Cálculo flexível e o raciocínio quantitativo aditivo em alunos dos 1.º e 2.º anos

Lurdes Serrazina[1], Margarida Rodrigues[2]

[1] Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa, lurdess@eselx.ipl.pt

[2]Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, margaridar@eselx.ipl.pt

Resumo. *Esta comunicação insere-se no Projeto "Pensamento numérico e cálculo flexível: Aspetos críticos". Começa por discutir o que se entende por flexibilidade de cálculo e raciocínio quantitativo aditivo, discutindo depois os resultados de entrevistas individuais realizadas com quatro alunos (dois do 1.º ano e dois do 2.º ano) quando lhes foram propostas tarefas onde aqueles aspetos estavam presentes. Trata-se de um estudo exploratório cujo principal objetivo é compreender o raciocínio dos alunos quando resolvem tarefas numéricas envolvendo situações aditivas, e ainda identificar aspetos associados à flexibilidade de cálculo e ao raciocínio quantitativo. Os resultados mostram que, no caso dos alunos do 1.º ano, o seu desempenho parece estar relacionado com o seu desenvolvimento do sentido do número e com as relações que dominam. Para os alunos do 2.º ano, o raciocínio inversivo constituiu um aspeto crítico, que conseguiram mobilizar depois de superadas as dificuldades iniciais. Os resultados sugerem, ainda, que estes alunos concebem a diferença como uma relação invariante numérica.*

Abstract. *This communication is part of the Project "Adaptive thinking and flexible computation: Critical issues". It begins by discussing what is meant by flexible computation and additive quantitative reasoning, after it discusses the results of individual interviews with four pupils (two of 1_{st} Grade and two of 2_{nd} Grade) when tasks, where those aspects were present, were proposed to them. This is an exploratory study whose main objective is to understand students' reasoning when solving numerical tasks involving additive situations, and also identify features associated with the flexible computation and quantitative reasoning. The results show that, in the case of 1_{st} Grade pupils, their performance appears to be related to the development of number sense and to the relationships that they dominate. For the 2_{nd} Grade pupils, the inverse reasoning constituted a critical issue, which they could mobilize after overcoming the initial difficulties. The results also suggest that these pupils see the difference as an invariant numerical relationship.*

Palavras-chave: Cálculo flexível; Raciocínio quantitativo aditivo; Relações numéricas.

Introdução

Esta comunicação insere-se no Projeto "Pensamento numérico e cálculo flexível: Aspetos críticos" que está a ser desenvolvido por docentes das Escolas Superiores de Educação de Lisboa e Setúbal e tem como objetivos: (i) identificar os conhecimentos conceptuais dos alunos que estão em jogo nos diferentes níveis de compreensão das operações/relações numéricas; (ii) analisar se e como estes conhecimentos lhes permitem usar flexivelmente o cálculo mental; e (iii) retirar implicações para a construção e exploração de tarefas, a formação de professores e a avaliação diagnóstica do desenvolvimento do cálculo mental. Nesta comunicação discutiremos as diferentes perspetivas sobre flexibilidade de cálculo/raciocínio quantitativo no que se refere à adição e subtração, presentes na literatura, e apresentamos resultados preliminares resultantes da resolução de quatro tarefas por alunos dos 1.º e 2.º anos de escolaridade, obtidos através da realização de entrevistas (tipo clínicas) individuais a quatro alunos (dois do 1.º e dois do 2.º ano) de uma escola do 1.º ciclo de um bairro de Lisboa. Pretendemos compreender o raciocínio dos alunos quando resolvem tarefas numéricas envolvendo situações aditivas e identificar aspetos associados à flexibilidade de cálculo e ao raciocínio quantitativo.

Fundamentação teórica

Na última década, a flexibilidade de cálculo tem sido considerada uma capacidade que todos os alunos devem desenvolver na escola elementar (Anghileri, 2001; NCTM, 2000). Em 2000, o NCTM afirmava que ser proficiente num domínio complexo como a Matemática implica a capacidade de usar o conhecimento de modo flexível, aplicando, de modo apropriado, o que é aprendido numa situação, numa outra (NCTM, 2000).

A ideia de flexibilidade aparece associada ao cálculo mental e à resolução de problemas aritméticos. Existem diferentes maneiras de resolver um problema aritmético mentalmente, designadas normalmente por estratégias. Flexibilidade estratégica em cálculo mental refere-se ao modo como o problema é afetado pelas circunstâncias ao ser resolvido (Threlfall, 2009). Estas circunstâncias tanto podem relacionar-se com características específicas das tarefas como relacionar-se com características individuais ou, ainda, com variáveis contextuais. Threlfall (2009) designa o mecanismo subjacente à flexibilidade estratégica de *zeroing-in*, referindo que o mesmo não é totalmente consciente nem racional, envolvendo cálculos exploratórios parciais que decorrem de reparar em aspetos específicos dos números em causa e respetivas relações: "The calculation-strategy is not selected and applied, it is arrived to" (Threlfall, 2009, p. 548).

Numa perspetiva diferente, Star e Newton (2009) definem flexibilidade como conhecimento de múltiplas soluções, assim como a capacidade e tendência para escolher a mais adequada para um dado problema e um objetivo particular de resolução de problemas. Estes autores afirmam ainda que flexibilidade existe num *continuum*: quando os alunos ganham flexibilidade, eles podem primeiro mostrar um maior conhecimento de múltiplas estratégias, depois preferências particulares, e, por último, o uso adequado da estratégia preferida. O termo adequado refere-se à estratégia mais eficiente, isto é, aquela que exige o menor número de passos intermédios de cálculo para chegar ao resultado.

Outros autores (Baroody & Rosu, 2006; Rathgeb-Schierer & Green, 2013) referem que a flexibilidade de cálculo está relacionada com o facto de os alunos terem, à medida que vão desenvolvendo o sentido do número, estabelecido relações e padrões entre eles, construindo assim uma teia de relações. Por exemplo, os alunos que reconhecem a propriedade comutativa da adição, perante a necessidade de calcular 3+9, sabem que podem fazer 9+3. Os alunos que compreendem as várias composições de um número, nas suas diferentes partes (por exemplo, 1+7, 2+6, 3+5 e 4+4 = 8…) e decomposições (e.g., 8 = 1+7, 2+6, 3+5, 4+4), é mais provável que desenvolvam formas de raciocínio como os "dobros+1" (e.g., 7+8 = 7+7+1 = 14+1) ou fazer uma "dezena" (9+7 = 9+1+6 = 10+6). À medida que aquela teia de relações vai sendo construída, os alunos vão adquirindo flexibilidade para usarem essas relações em situações concretas de cálculo, o que depende do seu conhecimento dos números e das operações (Rathgeb-Schierer & Green, 2013).

De acordo com Thompson (1993), o raciocínio quantitativo envolve raciocinar sobre relações entre quantidades. Consiste na análise de uma situação numa *estrutura quantitativa*, sendo que esta constitui uma rede de quantidades e de relações quantitativas. O autor chama a atenção para a distinção entre quantidade e número, não sendo de todo sinónimos. No âmbito do raciocínio quantitativo, o que importa são as relações entre as quantidades e não os números e as relações numéricas, e é nesse sentido que este tipo de raciocínio se aproxima do raciocínio algébrico. Para clarificar esta distinção, o autor liga a ideia de medida à noção de quantidade, embora esta não seja aplicável apenas a grandezas contínuas mensuráveis, e o raciocínio não dependa da sua medida:

> A person constitutes a quantity by conceiving of a quality of an object in such a way that he or she understands the possibility of measuring it. (…) Quantities, when measured, have numerical value, but we need not measure them or know their measures to reason about them. You can think of your

> height, another person's height, and the amount by which one of you is taller than the other without having to know the actual values. Quantities are more concrete than numbers (Thompson, 1993, pp. 165-166).

Uma das aplicações da álgebra consiste na modelação de situações complexas. Uma situação relacionalmente complexa envolve, pelo menos, 6 quantidades e 3 operações quantitativas. Comparar duas quantidades para encontrar o excesso de uma em relação à outra é uma operação quantitativa. E o resultado da operação quantitativa de comparar aditivamente duas quantidades é o excesso encontrado, isto é, *a diferença quantitativa*. Vejamos um exemplo de uma situação relacionalmente complexa estruturada aditivamente, com o mínimo de quantidades e de operações quantitativas, que ilustra o facto de que cada resultado de uma operação quantitativa é simultaneamente uma quantidade:

3 quantidades iniciais (A, B, C) 3 operações quantitativas 3 diferenças quantitativas ou combinações (também são quantidades): • A comparado com B • B comparado com C • (A comparado com B) comparado com (B comparado com C)

Figura 1. Situação relacionalmente complexa estruturada aditivamente

Além da distinção entre quantidade e número, Thompson (1993) sublinha, ainda, a distinção entre os conceitos de diferença numérica, enquanto resultado da operação subtração, e de diferença quantitativa. Por um lado, uma diferença quantitativa não é sempre encontrada através de uma subtração, e, por outro, a subtração pode ser usada para calcular quantidades que não sejam diferenças quantitativas.

A comparação aditiva está intimamente ligada ao raciocínio inversivo, implicando a mobilização do pensamento reversível: quando se compara A com B e se verifica que A é mais *n* do que B, então pode concluir-se a relação inversa, ou seja, que B é menos *n* do que A. De acordo com Greer (2012), a inversão assume uma importância central na aritmética dos números naturais e das quatro operações básicas envolvendo estes números, com implicações importantes no cálculo flexível. Relativamente aos problemas de comparação, o autor chama a atenção para o facto de que a relação inversa relaciona a diferença entre A e B com a diferença complementar entre B e A, o que constitui uma conceção bastante diferente. Assim, embora este autor se refira à relação inversa entre adição e subtração e o raciocínio quantitativo aditivo envolva operações quantitativas que são distintas destas operações aritméticas, podemos considerar que a inversão constitui um tópico intrinsecamente subjacente ao raciocínio quantitativo.

Metodologia

Este estudo segue uma abordagem metodológica qualitativa de paradigma interpretativo, visando a descrição e a explicação interpretativa de um fenómeno educacional (Erickson, 1986). Tendo como objetivo recolher informação alusiva às formas de os alunos abordarem tarefas, concebidas com o propósito de desenvolver quer o cálculo flexível quer o raciocínio quantitativo aditivo, para a construção posterior de uma cadeia de tarefas, procedeu-se à realização de entrevistas clínicas a alunos dos 1.º e 2.º anos.

Na entrevista clínica, o investigador suscita da parte do entrevistado a revelação de indícios que elucidem o problema em questão. Trata-se de uma técnica que é dirigida pelo investigador e que visa a descrição das formas de pensamento dos entrevistados, através do levantamento de informações (Lessard-Hebert, Goyette, & Boutin, 1990; Tavares, 2000).

As entrevistas individuais foram realizadas a 13 de fevereiro de 2014 pelas autoras do presente artigo, ambas elementos da equipa de investigação do Projeto. Os quatro alunos estavam a frequentar pela primeira vez os respetivos anos de escolaridade. Os alunos foram selecionados pelas professoras titulares das turmas mediante a indicação, pelas investigadoras, do critério de serem alunos que habitualmente expressassem o que pensam e com desempenho razoável a Matemática. As entrevistas foram audiogravadas e ocorreram numa sala, fora da sala de aula dos alunos. Foi respeitado o princípio ético de confidencialidade, tendo sido usados nomes fictícios para as crianças entrevistadas.

Apresentação de alguns resultados

Aos dois alunos do 1.º ano, Ana e Rui, foi proposta uma única tarefa envolvendo cartões com expressões representativas de somas e diferenças. Aos dois alunos do 2.º ano, Gonçalo e João, foram propostas duas tarefas com um contexto de jogo de berlindes, embora apenas uma seja comum. Quer um quer outro referiram ter o hábito de jogar a este jogo.

Tarefa "Cartões com números"

Foram dispostos sobre a mesa cartões, onde estavam registadas as seguintes expressões, uma em cada cartão:

19 + 10	14 + 15	19 - 10	20 + 10	10 + 22
5 + 15	17 + 5	20 - 10	13 + 7	11 + 22
20 - 8	22 - 10	50 - 30	15 + 16	50 - 28

Figura 2. Tarefa *Cartões com números*

O objetivo desta tarefa é usar factos conhecidos para estabelecer relações numéricas e calcular de modo flexível. Para que os alunos conheçam as características dos números implica que usem, de modo dinâmico, o conhecimento do número e das suas relações. Pretende-se que os alunos vejam as expressões apresentadas como números e não como um cálculo a efetuar, daí o terem aparecido sem o sinal de igual no final da expressão. Assim, esta tarefa visa que os alunos sejam capazes de utilizar relações numéricas do tipo n+1 e n-1, ou n+2 e n-2. Por exemplo, em 14+15, os alunos podem reconhecer que 14 é menos 1 que 15, podendo, por isso, usar o dobro de 15 e tirar 1. A relação dobro/metade está presente em várias situações. Também, noutras expressões, podem arredondar para a dezena mais próxima. Por exemplo, em 50-28, ao reparar que 28 é menos 2 que 30, podem utilizar factos básicos ao nível das dezenas.

Foi pedido aos alunos que colocassem os cartões em duas colunas, pondo numa os que achassem fáceis e na outra os que considerassem difíceis, justificando a escolha feita.

A Ana apenas considerou como difíceis os cartões: 50-30, 20-8 e 50-28. Para os cartões que considerou fáceis, conseguiu chegar, de um modo geral com alguma facilidade, a uma outra representação do número, por vezes recorrendo à contagem e usando, de forma discreta, os dedos das mãos, como se evidencia no seguinte diálogo:

> I: Para cada caso, vais dizendo alto como chegaste ao número.
> A (*pegando no cartão 17+5*): Este é 22.
> I: Porquê?
> A: Contei 5 a partir do 17.
> A (*pegando, de seguida, no cartão 10+22*): 10+22 é 32, pois 10+20 são 30.
> A: 20-8 é 12.
> I: Porquê?
> A: Contei (*mais uma vez Ana usou os dedos de forma discreta*).

Voltou depois ao cartão 20+10, dizendo:

> A: Este é 30, pois 2 mais 1 é 3, então este [10+22] é 32, e este [11+22] é 33, porque é +1 e +2. (...) Este [19+10] é 29, pois é -1.

Agora este 20-10 é 10, pois é 2-1, logo, 22 -10 é mais 2, por isso 12.

A Ana conseguiu perceber que todos estes cartões estavam relacionados e foi capaz de os relacionar com rapidez e à vontade. Mostrou entender as unidades do sistema de numeração, compreendendo que para 20+10, basta aplicar o facto básico 2+1.

Em seguida, olhou para o cartão 50-30 e hesitou um pouco.

I: Olha bem para os números.
A: É 20, pois é 5-3 (*disse, sem hesitar*).

Bastou a investigadora chamar-lhe a atenção para os números envolvidos para a Ana conseguir dizer o número representado pela expressão.

Faltava-lhe o 50-28. Depois de alguma hesitação, respondeu: "é 32". Perante o olhar de surpresa da investigadora, disse: "é 22, pois se 50-30 é 20, aqui tiro 28, que é menos 2". A Ana conseguiu, utilizando outros factos dos quais já sabia os resultados, e, com alguma flexibilidade, obter uma nova representação do número apresentado no cartão, retificando o que tinha acabado de dizer ("32").

O Rui, perante o mesmo conjunto de cartões, selecionou como difíceis (que não sabia) os seguintes: 50-30, 22-10, 11+22, 10+22 e 50-28. Para os que considerou fáceis, apresentou as seguintes justificações:

R: 20 mais 10 é 30, porque 2 mais 1 é 3. 19 menos 10 é 9.
I: Porquê?
R: Agora é que não sei dizer...
I: Então?
R: É este 9 aqui (*apontando para o 9 no 19*).
R (*passando logo para um novo cartão*): 5 mais 15 é 20, porque 15 é uma dezena e meia, mais meia... 20 menos 8 é 12, contei.
I: Contaste o quê?
R: Contei 8 a partir do 20.
R (*indo logo para o cartão seguinte*): 20 menos 10 é 10, pois 2 menos 1 é 1.

Virando-se para os cartões que tinha considerado difíceis, começou por 22-10: "é 12, pois aqui (*aponta para o 22, comparando com 20-10*) é mais 2". Em seguida, voltou de novo ao cartão 19-10, colocado na coluna dos fáceis, e disse: "é 9, pois é menos 1".

O Rui manifesta flexibilidade de cálculo, conseguindo, por sua iniciativa, estabelecer a relação com 20-10, através da estratégia de compensação, compreendendo que juntar 2 ao aditivo implica juntar também 2 ao resto. É, ainda, de salientar o facto de após ter usado 20-10 para chegar a 22-10, ter compreendido que o podia também usar para explicar por que motivo 19-10 é 9, lembrando-se que antes não tinha conseguido verbalizar esse motivo ("Agora é que não sei dizer..."). Este é um exemplo ilustrativo do processo não totalmente consciente subjacente à flexibilidade estratégica de *zeroing-in* (Threlfall, 2009) já que o Rui parece ter estabelecido relações numéricas, quando assumiu 19-10 como 9, que não conseguiu explicitar de modo imediato, fazendo-o posteriormente, ao verbalizar a compensação aplicada na situação anterior de 22-10: 19-10 "é 9, pois é menos 1". Efetivamente, na altura, o Rui limitou-se a indicar o 9 no 19 como justificação, dando alguma evidência de constatação de uma regularidade: sempre que se retira 10 de um número entre 11 e 19, inclusive, o resto é igual ao algarismo das unidades. Só depois de ter usado o cartão 20-10 como recurso para calcular de modo flexível 22-10 é que o Rui revisita o cartão anterior 19-10 e toma consciência de que 20-10 constitui igualmente um recurso para calcular 19-10, apresentando uma justificação matemática de compensação, com mobilização do facto básico 20-10: retirar 1 ao aditivo implica retirar também um ao resto.

Voltou depois ao 11+22, mas ficou hesitante.

> I: Sabes quanto é este [20+10]?
> R: Sim. É 30.
> I: Então?
> R: Estou a pensar...

Depois de alguma hesitação, arrisca, sem grande segurança:

> R: 33.
> I: Porquê?
> R: É mais 3.

Neste caso, foi a investigadora que sugeriu o cartão a usar como facto básico. Após esta sugestão, o Rui conseguiu novamente estabelecer uma relação numérica, compensando com mais três, e usando, também, de forma implícita, a propriedade comutativa (20+10 = 10+20). Faltavam ainda os cartões 50-30 e 50-28, mas o Rui disse:

> R: Estes são muito difíceis, não quero fazer.
> I: Não são nada...
> R: Sim, são. Já não quero fazer mais.

A investigadora não insistiu e deu por terminada a entrevista.

Estes alunos já compreenderam que, quando têm dezenas exatas, basta adicionar as dezenas, usando um raciocínio dedutivo por analogia – por exemplo: se 1+2 é 3, então 10+20 é 30. Ana parece ter esta ideia consolidada, tanto para a adição como para a subtração, o mesmo não acontecendo com o Rui para a subtração. Ana não teve nenhuma dúvida perante a situação 50-30 é 20, pois 5-3 é 2, mas apesar de o Rui ter resolvido bem 20-10, usando o mesmo tipo de raciocínio, considerou a situação 50-30 difícil e acabou por não a resolver. Tal pode ter-se devido à ordem de grandeza do número 50, atendendo a tratar-se de um aluno do 1.º ano entrevistado em fevereiro. Ambos os alunos conseguiram estabelecer relações numéricas a partir de factos básicos.

Tarefa "Jogo de berlindes I"

A primeira tarefa, *Jogo de berlindes I*, foi proposta a ambos os alunos, tendo sido lida primeiro pela investigadora, e foi a seguinte:

> A Ana e o Luís jogaram um jogo de berlindes juntos. No início tinham ambos o mesmo número de berlindes.
>
> A Ana ganhou 3 berlindes do Luís e ficou com 7.
>
> Quantos berlindes tinha o Luís no final do jogo, sabendo que ele não ganhou berlindes?

Figura 3. Tarefa *Jogo de berlindes I*

Esta tarefa visa desenvolver um raciocínio inversivo em duas situações: (i) início e final do jogo, obrigando os alunos a partir do ponto de chegada, final do jogo, e raciocinar inversamente para o início do jogo; e (ii) relação entre os ganhos e perdas no decurso do jogo (se a Ana ganha x berlindes do Luís, então este perde x para a Ana). Implica ainda atender à relação de igualdade entre a quantidade de berlindes de um e de outro no início do jogo.

Inicialmente, o Gonçalo não entendeu o problema, pelo que a investigadora foi conversando com ele sobre o enunciado, tendo chegado a sugerir que registasse à direita o número de berlindes da Ana no final do jogo e à esquerda o do início do jogo.

G: Quantos berlindes é que eles tinham antes?
I: Pois, não sabemos. Mas sabemos que ela ficou… Com quantos é que ela ficou?
G: Com 7.
I: Com 7. Regista lá aqui (*apontando para uma localização à direita)*. No final, ela ficou com 7. (…) Ganhou 3. Quantos é que ela teria no princípio?
G: 10.
(…) *A investigadora sugere que ele registe à esquerda do 7.*
I: Então, se ela tem 10… vê lá se ela perde ou ganha berlindes para ficar com 7.
G: Perde.
I: Perde. Ela não perdeu! Ela ganhou!
G: Pois, ela tem 13.

Apesar da sugestão da investigadora para o registo à direita da quantidade de berlindes do final do jogo, o Gonçalo raciocinou aditivamente mediante a ideia de ganhar berlindes, juntando, primeiro, três a sete, e depois a dez (em reação à interpelação da investigadora ao confrontá-lo com o "10" colocado à esquerda e correspondente à quantidade de berlindes no início do jogo). O aluno teve dificuldade em mobilizar um pensamento reversível do final para o início do jogo. A necessidade de partir de um valor inicial ficou evidenciada na sua questão "Quantos berlindes é que eles tinham antes?". Mesmo quando foi confrontado com o facto de ter 10 berlindes antes e 7 no final, não conseguiu inverter o pensamento. Tanto assumiu que a Ana teria perdido berlindes como respondeu que teria 13, ao ser conduzido para a ideia de que ganhou berlindes. Passamos a apresentar o extrato seguinte.

I: Tenta lá representar os berlindes. No final, ela ficou com sete berlindes.
G: Só sete berlindes? (*O Gonçalo desenha 7 círculos)*
I: (…) Destes sete, houve três que ela ganhou ao Luís. Representa lá de outra maneira.
G: Posso fazer com cruzes?
I: Podes pôr uma cruzinha nos que ela ganhou ao Luís. (*o Gonçalo desenha mais 3 cruzes)* Mas estás a meter mais. Destes sete, destes sete, houve três que ela ganhou ao Luís, não é mais, destes sete! (*o Gonçalo marca então cruzes dentro de três dos círculos desenhados antes*). Então quantos seriam os que ela tinha no princípio?
(…)
G: Quatro.
P*or sugestão da investigadora, regista por baixo do desenho os números 4 e 7, e escreve ao lado o nome Ana*.
I: Agora vamos lá pensar no Luís. O Luís, o Luís, no início, ambos tinham o mesmo número de berlindes. Então, quantos é que o Luís tinha?
G: Também 4.
I: E o que teria agora acontecido no jogo? Com quantos é que ele teria acabado o jogo? Pensa lá.
G: Um. (*escreve "1" por baixo de 7*)
I: Como viste que era 1?
G: Quatro menos três!

O Gonçalo manteve um raciocínio unidirecional tanto nas reações às interpelações da investigadora como na representação icónica da situação. Por insistência da investigadora, parece ter chegado à compreensão do problema quando aquela lhe fez notar que os 3 berlindes ganhos da Ana estariam incluídos nos 7 finais, representados iconicamente. Nesta altura, o Gonçalo registou as cruzes, pela segunda vez, dentro dos círculos desenhados antes. A inversão relativa aos ganhos e perdas não foi um aspeto crítico. Depois de ter chegado ao número 4 do início do jogo, rapidamente o Gonçalo subtraiu 3, percebendo que o Luís teria perdido 3.

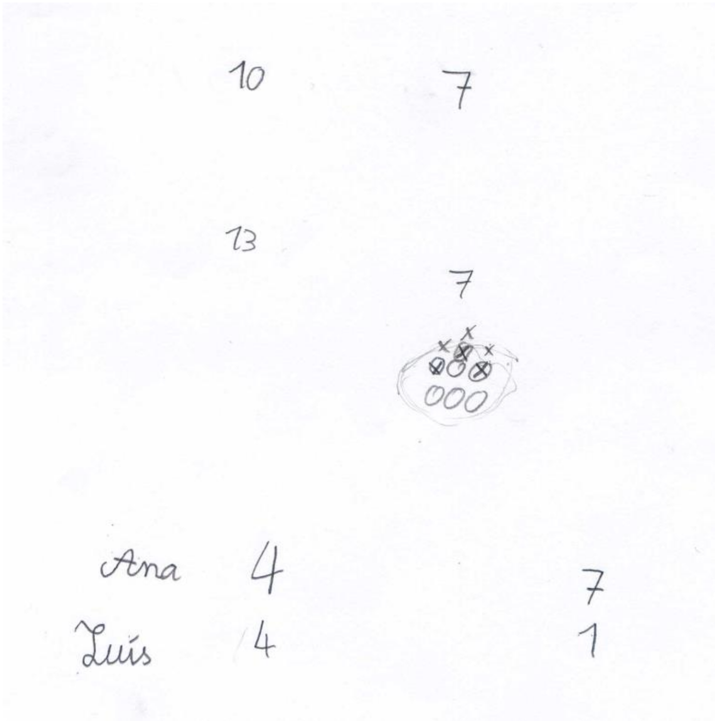

Figura 4. Resolução do Gonçalo da tarefa *Jogo de berlindes I*

O João, assim que a investigadora terminou a leitura, respondeu prontamente “10” e registou na folha, tal como se pode verificar na seguinte figura:

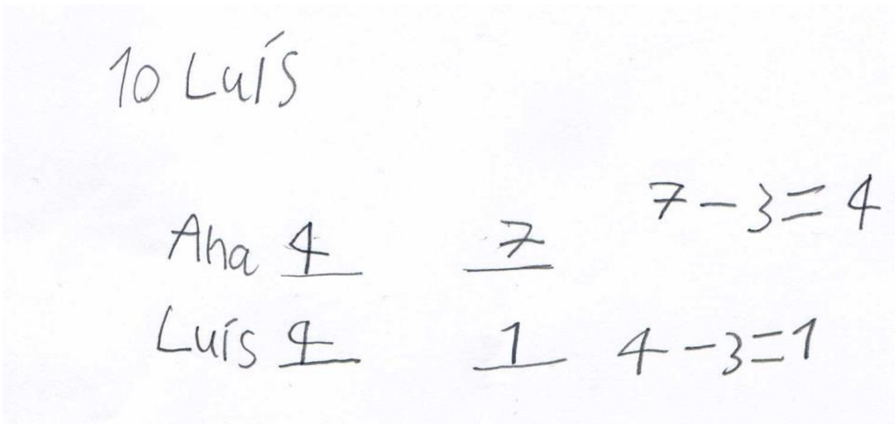

Figura 5. Resolução do João da tarefa *Jogo de berlindes I*

Seguidamente, a investigadora focou a Ana, sugerindo igualmente um registo tabelado para marcar o início e o final do jogo. Vejamos o extrato do diálogo que se seguiu:

I: No final do jogo, ela ficou com 7. E quantos berlindes é que ela ganhou ao Luís?
J: Três.
I: Quantos teria no princípio?
J: (*pausa*) Quatro.

O João começou por responder incorretamente 10, tendo também associado à adição a ideia de ganhar 3. Trata-se de uma resposta precipitada, atribuindo ao Luís os dados respeitantes à Ana. Assim que a investigadora começou a orientar no sentido de se focar primeiro na Ana, o João utilizou a relação inversa e não manifestou dificuldades na resolução desta tarefa, embora tivesse precisado de tempo para pensar de modo inversivo. A tarefa foi resolvida mentalmente e as subtrações colocadas ao lado foram registadas na sequência do pedido da investigadora para ele registar como tinha pensado.

Tarefa "Jogo de berlindes II"

A segunda tarefa proposta apenas ao Gonçalo, *Jogo de berlindes II*, foi a seguinte:

A Ana e o Luís fizeram um jogo de berlindes.
A Ana ganhou 6 berlindes do Luís e ficou com 10 berlindes no final do jogo.
O Luís não ganhou nada e ficou com 3 berlindes no final do jogo.
Compara o número de berlindes da Ana e do Luís antes do jogo e no final do jogo.

Figura 6. Tarefa *Jogo de berlindes II*

Esta tarefa exige para ambas as situações (Ana e Luís) um raciocínio inversivo do final do jogo para antes do jogo e apresenta uma formulação mais aberta de solicitação de comparação de quantidades. Apela ao raciocínio reversível, nos mesmos termos descritos para a tarefa anterior. Ao ser pedida explicitamente a comparação das quantidades de berlindes antes e no final do jogo, esta tarefa foca-se no raciocínio quantitativo aditivo.

Esta tarefa já foi resolvida com facilidade pelo Gonçalo, pois já tinha entendido a inversão necessária do final para o início do jogo. A figura 7 apresenta a sua resolução:

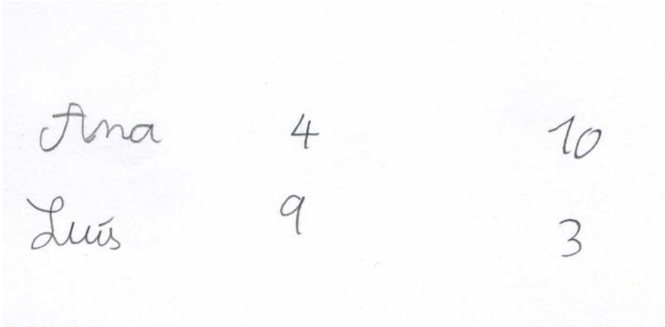

Figura 7. Resolução do Gonçalo da tarefa *Jogo de berlindes II*

Rapidamente, utilizou a relação inversa, concluindo que a Ana teria 4 berlindes no início do jogo:

> I: Como é que viste que era 4? Como pensaste?
> G: Dez menos seis.

Depois de ter registado os 3 berlindes finais do Luís, a investigadora chamou a atenção para os berlindes que a Ana tinha ganho ao Luís:

> I: Ela tinha ganho quantos ao Luís?
> G: Seis.
> I: Quantos agora é que o Luís teria no princípio? Não sabes, pois não? (…)
> G: Nove!
> I: Como fizeste?
> G: Fiz na cabeça! (…) Três mais seis!

Depois da chamada de atenção da investigadora para os berlindes ganhos da Ana, rapidamente o Gonçalo percebeu que o Luís teria perdido o mesmo número e mobilizou mais uma vez a reversibilidade de pensamento, compreendendo que, antes do jogo, o Luís teria mais seis berlindes.

Tarefa "Jogo de berlindes III"

A tarefa proposta apenas ao João, *Jogo de berlindes III*, avança em complexidade, já que aumenta o número de jogadores e, consequentemente, também as relações entre ganhos e perdas a considerar. Tem como principal objetivo acentuar a noção de diferença quantitativa como sendo significativamente independente do conhecimento dos valores do aditivo e do subtrativo. Contrariamente às tarefas anteriores, em que os alunos podiam saber o número de berlindes antes e no final dos jogos, nesta tarefa, por não se conhecer o número de berlindes que cada um tinha antes dos jogos, os alunos têm de lidar unicamente com a mudança relativa, e não com quantidades absolutas.

A Ana, o Luís e o André jogaram dois jogos de berlindes juntos.

A Ana ganhou 3 berlindes do Luís e 7 do André.

O Luís ganhou 4 berlindes do André e 9 da Ana.

O André não ganhou berlindes.

a) Qual o menor número de berlindes que o André tinha no início dos jogos?

b) Compara o número de berlindes do Luís antes e depois destes dois jogos.

Figura 8. Tarefa *Jogo de berlindes III*

O João seguiu o mesmo tipo de registo tabelado da tarefa anterior e começou por registar para cada um dos jogadores os ganhos totais de berlindes. Seguidamente, registou as perdas totais para cada um dos jogadores, através da leitura das frases alusivas aos ganhos, mobilizando o raciocínio inversivo. A sua resolução pode ser observada na seguinte figura:

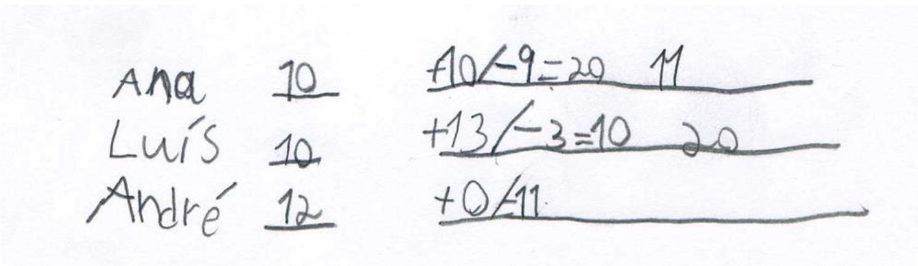

Figura 9. Resolução do João da tarefa *Jogo de berlindes III*

Depois, focou-se na questão a), considerando que o André teria no início dos jogos o número mínimo de 12 berlindes para ter perdido 11. Levantou outras hipóteses para esse número inicial como 20 ou 30.

I: E menos que 12, não?
J: Não, ele tinha de ter berlindes.

Esta questão foca a quantidade absoluta de berlindes. O João considerou diversas hipóteses para os números de berlindes do André antes dos jogos, sabendo que ele perdeu 11, todas superiores a 11, mas assumiu que, no mínimo, ele teria de ter 12. Pensamos que ele não equacionou o 11 por ter descartado a possibilidade de, no final, ficar sem nenhum berlinde. Interpretamos a sua resposta "Não, ele tinha de ter berlindes" como referindo-se à pretensão, em termos afetivos, de acabar os jogos com berlindes (neste caso, com um). No entanto, tal também pode ser interpretado como referindo-se à necessidade de, no início, ter berlindes suficientes para poder dar 11. Esta segunda hipótese interpretativa tem uma explicação de natureza matemática e não afetiva, já que, neste caso, não viu que o número mínimo corresponde ao número igual de berlindes perdidos.

Em seguida, registou o balanço de ganhos e perdas no caso do Luís, concluindo que este teria ficado com mais 10 berlindes no final do jogo. No traço correspondente ao início do jogo, registou 10.

> J: [No final] o Luís ficou com mais 10. (…)
> I: No princípio, o Luís tinha 10 ou mais 10?
> J: Tinha 10 berlindes.

No ponto mais localizado à direita da linha do Luís, registou 20 como sendo o número total de berlindes no final do jogo. Seguidamente, a investigadora orientou para o caso da Ana:

> I: E a Ana? Ganhou 10 e perdeu 9. Afinal, ficou com mais ou menos berlindes no final do jogo?
> J: Com menos. Antes tem 10 berlindes.
> I: Se começasse os jogos com 10 berlindes, ganhava 10, ficava com quantos?
> J: Com 20.
> I: E depois perdia 9...
> J: Ficava com 11.

O João não conseguiu fazer o balanço entre ganhos e perdas para o caso da Ana, tendo concluído que ficaria com menos berlindes sem referir quantos. Colocou também 10 no traço correspondente ao início do jogo, tendo depois registado o 20 como sendo o número de berlindes da Ana depois dos 10 berlindes ganhos nos dois jogos, e finalmente registou o número 11, após as perdas, correspondendo ao número total de berlindes da Ana no final do jogo. Depois deste registo final, não o confrontou com o que tinha dito anteriormente nem verbalizou que a Ana teria ficado com mais um berlinde no final dos dois jogos.

O aspeto crítico inerente a esta tarefa é a distinção entre a diferença quantitativa e o valor absoluto. Embora o João não tenha feito confusão entre uma coisa e outra, já que distingue, no segundo traço da linha do Luís, alusivo ao final dos jogos, a mudança relativa (mais 10) do valor absoluto (20), não consegue exprimir a diferença quantitativa para o início dos dois jogos (menos 10), necessitando de colocar números absolutos. Não se percebe bem o motivo de ter colocado 10 tanto para o Luís como para a Ana. Foi um número hipotético como poderia ter sido outro? Usou o número resultante do balanço de ganhos e perdas do Luís? Há, ainda, a referir que o João usou a mesma simbologia na linha da Ana e na do Luís (=20; =10) com significados distintos: na Ana, o 20 é valor absoluto e, no Luís, o 10 é mudança relativa. A necessidade de se referir aos números concretos de berlindes também se encontra evidente no modo como conclui depois o valor absoluto dos berlindes no final dos dois jogos.

Considerações finais

O cálculo flexível prende-se com o conhecimento e a utilização de relações numéricas, sendo mais rico à medida que os alunos são capazes de utilizar a teia de relações que vão construindo e vão desenvolvendo o seu sentido do número (Baroody & Rosu, 2006). Relativamente aos dois alunos que resolveram a tarefa com os cartões, a Ana evidencia uma maior flexibilidade de cálculo, levando-nos a concluir que a sua teia de relações é mais rica. O Rui confirma, de algum modo, que a flexibilidade para usar essas relações em situações concretas de cálculo depende do seu conhecimento dos números e das operações (Rathgeb-Schierer & Green, 2013), pois apesar de ter resolvido com facilidade os cálculos com números menores, não o conseguiu fazer quando os números aumentaram na sua ordem de grandeza. Tal como defendido por Threlfall (2009), o Rui parece não escolher uma estratégia: reparando nos aspetos específicos dos números propostos e suas relações com os números conhecidos, Rui *chega* a uma estratégia.

A exploração das tarefas pelos alunos de 2.º ano fez ressaltar a inversão como um aspeto crítico, que as crianças conseguem mobilizar depois de superadas as dificuldades iniciais. Consideramos que este é um tópico de fundamental importância no desenvolvimento do cálculo flexível (Greer, 2012) e do raciocínio quantitativo aditivo. As diferenças quantitativas das tarefas *Jogo de berlindes I* e *II* envolvem o valor absoluto do aditivo e do subtrativo, enquanto a tarefa *Jogo de berlindes III* avança com a ênfase na noção de diferença quantitativa como mudança relativa independente do conhecimento dos valores do aditivo e do subtrativo (Thompson, 1993). Esse desconhecimento constitui também um aspeto crítico, pois apesar de o aluno em causa, João, não ter confundido as noções de diferença quantitativa e de valor absoluto de berlindes, precisou de se ancorar em números concretos de berlindes. Por terem sentido necessidade de saber o valor dos números iniciais, os alunos mostram conceber a diferença como uma relação invariante numérica.

Um outro aspeto a relevar tem a ver com o modo com estas duas dimensões se inter-relacionam, o cálculo flexível e o raciocínio quantitativo aditivo. Por este se focar na descrição e modelação de situações e nas relações comparativas envolvidas, acaba por estar na base do desenvolvimento do cálculo flexível enquanto cálculo que mobiliza relações numéricas, de um modo inteligente e adaptativo às situações e aos próprios números.

Referências bibliográficas

Anghileri, J. (2001). Intuitive approaches, mental strategies and standard algorithms. In J. Anghileri (Ed.), *Principles and practices in arithmetic teaching* (pp. 79-94). Buckingham: Open University Press.

Baroody, A. J., & Rosu, L. (2006). Adaptive expertise with basic addition and subtraction combinations – The number sense view. In A. J. Baroody & T. Torbeyns (Chairs), *Developing adaptive expertise in elementary school arithmetic*. Symposium conducted at: The annual meeting of the American Educational Research Association.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (3ª ed.). New York: Macmillan.

Greer, B. (2012). Inversion in mathematical thinking and learning. *Educational Studies in Mathematics Education*, *79*, 429-438.

Lessard-Hebert, M., Goyette, G., & Boutin, G. (1990). *Investigação qualitativa: Fundamentos e práticas*. Lisboa: Instituto Piaget.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Rathgeb-Schierer, E., & Green, M. (2013). Flexibility in mental calculation in elementary students from different math classes. Paper presented in CERME 8. Antalya, Turquia.

Star, J. R., & Newton, K. J. (2009). The nature and development of experts' strategy flexibility for solving equations. *ZDM Mathematics Education*, *41*, 557-567.

Tavares, M. (2000). A entrevista clínica. In J. A. Cunha (Org.), *Psicodiagnóstico V* (5ª ed.) (pp. 45-56). Porto Alegre: ArtMed.

Thompson, P. W. (1993). Quantitative reasoning, complexity, and additive structures. *Educational Studies in Mathematics Education*, *25*, 165-208.

Threlfall, J. (2009). Strategies and flexibility in mental calculation. *ZDM Mathematics Education*, *41*, 541-555.