escuela holandesa, y el de Houdement y Kuzniak (1998, 2006, 2010), en el ámbito de la escuela francesa.

El modelo de Espacio de Trabajo de la Geometría (ETG) y paradigmas se destaca que en el dominio de la Geometría aparecen claramente tres paradigmas, que se designan bajo los términos de Geometría I (o Geometría natural), Geometría II (o Geometría natural axiomática) y, finalmente, Geometría III (o Geometría axiomática formal). La idea que sustenta este modelo es que sólo se puede hablar de trabajo geométrico cuando la actividad del alumno es a la vez lo suficientemente coherente y compleja como para permitir la puesta en ejecución de una actividad de raciocinio.

Estos autores introducen dos niveles conectados en estructurar ETG: el nivel epistemológico y el nivel cognitivo.

1. El nivel epistemológico. La actividad geométrica en su dimensión puramente matemática se caracteriza por tres componentes: un espacio real y local, como material de apoyo con un conjunto de objetos concretos y tangibles; un conjunto de artefactos, tales como instrumentos de dibujo o de *software*; y un marco teórico de referencia sobre la base de definiciones y propiedades. Estas componentes no están simplemente yuxtapuestas, sino que se deben organizar con un objetivo preciso en función del ámbito matemático en su dimensión epistemológica. Esto justifica el nombre de plano epistemológico dado a este primer nivel. En este marco teórico, el concepto de paradigma geométrico reúne a los componentes del plano epistemológico. Cuando una comunidad se pone de acuerdo sobre un paradigma, podrá formular problemas y organizar sus soluciones con herramientas o estilos de pensamiento preciso que da lugar al ETG de referencia.

2. El nivel cognitivo. Un segundo nivel, centrado en la articulación cognitiva de los componentes del ETG. Este plano nos ayuda a entender cómo los grupos, y también las personas particulares, hacen uso y adecuan el conocimiento geométrico en la práctica. Siguiendo a Duval (2005), estos autores destacan tres procesos cognitivos implicados en la actividad geométrica:

- Una visualización del proceso conectado a la representación del espacio y el material de apoyo.
- Un proceso de construcción determinado por instrumentos (reglas, compás, manejo de *software*, etc.) y configuraciones geométricas.
- Un proceso discursivo que transmite la argumentación y las pruebas.

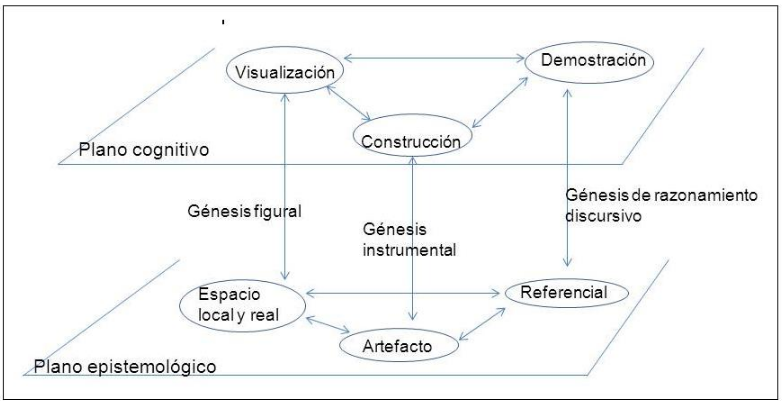


Figura 1. Espacio de trabajo geométrico: planos y génesis (Kuzniak, 2011)

Este enfoque busca comprender mejor la creación y desarrollo de todos los componentes y niveles mostrados en el diagrama de la Figura 1. El trabajo geométrico se ve como un proceso que implica la creación, desarrollo y transformación. Todo el proceso se estudia a través de la noción de génesis, utilizado en un sentido general que se centra no sólo en el origen, sino también en el desarrollo y la transformación de las interacciones. A través del proceso de transformación, se estructura el espacio de trabajo geométrico.

Los dos niveles, cognitivos y epistemológicos, necesitan estar articulados con el fin de garantizar un trabajo geométrico completo y coherente. Este proceso supone una serie de transformaciones que es posible identificar a través de tres génesis fundamentales, como se muestra en la Figura 1:

1. Una *génesis figurativa* y semiótica que proporciona a los objetos tangibles su estado de funcionamiento de los objetos matemáticos.
2. Una *génesis instrumental* que transforma los objetos en las herramientas en el proceso de construcción.
3. Una *génesis discursiva* de la prueba que da sentido a las propiedades utilizadas en el razonamiento matemático.

Las ciencias cognitivas han puesto de relieve los procesos para el estudio del pensamiento geométrico: percepción, lenguaje y acción. En el lenguaje de la Geometría, la visión está constituida por la percepción que conduce a los procesos de visualización. La acción se refleja fuertemente en los procesos de construcción. Finalmente, en el marco de la Geometría la articulación de los procesos de razonamiento está estrechamente asociada a las cuestiones de inferencia y toma de decisión. En definitiva, cada componente del trabajo geométrico está asociada a estos procesos cognitivos. Estudiar estas génesis y las conexiones entre ellas en ambientes tecnológicos puede suponer un avance para ofrecer a un profesor conocimiento estratégico para aprender a enseñar con tecnología (ver sección 4.3.).

4. Visualización en contextos tecnológicos. Algunos resultados desde nuestro contexto

La preocupación por el conocimiento matemático y didáctico del profesor en la enseñanza y aprendizaje con tecnología nos ha hecho buscar respuesta a distintas cuestiones: ¿Qué rechazo o preferencia por el razonamiento visual se produce en contextos computacionales? ¿Cómo la tecnología media en el pensamiento matemático e interactúa con las estructuras matemáticas? ¿Cómo se producen las transiciones entre génesis figural-semiótica, instrumental y discursiva en el trabajo geométrico? ¿Qué mantiene al estudiante en una ruta productiva de aprendizaje? ¿Cómo "enseñar a visualizar" para potenciar el aprendizaje y la comprensión de los conceptos matemáticos?

Con objeto de dar respuesta a algunas de estas cuestiones, a continuación hemos elegido algunos resultados y ejemplos procedentes de nuestras investigaciones recientes (Gómez-Chacón, 2012, 2014).

4.1. Rechazo o preferencia por lo visual en los estudiantes

Distintas investigaciones han señalado que una de las dificultades que pueden encontrar los profesores para trabajar la matemática mediante razonamiento visual es el rechazo o la no valoración por parte de los estudiantes (Eisenberg & Dreyfus, 1991; Eisenberg, 1994). En un estudio con 29 estudiantes de primer curso de la Licenciatura de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid (Souto & Gómez-Chacón, 2011), evaluando la influencia del método visual para la comprensión del concepto de integral, se puso de manifiesto el uso limitado que hacen los estudiantes del registro visual y la dificultad cognitiva propia del uso del registro visual como una de las causas para el rechazo de la visualización. Para este grupo de estudiantes, el concepto de integral se identifica con el cálculo de primitivas y con la aplicación indiscriminada de la regla de Barrow. La integral, para ellos, no comporta ningún proceso de convergencia ni tampoco ningún aspecto geométrico. Es, por tanto, un proceso puramente algebraico. La mayoría de los problemas que se les plantearon estaban basados en conceptos que tiene una interpretación visual, y esto hizo que los estudiantes no pudieran hacer muchos de los problemas de la lista, ya que "parecen no haber aprendido" a explotar las representaciones visuales asociadas con los conceptos y muestran déficit en la coordinación entre el registro visual y analítico o en la combinación de ambos.

En otro de los estudios sobre pensamiento geométrico y aprendizaje con sistemas de geometría dinámica (SGD), realizado también en nuestra facultad, con 30 estudiantes formándose como profesores de Secundaria (Gómez-Chacón, 2012 & 2014), se buscó detectar factores que favorecían o inhibían el uso del pensamiento visual, focalizando el estudio en qué dificultades estaban generadas por las creencias sobre el razonamiento visual y qué tipologías de emoción se derivaban de ellas. Los datos pusieron de manifiesto que todos los estudiantes consideraban que el razonamiento visual es algo central en la resolución de problemas matemáticos. Sin embargo, pudimos observar que frente a esta misma creencia se produjeron emociones diferentes. En un primer momento estas emociones fueron categorizadas como: gusto (77%), disgusto (10%) e indiferencia (13%)

hacia el objeto. Las razones que aducen para justificar estas emociones son: a) placer/gusto como una indicación de que uno puede lograr un conocimiento experto (30% de los estudiantes); b) placer/gusto cuando se progresa en la esquematización y se logra una forma conceptual suave (35%); c) placer y gusto como control y creación de aprendizaje profundo (40%); d) placer y gusto porque está asociado con aspectos intuitivos y lúdicos del conocimiento matemático (20%); e) emociones de indiferencia ante la visualización (13%); f) no placer y gusto cuando la visualización tiene una demanda cognitiva más fuerte (10%).

Una respuesta similar se obtuvo cuando se exploraron las creencias relacionadas con el uso de *software* de Geometría dinámica, como una ayuda para la comprensión y la visualización del concepto de lugar geométrico. Todos los estudiantes afirmaron que les resultó útil y el 80% expresaron emociones positivas sobre la base de su fiabilidad, rapidez de ejecución y el potencial para desarrollar su intuición y visión espacial. Agregaron que la herramienta les ayudó a superar bloqueos mentales y mejorar su confianza y motivación. Como futuros docentes, hicieron hincapié en que el programa de Geometría Dinámica (GeoGebra) puede favorecer no sólo el pensamiento visual, sino que ayuda a mantener una vía afectiva productiva. Indicaron que el trabajo con la herramienta les favorece creencias positivas hacia las matemáticas y hacia sí mismos como aprendices y estimula su propia capacidad y voluntad de participar en el aprendizaje de las matemáticas.

En síntesis, estos resultados muestran que la valoración o rechazo por la visualización está ligado al área de conocimiento, así como al uso de determinados instrumentos (atribución de gran valor al aprendizaje con ordenador). La elección de la representación en la que se resuelve un problema parece depender tanto del propio problema como de las preferencias y habilidades visuales personales. En distintos trabajos con futuros profesores (ver, por ejemplo, Gómez-Chacón, 2012 & 2014) hemos identificado distintas rutas afectivas-cognitivas que sigue su trabajo matemático en Sistemas de Geometría Dinámica. Los resultados ponen de manifiesto una serie de rasgos que caracterizan el afecto local y global de los sujetos. Rasgos de afecto local, cuando trabajan procesos de visualización y representación, se pusieron de manifiesto en el equilibrio entre razonamiento algebraico y gráfico y la comprensión de la herramienta, que se manifiesta en la deconstrucción instrumental de las figuras. Y respecto al afecto global, se puso de manifiesto la influencia de la motivación así como las metas y autoconcepto de los sujetos.

4.2. Visualización y trabajo geométrico con ordenador

Un objetivo principal en las investigaciones recientes consiste en caracterizar y especificar la naturaleza exacta del trabajo geométrico realizado por los estudiantes de matemáticas en los contextos tecnológicos con programas de Geometría Dinámica (SGD). Respecto al aprendizaje geométrico en contextos tecnológicos, son varias las cuestiones que se nos plantean: ¿Cómo se articulan las tres tipologías de génesis necesarias para la construcción de pensamiento geométrico en la integración de *software* de sistemas dinámicos (Cabri, GeoGebra, etc.) en el trabajo geométrico? ¿Qué rol desempeña el instrumento (*software*, p.e. GeoGebra) en la construcción del espacio geométrico? ¿Cómo interviene la utilización de los SGD en el paso de la Geometría I a la Geometría II (axiomática natural) o de la Geometría II a la III (axiomática formal), particularmente en los procesos visualización e intuición geométrica, y cómo influye el uso de este *software*? ¿Qué nuevo rol tienen las propiedades geométricas cuando se usa *software* dinámico? ¿Cómo puede hacer un profesor en su actividad docente que el artefacto (p.e. *software* de SGD) sea un instrumento matemático?

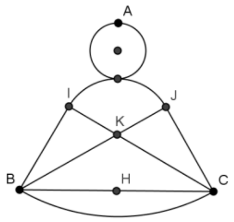
En nuestro caso, utilizando el marco teórico de los espacios de trabajo geométricos (ETG) mencionado en la sección 3 y el enfoque instrumental (Artigue, 2002), hemos podido constatar varios hechos en los estudiantes: no dominio del ciclo de razonamiento (sec. 4.3.) y la necesidad de profundizar en la visualización icónica *versus* la visualización no icónica (sec. 4.4.).

4.3. Ciclo de razonamiento

En distintas investigaciones hemos constato el carácter incompleto del ciclo de trabajo geométrico del alumnado. Para dominar todo el ciclo de razonamiento, los estudiantes deben dominar al mismo tiempo las técnicas aplicadas en tres génesis – figurativa, instrumental y discursiva – y mostrar un grado de flexibilidad cognitiva en el uso de diferentes facetas del trabajo geométrico. Volver al instrumento para poner fin al ciclo puede ser problemático entre los estudiantes, que apoyan su investigación en la resolución de los problemas sobre los aspectos figurativos y discursivos, cuando no hay congruencia entre el instrumento teórico y un instrumento informático.

Para ilustrar este carácter incompleto del ciclo de razonamiento tomamos los resultados de dos experimentaciones, una primera con 30 estudiantes de matemática, futuros profesores de Secundaria, confirmada por una experimentación complementaria con cuatro grupos de clase, con un total de 98 estudiantes (Gómez-Chacón & Kuzniak, 2011, 2013).

La tarea propuesta fue la siguiente:



Agranda la siguiente campana de tal manera que A'H' mida el doble que AB.

Escribe un protocolo de resolución del problema detallado. Algunas pistas que te pueden ayudar a dibujar la campana son:

1. Observa que A está sobre la recta BI y sobre la recta CJ.
2. H es el punto medio de BC.
3. Los ángulos IBC y JCB miden 60º.
4. Los ángulos BIC y CJB son ángulos rectos.
5. BC pertenece a una circunferencia de centro A.

La metodología de investigación es cualitativa mediante observación participante en las sesiones de formación y análisis de las producciones de los estudiantes. Como instrumentos de recogida de datos se utilizaron grabaciones en video, notas de campo y protocolo de resolución de problemas de los estudiantes.

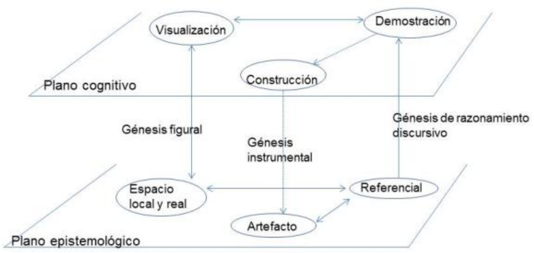


Figura 2. Trabajo geométrico apoyado sobre la génesis discursiva

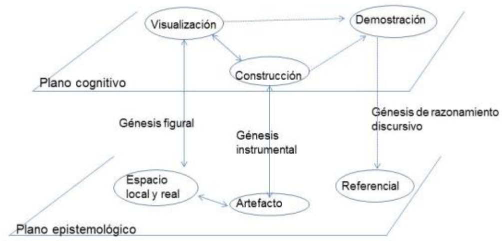


Figura 3. Trabajo geométrico promovido por la génesis instrumental

Aunque las tareas geométricas sean sólo de construcción, como es en el caso de esta tarea, se observaron dos tendencias de espacio de trabajo matemático personal. La primera Fig. 2, referida implícitamente a Geometry II, se centra principalmente en una génesis discursiva de prueba, apoyada por un trabajo visual analítico sobre la figura, sin prestar específica atención a las herramientas de dibujo. En este caso, un aspecto que puede subrayarse es la incompletitud del trabajo geométrico global; corresponde a estudiantes que se basan en los aspectos visuales-figurales y discursivos. El retorno a la génesis instrumental puede ser problemático cuando no hay congruencia, en el sentido de Duval, entre la herramienta teórica y el instrumento informático.

El trabajo geométrico de los estudiantes que no tienen estas dificultades es porque se apoya sobre una génesis figural apropiada respecto al artefacto: estos estudiantes hicieron un tratamiento semiótico de una manera estructurada y la deconstrucción instrumental correspondiente. El razonamiento geométrico a menudo requiere la movilización en paralelo de dos registros de representación, de manera que las conversiones se producen de forma continua, aunque a veces éstas son implícitas. Nuestros datos muestran que las posibilidades que ofrece el *software*, en su doble relación con los significados personales y matemáticos, se conviertan en un potencial semiótico del artefacto para ETM. Sin embargo, este potencial no está activo de forma espontáneamente en la mayoría de los futuros profesores en el grupo.

El segundo tipología (Fig. 3) es un espacio de trabajo matemático que promueve la génesis instrumental articulada con la génesis figural. Este resultado no es sorprendente para tareas de construcción, si se produce una buena adaptación al instrumento. Se observa que se mueven en la Geometría I con un trabajo geométrico instrumental. De hecho, la mitad de los estudiantes construyeron tanto la campana original como la agrandada mediante una construcción basada en los ángulos. En este caso, se identifican las propiedades de la simetría y la invariancia de ángulos, y se guían tanto por la percepción y la visualización de la figura, como por el uso de instrumentos. Como resultado, se mantuvieron en el plano (Figural-Instrumental), ya que podían usar los mismos comandos de *software* para ambas tareas.

Para interpretar por qué este uso tan fuerte de la Geometría I hemos considerado el contexto de la tarea, de una parte en un medio tecnológico y de otra en un contexto institucional, la formación de profesores de Secundaria. Lo que puede que haya condicionado la búsqueda de soluciones elementales y la identificación de dificultades que puede tener un alumno de Secundaria.

También, el estudio muestra que al punto de vista sobre el desarrollo del razonamiento geométrico hay que añadir el mantenimiento de la construcción de una génesis discursiva relacionada con los elementos visuales de la deconstrucción de figuras. Esta forma de razonamiento requiere una reflexión sobre el papel de las definiciones y teoremas en el proceso de desarrollo de lo geométrico, de cara a que los estudiantes pasen de un trabajo práctico perteneciente a Geometría I a una Geometría más axiomática (Geometría II).

4.4. Visualización icónica versus visualización no icónica

Dos modos opuestos de funcionamiento cognitivo, en los cuales los procesos de reconocimiento de los objetos representados difieren radicalmente en el trabajo geométrico, son la *visualización icónica* y la *visualización no icónica* (Duval, 2005). Si tenemos en cuenta la complejidad del proceso puesto en juego en el acto de “ver”, “ver” conlleva siempre dos niveles de operaciones que son diferentes e independientes uno del otro, aunque frecuentemente éstos se fusionan en la sinergia del acto de ver. Estos dos niveles de operaciones son: el reconocimiento discriminativo de las formas y la identificación de los objetos correspondientes a las formas reconocidas. El problema cognitivo mayor es saber cómo se realiza el paso de un reconocimiento discriminativo de formas a la identificación de los objetos a ver.

En la *visualización icónica*, el reconocimiento de lo que representan las formas se hace por el parecido con el objeto (real) que representa, o en su defecto, por comparación con un modelo tipo de formas (una figura particular sirve de modelo y las otras figuras son reconocidas según su grado de parecido con este modelo). La *visualización no icónica* reconoce las formas, bien en virtud de las limitaciones internas de organización que hacen imposible ciertas deformaciones o ciertas aproximaciones, bien en virtud de deducciones efectuadas discursivamente en función de las propiedades que han sido enunciadas en las definiciones o en los teoremas, o bien a partir de hipótesis que declaran lo que representa una figura.

Hemos podido constatar que en el aprendizaje geométrico con *software* dinámico se produce una gran ruptura entre estas dos diferentes formas de visualización. Y esta ruptura es muy importante, ya que sólo la visualización no icónica es pertinente para los procesos geométricos que se deben producir. Tomemos un ejemplo ampliamente trabajado en nuestras investigaciones (Gómez-Chacón, 2012, 2013; Gómez-Chacón & Escribano, 2014) en su forma analítica y desde distintos tipos de registros, así como en la interacción procesos cognitivos y afectivos en visualización. El problema es el siguiente: *Una escalera que mide 5 metros está apoyada por su extremo superior en una pared vertical, y su extremo inferior está situado en el suelo ¿Cuál es el lugar geométrico descrito por el punto medio M de la escalera al resbalar y caer ésta? (Y si el punto no es el punto medio de la escalera).*

Consideramos que se trata de un problema de nivel medio alto para los estudiantes. El enunciado está formulado sin consignas explícitas de construcción. Es una situación realista de fácil comprensión. No obstante, la traslación a construcción con el *software* GeoGebra no es evidente, es necesario ayudarse de un objeto auxiliar. El *razonamiento visual-analítico* requiere superar la dificultad inicial de construcción de la escalera a través de un objeto auxiliar, en ese caso GeoGebra ofrece el locus de forma precisa. Para el registro analítico o algebraico es necesario situar cinco puntos sobre el locus y después trazar con el comando "cónica que pasa por tres puntos". En este caso se obtiene la ecuación algebraica precisa. En lo referente al *razonamiento instrumental* que debe seguir el estudiante, dos momentos son claves en este problema: 1) la construcción de la escalera con una circunferencia auxiliar; y 2) si se quiere estudiar el lugar que describen los puntos sobre la escalera, estos puntos deben estar determinados de forma precisa (punto medio, 1/4).

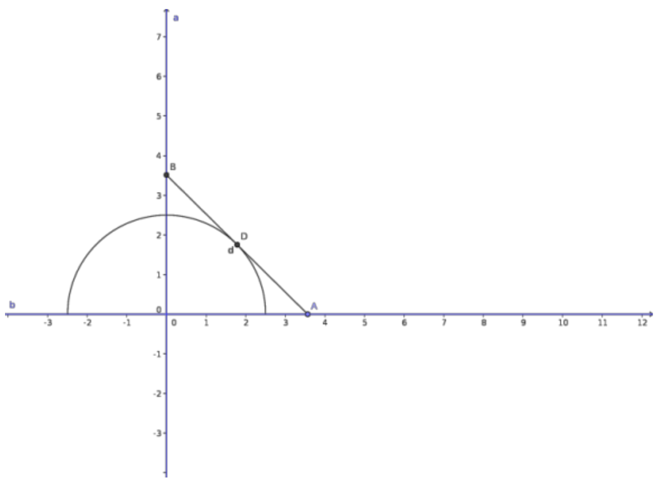


Figura 3. Resolución del problema de la escalera

En esta tipología, es clave la visualización no-icónica. A continuación comentamos brevemente algunas de las dificultades de los alumnos en una resolución con ordenador (GeoGebra).

Una primera tipología de dificultad son las construcciones estáticas (tratamiento discreto, Fig. 4). En esta tipología, el alumno utiliza GeoGebra como una pizarra avanzada pero no utiliza el dinamismo que propicia el *software*, sólo repite las construcciones para un conjunto de puntos. Para trazar el lugar geométrico se ayudan del comando cónica que pasa por 5 puntos.

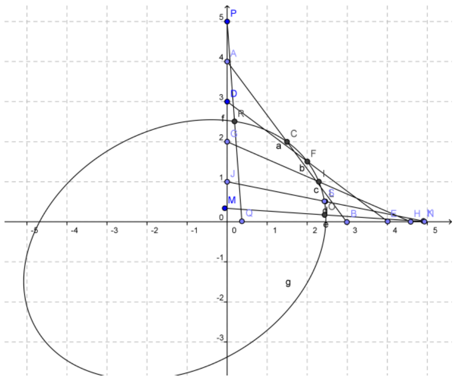


Figura 4. Resolución de alumno 13

Otra segunda tipología de dificultad es la definición no correcta de la construcción (punto libre). El alumno resuelve aparentemente el problema pero la solución impide la utilización de las herramientas de GeoGebra. Para utilizar la herramienta lugar geométrico es necesario que los puntos que lo definen estén correctamente determinados (no pueden ser puntos libres). En esta aproximación, el alumno, en el mejor de los casos, puede obtener una representación parcialmente válida, pero que no admite ningún tratamiento algebraico con GeoGebra. En este problema, la dificultad está en definir el punto de la escalera que no es el punto medio. Si se toma un punto libre, no se podrá utilizar la herramienta *Locus*.

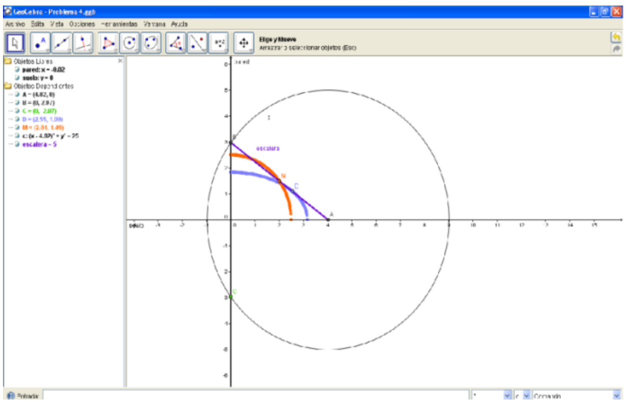


Figura 5. Solución del estudiante 23

Como se puede observar en la Figura 5, la solución que se obtiene es visual, aproximada y no da una solución exacta. Los estudiantes de esta tipología de solución quedan absolutamente convencidos y no son conscientes de que su solución es errónea.

Por último, otra tipología de dificultades es la utilización de elementos instrumentales no válidos. Por ejemplo, para este problema se utiliza la herramienta deslizador para desplazar el "mover". El alumno se da cuenta de que el "mover" hay que acotarlo y lo hace a través del deslizador. El problema es que en el sistema GeoGebra el deslizador es un escalar, y por lo que tras ello no se puede utilizar la herramienta lugar geométrico[1].

En una proporción amplia de estudiantes, se produce una deficiencia heurística ("esa incapacidad de ir más allá de lo que se aprecia en un primer vistazo") en la interpretación geométrica de las visualizaciones, en este caso en la comprensión de lugar geométrico desde el punto de vista funcional. A veces, la figura en Geometría funciona como una verdadera representación icónica que deja sin significado la aprehensión discursiva. Coincidimos con Duval (1999) cuando afirma que:

> […] la complejidad de la visualización matemática no radica en sus unidades visuales –que son menos y más homogéneas que para las imágenes- sino en la selección implícita de las variables visuales contrastadas dentro de la configuración de unidades que son relevantes y las que no (p. 15).

¿Se tiene esto en cuenta en la enseñanza? Muchas veces se enseña a construir imágenes, pero esto no es enseñar visualización. En construir incluso algunos alumnos son buenos, pero muchos se quedan en la aprehensión local, y no son capaces de llegar a lo global.

En el estudio de casos realizado en esta investigación (Gómez-Chacón & Escribano, 2014), para profundizar en las relaciones que se producen entre génesis instrumental y génesis video-figural, se analizó el perfil de los individuos para identificar qué variables parecen tener más influencia. Entre ellas se estudió su nivel de rendimiento matemático, su estilo visual o preferencia por el razonamiento visual, creencias y sentimientos hacia el aprendizaje con ordenador y creencias y sentimientos hacia el pensamiento visual.

Brevemente describimos uno de los casos, el caso de Ana. La resolución de esta estudiante nos permite ver la distinción entre uso de imágenes y constancia en el registro gráfico y propiedades deductivas. Aunque indica que utiliza registro visual en la resolución de problemas, señala que no le gusta resolverlo con ordenador:

> No me entusiasma mucho hacerlo porque no me suele hacer falta. Creo que bastaría con conocer el lenguaje (y ya lo conozco la resolución analítica) y hacer como mucho un ejercicio semanal para refrescar y poder usarlo con alumnos en caso de disponer de tiempo y/o de necesitarlo.

Le concede mayor valor al pensamiento analítico que al visual y no atribuye valor a la resolución de problemas con el ordenador:

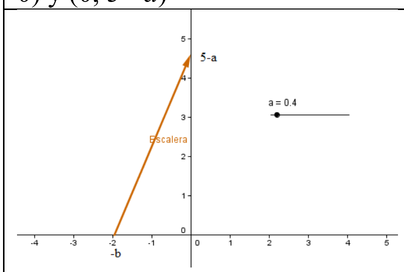
[1] Hacemos notar que en este estudio se utilizó la versión 3.7. En la actualidad, los creadores de GeoGebra han incorporado esta posibilidad.

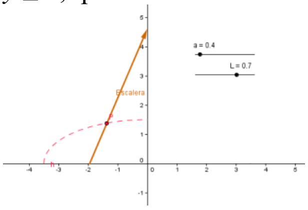
Con las Matemáticas asocio que hay que estudiarlas y entenderlas bien y el ordenador lo entiendo como herramienta para algunas cosas y también como pasatiempo y como medio de comunicación.

No creo que GeoGebra ayude a establecer conexiones en matemáticas, pienso que simplemente ayuda a representar algunos problemas. No sólo eso, sino que me parece que es tirar por la vía rápida y precisamente se puede perder la esencia matemática de los mismos.

El uso de imágenes y sinergia entre lo gráfico y analítico de esta estudiante queda recogido en la Tabla 1.

Tabla 1. Análisis del proceso de resolución de Ana,
informe por parte de la estudiante del uso de imágenes en su protocolo

Descripción del método	**Tipología de uso de representaciones e imágenes**
(1) Como el problema pide la solución para el punto medio y para cualquier punto *P* de la escalera, lo voy a resolver primero para *P* y luego particularizaré para el punto medio.	
(2) Voy a suponer que la escalera estuviese en el inicio totalmente vertical y que acaba completamente horizontal (para contemplar el mayor recorrido posible de *P*).	Imagen mental
(3) Para escribir cómo se cae la escalera defino la variable $a \in [0,5]$ por el *Teorema de Pitágoras* $b^2 + (5-a)^2 = Escalera^2 = 5^2$, así que $b = \sqrt{(10a - a^2)}$ de esta forma, los extremos de *Escalera* serán los puntos $(-(b), 0)$ y $(0, 5 - a)$	No deja registro gráfico Imagen mental/visualización no icónica
 (4) Ahora pongo un punto $P=(P_x,P_y)$ en la escalera: si $P_y= ((5-a)/b)P_x + 5 - a$, *P* estará en la recta que contiene a la escalera.	Ilustración específica con interactividad (representación analogical) Analítico-visual
(5) Para que *P* se limite al segmento *Escalera*, pongo $L \in [0,1]$ y $P_x = -Lb$ Así, un punto ***P* en la escalera** se escribe de la forma: $P=[-Lb, (5-a)(1-L)] = [-L\sqrt{(10a- a^2)} , (5 -a)(1-L)]$	Analítico
(6) Ahora me pregunto ¿qué recorre *P* al variar *a*? La respuesta la tengo haciendo I: $x=-L\sqrt{(10a- a^2)}$; II: $y = (5 -a)(1-L)$	Analítico
(7) Pretendo escribir la *y* en función de la *x*. Para esto despejo de *I* la *a* y obtengo $a = (1/L)*[5L \pm \sqrt{(25L^2-x^2)}]$ Sustituyendo este valor de *a* en *II*, llego a III: $\mathbf{y = (5 - (5 L \pm \sqrt{(25 L^2 - x^2)}) / L) (1 - L)}$ que describe una **elipse**.	Analítico

(8)De esta elipse sólo recorre el cuarto correspondiente a $x \leq 0$, $y \geq 0$, que es donde he dibujado la escalera:  Si quiero elegir el punto medio, pongo L=0.5. Si en *III* sustituyo L por 0.5, tenemos (como se ve en el dibujo también), la *ecuación de una circunferencia*	Ilustración específica con interactividad (representación analogical) Analítico -visual

En la enseñanza es importante diferenciar entre utilizar una figura, manipularla en búsqueda de nuevas ideas y de comprensión, o utilizarla como esquema, como apoyo del proceso deductivo que se sigue. Es decir, en una situación la figura sirve para razonar, para generar nuevas ideas, para inventar, crear; en la otra, la imagen tan sólo tiene un papel explicativo, está subordinado a lo formal (discursivo). Por tanto, de cara a la docencia parece pertinente distinguir dos posibles funciones de las figuras: heurística (para crear, manipular, asociada a la aprehensión operativa); y ilustrativa (explicativa, subordinada a las hipótesis y el pensamiento deductivo, asociada a la aprehensión discursiva). Para el estudiante, o para el profesor como mediador en el aprendizaje, no es fácil activar los resortes necesarios para que la figura funcione de forma heurística, como base del pensamiento. Por ejemplo, en el aprendizaje, uno de estos resortes podría ser la habilidad de introducir nuevas unidades en la figura, así como las operaciones visuales que definen.

Por otro lado, cuando se trabaja con Geometría dinámica, la aprehensión perceptual, que sirve para ver las figuras y las visualizaciones icónicas, no siempre conduce a la aprehensión operativa. Por ejemplo, en el problema de la escalera que hemos descrito, la utilización de las representaciones físicas es muy diferente en la Geometría dinámica: qué nos da la información visual y qué esconde toda una visualización no-icónica. Habitualmente, la construcción paso a paso con SGD para realizar la representación visual de un problema de lugares geométricos procede del siguiente modo: construir las figuras geométricas basadas en las hipótesis del problema, aplicar las transformaciones geométricas, (mover el punto M a lo largo de una recta A), comprender las relaciones entre la construcción euclídea y la demostración, crear la demostración que involucra animación y determinada activación de comandos, averiguar las conexiones tanto geométricamente y algebraicamente para llegar a una demostración.

Habitualmente los estudiantes, cuando resuelven este tipo de problemas, utilizan más bien el comando *"Traza"* que *"Lugar geométrico"*. Pensamos que una justificación de este hecho puede darse por el punto de vista conceptual geométrico de la definición de *Lugar geométrico* en los manuales. Comprender estos aspectos epistemológicos que afecten a la dimensión cognitiva-instrumental de los estudiantes es clave. En los libros de texto, la noción de *Lugar geométrico* se introduce vinculada a construcciones con regla y compás, donde su aspecto constructivo y mecánico es claro en el contexto de las aplicaciones (caso 1). Pero también, podemos encontrar la noción *Lugar geométrico* en el contexto de las transformaciones, mostrando que estas transformaciones son herramientas muy eficaces para resolver problemas de *Lugares* (caso 2), cuyo significado no es el mismo.

En el primer caso, la definición vendría dada en el siguiente modo: (definición 1) *Un lugar geométrico es el conjunto de puntos que satisfacen una determinada propiedad* expresable a partir de una construcción geométrica realizada con regla y compás. Ésta es conocida como la aproximación "clásica". También, podemos encontrar otro tipo de formulación en el contexto de las transformaciones; en este caso nos referimos a un conjunto de puntos que son imágenes de un conjunto de puntos, se define como la imagen de un objeto bajo una aplicación o transformación: "*Si llamamos f de la función: $M \rightarrow N = f(M)$, buscar el lugar geométrico de N es buscar el conjunto de todos los puntos f(M)*". En este último caso, Locus se define de forma funcional; teóricamente, tenemos que considerar que un punto P variable que pertenece a una figura F considerado como un conjunto de puntos (una línea recta, un círculo...) corresponde a un punto P', la imagen de P por una la aplicación f. Locus tiene un doble significado: por una parte legitima el cambio de una figura sintética (un punto global de ver) a una figura como un conjunto de puntos, y de otra permite recomponer la figura. Esta distinción entre trayectoria y locus expresada en estas definiciones se refleja en el *software* de Geometría dinámica mediante dos herramientas: *"Lugar geométrico*" y "*Traza*". Utilizar la herramienta "*Lugar geométrico*" requiere de una aprehensión operatoria para hacer fecunda la intuición de la figura. La visualización no icónica requiere la toma de conciencia de las propiedades que están ligadas a las operaciones que se efectúan, bien para construir una figura o bien para transformarla.

5. A modo de epílogo

En síntesis, en esta conferencia se ha argumentado, dando evidencias empíricas, que la articulación entre visualización y razonamiento está en la base de toda actividad matemática, y en particular de la geométrica. La visualización aparece de forma natural por la propia naturaleza de la matemática – concepto de matematización –, porque nuestra percepción es prioritariamente visual, pero también es esencialmente relevante en actividades matemáticas en las que la abstracción parece llevarnos lejos de lo perceptible por la vista. En esos casos, los matemáticos se valen de procesos simbólicos, diagramas visuales y otros procesos imaginativos que les ayuden a desarrollar una intuición de lo abstracto.

También, se muestra que los procesos de visualización no están ausentes de dificultad en la transmisión de la disciplina. El comportamiento de los estudiantes en situaciones de aprendizaje geométrico con SGD muestra que es necesario añadir una dimensión para el desarrollo de razonamiento geométrico del estudiante, que tome en cuenta una línea de construcción de la génesis discursiva articulada con elementos de de-construcción visual. Las interrelaciones de las tres génesis (figural, instrumental y de razonamiento discursivo) en el espacio de trabajo geométrico en contextos tecnológicos es una línea abierta de estudio.

En las investigaciones realizadas en nuestro contexto el espacio de trabajo idóneo se muestra particularmente inestable y dependiente de estilo cognitivo visual de los alumnos y las creencias sobre el aprendizaje matemático en entornos informatizados. En los experimentos de enseñanza que hemos trabajado, se muestra la necesidad de un equilibrio entre una deconstrucción dimensional (expresada en el análisis analítico-algebraica que permite la representación) y la deconstrucción instrumental (expresada en la visualización no icónico que permite la regulación visual en un SGD).

Por último, la reorganización de un espacio de trabajo matemático pasaría por el acompañamiento del profesor en la aprehensión perceptiva de los estudiantes con el fin de obtener una aprehensión operativa. En estos estudios, se constató que cuando trabajamos en la aprehensión perceptiva, utilizando SGD, explorando las figuras y la visualización icónica, no siempre se alcanzaba la aprehensión operativa. Hay estudiantes con gran control de matemáticas que sin embargo tienen problemas para producir figuras dinámicas. Todo esto nos lleva a afirmar *la necesidad de una modelización progresiva de la visualización*, en la que se introduzca una progresión en el desarrollo y manejo de diferentes tipos de representaciones con la expertez que viene de los resultados de investigación y con la que aporta un profesor de aula.

Referencias

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*(3), 215-24.

Corrales Rodrigáñez C., & Gómez-Chacón, I. M. (2011). *Ideas y visualizaciones matemáticas*. Publicaciones Cátedra Miguel de Guzmán, Facultad de Matemáticas, UCM.

Davis, P. J. (1993). Visual theorems. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(4), 333-344.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking – Basic issues for learning. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st North American PME Conference* (Vol. 1, pp. 3-26). Mexico

Giaquinto, M. (1992). Visualizing as a means of geometrical discovery. *Mind & Language*, Vol. 7-4, 382-401.

Giaquinto, M. (2005). From symmetry perception to basic geometry. In P. Mancosu, K. F. JØrgensen & S.A. Pedersen (Eds.), *Visualization, explanation and reasoning styles in Mathematics* (pp. 31-55). The Netherland: Springer.

Gómez-Chacón, I. M. (2012). Affective pathways and interactive visualization in the context of technological and professional mathematical knowledge. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *17*(3-4), 57-74.

Gómez-Chacón, I. M. (2012). Visualización matemática: Intuición y razonamiento. In M. Castrillón, M. I. Garrido, J. A. Jaramillo, A. Martínez & J. Rojo, *Contribuciones matemáticas en homenaje a Juan Tarrés* (pp. 201-219.) Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

Gómez-Chacón, I. M., & Escribano, J. (2014). Geometric Locus activities in a dynamic geometry system. Non-iconic visualization and instrumental génesis. *Relime, Revista latinoamericana de investigación en matemática*.

Gómez-Chacón, I. M., & Kuzniak, A. (2013). Geometric work spaces: Figural, instrumental and discursive geneses of reasoning in a technological environment. *International Journal of Science and Mathematics Education*.

Guzmán, M. (1996). *El rincón en la pizarra*. *Ensayos de visualización en análisis matemático*. Ed. Pirámide.

Hadamard, J. (1945). The psychology of invention in the mathematical field. Princeton, N. J.: Princeton University Press.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *16*, 9-24.

Presmeg, N.C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future*. *PME 1976-2006* (pp. 205-235). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Souto, B., & Gómez-Chacón, I. M. (2011). Visualization at university level. The concept of Integral. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *16*, 217-246.

Souto, B. (2013). *La enseñanza de la visualización en Álgebra Lineal: El caso de los espacios vectoriales cociente* (Tesis Europea en Investigación Matemática). Universidad Complutense de Madrid, Madrid.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 151-169.

Thurston, W. P. (1995). On proof and progress in Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *15*(1), 29-35.

Van Hiele, P. (1986). *Structure and insight. A theory of Mathematics education*. Academic Press.

Wheatley, G., & Brown, D. (1994). The construction and re-presentation of images in mathematical activity. *Proceedings of PME 18-1*.

Zimmerman, W., & Cunningham, S. (1991). What is mathematical visualisation?. In W. Zimmerman & S. Cunningham (Eds.), *Visualisation in teaching and learning Mathematics* (pp. 1-9). Whashington: Mathematical Association of America.