A complexidade do pensamento matemático e a qualidade das aprendizagens: um modelo de análise à luz da teoria da atividade

Fernando Luís Santos[1], António *Domingos*[2]
[1]ESE Jean Piaget de Almada, UIED FCT-UNL, fernando.santos@almada.ipiaget.pt
[2]Universidade Nova de Lisboa, UIED FCT-UNL, amdd@fct.unl.pt

Resumo. *A forma como os alunos respondem às questões colocadas é um instrumento importante para analisar a complexidade do seu pensamento matemático. Propomos um modelo de análise utilizando como enquadramento teórico as teorias de David Tall sobre a complexidade do pensamento matemático envolvendo as noções de proceito e bifurcação proceptual e a taxonomia SOLO de Biggs e Collis, e como instrumento a utilização da Teoria da Atividade, segundo Engeström, mostrando como esta permite descrever a análise/avaliação das respostas produzidas pelos alunos de formação inicial de professores (Licenciatura em Educação Básica), a uma questão de Cálculo da Probabilidade, evidenciando os diferentes níveis de complexidade do pensamento matemático envolvidos nas suas respostas (três), todas corretas, e a qualidade das suas aprendizagens.*

Abstract. *The way students answer to questions is an important tool for analyzing the complexity of their mathematical thought. We propose an analytical model using the theoretical framework of David Tall theories about the complexity of the mathematical thinking, procept, proceptual divide and SOLO taxonomy of Biggs and Collis, and as an operational model the use of Activity Theory according to Engeström by showing how this allows to describe the analysis / evaluation of the answers produced by pre-service teacher training students (Graduation in Basic Education) to a question of Probability, showing the different levels of complexity of mathematical thought involved in its answers (three), all correct, and, the quality of their learning.*

Palavras-chave: Formação inicial de professores; Pensamento matemático avançado; Qualidade da aprendizagem; Taxonomia SOLO; Teoria da atividade.

Introdução

Muitas teorias têm sido formuladas para explicar como os alunos obtêm compreensão no domínio da matemática. Estas teorias têm sido a base de numerosas práticas educativas.

Niss (2007) argumenta que não existe uma teoria unificada da educação matemática, em vez disso cada teoria tem forças associadas que podem conduzir ao desenvolvimento de práticas efetivas que reconheçam quer as idiossincrasias dos alunos quer a natureza objetiva do domínio da matemática. Acreditamos que pela ligação conciliada de teorias

Martinho, M. H., Tomás Ferreira, R. A., Boavida, A. M., & Menezes, L. (Eds.) (2014).
Atas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática. Braga: APM., pp. 125–140

de aprendizagem e o subsequente desenvolvimento de práticas educativas, há a necessidade de um modelo para analisar a complexidade do pensamento matemático e a qualidade das aprendizagens.

Este trabalho insere-se num estudo mais vasto que tem por objetivo aumentar a coerência da fundamentação teórica relativa ao papel das respostas dos alunos na complexidade do pensamento matemático utilizando um modelo de análise sustentado na conceptualização de David Tall sobre o pensamento matemático avançado, os proceitos e a bifurcação proceptual juntamente com a taxonomia SOLO (Structure of Observed Learning Outcomes) de Biggs e Collis (1982).

No episódio relatado neste texto, estas conceptualizações foram adotadas como lentes pelas quais se podem analisar as respostas dos alunos de formação inicial de professores a uma questão de Cálculo da Probabilidade, recorrendo à terceira geração da teoria da atividade de Engeström (2001) como forma de compreender a diversidade das respostas dos alunos, vendo ao pormenor a qualidade das respostas (versão do aluno e visão do professor).

O modelo de análise proposto refere-se à utilização de um protótipo de um currículo de matemática aplicado numa Escola Superior de Educação. Neste texto, o modelo de análise é posto em prática, e pela sua aplicação geram-se evidências para demonstrar a sua viabilidade enquanto ferramenta para discutir e melhorar o conhecimento e a compreensão da complexidade do pensamento matemático e da qualidade das aprendizagens.

O modelo de análise foi desenvolvido e avaliado no contexto do Cálculo da Probabilidade. Esta área, na qual se explora, analisa e avalia o modelo, foi escolhida por duas razões: é um tópico razoavelmente pequeno do protótipo do currículo e os objetos matemáticos envolvidos podem ser operados pelos alunos de várias formas.

Enquadramento teórico

O pensamento matemático avançado

Em 1988, David Tall argumentou que o *pensamento matemático avançado* podia ser interpretado de duas formas distintas (Tall, 1988):

- Pensamento relacionado com a matemática avançada, ou
- formas avançadas de pensamento matemático.

Mas o que é o *pensamento matemático avançado*? Desde que a expressão foi introduzida por Gontran Ervynck em 1985 que tem existido discussão sobre o mesmo, alguns autores apontam para as diferenças cognitivas entre os alunos do ensino secundário e o início do ensino superior, outros defendem a origem dos conflitos cognitivos inerentes aos modos de pensamento matemático, em qualquer idade e com qualquer conteúdo matemático.

A abordagem *processual* da aprendizagem da matemática está sustentada em enquadramentos positivistas onde, por intermédio de um conjunto de procedimentos predefinidos (algoritmos, por exemplo) se obtém uma resposta. Está assente na ideia de que, ao fazer um número suficiente de exercícios similares o aluno obtém as rotinas necessárias para aprender matemática.

Gray e Tall (1994) utilizam o conceito de capsular um processo num objeto mental, enraizado nos trabalhos de Piaget, para sustentar ciclos de construção de estruturas mentais que na teoria de Piaget são os ciclos de assimilação e acomodação. A utilização de símbolos, contudo, tem um duplo significado, introduzindo alguma ambiguidade entre o *procedimento* e o *conceito* que definem por *proceito.* A forma como os alunos lidam com esta ambiguidade e os raciocínios que desenvolvem parece ser a raiz da qualidade das aprendizagens em matemática.

Bifurcação proceptual

A esta combinação de raciocínio *processual* e *conceptual* denomina-se de pensamento *proceptual*. Quando se evidencia uma inabilidade para relacionar este dois tipos de pensamento torna-se difícil desenvolver um conhecimento *conceptual,* dicotomia esta definida por *bifurcação proceptual*, sendo para Gray e Tall (1994), uma das maiores barreiras e um dos fatores que mais tem contribuído para falhas no ensino e na aprendizagem da matemática.

No processo de aprendizagem de um conceito e/ou objeto matemático um aluno que simplesmente repete procedimentos, mesmo que exista compressão do processo (que pode ser um algoritmo, uma fórmula, entre outros) pode não conseguir efetuar uma relação entre os dados de entrada e os resultados obtidos. Este procedimento pode ser lembrado por intermédio da experiência como um processo memorizado, relembrado quando necessário, combinando vários proceitos elementares, mas conduzem a outros proceitos elementares (definidos como um conjunto de processos, objetos e símbolos) Este tipo de raciocínios estão ligados a um pensamento processual.

A figura 1 representa essa bifurcação baseada num esquema apresentado por Gray (1993) no tema da aritmética, sendo adaptada para uma forma genérica.

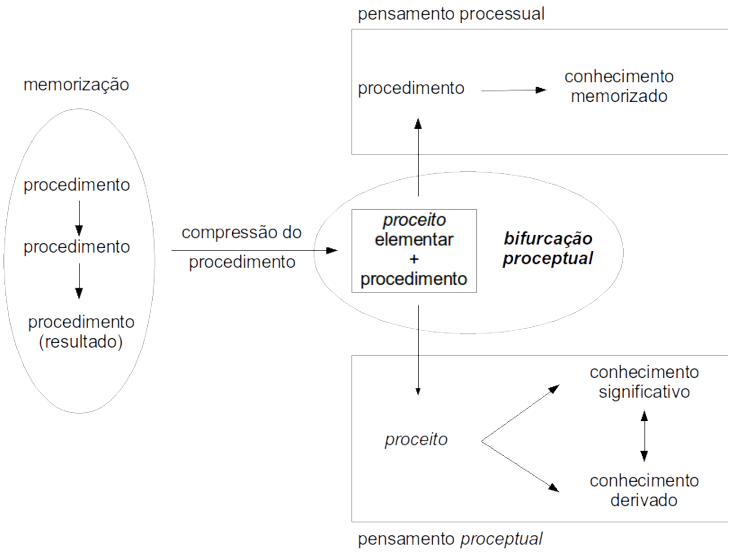

Figura 1. Identificação da *bifurcação proceptual* relacionando a aprendizagem de um objeto matemático com o pensamento processual e o pensamento *proceptual* baseado em Gray (1993).

Para ter raciocínios a um nível de pensamento *proceptual*, o aluno para além da compressão do processo, relaciona os dados recolhidos com os resultados obtidos. Podemos considerar que os novos *proceitos* resultam da combinação de *proceitos* elementares com outros processos abrangidos pela simbologia própria do conceito a estudar, o conhecimento adquirido assume um caráter significativo e não memorizado podendo ser utilizado em situações derivadas onde a sua aplicação não é tão evidente, ou em que a questão não é tão diretamente relacionada com um procedimento padrão.

Taxonomia SOLO (Structure of the Observed Learning Outcomes)

A ênfase na análise da qualidade das respostas dos alunos torna a taxonomia SOLO interessante para este modelo de análise. O foco não está no grau de correção das respostas, mas na natureza das mesmas, codificadas em categorias baseadas nos níveis SOLO permitindo uma descrição mais detalhada do desenvolvimento do raciocínio evidenciado pelos alunos e na qualidade das suas aprendizagens.

A qualidade das aprendizagens para Biggs e Collis (1982) depende de recursos exteriores ao aluno, tais como a qualidade do ensino e de recursos intrínsecos como a motivação, o estádio de desenvolvimento e o conhecimento prévio dos conteúdos. Para os autores, torna-se difícil identificar essa qualidade somente pela consideração dos estádios de desenvolvimento, mas mudando o ponto de vista da análise para as respostas do aluno identificam-se padrões que definiram a criação da taxonomia.

Esta distinção, é uma componente importante para a terminologia utilizada na taxonomia SOLO descrita de forma suscita na tabela 1, onde na primeira coluna se indica o nível da taxonomia – do mais complexo para o mais simples – na segunda coluna uma breve descrição do raciocínio envolvido em cada nível e na terceira coluna indicadores de resposta.

Tabela 1. Descrição dos níveis na taxonomia SOLO relacionando-os com os indicadores de resposta adaptado de Biggs e Collis (1982) e de Ceia (2002).

	Raciocínio	Indicadores
Abstrato	Vai para além do tópico, efetua conexões a outros conceitos e generaliza.	Teoria, generalização, testa hipóteses e usa reflexão. Evidencia capacidade máxima, utiliza dados relevantes e sua inter-relações. Não sente necessidade de responder de forma fechada possibilitando alternativas.
Relacional	Efetua conexões complexas e sintetiza partes do significado global.	Compara, explica as causas, integra, analisa, relata e aplica. Evidencia alta capacidade, utiliza dados relevantes e inter-relações. Não existem inconsistências dentro do tópico, mas responde de forma fechada.
Multi-estrutural	Efetua algumas conexões mas falta visão unificadora.	Enumera, classifica, descreve, lista, agrupa e trabalha com algoritmos. Evidencia capacidade média, consegue isolar os dados relevantes. Consegue obter conclusões diferentes com os mesmos dados.
Uni-estrutural	Efetua conexões simples sem identificar a sua importância.	Identifica, memoriza e efetua procedimentos simples. Evidencia baixa capacidade, aponta somente um dado relevante. Tira conclusões precipitadas baseadas num único aspeto.
Pré-estrutural	Disponibiliza informação solta e desorganizada, não relaciona.	Não relaciona os dados. Evidencia capacidade mínima, dá respostas confusas. Respostas inconsistentes.

Esta taxonomia é utilizada como uma ferramenta que permite um enquadramento sustentado na complexidade do pensamento matemático, tendo em vista a qualidade da aprendizagem e permite evitar a ênfase num único tipo de resposta ou raciocínio.

Teoria da Atividade

A Teoria da Atividade iniciada por Vygotsky e desenvolvida por Leont'ev, que assume o seu sistema de atividade coletiva (orientada por objetos e mediada por artefactos) como a unidade de análise, tem sido desenvolvida ao longo de três gerações, desde a ideia de *mediação* introduzida por Vygotsky no seu modelo triangular que refinada se transformou na tríade *sujeito – objeto – artefacto mediador,* deixando para trás a separação entre o indivíduo e o meio social envolvente (Engeström, 2001).

Numa segunda geração, centrada em Leont'ev para Engeström (2001) a unidade de análise deixou de ser individual e passou a incluir ligações a outras áreas envolvidas num sistema coletivo de atividade, focalizando-se agora nas inter-relações entre os objetos individuais e as comunidades. As noções de rede de atividade trouxeram a emergência de uma terceira geração, onde o modelo elementar se centra em, no mínimo dois sistemas de atividade em interação.

Na figura 2, estes objetos do sistema de atividade vão de um estado bruto, sem reflexão (objeto 1) para um objeto coletivo significativo para o sistema de atividade (objeto 2), até um objeto potencialmente partilhado pelos dois sistemas de atividade (objeto 3).

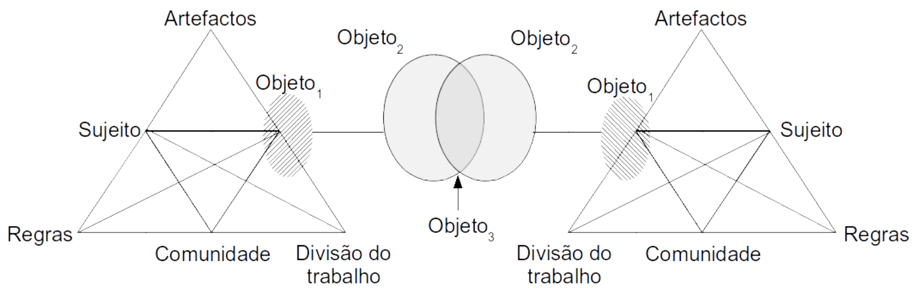

Figura 2. Modelo da 3.ª geração da Teoria da Atividade com dois sistemas de atividade a interagir (adaptado de Engeström, 2001).

O modelo do triângulo que sustenta o sistema de atividade evidencia as relações entre o *sujeito* e o *objeto* da atividade, mediado pela utilização de *artefactos*, a *comunidade* que partilha o objeto, a *divisão do trabalho* e as *regras* como o ambiente cultural e/ou institucional que medeia as relações entre o sujeito e a comunidade.

Cada elemento do sistema de atividade pode ser referenciado da seguinte forma:

- *Sujeito*, visto como o indivíduo ou o subgrupo sob o qual se obtém o ponto de vista da análise;
- *Objeto*, visto como o problema ou a parte do mundo material na qual a atividade existe de modo a obter um resultado;
- *Artefactos*, vistos como instrumentos de mediação, aqui podem ser reconhecidos como artefactos técnicos (instrumentos, calculadoras, etc.) ou artefactos psicológicos (imagens mentais, conceptualizações, etc.);
- *Comunidade*, vista como o coletivo dos sujeitos ou grupos onde se orienta a atividade em relação ao objeto;
- *Divisão do trabalho*, vista como a divisão horizontal das atividade e a divisão vertical do poder e responsabilidades; quem faz o quê na atividade em relação ao objeto;
- *Regras*, vista como a cultura partilhada do sistema de atividade com regras explícitas ou implícitas, processos, práticas culturais, normas, pontos de vista e convenções.

Um dos aspetos cruciais da Teoria da Atividade, para Engeström (1999) envolve a relação dialética, sustentada por Marx e Hegel das contradições entre os vários elementos do sistema de atividade.

Estas contradições não são vistas como um objeto vazio de conteúdo, mas sim um movimento que surge como solução das contradições internas e externas do sistema de atividade, ou no caso deste estudo, da interação entre dois sistemas. Esta relação causal é assim dialética e multidirecional.

Metodologia

Reconhecendo a dificuldade de transferir uma conceptualização teórica para a prática, o modelo de análise utiliza a conceptualização de Engeström (2001) enquanto instrumento de análise que não só conjetura mecanismos para a descrição do pensamento matemático (taxonomia SOLO), mas também inclui explicações sobre como os resultados identificados – a complexidade do pensamento matemático – podem ser analisados.

A opção metodológica pelo estudo de caso interpretativo prende-se com a necessidade de aplicação do modelo de análise a contextos reais, de forma a garantir a sua exequibilidade.

Um aspeto crucial deste modelo de análise é a proposta e utilização da Teoria da Atividade (Engeström et al, 1999) na qual se suporta a análise e descrição das respostas produzidas e sua compreensão, sustentada neste episódio por um estudo de caso (análise de três respostas – estas respostas foram selecionadas por estarem corretas e apresentarem formas diferentes de resolução - a uma pergunta de Cálculo da Probabilidade) de cariz interpretativo.

A questão analisada neste episódio faz parte integrante dos conteúdos lecionados na unidade curricular de Estatística e Probabilidades e está afeta aos módulos iniciais onde se estudam noções básicas de probabilidade, definindo a álgebra dos acontecimentos e introduz-se o cálculo, no sentido clássico, da probabilidade de um acontecimento.

Esta questão faz parte da frequência final da unidade curricular e está cotada com 20 pontos em 200 totais.

A referida questão tem o seguinte enunciado:

> *Os alunos de uma escola utilizam diversos meios de transporte na sua deslocação casa-escola;*

- *57% utilizam o autocarro;*
- *45% utilizam o metropolitano;*
- *32% utilizam o comboio;*
- *15% utilizam o comboio e o metropolitano;*
- *17% utilizam o autocarro e o comboio;*
- *42% utilizam o autocarro mas não o metropolitano;*
- *92% utilizam ou o autocarro ou o metropolitano ou o comboio.*

> *Qual é a percentagem de alunos que não utiliza qualquer daqueles meios de transporte?*

Este problema pressupõe que o aluno defina acontecimentos e que mobilize os conhecimentos, processos e procedimentos do cálculo de probabilidades, aplicando-os, nomeadamente na utilização dos teoremas que constam do formulário distribuído juntamente com o enunciado da frequência.

Esta questão foi analisada e identificada como possivelmente *multi-estrutural* de acordo com a taxonomia SOLO utilizada, o que indica que eram esperadas respostas contextualizadas e com dados relevantes retirados do enunciado, que fossem dadas dentro do contexto e usando aspetos relevantes e sem inconsistências utilizando dois ou mais conceitos ou dados.

Aplicação do modelo e análise dos dados

Assim, o modelo de análise baseia-se em dois sistemas de atividade (aluno e professor) e suas inter-relações de acordo com o esquema indicado nas figuras 3 e 4.

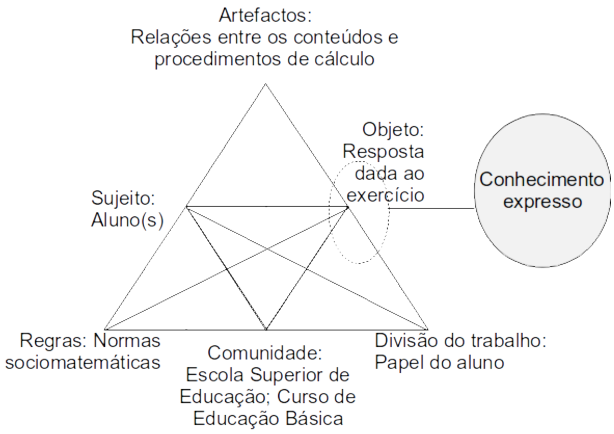

Figura 3. Representação do sistema de atividade do aluno.

Este sistema de atividade do aluno está centrado exclusivamente na resposta à questão analisada, daí que nas *regras* estejam expressas as normas sociomatemáticas do contexto, no conjunto dos *artefactos* estejam indicados os conteúdos, processos e procedimentos necessários para a resposta à mesma, já a *comunidade* e a *divisão de trabalho* são gerais e ligadas ao contexto onde o aluno está inserido.

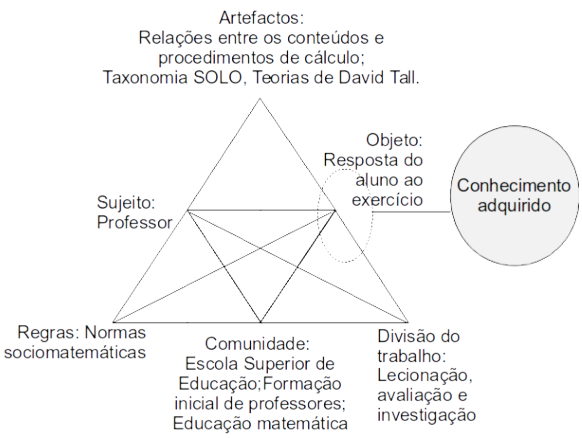

Figura 4. Representação do sistema de atividade do professor.

O sistema de atividade do professor, estando centrado na questão analisada para este episódio acaba por ser geral dado que os elementos constantes são transversais a qualquer questão, nomeadamente os artefactos ligados ao modelo de análise.

A ligação dos dois sistema de atividade, para Engeström (2001) só faz sentido quando confrontada com as contradições da unidade de análise, as diferenças nas contradições das três respostas analisadas salientam o caráter prático da aplicação do modelo.

Na primeira resposta analisada as contradições estão relacionadas com os *artefactos* e com o *objeto* de análise (a resposta dada pelo aluno A).

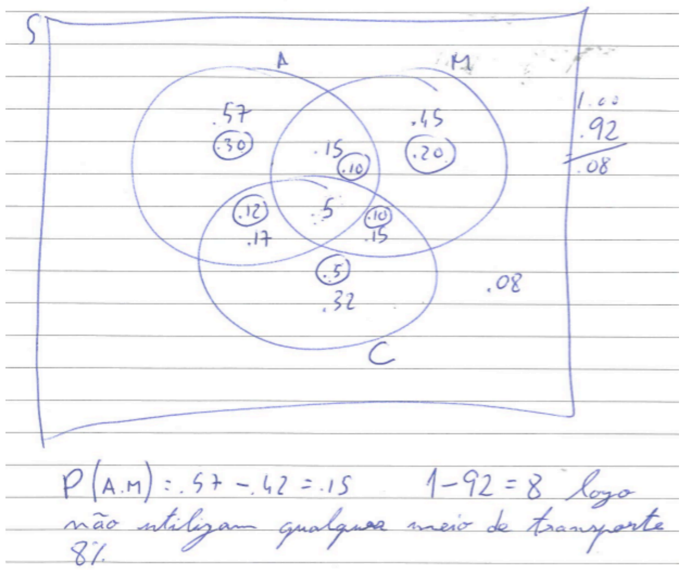

Figura 5. Resposta do aluno A, utilizando o diagrama de Venn.

O aluno A, para obter uma resposta correta, utilizou um diagrama de Venn que lhe permitiu identificar os valores em falta, e o valor necessário para a resposta. Esta estratégia gráfica apela aos conceitos aprendidos anteriormente na unidade curricular de Matemática I (1.º ano) no tópico da teoria elementar de conjuntos, ou seja, fez ligação com outras áreas o que permite identificar a resposta como de nível *relacional* (de acordo com a taxonomia SOLO) onde para além de identificar os dados relevantes, faz inter-relações com outras áreas do currículo e do conhecimento matemático.

A contradição surge na unidade de análise do aluno A entre os *artefactos* e o *objeto* (resposta dada pelo aluno) devido à utilização de outros conhecimentos matemáticos que não estão diretamente ligados, apesar de corretos, aos processos e procedimentos do cálculo da probabilidade, no sentido clássico, conferindo desta forma uma qualidade da aprendizagem que segundo Biggs e Collis (1982) vai para além de uma aprendizagem meramente operacional do tema.

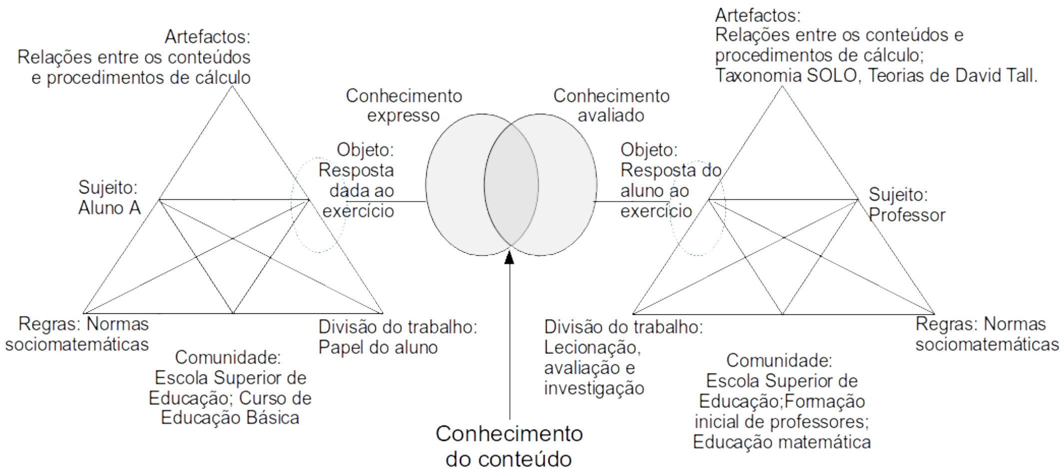

Figura 6. Contradições no sistema de atividade do aluno A.

A análise a esta resposta, seguindo as conceptualizações de Gray & Tall (1994), indica que o aluno A ultrapassou a *bifurcação proceptual* pois não se centrou exclusivamente nos conteúdos implícitos na área do tópico questionado, mesmo com a disponibilização dos teoremas em formulário (não existindo assim a necessidade de os memorizar), o que pode indiciar uma de duas situações: ou o aluno não utilizou os processos e procedimentos clássicos porque não se lembrou, ou a utilização de diagramas serve como forma de estudo preferencial deste aluno, por ter um raciocínio mais visual, e como lhe permite resolver o problema não se preocupou com os procedimentos clássicos.

Estas duas situações levantam interrogações sobre os *proceitos* envolvidos na resposta, indicando um aluno com necessidade de esquematizar o seu pensamento matemático como forma de justificar a sua resposta.

Na segunda resposta analisada não se identificam contradições nas unidades de análise pois o aluno responde exatamente como esperado.

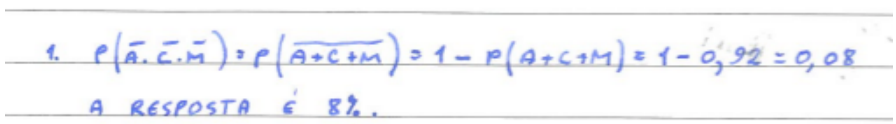

Figura 7. Resposta do aluno B, utilizando os teoremas segundo o processo clássico.

O aluno B, responde da forma considerada clássica, utilizando os teoremas estudados de forma direta, não necessitando de esquemas auxiliares, mesmo assim, a sua resposta foi classificada como potencialmente *relacional* (segundo a taxonomia SOLO).

Apesar de que, pela disponibilização dos teoremas em formulário, não ser possível identificar, pela sua resposta, se esta se deve ao domínio do tópico ou ao formulário, o que teria possivelmente alterado a sua classificação de *relacional* para *multi-estrutural*, caso esta se deva à utilização do formulário.

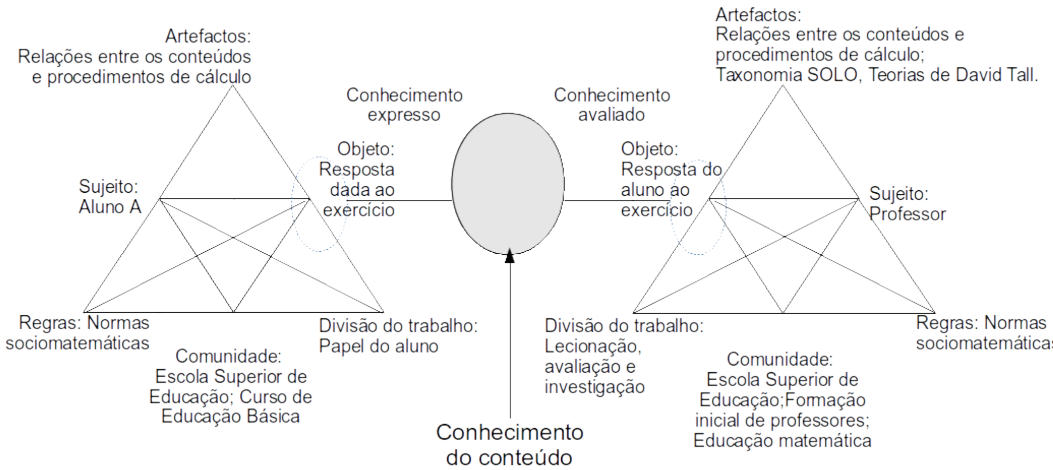

Figura 8. Sistema de atividade do aluno B, sem contradições.

Como neste caso não existem contradições, pela resposta analisada não se consegue chegar à conclusão se este aluno ultrapassou a *bifurcação proceptual*, assumindo, pela utilização dos teoremas enquanto algoritmos e estando estes disponíveis em formulário, que este aluno somente evidencia *pensamento processual*, daí a dúvida anterior entre classificar a resposta do aluno como *relacional* (ultrapassando a classificação esperada da resposta), ou como *multi-estrutural*, de acordo com a classificação esperada.

Este tipo de resposta esperada, igual ao resultado obtido, no modelo de análise levanta algumas questões, quando se pretende aferir da complexidade do pensamento matemático utilizando somente as respostas dos alunos, os *outcomes* como referem Biggs e Collis (1982) na génese da taxonomia SOLO. Principalmente quando se pretende tirar ilações para além da identificação do nível da taxonomia, o que se pretende com este modelo estudado. Assim, a principal questão levantada por este tipo de resposta é a da necessidade de obter algum *feedback* do aluno sobre a forma como respondeu.

O aluno C responde, mais uma vez corretamente, mas de uma forma diferente dos outros dois.

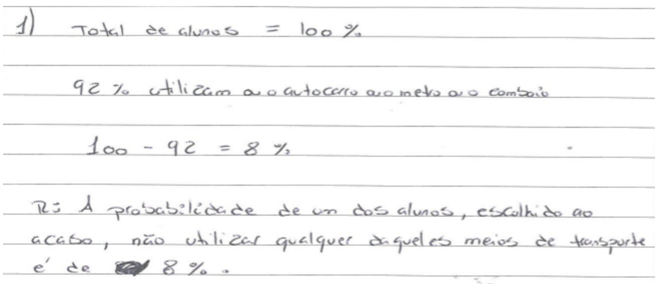

Figura 9. Resposta do aluno C, utilizando somente o raciocínio e a leitura do enunciado.

A resposta do aluno C, para além de permitir identificar o percurso do seu raciocínio, permite identificar as relações que este faz com a interpretação da pergunta e, ao contrário dos outros dois alunos analisados, não se fixa somente nos dados do enunciado completo, isolando os dados relevantes, característica de um nível *relacional*, potencialmente na fronteira com o nível *abstrato*, pois utiliza recursos de identificação de aspetos relevantes, ignorando os restantes dados.

As contradições evidenciadas pela resposta deste aluno no sistema de análise são semelhantes às identificadas no sistema de análise do aluno A, apesar da diferença entre o tipo de resposta esperada e a resposta avaliada.

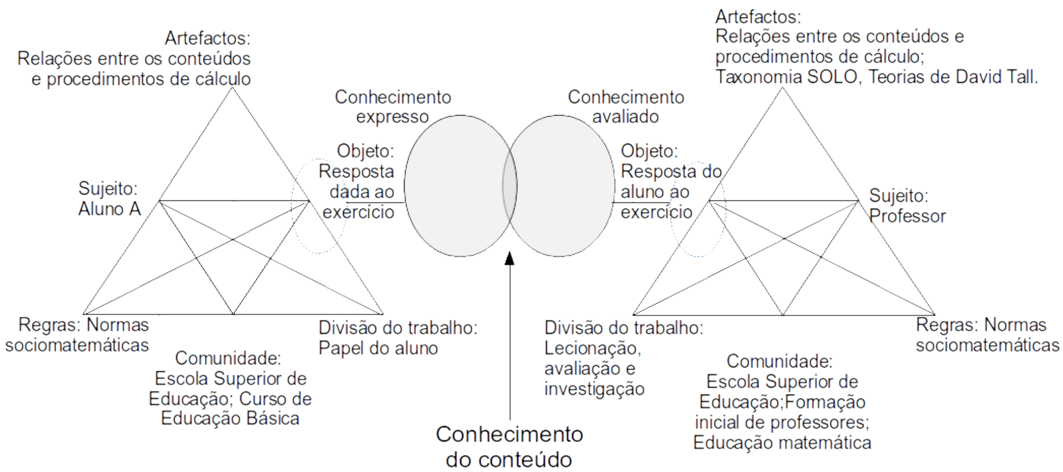

Figura 10. Contradições do sistema de atividade do aluno C.

O aluno C, ultrapassa claramente a *bifurcação proceptual*, evidenciando um raciocínio mais relacionado como *pensamento proceptual* onde, para além de evidenciar a compressão do procedimento (este procedimento segue a mesma lógica do aluno B), demonstra sinais de conhecimento significativo e derivado, pois, apesar de não responder de forma esperada, o raciocínio está correto, em termos da aferição da qualidade da aprendizagem, este aluno demonstra capacidade de relacionar vários conceitos, o que pode ser considerado como uma mais valia qualitativa em relação às duas respostas anteriores.

Este tipo de resposta levanta ainda outra questão, não tanto na aplicação do modelo de análise, mas na análise à própria avaliação em si. Apesar destas três respostas analisadas estarem todas corretas, não seria de esperar uma maior cotação da classificação para os alunos que conseguissem evidenciar raciocínios aparentemente mais complexos?

Tabela 2. Sistematização das contradições evidenciadas pelos sistemas de análise e ligação ao modelo de análise.

Sistema de atividade - aluno	Sistema de atividade - professor	Modelo de análise Nível SOLO esperado: *multi-estrutural*
Aluno A. *regras ↔ objeto* *artefacto ↔ objeto* Diagramas de Venn.	*regras ↔ objeto* *artefacto ↔ objeto* Resposta diferente do esperado.	Nível SOLO: *relacional* *Pensamento proceptual*, com evidências de conhecimento derivado.
Aluno B. *Sem contradições* Teoremas.	*Sem contradições* Resposta de acordo com o esperado.	Nível SOLO: *multi-estrutural* *Pensamento processual*, com evidências de conhecimento memorizado.
Aluno C. *regras ↔ objeto* *artefacto ↔ objeto* Texto, aritmética.	*regras ↔ objeto* *artefacto ↔ objeto* Resposta diferente do esperado.	Nível SOLO: *relacional*, potencialmente *abstrato*. *Pensamento proceptual*, com evidências de conhecimento significativo e derivado.

Considerações finais

Neste texto foram analisadas três respostas na área do Cálculo da Probabilidade colocadas a alunos da formação inicial de professores utilizando um modelo de análise baseado na complexidade do pensamento matemático e na qualidade das aprendizagens.

Partindo deste pressuposto, existe a necessidade de aferir o modelo de análise com atividades reais de modo a que se possam tecer considerações sobre os construtos teóricos e sua aplicação, para tal foi utilizado um instrumento sustentado pela teoria da atividade segundo Engeström et al (1999).

Da aplicação do modelo de análise às respostas dos alunos surgiram contradições entre as unidades de análise dos vários sistema de atividade envolvidos, que permitem elaborar algumas considerações relativas a:

- Diferentes formas dos alunos apresentarem as respostas para além do esperado pelo professor. Neste caso o aluno A respondeu recorrendo a diagramas de Venn e o aluno C recorrendo a um raciocínio identificado como pensamento proceptual denotando um raciocínio derivado.
- A forma como a questão foi colocada poderá induzir os alunos a um tipo específico de resposta, principalmente quando, é esperada a utilização de teoremas e esses teoremas são apresentados em formulário. A indução de um tipo específico de resposta pode ser visto como um fator contextual que não foi contemplado no âmbito deste texto, apesar disso, é um fator que deve ser considerado em estudos posteriores.
- Os diferentes tipos de raciocínios evidenciados pelas respostas analisadas poderão conduzir a uma classificação diferenciada, apesar de estarem todas corretas. Esta consideração está em linha com a noção de qualidade de aprendizagem suportada na fundamentação teórica (apesar de ser uma consideração a clarificar em estudos posteriores) onde a classificação possa não estar afeta somente a aspetos quantitativos (por exemplo, metas curriculares), mas também a competências matemáticas evidenciadas, independentemente do resultado obtido, desde que correto.

Este modelo sustenta-se na análise realizada às respostas escritas dos alunos numa tentativa de perceber a complexidade do seu pensamento matemático, evidencia utilidade para a avaliação e a sua aplicação não segue um protocolo extenso e complexo. A questão da qualidade das aprendizagens deve ser relevante nesta análise, onde de alguma forma poderia servir como fator de diferenciação.

Da análise à resposta do aluno B, surgem questões que não são respondidas sem que se possa aprofundar e individualizar mais algumas das vertentes do sistema de atividade.

O próximo passo na investigação passa pela necessidade de verificar a validade da análise através de entrevistas posteriores de forma a confirmar as ilações retiradas pelo modelo de análise.

Agradecimentos

Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projeto *Promover o Sucesso em Matemática* (contrato PTDC/CPE-CED/121774/2010).

Referências bibliográficas

Biggs, J., & Collis, K. (1982). *Evaluating the quality of learning*. London: Academic Press.

Ceia, M. (2002). *A taxonomia SOLO e os níveis de van Hiele*. Visualizado em http://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/2002/2002_15_MJMCeia.pdf

Engeström, Y. (2001). Expasive learning at work: toward an activity theoretical reconceptualization. *Journal of Education and Work*, 14 (1), 133-156.

Engeström, Y, Miettinen, R., & Punamäki, R-L (Eds) (1999). *Perspectives on Activity Theory*. Cambridge: Cambridge University Press.

Gray, E. (1993). Count-on: The Parting of the Ways for Simple Arithmetic. In N. Hirabayashi, K. S. Hohda & F.-L. Lin (Eds.). *Proceedings of XVII International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.I pp.204-2011), Tsukuba. Japan.

Gray, E., & Tall D. (1994). Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic. *The Journal for Research in Mathematics Education*, 25 (2), 116–140.

Niss, M. (2007). The concept and role of theory in mathematics education. In C. Bergsten, B. Grevholm, H. S. Måsøval & F. Rønning (Eds.). *Relating practice and research on mathematics education – Proceedings of NORMA05, fourth nordic conference on mathematics education* (pp. 97-110). Trondheim, Norway: Tapir Academic Press.

Tall, D. (1988). *The nature of advanced mathematical thinking, a discussion paper for PME – Hungary 1988*. Visualizado em http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1988i-nature-of-amt-pme.pdf