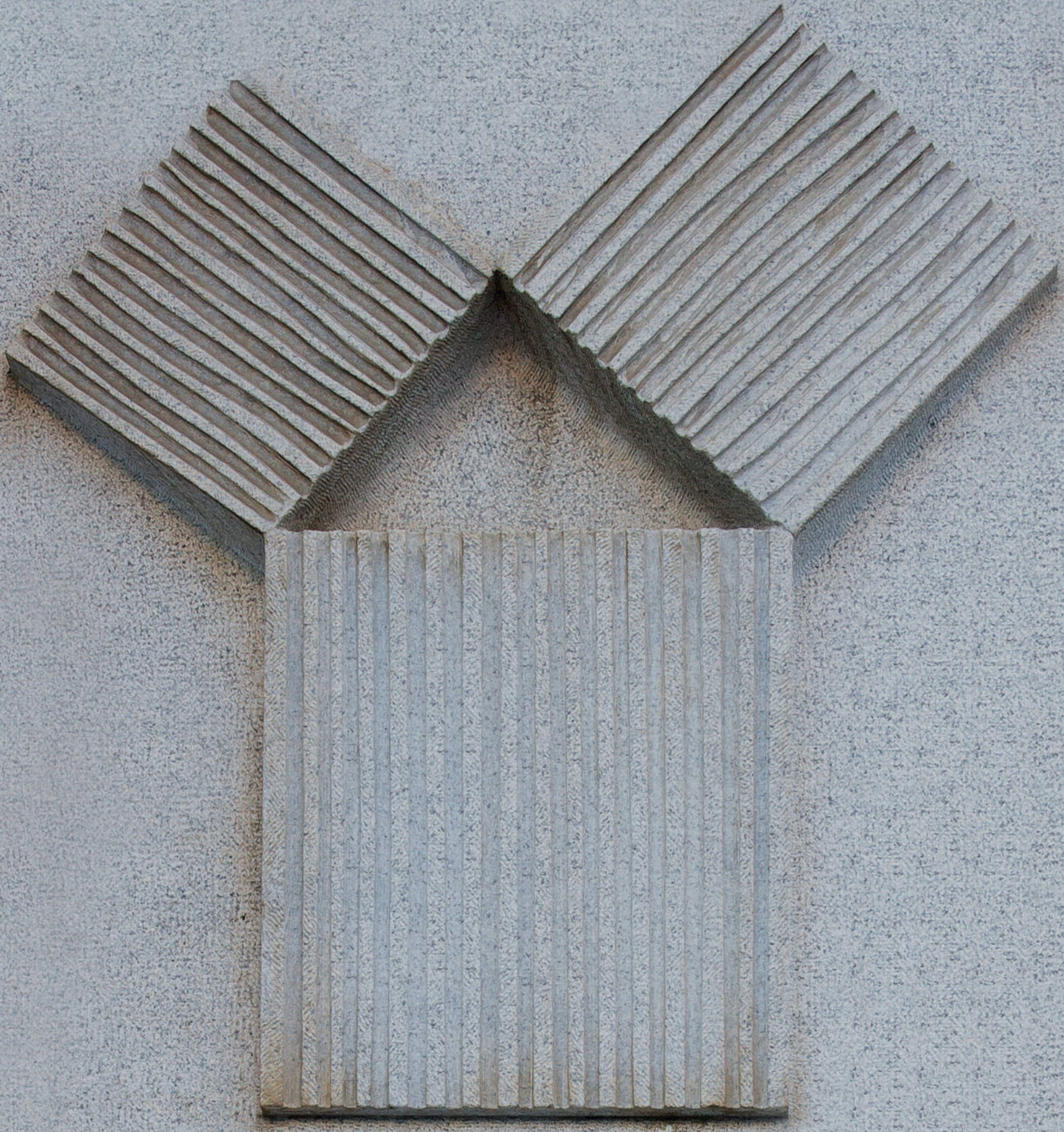


COIMBRA 6–7 OUTUBRO

XXIII SIEM

Título
Atas do XXIII Seminário de Investigação em Educação Matemática

Organizadores
Hélia Pinto, Hélia Jacinto, Ana Henriques, Ana Silvestre e Cláudia Nunes

Edição
Associação de Professores de Matemática
Lisboa, Outubro de 2012

ISBN: 978-972-8768-53-9

Apoios:

ÍNDICE

SIMPÓSIO 2 – GEOMETRIA E MEDIDA

SIMPÓSIO 3 – ÁLGEBRA E PENSAMENTO ALGÉBRICO

SIMPÓSIO 4 – PROBABILIDADES E RACIOCÍNIO ESTATÍSTICO

SIMPÓSIO 5 – CAPACIDADES TRANSVERSAIS

SIMPÓSIO 6 – FORMAÇÃO DE PROFESSORES E IDENTIDADE PROFISSIONAL

POSTERS

INTRODUÇÃO

O SIEM – Seminário de Investigação em Educação Matemática, é uma organização do Grupo de Trabalho de Investigação da Associação de Professores de Matemática. A sua vigésima terceira edição decorre, nos dias 6 e 7 de outubro de 2012, na Escola Secundária Quinta das Flores, em Coimbra.

Para além de proporcionar um espaço de expressão da comunidade de investigação no campo da Educação Matemática para divulgação, comunicação, confronto e discussão de ideias e trabalhos realizados, este Seminário procura promover a articulação entre a investigação nesta área e o ensino da Matemática. Assim, procura dar continuidade à sua tradição de aliar a investigação à prática.

O Seminário conta com a participação de cerca de uma centena e meia de professores e investigadores oriundos de Portugal, Espanha, Brasil e Reino Unido, 56 dos quais envolvidos na apresentação de comunicações orais e de *posters*. Esta grande afluência, que contribui para o sucesso do XXIII SIEM, reflete o interesse e preocupação de muitos investigadores e educadores matemáticos com a Educação Matemática.

As comunicações orais e os *posters* estão organizados em 6 simpósios, coordenados por investigadores convidados, e focados nos seguintes temas: Números e Operações; Geometria e Medida; Álgebra e Pensamento Algébrico; Probabilidade e Raciocínio Estatístico; Capacidades Transversais; e Formação de Professores e Identidade Profissional. Os simpósios têm como propósito reunir participantes com alguma afinidade nos temas versados nas comunicações, de forma a constituírem-se como espaços de discussão aprofundada.

Para além das comunicações e *posters*, o XXIII SIEM inclui três conferências plenárias e dois painéis. A primeira conferência plenária, a cargo de um convidado estrangeiro, é subordinada ao tema "Geometrical and spatial reasoning: Challenges for research in mathematics education" e proferida por Keith Jones da Universidade de Southampton, Reino Unido. As outras duas conferências são da responsabilidade de investigadores nacionais convidados. Uma delas, intitulada "O desenvolvimento do sentido da multiplicação e da divisão de números racionais: A divisão como produto de medidas" é proferida por Hélia Pinto da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Leiria. A outra é proferida por Cristina Martins, da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Bragança e tem como título "Contributos da participação no programa de formação contínua em matemática para o desenvolvimento profissional de professores do 1.º ciclo do ensino básico". Estas conferências plenárias têm como objetivo reunir os participantes numa reflexão sobre temas mais transversais ou ilustrar aspetos mais particulares do que se vai realizando em termos de investigação e da Educação Matemática em Portugal.

Os painéis plenários visam trazer à discussão, outras vertentes da investigação nesta área. O primeiro é dedicado à divulgação de três organizações internacionais que partilham a preocupação com o desenvolvimento e disseminação da investigação em Educação Matemática, nomeadamente a International Commission on Mathematical Instruction (ICMI), o International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), e a European Society for Research in Mathematics Education (ERME). Atualmente, Portugal tem várias individualidades a desempenharem cargos de relevo nas referidas organizações, respetivamente Jaime Carvalho da Silva, João Filipe de Matos e Leonor Santos, e que as apresentam num painel moderado por Ana Paula Canavarro. No segundo painel é apresentado um projeto de investigação, DROIDE II - Os robots na Educação Matemática e Informática -, coordenado por Elsa Fernandes da Universidade da Madeira que também modera a sessão. Participam neste painel, João Filipe de Matos, Sónia Abreu, Susana Carreira e Hélia Jacinto.

Neste documento, apresentam-se os textos remetidos pelos autores das conferências e das diversas comunicações orais e *posters* que foram aceites pelo painel de revisores, envolvidos no extenso processo de apreciação das propostas de comunicação e *posters* recebidas. Todo este processo não teria sido ainda possível, sem o valioso contributo dos doze investigadores convidados para moderarem os seis simpósios a decorrer.

Esperamos que o XXIII SIEM possa contribuir para divulgar os avanços, as novas tendências e o importante trabalho realizado, quer na investigação em Educação Matemática, quer na prática do ensino e aprendizagem da Matemática. Agradecemos a todos os que de alguma forma contribuíram e contribuem para a realização e sucesso deste seminário e esperamos que sintam que o tempo despendido foi profícuo.

Coimbra, outubro de 2012

A Comissão Organizadora

CONFERÊNCIAS PLENÁRIAS

GEOMETRICAL AND SPATIAL REASONING: CHALLENGES FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION

Keith Jones
University of Southampton, UK
d.k.jones@soton.ac.uk

Abstract

In this paper I examine evidence from research to argue that geometry education at the school level needs to attend to two closely-entwined aspects of geometry: the spatial aspects and the aspects that relate to reasoning with geometrical theory. Both of these aspects can be taught, but the challenge for research in mathematics education is to find way in which both geometric and spatial reasoning can be taught in a way that each supports the other.

Keywords: geometry, spatial, reasoning, research, mathematics education

Introduction

In the foreword to a book entitled *The Best Writing on Mathematics 2010*, the great mathematician Bill Thurston (1946 - 2012), in one of his last contributions to mathematics education, wrote:

> "We humans have a wide range of abilities that help us perceive and analyze mathematical content. We perceive abstract notions not just through seeing but also by hearing, by feeling, by our sense of body motion and position. Our geometric and spatial skills are highly trainable, just as in other high-performance activities. In mathematics we can use the modules of our minds in flexible ways - even metaphorically. A whole-mind approach to mathematical thinking is vastly more effective than the common approach that manipulates only symbols" (Thurston, 2011, p. xiii)

This quote captures, in a most elegant way, the themes of this paper: that geometric and spatial reasoning are essential to mathematics and that they can be taught in ways that enhance overall mathematical thinking. The challenge for research in mathematics education is how geometric and spatial reasoning can be taught in a way that supports what Thurston calls the "whole-mind approach to mathematical thinking" (ibid). In this paper I examine evidence from research to argue that geometry education at the school level needs to attend to two closely-entwined aspects of geometry: the spatial aspects and the aspects that relate to reasoning with geometrical theory. These twin aspects of geometry, the spatial and the deductive, I argue, are not separate; rather, they are interlocked. Just as the renowned mathematician Michael Atiyah refers to geometry as one of the two "pillars of mathematics" (Atiyah 2001, p. 657), alongside algebra, I argue in this paper that geometric and spatial reasoning are the *yin-yang* of geometry education in that they are interconnected and inter-dependent in such a way that each gives rise to the other.

In this paper, I first examine the nature of geometrical and spatial reasoning. Then, after a review of research with primary-school pupils, I review issues that impact on learners' progression in spatial and geometrical reasoning through the secondary school years. I conclude by suggesting issues that continue to present a challenge for research and where more evidence is needed. The overall thrust of what I say is adapted from the chapter on spatial and geometrical reasoning that I led for the book entitled *Key Ideas in Teaching Mathematics* due to be published in February 2013 (Watson, Jones & Pratt, in press). Where I can I use evidence from research that I have conducted, often in collaboration with colleagues internationally.

The nature of geometrical and spatial reasoning

A useful definition of geometry is one attributed to the mathematician, Christopher Zeeman: "geometry comprises those branches of mathematics that exploit visual intuition (the most dominant of our senses) to remember theorems, understand proof, inspire conjecture, perceive reality, and give global insight" (Royal Society, 2001, p. 12). This definition encapsulates what can be thought of as the dual nature of geometry in that it is both one of the most practical and reality-related components of mathematics, and it is an important area of mathematical theory. This means, on the one hand, that geometry can be seen all around us (and is widely utilised in art, design, architecture, engineering, and so on) while, on the other hand, it is simultaneously a theoretical field that allows geometers and other mathematicians, together with cosmologists and other scientists, to work with hypothetical objects in n-dimensional space using, amongst other things, mathematical visualisation techniques with high-powered computers.

The notion of 'figural concept' (Fischbein, 1993; Fischbein and Nachlieli, 1998) captures the combined role of the figural and the conceptual in geometry. This means that in 'seeing' a circle represented on paper, or on a computer screen, what we see is a textual representation of something which is an element of geometrical theory. One way to work with this dual nature of geometry is to distinguish between a ‘drawing’ and a ‘figure’ (Parzysz, 1988) in that, as Laborde (1993, p. 49) explains, ‘drawing refers to the material entity, while figure refers to a theoretical object’. Another way is to follow Phillips et al. (2010, p.3-4) and take a geometric diagram as “an unusual thing in that it is not an abstraction of an experienced object. Rather, it is an attempt to take an abstract concept and make it concrete”. In this sense, the term ‘geometric diagram’ is being used by Phillips (and by Laborde, 2004) to capture the idea that any geometric object that we see is both a material ‘drawing’ *and* a theoretical ‘figure’.

Ever since the time of Euclid’s Elements (the third century BCE, or thereabouts), geometrical reasoning has been synonymous with the deductive method. As such, for the purposes of this paper, I take geometrical reasoning to align with deductive reasoning. In terms of spatial reasoning, this is defined by Clements and Battista (1992, p. 420) as “the set of cognitive processes by which mental representations for spatial objects, relationships, and transformations are constructed and manipulated”. As such, spatial reasoning is a form of mental activity which makes possible the creation of spatial images and enables them to be manipulated in the course of solving practical and theoretical problems in mathematics. This links to visualisation, something which is generally taken as “the ability to represent, transform, generate, communicate, document, and reflect on visual information” (Hershkowitz, 1989, p. 75). Both spatial reasoning and visualisation play vital roles not only in geometry itself and in geometry education, but also more widely in mathematics and in mathematics education (Giaquinto, 2007; Jones, 2001).

In addition to Fischbein’s ‘figural concept’ noted above, influential researchers on the nature of spatial and geometrical reasoning, and its development in learners, include (in chronological order) Piaget, van Hiele, and Duval, amongst others. Here I have no space even to give a brief outline of each; for such detail, see Battista (2007, pp. 846-65). What such research suggests about the nature of spatial and geometrical reasoning is that various types of geometric ideas, both spatial and theoretical, appear to develop over time, becoming increasingly integrated and synthesised. Geometrical ideas symmetry, invariance, transformation, similarity and congruence relate to the more global mathematical ideas of proof and proving. Importantly, an ever-growing strand of research is examining the influence of the use of various classroom artefacts on the development of geometrical and spatial reasoning, especially the impact of computer-based tools (for teacher-oriented reviews, see Jones, 2005; 2012).

Geometrical and spatial reasoning across the primary school years

Research on geometrical and spatial reasoning during the pre-school and primary school years has examined classroom activities that engage learners in visualising, drawing, making, and communicating about two- and three-dimensional shapes (Levenson, et al., 2011; Roth; 2011). During these years, it seems that much geometry teaching focuses on the development of language for shape (for example, the names of polygons) and for location (for instance, left and right). Of course, knowledge of mathematical terminology is essential for modelling, visualising and communicating in all areas of mathematics. Even so, the problem can be that a heavy emphasis on descriptive language and definitions, even if relatively informal, at the expense of geometrical problem solving, might mean that children's progression in geometry during their primary school years is somewhat limited (Clements, 2003, pp.151-2; Jones and Mooney, 2003).

Through primary school, while young children may learn the names of simple shapes (though see below for some cautions regarding the influence of prototypical representations), it can be more difficult for them to recognise the relation between transformed shapes through rotation, reflection and enlargement. For example, primary school children are likely to need a lot of experience with transforming shapes before they are able to complete rotation or reflection patterns. This may be because children's earlier experiences of mathematical shapes focus primarily on enabling them to recognise the same shape whatever its location or size (for example, that a shape is a square no matter what size it is) rather than also helping them to be aware of relevant transformations of the shape. Research also indicates that children experience particular problems with measuring lengths and areas, even though they may understand the underlying logic of measurement. Similarly, learning how to represent angle mathematically is not straightforward for younger children, even though angles occur everywhere in their everyday life. For a very useful summary of such research, see Bryant (2009).

When young children are learning about 2D and 3D shapes, research has documented the ways in which they are likely to do some or all of the following: under-generalise by including irrelevant characteristics that inhibit generalisation, over-generalise by omitting key properties with a result that their generalisation is too wide, and incur language-related misconceptions (for example, that ‘diagonal’ means ‘slanting’). In a summary of such research, Hershkowitz (1990, p.82) shows how, for learners, each geometric object has “one or more prototypical examples that are attained first” that are “usually the subset of examples that had the ‘longest’ list of attributes of all the critical attributes of the concept and those specific (non-critical) attributes that had strong visual characteristics”. For example, learners are much better at recognising isosceles triangles that are ‘standing on their base’ compared to those presented in a different orientation.

Other issues that learners encounter related to naming shapes (and lines) are linked to matters of definition, and to learners’ embryonic understanding of necessary and sufficient conditions, and of inclusivity in defining (see below for more on issues of definition and defining). Examples of such issues include use of terms such as ‘oblong’ (for a rectangle that is not a square) and ‘diamond’ (for a specific orientation of a rhombus that is almost certainly a square), and the confusion between ‘regular’ and ‘symmetrical’.

One further thing that research suggests is not always fully taken into account in primary mathematics education is that children come to school with a good deal of knowledge about spatial relations, primarily because we inhabit a spatial world surrounded by spatial objects. This means, as Bryant (2009, p.3) puts it, that “one of the most important challenges in mathematical education is how best to harness this implicit knowledge in lessons”. For some examples of how this can be achieved at the primary school level, see Lehrer, et al. (1999). More such research is needed.

Progression in geometrical and spatial reasoning during secondary school

As is clear from what has already been said in this chapter, during their later school years it seems that students continuously move back and forth between what Laborde (1998) calls ‘spatio-graphic geometry’ (ie spatial reasoning) and ‘theoretical geometry’ (ie deductive reasoning). This means that when attempting a geometric proof, for example, a secondary school student might move from making conjectures using measures taken from a geometrical drawing, to using definitions and theorems, then go back to the drawing, and so on. This moving between ‘spatio-graphic geometry’ and ‘theoretical geometry’ relates to the issue of the sometimes uneasy relationship between measuring and proving in geometry.

This uneasy relationship exists even though in area measurement, for example, precise solutions can be obtained by considering the theoretical relationships between geometric shapes. For example, the ‘base x height’ rule for the area of rectangles applies in the same way to parallelograms and this can be proved by transforming a rectangle into a parallelogram with the same height and base (knowing that the transformation does not change the area). Similarly, the rule for finding the area of a triangle [Area = ½ (base × height)] can be justified by the fact that every triangle can be transformed into a parallelogram with the same base and height by doubling that triangle. Thus, rules for precise area measurement via formulae are built from the theoretical relations between geometric shapes. Here it is worth noting, as Bryant (2009, p. 22) confirms, that more research is needed on learners’ understanding of this centrally-important aspect of geometry and measurement.

At secondary school level, and even beyond to undergraduate level, learners can experience difficulties in using definitions appropriately and may not fully appreciate the role of definitions in geometry (Edwards and Ward, 2004; Vinner, 1991). Yet, as Freudenthal (1971, pp. 424) pointed out “Though the teacher can impose definitions…, this means degrading mathematics to something like spelling, ruled by arbitrary prescriptions”. As such, one way to overcome such issues is for students to be actively engaged in the defining of geometric objects, as exemplified by de Villiers (1998) in the case of quadrilaterals.

In terms of the idea of geometric similarity, Friedlander and Lappan (1987, p.36) list a range of mathematics that is related, including enlargement, scale factor, projection, area growth, and indirect measurement. These, say Friedlander and Lappan, are “frequently encountered by children in their immediate environment and in their studies of natural and social sciences” (ibid.). What is more, similar geometric shapes provide helpful mental images of ratios and equivalent fractions, and provide a model for some rational number concepts. Ideas of similarity extend to trigonometry and to the notion of self-similarity that is characteristic of fractal geometry.

Bearing in mind the geometrical ideas of symmetry, invariance, transformation, similarity and congruence, there are many reasons, as Freudenthal (1971, p.434) explains, why a focus on symmetries is a good idea. This is not to say that symmetry is simple or uncomplicated to teach. Research tracing the development of students' knowledge of symmetry in school geometry, such as that by Leikin et al. (2000), has revealed a range of difficulties that learners encounter with ideas of symmetry. These range from straightforward errors such as identifying an incorrect symmetry axis, or failing to recognise a correct symmetry axis, to difficulties with reflecting in oblique lines. There are matching difficulties when secondary school students work with symmetry in three-dimensions (Cooper, 1992). Research with suitable digital technologies is providing examples of how students might gain a more multi-faceted appreciation of symmetry (e.g., Hoyles and Healy, 1997; Clements et al., 2001).

Invariance, like symmetry, while a central idea of mathematics in general, is especially relevant and important in geometry. Most theorems in geometry can be seen as resulting from the study of what change is permitted that leaves some relationships or property invariant. There is research indicating that the use of transformations can be a means by which ideas of invariance can be studied most easily and by which the formal definitions of congruence and similarity can be related to learners' previous intuitive ideas. Here is a place where research indicates that digital technologies such as DGS can play a valuable role (see Hollebrands et al., 2008; Laborde et al., 2006).

While an important aim of geometry teaching is for students to develop their geometric and spatial reasoning in order that they can tackle relatively complex problems productively, research with which I have been involved indicates that even though many Grade 9 students in Japan can write down a proof, *around 70% do not understand why proofs are needed* (Kunimune, Fujita & Jones, 2009; 2010). Such research raises a number of challenges for research. These include: what geometrical definitions might be used when formulating geometrical problems for classroom use and how might students be involved in constructing definitions, and with what consequences? How do different (or even differently-orientated) representation of geometric objects, including representations constructed using software, impact on students reasoning in geometry? What is the impact of teacher's instructions on students' reasoning in geometry?

Concluding comments

This paper argues that school geometry is not solely about naming shape or proving circle theorems; rather, as Malkevitch (2009, p.14) illustrates, geometry is more akin to "the branch of mathematics that studies visual phenomena" in all their glories and richness. This is why geometry is such an important part of the school mathematics curriculum, and why the teaching of geometry across the school years needs to ensure a sustained focus on the twinned aspects of geometry: the spatial aspects, and the aspects that relate to reasoning with geometrical theory. In forming the *yin-yang* of geometry education, each gives rise to the other and each only exists in relation to the other.

Del Grande (1990, p.19) argued some time ago that "geometry has been difficult for pupils due to an emphasis on the deductive aspects of the subject and a neglect of the underlying spatial abilities acquired by hands-on activities that are necessary prerequisites for understanding and mastery of geometrical concepts". Bill Thurston put it this way:

> "We have an inexorable instinct that prompts us to convey through speech content that is not easily spoken. Because of this tendency, mathematics takes a highly symbolic, algebraic, and technical form. Few people listening to a technical discourse are hearing a story. Most readers of mathematics (if they happen not to be totally baffled) register only technical details - which are essentially different from the original thoughts we put into mathematical discourse. The meaning, the poetry, the music, and the beauty of mathematics are generally lost....
>
> Another source of the cloud of illusions that often obscures meaning in mathematics arises from the contrast between our amazingly rich abilities to absorb geometric information and the weakness of our innate abilities to convey spatial ideas - except for things we can point to or act out.... Since our minds all have much in common, we can indeed describe mental images in words, than surmise and reconstruct them through suggestive powers. This is a process of developing mental reflexes and, like other similar tasks, it is time-consuming. We just need to be aware that this is the task and that it is important, so that we won't instinctively revert to a symbolic and denatured encoding….
>
> A whole-mind approach to mathematical thinking is vastly more effective than the common approach that manipulates only symbols" (Thurston, 2011, p. xi-xiii)

The great challenge for research in mathematics education is how geometric and spatial reasoning can be taught in a way that supports what Thurston calls the "whole-mind approach to mathematical thinking" (ibid).

References

Atiyah, M. (2001). Mathematics in the 20th Century, *American Mathematical Monthly*, 108(7), 654-666.

Battista, M.T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843-908). Reston, VA: NCTM.

Bryant, P. (2009). Paper 5: Understanding space and its representation in mathematics. In: *Key Understandings in Mathematics Learning*. London: Nuffield Foundation.

Clements, D. H. (2003). Teaching and learning geometry. In J. Kilpatrick, W.G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 151–178). Reston, VA: NCTM.

Clements, D.H. & Battista, M.T. (1992), Geometry and spatial reasoning. In D.A. Grouws (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan.

Clements, D. H., Battista, M. T. and Sarama, J. (2001). *Logo and Geometry* (Journal for Research in Mathematics Education, Monograph Number 10). Reston, VA: NCTM.

Cooper, M. (1992). Three-dimensional symmetry, *Educational Studies in Mathematics*, 23(2), 179-202.

de Villiers, M. (1998). To teach definitions in geometry or teach to define? In A. Olivier and K. Newstead (Eds.), *Proceedings of PME22*. (Vol. 2, pp. 248-255). PME: Stellenbosch.

Del Grande, J. (1990). Spatial sense, *Arithmetic Teacher*, 37(6), 14-20.

Edwards, B. S., & Ward, M. B. (2004). Student (mis)use of mathematical definitions. *American Mathematical Monthly*, 111(5), 411–424.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24(2), 139-162.

Fischbein, E. & Nachlieli, T. (1998). Concepts and figures in geometrical reasoning, *International Journal of Science Education*, 20(10), 1193-1211.

Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics*, *3*(3&4), 413–435.

Friedlander, A. & Lappan, G. (1987). Similarity: investigations at the middle grades level. In M. Lindguist & A. Shulte (Eds.). *Learning and Teaching Geometry, K-12* (pp. 136-143). Reston, VA: NCTM.

Giaquinto, M. (2007). *Visual Thinking in Mathematics*. Oxford: Oxford University Press.

Hershkowitz, R. (1989). Visualization in geometry: two sides of the coin, *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1&2), 61-76.

Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and Cognition* (pp. 70–95). Cambridge: CUP.

Hollebrands, K., Laborde, C., & Strasser, R. (2008). Technology and the learning of geometry at the secondary level. In M.K. Heid & G. Blume (Eds.), *Research on Technology in the Learning and Teaching of Mathematics* (pp. 155-205). Greenwich, CT: InfoAge.

Hoyles, C. & Healy, L. (1997). Unfolding meanings for reflective symmetry, *International Journal of Computers in Mathematical Learning*, 2(1), 27-59.

Jones, K. (2001). Spatial thinking and visualisation. In *Teaching and learning geometry 11-19* (pp. 55-56). London: Royal Society.

Jones, K. (2005). Using Logo in the teaching and learning of mathematics: a research bibliography, *MicroMath*, 21(3), 34-36.

Jones, K. (2012). Using dynamic geometry software in mathematics teaching: a revised research bibliography, *Mathematics Teaching*, 229, 49-50.

Jones, K. & Mooney, C. (2003). Making space for geometry in primary mathematics. In: I. Thompson (Ed.), *Enhancing Primary Mathematics Teaching* (pp. 3-15). London: Open University Press.

Kunimune, S., Fujita, T. & Jones, K. (2009). "Why do we have to prove this?" Fostering students' understanding of 'proof' in geometry in lower secondary school. In F-L. Lin, F-J. Hsieh et al. (Eds.), *Proceedings of ICMI Study 19 Conference: Proof and Proving in Mathematics Education* (Vol 1, 256-261). Taipei, Taiwan: NTNU.

Kunimune, S., Fujita, T., & Jones, K. (2010). Strengthening students' understanding of 'proof' in geometry in lower secondary school. In V. Durand-Guerrier et al. (Eds), *Proceedings of CERME6* (pp756-765). Lyon, France: ERME.

Laborde, C. (1993). The computer as part of the learning environment: The case of geometry. In C. Keitel & K. Ruthven (Eds.), *Learning through Computers: Mathematics and Educational Technology* (pp. 48–67). Berlin: Springer.

Laborde, C. (1998). Relationship between the spatial and theoretical in geometry. In J. D. Tinsley & D. C. Johnson (Eds.), *Information and Communications Technologies in School Mathematics* (pp. 183-195). London: Chapman & Hall.

Laborde, C. (2004). The hidden role of diagrams in pupils' construction of meaning in geometry. In J. Kilpatrick, C. Hoyles & O. Skovsmose (Eds.), *Meaning in Mathematics Education* (pp. 159–179). Dordrecht: Kluwer.

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K., & Strasser, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 275–304). Rotterdam: Sense Publishers.

Lehrer, R., Jacobson, C., Kemeny, V., & Strom, D. (1999). Building on children's intuitions to develop mathematical understanding of space. In E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics Classrooms that Promote Understanding* (pp. 63–87). Mahwah: LEA.

Leikin, R., Berman, A. & Zaslavsky, O. (2000). Learning through teaching: the case of symmetry. *Mathematics Education Research Journal*, 12(1), 16–34.

Levenson, E., Tirosh. D. & Tsamir, P. (2011). *Preschool Geometry: Theory, research, and practical perspectives*. Rotterdam: Sense Publishers.

Malkevitch, J. (2009). What is geometry? In Craine, T. & Rubenstein, R. (Eds.). *Understanding Geometry for a Changing World*, 71st Yearbook. (pp. 3-16). Reston, VA: NCTM.

Parzysz, B. (1988). Knowing vs. Seeing: Problems of the plane representation of space geometry figures, *Educational Studies in Mathematics*, 19(1), 79-92.

Phillips, L. M., Norris, S. P. & Macnab, J. S. (2010). *Visualization in Mathematics, Reading and Science Education*. New York: Springer.

Roth, W.-M. (2011). *Geometry as Objective Science in Elementary Classrooms*. New York: Routledge.

Royal Society (2001). *Teaching and Learning Geometry 11-19*. London: Royal Society.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In Tall, D. (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer.

Thurston, W. P. (2011). Foreword. In M. Pitici (Ed.), *The Best Writing on Mathematics 2010* (pp. xi-xiii). Princeton, USA: Princeton University Press.

Watson, A., Jones, K. & Pratt, D (in press), *Key Ideas in Teaching Mathematics: Research-based guidance for ages 9-19*. Oxford: Oxford University Press.
Website: http://www.nuffieldfoundation.org/key-ideas-teaching-mathematics

O DESENVOLVIMENTO DO SENTIDO DA MULTIPLICAÇÃO E DA DIVISÃO DE NÚMEROS RACIONAIS: A DIVISÃO COMO PRODUTO DE MEDIDAS

Hélia Gonçalves Pinto
Escola superior de Educação e Ciências Sociais, Instituto Politécnico de Leiria
helia.pinto@esecs.ipleiria

Resumo

Este artigo apresenta um excerto de uma análise transversal realizada no âmbito de uma investigação, que teve como objetivo estudar o desenvolvimento do sentido da multiplicação e da divisão de números racionais[1] *em alunos do 6.º ano de escolaridade. Na investigação adotou-se o paradigma interpretativo, qualitativo e o estudo de casos múltiplos como design. Estudaram-se as trajetórias de aprendizagem de três alunos, recorrendo-se a entrevistas, observação e análise documental. O estudo decorreu da realização de uma unidade de ensino, a uma turma do 6.º ano de escolaridade, que integrava os alunos estudados. Estes foram selecionados com base nos desempenhos que apresentaram em pré-testes, que tiveram como objetivo avaliar o seu desenvolvimento ao nível das estruturas multiplicativas e consequente sentido das operações: multiplicação e divisão. Por conseguinte, foi selecionado, um aluno com bom desempenho, outro com desempenho médio e um terceiro com fraco desempenho. Os resultados permitem caraterizar o trajeto de aprendizagem realizado pelos alunos e sugerem que todos desenvolveram sentido da multiplicação e da divisão de números racionais e por consequência, a eficácia da unidade de ensino, que contextualizou o estudo, no referido desenvolvimento. Dado o foco deste artigo, após a apresentação das fases principais do estudo para enquadramento dos referidos casos, surge uma análise transversal das estratégias adotados pelos alunos e dificuldades sentidas na resolução de tarefas de divisão de números racionais, em contexto de produto de medidas. Assim, tendo por base o trabalho feito na unidade de ensino, são dados exemplos de produções dos alunos que ilustram a importância da resolução de tarefas em contextos significativos, que envolvem a divisão como produto de medidas, no desenvolvimento do sentido desta operação.*

Palavras-chave: Números racionais, Educação Matemática Realista, Estruturas multiplicativas, Sentido de operação.

Introdução

Os números racionais são um dos temas mais importante do currículo elementar porque promove o desenvolvimento das estruturas cognitivas que são cruciais à aprendizagem matemática futura (Streefland, 1991; Behr, Lesh, Post & Silver, 1983). Dada esta importância, Lamon (2007) reivindica mais investigação nesta área, salientando que há mais de uma década que pouco se tem progredido na descoberta da complexidade do

[1] Ao longo deste artigo a referência aos números racionais restringe-se aos não negativos.

ensino e da aprendizagem deste tema. Em Portugal, a investigação que tem sido nesta área é escassa e recente. Assim, são necessárias mais investigações que permitam perceber como se pode desenvolver o sentido de número racional, bem como o sentido das operações com números racionais. Importa continuar a desenvolver abordagens de ensino-aprendizagem que conduzam os alunos a uma interiorização significativa dos algoritmos, tentando perceber o seu percurso no âmbito dessas abordagens, nomeadamente, de como desenvolvem e usam os conceitos de multiplicação e divisão de números racionais.

Por conseguinte, e com o propósito de perceber como se desenvolve o sentido da multiplicação e da divisão de números racionais em alunos do 6.º ano de escolaridade, realizou-se um estudo, que decorreu da realização de uma unidade de ensino. Fundamentada nos princípios básicos da Educação Matemática Realista e na Teoria dos Campos Conceptuais principalmente, no que concerne ao desenvolvimento das estruturas multiplicativas, a unidade de ensino comtemplou ainda, o desenvolvimento de componentes consideradas essenciais num ensino-aprendizagem significativos das referidas operações. Neste contexto, estudaram-se as trajetórias de aprendizagem de três alunos, com o objetivo de identificar e analisar o processo de desenvolvimento e uso significativo dos conceitos de multiplicação e divisão de números racionais de cada um dos alunos. Concretamente, procurou-se identificar e analisar as estratégias adotadas pelos alunos e dificuldades sentidas, na resolução de tarefas de multiplicação e divisão de números racionais, em contextos significativos, antes, durante, no fim e seis meses depois da realização de uma unidade de ensino envolvendo estes conceitos. Naturalmente identificaram-se potencialidades e limitações da referida unidade ao longo da sua realização.

Neste artigo é apresentada a análise transversal dos trajetos realizados pelos três alunos-caso, no âmbito do ensino-aprendizagem da divisão de números racionais em contexto de produto de medidas. Assim, é feita uma análise ao desempenho apresentado pelos alunos antes, durante, no fim e seis meses depois do ensino-aprendizagem da divisão como produto de medidas; não sem antes se fazer o respetivo enquadramento dos casos. São tecidas algumas considerações finais sobre o processo de matematização dos alunos, ou seja, o progresso apresentado pelos alunos durante o ensino-aprendizagem da divisão de números racionais no referido significado.

Educação Matemática Realista

A filosofia da Educação Matemática Realista (EMR) fundamenta-se essencialmente na conceção de Freudenthal (1973, 1991) da matemática como uma atividade humana (Gravemeijer, 1994; Streefland, 1991; Treffers, 1991; van den Heuvel-Panhuizen & Wijers, 2005). Nesta perspetiva, a matemática não é vista como um corpo de conhecimentos, mas como uma atividade de resolver problemas em contextos reais, atividade a que Freudenthal (1973, 1991) chama de *matematização*, salientando que sem esta, não existe matemática. O autor entende que as estruturas matemáticas não são uma referência fixa, mas emergem da realidade e expandem-se continuamente em processos de aprendizagem individuais e coletivos. Deste modo, na EMR os alunos são participantes ativos no processo de aprendizagem que ocorre dentro do contexto social da sala de aula, dado que a matemática aprende-se, fazendo.

Para Freudenthal (1973, 1991), a matemática deve ser *reinventada* pelos alunos num processo de *matematização*, que considera o processo chave do ensino-aprendizagem da matemática. O autor propõe *reinvenção guiada* precisamente por reconhecer que os alunos não conseguem simplesmente *reinventar* a matemática que levou milhares de anos a ser inventada por matemáticos brilhantes. Argumenta ainda, que o passo final dos matemáticos quando desenvolvem matemática é a formalização através de axiomas, pelo que este não deve ser o ponto de partida para o ensino-aprendizagem da matemática, dado que inverte a forma como os matemáticos inventaram a matemática. Logo, considera *anti didático* iniciar-se o ensino-aprendizagem da matemática pelos axiomas. Assim, reforça a sua conceção, de que o objetivo da Educação Matemática deve ser o de proporcionar aos alunos um processo de *reinvenção guiada*, que lhes permita participarem num processo de aprendizagem semelhante às condições que circundam o desenvolvimento histórico da própria matemática.

Treffers (1991) enuncia de forma precisa duas componentes intimamente relacionadas no processo de *matematização* num contexto educacional: (i) *matematização horizontal* - processo de transformar um problema do quotidiano numa questão problemática matemática, isto é, os alunos produzem modelos matemáticos que os ajudam a organizar e resolver um problema do dia-a-dia, e (ii) *matematização vertical* - processo de reorganizar e expandir o conhecimento e capacidades dentro do próprio sistema matemático, por exemplo, encontrando atalhos e descobrindo conexões entre conceitos e estratégias e aplicando estas descobertas. Freudenthal (1991) adota esta distinção, referindo *matematização horizontal* como o estabelecimento de ligações entre o mundo percecionado e o mundo dos símbolos e *matematização vertical* como o processo de reorganização dentro do mundo dos símbolos. Salienta que embora esta distinção pareça estar livre de ambiguidade, não significa que a diferença entre estes dois mundos seja bem definida. Segundo o autor, as fronteiras entre o que é *matematização vertical* e o que é *matematização horizontal* têm a ver com o que cada um de nós entende por realidade. "Prefiro aplicar o termo realidade àquilo que, a um certo nível, o senso comum sente como real" (p. 17). Enfatiza ainda, que estas duas formas de *matematização* são de igual valor e que ambas ocorrem em diferentes níveis da compreensão.

O processo de *matematização* é então um processo progressivo onde o conhecimento se vai tornando cada vez mais formal e abstrato. Segundo Freudenthal (1973, 1991), Gravemeijer (1994, 2005), Streefland (1991), Treffers (1991) e van den Heuvel-Panhuizen, e Wijers, (2005) na EMR, as estratégias informais usadas pelos alunos na resolução de problemas em contextos reconhecíveis, são a base para o processo de desenvolvimento de conceitos e conexões entre eles, bem como para chegar a procedimentos formais através de um processo gradual de esquematização, abreviação e generalização. Por isso, salientam a necessidade de se proporcionarem aos alunos situações de ensino-aprendizagem que os estimulem à atividade de modelação, recorrendo a desenhos, diagramas, ou tabelas, já que é através dos modelos que os alunos progridem do conhecimento informal para o formal. De acordo com os autores, os modelos funcionam como suportes de aprendizagem na passagem do conhecimento concreto para o abstrato, num percurso que tem início com a exploração de contextos significativos e que, por um processo de *matematização* progressiva, chega a conceitos matemáticos generalizados e abstratos.

Segundo Gravemeijer (1994, 2005), os modelos emergem da atividade dos alunos como *modelos de* uma situação que lhes é familiar e transformam-se, mais tarde, através de um processo de generalização e formalização, em *modelos para* o raciocínio matemático mais formal. Refere que esta transformação do modelo corresponde a uma alteração na forma de pensar do aluno, dado que o enfoque deixa de ser no contexto da situação modelada, para passar a ser nas relações matemáticas. Assim, distingue dois tipos de atividade, a referencial - na qual o significado de agir com o modelo deriva da atividade do contexto descrito nas atividades de ensino; e a geral - na qual o significado de agir com o modelo deriva das relações matemáticas presentes. Considera que estes tipos de atividades surgem em diferentes níveis e que se podem completar, por um lado, com um nível de atividade no próprio contexto das tarefas e, por outro, com um nível de atividade matemática mais formal onde os alunos já não necessitam de um modelo (Figura 1).

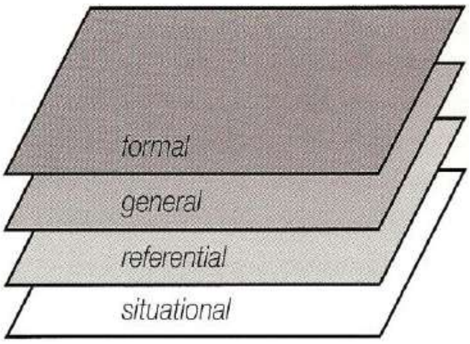


Figura 1: Níveis de atividade (Gravemeijer, 2005, p.98)

Em suma, a distinção entre *modelo de* e *modelo para*, pode ser clarificada pela junção de quatro níveis gerais de atividade:

> (1) Atividade na situação da tarefa, na qual as interpretações e resoluções dependem da compreensão de como agir no contexto;
>
> (2) Atividade referencial, na qual cada *modelo de* refere-se a atividades na situação descrita nas atividades de ensino;
>
> (3) Atividade geral, na qual os *modelos para* referem-se a um quadro de representações matemáticas;
>
> (4) Raciocínio matemático formal, o qual não depende de modelos para a atividade matemática (Gravemeijer, 2005, p. 98).

Segundo o autor, no nível referencial os modelos fundamentam-se na compreensão de contextos experienciais reais e, o nível geral começa a emergir quando os alunos começam a focalizar-se nas relações matemáticas envolvidas. “A abordagem do modelo emergente ajuda os alunos a construírem uma realidade matemática, por eles próprios” (Gravemeijer, 2005, p.98). Porém, salienta: (i) que os modelos devem emergir de situações concretas, permitindo aos alunos o recurso às suas estratégias informais; (ii) fomentar o processo de matematização progressiva; e (iii) ter potencial para se transformarem numa entidade própria no decurso do processo de aprendizagem.

Estruturas multiplicativas

Um campo conceptual, de acordo com Vergnaud (1983, 1988), é um conjunto de situações para cuja resolução é necessário recorrer a uma teia de conceitos. Nesta perspetiva, um conceito não se desenvolve isoladamente, mas antes em relação com outros, através de várias espécies de problemas e recorrendo a diferentes formas de representação, entre elas os símbolos matemáticos. Segundo o autor, a multiplicação e a divisão, bem como a combinação destas operações enquadram-se no campo conceptual das estruturas multiplicativas, que é gerado por diferentes casos de proporção simples e de proporção múltipla que podem ser combinados de diferentes formas. Salienta que a relação de multiplicação constitui uma relação quaternária entre valores de duas variáveis no conjunto de situações das estruturas multiplicativas, classificando-as em *isomorfismo de medidas* e *produto de medidas*.

Vergnaud (1983, 1988) refere o *isomorfismo de medidas* como uma estrutura multiplicativa que consiste numa proporção direta simples entre medidas de duas grandezas, *M*1 e *M*2, por exemplo: pessoas e objetos, bens e custos, tempo e distância. Dentro desta estrutura distingue situações de multiplicação, divisão como partilha e divisão como medida.

O *produto de medidas* é, de acordo com o autor, uma estrutura multiplicativa que consiste na composição cartesiana de dois espaços métricos, *M*1 e *M*2, num terceiro espaço *M*3. A esta estrutura pertencem problemas relativos à área, volume, produto cartesiano e outros conceitos físicos. Dado que existem, pelo menos, três variáveis envolvidas, Vergnaud (1983, 1988) considera que esta estrutura não pode ser representada por uma simples tabela de correspondência como a usada para o isomorfismo de medidas, mas por uma tabela de dupla entrada. Identifica, também nesta estrutura, situações de multiplicação e de divisão. Dado o foco deste artigo, apenas serão explanadas as situações relativas à divisão no âmbito do *produto de medidas*.

Por conseguinte, a *divisão* como produto de medidas envolve situações em que se pretende encontrar o valor da medida de uma grandeza, dado um produto e o valor de uma medida de outra grandeza, por exemplo "*A carpete de uma sala da ludoteca tem 2 ½ m2 de área e 2 m comprimento. Quanto mede a sua largura.*". Também neste caso o procedimento adotado para a resolução deste tipo de problemas não se adequa ao uso do operador escalar ou funcional, já que a medida da grandeza a ser encontrada, neste caso a largura, obtém-se pelo quociente da medida da área pela medida do comprimento.

Sentido das operações

De modo a tornar exequível quer a investigação do sentido de operação, quer a sua avaliação em contexto escolar, no estudo adotou-se um modelo para a caraterização do sentido da multiplicação e da divisão de números racionais, que resultou da sistematização das componentes apresentadas por Huinker (2002) e Slavit (1999) e McIntosh et al. (1992). Esta sistematização deu origem a quatro componentes principais e respetivas capacidades, que de acordo com estes autores, devem ser contempladas de forma integrada para que se possa desenvolver o sentido de operação (Quadro1).

Quadro 1: Modelo para a caracterização do sentido de operação

SENTIDO DE OPERAÇÃO	
Componentes	**Capacidades a desenvolver**
Familiaridade com diferentes significados e contextos das operações	→ Reconhecer a operação em situações que envolvem diferentes significados → Reconhecer a operação em situações que envolvem diferentes contextos
Flexibilidade no uso das propriedades das operações	→ Recorrer a factos operacionais básicos (compor/decompor números) → Apresentar estratégias de cálculo baseadas nas propriedades das operações → Reconhecer a operação inversa
Razoabilidade na análise de processos e resultados	→Conhecer o efeito de uma operação sobre um par de números → Verificar dados e resultado → Relacionar o contexto com os cálculos efetuados
Símbolos e linguagem matemática formal significativos	→ Relacionar os símbolos com ações e conhecimentos informais → Relacionar os símbolos com linguagem matemática formal

De salientar, que a estrutura apresentada para as diferentes componentes determina o seu desenvolvimento integrado. O desenvolvimento da componente relativa aos símbolos e linguagem matemática formal significativos requer que os alunos: (i) relacionem símbolos com ações e conhecimentos informais, pelo que têm de reconhecer as operações em situações que as envolvem em diferentes significados e contextos, apresentar razoabilidade na análise de processos e resultados e, reconhecer e descrever situações reais para as operações; ou seja, elaborar enunciados para expressões que representem produtos e quocientes, e (ii) relacionem símbolos com linguagem matemática formal, pelo que têm de reconhecer as operações em situações meramente matemáticas, apresentar flexibilidade no uso das propriedades das operações, e recorrer a algoritmos formais de forma compreensiva. Assim, os alunos que relacionem símbolos com ações e conhecimentos informais e com linguagem matemática formal lidam com símbolos e linguagem matemática formal de modo significativo revelando sentido de operação (Huinker, 2002; Slavit, 1999).

Metodologia de investigação

A metodologia adotada para o estudo seguiu o paradigma interpretativo (Erickson, 1986), com *design* de estudo de caso múltiplo (Ponte, 2006, Yin, 2003), realizando-se três estudos de caso. Para a recolha de dados recorreu-se a técnicas como a observação com registos vídeo e áudio, às produções dos alunos, a testes e a entrevistas em profundidade com registos áudio e documental.

No estudo, para além da investigadora, participou uma professora do 2.º ciclo do ensino básico, que realizou a unidade de ensino numa turma do 6.º ano de escolaridade, onde estavam inseridos os alunos-caso deste estudo. Estes foram selecionados a partir dos desempenhos apresentados na realização de pré-testes[2], que tiveram como objetivo diagnosticar o sentido da multiplicação e divisão de números inteiros e decimais positivos, bem como o sentido de número racional e, por conseguinte, o nível de desenvolvimento do raciocínio multiplicativo dos alunos. Assim, foi selecionado um aluno que obteve bom desempenho nos referidos testes, outro que obteve médio desempenho e um terceiro que obteve baixo desempenho, cujos nomes fictícios atribuídos são respetivamente, Jacinta, Francisco e Lúcia. Para perceber melhor os desempenhos que apresentaram nos pré-testes, estes alunos foram ainda solicitados a realizar três entrevistas que visavam os assuntos dos pré-testes. Com o objetivo de perceber o processo de desenvolvimento do sentido da multiplicação e da divisão de números racionais de cada um dos alunos-caso, estes foram sendo entrevistados sempre que terminava a exploração de cada um dos tópicos estudados no âmbito da realização da unidade de ensino, que obedeceram à seguinte sequência: (i) multiplicação como isomorfismo de medidas; (ii) divisão como isomorfismo de medidas – medida; (iii) divisão como isomorfismo de medidas – partilha e (iv) multiplicação e divisão como produto de medidas. No fim e seis meses depois da realização da unidade de ensino e com o intuito de perceber o nível, respetivamente, de interiorização e retenção do

[2] Testes realizados antes de se dar início à realização da unidade de ensino.

sentido da multiplicação e divisão de números racionais dos alunos, estes foram novamente solicitados a realizar entrevistas sobre os tópicos estudados.

A referida unidade foi pensada, elaborada e adaptada pela professora e pela investigadora, em sessões de trabalho antes e durante a sua implementação. Da unidade fazem parte 27 tarefas, essencialmente compostas por problemas que envolvem os diferentes significados da multiplicação e divisão de números racionais, cuja sequência obedece à proposta por Vergnaud (1983, 1988) para o estudo das estruturas multiplicativas. Deste modo, iniciou-se o estudo destas operações pela exploração de problemas que envolvem a multiplicação como isomorfismo de medidas, nos significados de grupos equivalentes e relação multiplicativa, seguindo-se o estudo da divisão nesta mesma estrutura, nos significados medida e partilha. Posteriormente exploraram-se problemas que envolvem a multiplicação como produto de medidas e, por último, a divisão nesta mesma estrutura, tendo-se explorado os significados de medida em falta e fator em falta. Conforme referem Pinto e Monteiro (2008), o significado fator em falta consiste em problemas do tipo "qual é o número *b* que multiplicado por *a* tem como resultado *c*", pelo que podem ser incluídos na estrutura produto de medidas, por apresentarem uma relação muito visível com a multiplicação (axb= c) e da divisão como operação inversa da multiplicação (b=c:a e a=c:b).

Dado que se pretendia promover um ensino interativo, como recomendam vários autores (Freudenthal, 1973, 1991; Gravemeijer, 1994, 2005; Streefland, 1991; Treffers, 1991), optou-se essencialmente, pela realização de trabalho em pequenos grupos, de três a quatro alunos, e posterior apresentação e discussão no grupo turma. Assim, terminado o tempo para a resolução da tarefa pelos pequenos grupos, dava-se início à exploração da mesma em grande grupo. Esta era orientada pela professora, que a partir das estratégias informais dos alunos foi introduzindo modelos para raciocinarem a multiplicação e a divisão, como a tabela de razão, de modo a proporcionar a todos os alunos um percurso entre as suas estratégias informais e formais, num processo gradual de aprendizagens. Para tal, as discussões em plenário consistiram num encadeamento de apresentações que proporcionou aos alunos a oportunidade de analisarem, compararem e confrontarem as diferentes estratégias de resolução, desenvolverem capacidades mais específicas como representar, demonstrar, modelar, de modo a compreenderem ideias matemáticas. Pretendia-se assim, promover a progressão no processo de matematização a partir do desenvolvimento da capacidade de reflexão, como consequência do processo de interação.

A análise de dados das diferentes fontes e respetiva triangulação relativa à familiaridade com os diferentes significados e contextos da multiplicação e divisão, uma das componentes do sentido de operação (Greer, 1992; Huinker, 2002; McIntosh, Reys & Reys, 1992; Slavit, 1999) consideradas neste estudo, obedeceu às categorias de análise que constam da Quadro 2.

Quadro 2: Categorização dos diferentes significados da multiplicação e divisão de números racionais

<table>
<tr><th colspan="5">ESTRUTURAS MULTIPLICATIVAS</th></tr>
<tr><th colspan="3">SIGNIFICADOS DA MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO</th><th>ESTRATÉGIAS</th><th>DIFICULDADES</th></tr>
<tr><td rowspan="3">ISOMORFISMO DE MEDIDAS</td><td>Multiplicação</td><td>➢ Grupos equivalentes
➢ Relação multiplicativa</td><td>➢ Esquemas
➢ Modelo retangular, reta numérica, tabela de razão
➢ Multiplicação</td><td>➢ Noção de que multiplicar aumenta
➢ Adição sucessiva
➢ Não identifica a multiplicação</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Divisão</td><td rowspan="2">➢ Medida</td><td rowspan="2">➢ Esquemas
➢ Fração, tabela de razão e equação $a \times x = b$
➢ Multiplicação
➢ Divisão</td><td>➢ Adição e subtração sucessivas</td></tr>
<tr><td rowspan="2">➢ Noção de que dividir diminui
➢ Noção de dividendo superior ao divisor
➢ Não identifica a divisão</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">➢ Partilha</td><td rowspan="2">➢ Esquemas
➢ Tabela de razão e equação $a \times x = b$
➢ Multiplicação
➢ Divisão</td></tr>
<tr><td>➢ Distribuição um-a-um</td></tr>
<tr><td rowspan="4">PRODUTO DE MEDIDAS</td><td>Multiplicação</td><td>➢ Produto de medidas</td><td>➢ Esquemas
➢ Modelo de área retangular
➢ Multiplicação</td><td>➢ Noção de que multiplicar aumenta
➢ Não identifica a multiplicação</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Divisão</td><td rowspan="2">➢ Medida em falta</td><td rowspan="2">➢ Esquemas
➢ Modelo de área retangular e equação $a \times x = b$
➢ Multiplicação
➢ Divisão</td><td>➢ Noção de que dividir diminui
➢ Noção de dividendo superior ao divisor</td></tr>
<tr><td rowspan="2">➢ Não identifica a divisão</td></tr>
<tr><td>➢ Fator em falta</td><td>➢ Tentativa e erro
➢ Equação $a \times x = b$
➢ Divisão</td></tr>
</table>

Resultados: Divisão como produto de medidas

A análise transversal das trajetórias de aprendizagem realizadas pelos três alunos-caso, permitiu comparar os seus desempenhos nas diferentes componentes do sentido da multiplicação e da divisão de números racionais*, antes, durante, no fim e seis meses depois* da realização da unidade de ensino (UE). Dado o foco deste artigo, apresentam-se os desempenhos dos três alunos relativos à divisão como produto de medidas – medida em falta e fator em falta (Quadro 2), com exemplos ilustrativos dos aspetos mais significativos.

Antes da realização da unidade de ensino

Antes da realização da UE, em contextos que envolviam números inteiros e decimais, qualquer um dos três alunos identificou a divisão em situações de *medida em falta*, no âmbito desta estrutura multiplicativa, ou seja, produto de medidas. Porém, perante tarefas como "*Um retângulo tem 1,5 m*^{2} *de área e 10 m de comprimento. Calcula a sua largura?*", Lúcia e Francisco começaram por usar o modelo de área retangular e respetiva fórmula (Figura 2), enquanto Jacinta usou apenas a fórmula da área retangular. A partir da referida modelação, identificaram e usaram a divisão como estratégia de resolução.

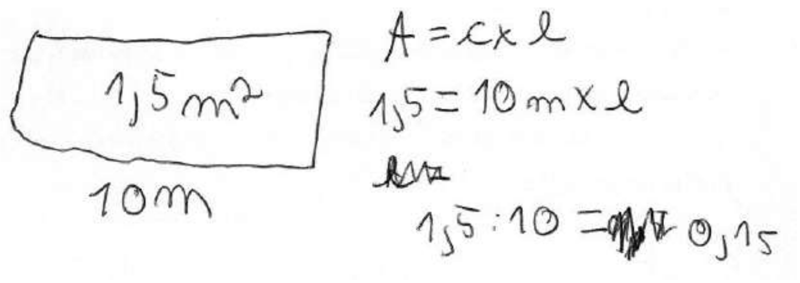


Figura 2: Produção de Francisco em contexto de divisão como medida em falta

Ainda antes da realização da UE, as situações de divisão como *fator em falta*, não foram identificadas por dois dos alunos. Por exemplo, perante a tarefa "*Qual é o número que multiplicado por 0,75 tem como resultado o número 12? Descreve o processo que usares para responder à questão*", os três alunos começaram por recorrer à equação a x $x = b$. Porém, o referido modelo, conduziu apenas Jacinta à identificação e uso da divisão, por reconhecê-la como a operação inversa da multiplicação e a estratégia mais eficiente de resolução (Figura 3). O mesmo não aconteceu com Lúcia e Francisco, que adotaram uma estratégia de tentativa e erro para determinarem o fator em falta. No entanto, a referida estratégia não lhes permitiu chegar a uma solução, nem identificarem a divisão como estratégia mais eficiente de resolução, evidenciando assim, dificuldades em reconhecerem a divisão como a operação inversa da multiplicação.

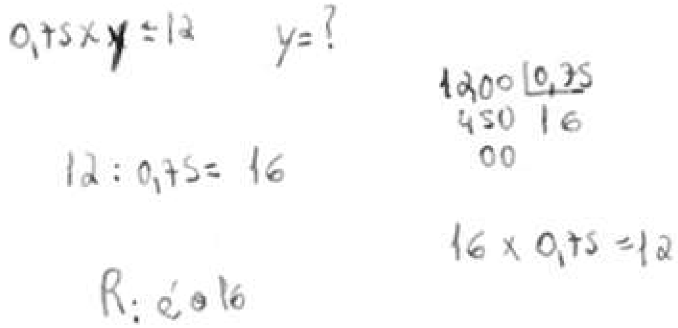


Figura 3: Produção de Jacinta em contexto de divisão como fator em falta

Durante a realização da unidade de ensino

Durante a realização da UE, onde os contextos envolviam números racionais no âmbito da estrutura multiplicativa produto de medidas, perante tarefas de divisão como *medida em fala*, como por exemplo "*Um retângulo tem ½ m^2 de área e ¾ m de comprimento. Calcula a sua largura?*", qualquer um dos três alunos identificou e usou a divisão como estratégia de resolução. Porém, Jacinta e Lúcia recorreram sempre ao modelo de área retangular (Figura 4) para identificarem a divisão, tal como nos seus desempenhos antes da UE.

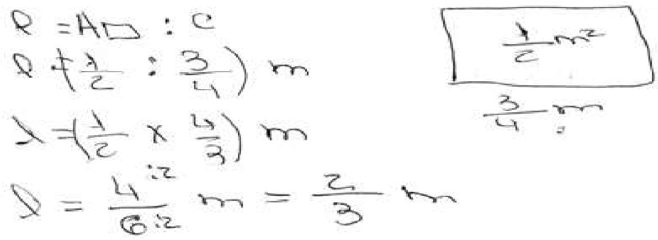


Figura 4: Produção de Lúcia em contexto de divisão como medida em falta

Já Francisco recorreu à equação *a* x *x* = *b* (Figura 5), e não ao modelo de área retangular, tal como recorreu antes da realização da UE.

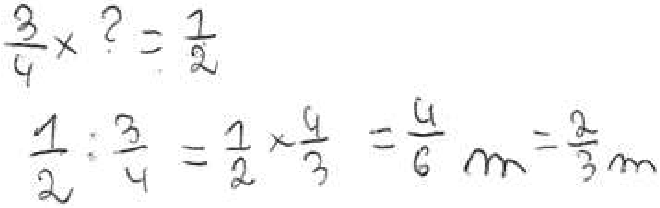


Figura 5: Produção de Francisco em contexto de divisão como medida em falta

Ainda durante a realização da unidade de ensino e no âmbito da estrutura produto de medidas, perante tarefas de divisão como *fator em falta*, como por exemplo "*Qual é o número que multiplicado por 3/4 é igual a 6?*", os três alunos identificaram a divisão. No entanto, Lúcia e Francisco recorreram sempre à equação $a \times x = b$ para modelarem as referidas situações (Figuras 6 e 7) e posteriormente, identificarem a divisão por reconhecerem-na como a operação inversa da multiplicação. Deste modo, parecem ter ultrapassado a pouca familiaridade que evidenciaram com este significado da divisão nos seus desempenhos antes da realização da UE e, por consequência, adquirido um entendimento significativo da divisão como a operação inversa da multiplicação.

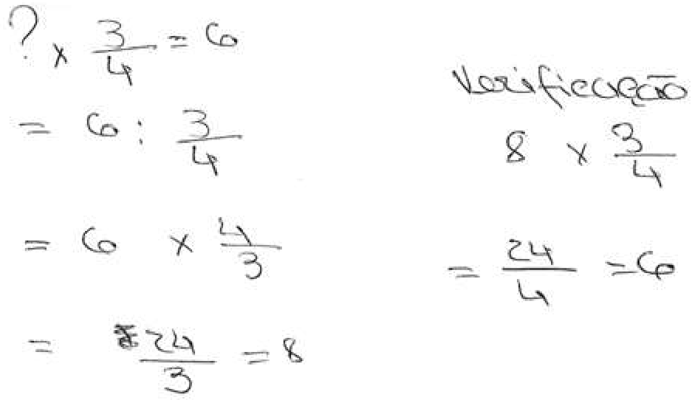


Figura 6: Produção de Lúcia em contexto de divisão como fator em falta

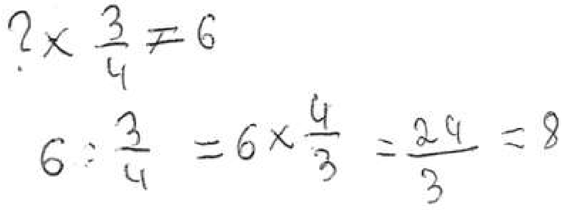


Figura 7: Produção de Francisco em contexto de divisão como fator em falta

No fim e seis meses depois da realização da unidade de ensino

No fim da realização da UE, os três alunos continuaram a identificar a divisão como produto de medidas, quer no significado *medida em falta*, quer no significado de *fator em falta,* tal como durante a UE. No entanto, Lúcia substitui o modelo de área retangular, pela equação $a \times x = b$, para modelar as situações de *medida em falta* e identificar a divisão. Francisco manteve o recurso à equação a x x = b e Jacinta deixou de recorrer ao modelo de área para modelar as referidas situações. Perante situações de *fator em fala*, só Francisco manteve a necessidade de continuar a modelar as situações com a equação a x $x = b$, para identificar a divisão. Estes resultados mantiveram-se seis meses depois.

Importa relembrar que o modelo de área retangular era o único modelo a que os alunos já recorriam, antes da realização da UE, para raciocinarem a divisão como produto de medidas, *medida em falta*. Este facto poderá ter promovido a passagem aos modelos matemáticos e consequente formalização da divisão como produto de medidas, no fim da realização da UE.

Considerações finais

Dados relativos aos desempenhos apresentados pelos alunos antes da realização da unidade de ensino, revelam o recurso ao modelo de área retangular para identificarem a divisão como produto de medidas – medida em falta, pelo que pareciam familiarizados com este significado da divisão. Porém, este significado não parecia formalizado, dado que, e de acordo com Gravemeijer (2005), os alunos se apoiaram em modelos para o raciocinarem. Já a divisão como produto de medidas - fator em falta não foi identificada pela maioria dos alunos, que assim, evidenciaram também dificuldades no reconhecimento da divisão como a operação inversa da multiplicação. Deste modo, os alunos revelaram pouca familiaridade com este significado da divisão, bem como dificuldades com as propriedades desta operação e, por conseguinte, fragilidades no seu desenvolvimento do sentido de divisão (Huinker, 2002; McIntosh, Reys & Reys, 1992; Slavit, 1999).

Durante a realização da unidade de ensino, para além do modelo de área retangular, a maioria dos alunos evidenciou o recurso à equação $a \times x = b$, para identificarem a divisão como produto de medidas. Deste modo, todos os alunos identificaram a divisão nesta estrutura multiplicativa, inclusivamente em situações de fator em falta, e, por conseguinte, um entendimento significativo da divisão como a operação inversa da multiplicação. Assim, e de acordo com Huinker (2002), McIntosh, Reys e Reys (1992) e Slavit, 1999), os alunos parecem ter desenvolvido capacidades no âmbito das componentes do sentido de operação (Quadro 1), nomeadamente, familiaridade com a divisão como produto de medidas e reconhecimento da operação inversa, que contribuem para o desenvolvimento do seu sentido da divisão.

No fim e seis meses depois da realização da unidade de ensino a maioria dos alunos substituiu o modelo de área retangular pela equação $a \times x = b$ para modelarem as situações de divisão como produto de medidas – medida em falta e identificarem a operação envolvida. Já a divisão como produto de medidas – fator em falta passou a ser identificada pela maioria dos alunos sem recurso a qualquer modelação das situações que a envolviam. Este significado da divisão parece ter sido formalizado pela maioria dos alunos, dado que, e de acordo com Gravemeijer (2005), deixaram de se apoiar em modelos para o raciocinarem. Porém, o mesmo não ocorreu com a divisão como medida em falta, apesar de ser o único significado que os alunos já modelavam antes da realização da unidade de ensino. Estes resultados confirmam a complexidade inerente à estrutura produto de medidas para a qual nos alerta Vergnaud (1983, 1988).

Por conseguinte, os alunos parecem ter progredido no desenvolvimento do sentido da divisão, resultados que não serão alheios a uma abordagem pela EMR ao ensino-aprendizagem da multiplicação e da divisão de números racionais (Freudenthal, 1973, 1991; Gravemeijer, 1994; Streefland, 1991; Treffers, 1991), centrada no desenvolvimento do sentido das referidas operações (Huinker, 2002; Slavit, 1999), com enfoque no desenvolvimento das estruturas multiplicativas (Vergnaud , 1983, 1988), adotada na UE realizada neste estudo.

Referências

Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver, E. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh & M. Landau (Org.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 92-126). New York, NY: Academic Press.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Org.), *Handbook of research on teaching* (pp. 119-161). NY:Macmillan.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: D. Reidel.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*: *China lectures*. Dordrecht: Kluwer.

Gravemeijer, K. (1994). *Developing realistic mathematics education*. Utrecht: CD-ß Press / Freudenthal Institute.

Gravemeijer, K. (2005). What makes mathematics so difficult, and what can we do about it? In L. Santos, A. P. Canavarro, & J. Brocardo (Eds.), *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 83-101). Lisboa: APM.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In Douglas A. Grouws (Eds.). *Handbook of research in mathematics teaching and learning*. MacMillan Publishing Company.

Huinker, D. (2002). Examining dimensions of fractions operation sense. In B. Litwiller & G. Bright (Org.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions: 2002 Yearbook* (pp. 72-78). Reston, VA: NCTM.

Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. In K. Frank & Jr. Lester (Org.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629 – 667). Reston, VA: NCTM.

McIntosh, A., Reys, B. J. e Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, 12(3), 2-8 e 44.

Pinto, H & Monteiro, C. (2008). A divisão de números racionais. In J. Brocardo, L, Serrazina, & I. Rocha (Eds.), *O sentido do número: reflexões que entrecruzam teoria e prática* (pp. 201-219). Lisboa: Escolar Editora.

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, *25*, 105-132.

Slavit, D. (1999). The role of operation sense in transitions from arithmetic to algebraic thought. *Educational Studies in Mathematics, 37* (3), 251-274.

Streefland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education: A paradigm of developmental research*. Dordrecht: Kluwer.

Treffers, A. (1991). Realistic mathematics education in the Netherlands 1980-1990. In L. Streefland (Org.), *Realistic Mathematics Education in primary school* (pp. 11-20). Utrecht: CD-ß Press/Freudenthal Institute, Utrecht University.

van den Heuvel-Panhuizen, M., & Wijers, M. M. (2005). Mathematics standards and curricula in the Netherlands. *Zentrallblatt fur Didaktik der Mathematik, 37*(4), 287-307.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau (Org.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp.127-174). New York, NY: Academic Press.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In J. Hilbert & M. Behr (Org.), *Number concepts and operations in the middle grades* VII (pp. 141-161). Reston, VA: NCTM & Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Yin, R. K. (2003). *Case study research: Design and methods* (3.ª ed.). Thousand Oaks/London: SAGE.

CONTRIBUTOS DA PARTICIPAÇÃO NO PROGRAMA DE FORMAÇÃO CONTÍNUA EM MATEMÁTICA PARA O DESENVOLVIMENTO PROFISSIONAL DE PROFESSORES DO 1.º CICLO DO ENSINO BÁSICO

Cristina Martins
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Bragança
mcesm@ipb.pt

Resumo

O trabalho aqui apresentado teve como principal objetivo estudar o desenvolvimento profissional de professores de 1.º ciclo através da participação no Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1.º Ciclo (PFCM). Seguiu uma abordagem metodológica de natureza qualitativa, com a realização de três estudos de caso. As participantes foram três professoras do 1.º ciclo que voluntariamente se inscreveram no PFCM.

A análise da informação consistiu na criação de categorias de análise construídas a partir do quadro teórico de referência e, posteriormente, ajustadas ou completadas a partir dos aspetos emergentes da própria análise. Foi possível concluir que a participação destas professoras no PFCM contribuiu para o seu desenvolvimento profissional, tendo, contudo, cada uma tido os seus ganhos específicos. Adquiriram uma nova visão acerca da Matemática, realizaram novas aprendizagens em e sobre a Matemática, e mostraram mudanças significativas na forma de planificar e conduzir as aulas. Desenvolveram também a capacidade de refletir.

Palavras-chave: desenvolvimento profissional, conhecimento didático, prática letiva, reflexão.

Introdução

Esta conferência, baseada no trabalho desenvolvido numa tese de doutoramento em Educação especialidade em Didática da Matemática, teve como objetivo principal estudar o desenvolvimento profissional de professores de 1.º ciclo através da sua participação no Programa de Formação Contínua em Matemática para professores do 1.º ciclo (PFCM).

A motivação para a realização deste prendeu-se com a minha ligação profissional à formação de professores de 1.º ciclo do ensino básico e com a escassez de trabalhos apresentados sobre este nível de ensino.

O PFCM, contexto da realização deste trabalho, foi desenvolvido em Portugal entre 2005/2007 e 2010/2011, apresentando características que, a meu ver, permitiram distingui-lo das tradicionais ações de formação de curta duração e centradas em saberes específicos: a organização e funcionamento em diferentes tipos de sessões – sessões de formação em grupo e sessões de acompanhamento em sala de aula – o carácter voluntário, o partir das necessidades de formação dos professores, o incidir na própria prática letiva e na reflexão sobre esta, a construção de um portefólio para a avaliação do desenvolvimento profissional ocorrido, e ser desenvolvido ao longo do ano letivo.

Nesta conferência, pretendo apresentar o estudo realizado, sintetizando as ideias em torno de duas questões:

- Qual o contributo do PFCM para o desenvolvimento do conhecimento didático e simultaneamente da prática letiva?

- Qual o contributo do PFCM para o desenvolvimento da reflexão?

Desenvolvimento profissional de professores

No contexto do trabalho realizado, interessa, por um lado, ter um claro entendimento acerca do conceito de desenvolvimento profissional e das dimensões que integra sendo, por outro lado, importante atender à forma de promoção deste.

O desenvolvimento profissional é definido como um processo que melhora o conhecimento, competências ou atitudes dos professores (Guskey, 2000), englobando experiências, quer espontâneas, quer conscientemente planificadas, essenciais para uma reflexão, planificação e prática profissionais eficazes, em cada uma das fases das suas vidas profissionais (Day, 2001). O conhecimento e a prática profissionais são aspetos centrais do desenvolvimento profissional, ligados estes através da reflexão (Menezes & Ponte, 2006).

Ponte, Guimarães, Leal, Canavarro e Abrantes (1997), baseados no trabalho de Shulman (1986), apresentam o conceito de conhecimento didático do professor, considerando-o o conhecimento fundamental para o ensino e a parte do conhecimento profissional "que é chamada a intervir diretamente na prática" (p. 32). Para além do conhecimento sobre a Matemática, integra o conhecimento do currículo, o conhecimento dos alunos e dos processos de aprendizagem e o conhecimento do processo instrucional (Santos, 2000).

Em articulação com o conhecimento surge a prática (Cochran-Smith & Lytle, 1999; Menezes & Ponte, 2006). Neste trabalho ganha particular realce a prática letiva, envolvendo a preparação de aulas, a sua condução e a reflexão sobre as mesmas (Santos, 2000).

A reflexão pode ser entendida como um processo mental de tentar estruturar ou reestruturar uma experiência, um problema, ou o conhecimento existente ou *insights* (Korthagen, 2001), conduzindo à compreensão destes (Hatton & Smith, 1995) e constituindo-se como um processo contínuo de análise e refinamento da prática (Cole & Knowles, 2000).

Quanto à promoção do desenvolvimento profissional, convém assinalar que muitas vezes o termo é utilizado como um "chapéu" para várias atividades ou configurações (Sowder, 2007). Para Zaslavsky, Chapman, e Leikin (2003), o desenvolvimento profissional ocorre em várias fases e contextos da vida de um professor, começando com as suas experiências enquanto estudante, continuando com uma preparação inicial, de modo formal, para uma qualificação escolar e uma certificação de ensino, e prosseguindo por etapas formais e informais ao longo da carreira. Na literatura mais recente (e.g. Borko, 2004; Sowder, 2007; Zaslavsky, Chapman & Leikin, 2003) tem sido dada particular atenção a programas de desenvolvimento profissional, surgindo associados à importância da valorização da compreensão da Matemática. O professor é visto como o sujeito fundamental no seu próprio desenvolvimento profissional (Guimarães, 2006), sendo-lhe reservado um papel ativo, quer na seleção dos projetos a realizar, quer na sua operacionalização, não descurando, neste processo, o professor na sua totalidade e a sua história pessoal (Day, 2001).

Metodologia de investigação

Esta investigação seguiu um paradigma interpretativo (Stake, 2009), com recurso ao estudo de caso (Yin, 2009). As participantes foram três professoras do 1.º ciclo, Aida, Dora e Sara (nomes fictícios), que voluntariamente se inscreveram no PFCM. Os critérios de seleção utilizados foram a formação académica e o tempo de serviço docente.

Aida além de possuir o Bacharelato em 1.º Ciclo, obtido através do Curso do Magistério Primário, possui um Curso de Estudos Superiores Especializados na área do Ensino do Francês e, passado pouco tempo após o início do PFCM, defendeu uma dissertação de mestrado. O gosto pela aprendizagem, quer enquanto estudante, quer enquanto professora é uma característica que é possível associar-lhe. Até ao momento da sua participação no PFCM, nunca realizou qualquer ação de formação em Matemática. Aponta como principal expectativa da participação no PFCM a importância de estar atualizada em relação a esta área do saber.

Dora possui a Licenciatura em ensino na variante de Educação Visual e Tecnológica. O insucesso e o desagrado pela disciplina de Matemática fizeram parte do seu percurso enquanto estudante, não referenciando, nesta fase, o gosto pela aprendizagem. Enquanto professora, reconhece a necessidade de aprendizagem, investindo nesta essencialmente através da frequência de ações de formação, embora nunca tenha realizado alguma em Matemática. As suas expectativas para a participação no PFCM estão, sobretudo, relacionadas com a necessidade de melhorar a sua relação com a Matemática e de adquirir e atualizar conhecimento nesta área do saber.

Sara possui o Bacharelato em 1.º Ciclo, obtido através do curso do Magistério Primário e de um Complemento de Formação que lhe confere o grau de licenciada. Enquanto estudante, a Matemática é apontada como uma das disciplinas do seu agrado. O gosto que revela pela aprendizagem situa-se particularmente na área das Ciências. Aponta a frequência de ações de formação contínua como o dispositivo primordial para a atualização de conhecimento, incluindo em Matemática. Sara aponta como principal expectativa para a sua inscrição no PFCM aprofundar e adquirir conhecimentos matemáticos, didáticos e curriculares.

A experiência profissional destas professoras é também diferente. Aida e Sara têm mais de vinte anos de serviço e Dora menos de dez.

Por iniciativa própria, Dora e Sara participaram em dois anos de formação (anos letivos de 2006/2007 e de 2007/2008), e Aida, por motivos de ordem profissional, apenas em um (2006/2007). No primeiro ano pertenceram a um grupo de trabalho de nove professores e no segundo a um de dez, sendo eu, em ambos, a formadora.

Para a recolha de dados foram utilizadas entrevistas semiestruturadas, observação participante das sessões de formação em grupo [SFG] e das sessões de acompanhamento em sala de aula [SAS] e recolha documental, incidindo esta nos portefólios construídos pelas professoras.

A análise de dados envolveu a organização, divisão em unidades manipuláveis, síntese, procura de padrões e descoberta de aspetos importantes dos materiais recolhidos, com o intuito de os interpretar e tornar compreensíveis (Bogdan & Biklen, 1994).

Neste texto, apresento a análise transversal dos casos. Está organizada em torno das duas dimensões consideradas neste trabalho: (1) conhecimento didático e prática letiva; e (2) reflexão sobre a prática no PFCM. Dentro destas dimensões foram encontradas categorias que traduzem o que de mais relevante se encontrou na análise efetuada. Assim, a dimensão conhecimento didático e prática letiva inclui as categorias: (i) Aprendizagens efetuadas no PFCM: Melhoria do conhecimento em e sobre a Matemática; (ii) Natureza das tarefas: Uma nova visão sobre a Matemática; (iii) Tarefas experimentadas: Suporte para a planificação e condução das aulas. A dimensão reflexão sobre a prática no PFCM engloba duas categorias: (i) Reflexão: Um passo em frente; e (ii) Portefólio: Servindo os propósitos do PFCM.

O PFCM: Um caminho para o desenvolvimento profissional

Os dados são apresentados de acordo com as dimensões definidas, começando pela do conhecimento didático e prática letiva.

Aprendizagens efetuadas no PFCM: Melhoria do conhecimento em e sobre a Matemática

A participação de Aida, Dora e Sara permitiu-lhes a aquisição de conhecimento em Matemática, nomeadamente em temas matemáticos que não integraram as disciplinas do currículo dos seus cursos de formação inicial. A este respeito, Sara assinala:

> A minha participação no PFCM teve um papel significativo e muito positivo, contribuiu para me tornar matematicamente mais competente. Tenho consciência da desadequação entre a formação por que passei e as competências que me são exigidas atualmente. [portefólio, conclusão]

No caso particular de Dora, que apresentava uma relação negativa com esta disciplina, motivada por uma má experiência no ensino primário, verificou-se uma melhoria significativa na sua relação com a Matemática: "Fiquei muito mais à-vontade, muito mais descontraída, muito mais preparada, sinto-me mais alertada, mais desperta, mais motivada. É diferente. É completamente diferente o antes da ação de formação e o depois" [entrevista final]. E argumenta: "Uma pessoa só pode gostar se conhecer. Eu anteriormente não gostava porque não a conhecia, praticamente. E fechava-me" [entrevista final].

Natureza das tarefas: Uma nova visão sobre a Matemática

A participação de Aida, Dora e Sara no PFCM permitiu-lhes experimentar tarefas de natureza diferente. Todas as professoras alargaram o conceito de problema, tendo passado a enfatizar a descoberta e diversificação de estratégias de resolução de problemas. A este respeito Sara concretiza:

> [A Matemática] Está mais virada para a descoberta, isto é, fazer com que sejam os próprios alunos a procurar estratégias para a resolução dos problemas (…) Tenho a visão de uma Matemática mais prática, mais virada para a descoberta, serem os próprios miúdos a descobrir. [entrevista final]

Especificamente, para Aida, a experimentação pela primeira vez de uma investigação matemática permitiu-lhe adquirir a perspetiva de uma Matemática mais aberta, mais motivante, sendo reconhecido, que o aluno tem um papel ativo na descoberta das regularidades. No início da realização da tarefa encorajou os alunos na descoberta de regularidades, prevenindo:

> Devo avisar que no princípio é natural que os meninos pensem: "Ai eu não consigo descobrir nada, pois então aqui os números são esses números e pronto, acabou!" Mas depois de pensarem mais um bocadinho vão ver quantas coisas dentro da Matemática conseguem descobrir. [2.ª SAS]

Também Dora, na experimentação de uma tarefa semelhante e igualmente pela primeira vez, incentivou os alunos nas suas descobertas. Quando circulou pelos seus lugares, proferiu palavras de incentivo: "Há muitas mais, nem tu imaginas!"; "Se é a tabuada do dois certamente que vais ter de utilizar o dois."; "Uma regularidade é essa. Outra? Outra, Joaquim. Não existe só essa."; "Descobriste que quatro mais dois é seis e oito mais dois dá dez. Mais? O que descobriste mais?"; "Vai escrevendo. Que o produto do primeiro com o segundo dá seis. O primeiro produto com o terceiro…" [2.ª SAS].

A realização de tarefas com recurso a materiais manipuláveis conduziu as três professoras a uma outra forma de encarar a natureza desta disciplina, associando a experimentação à descoberta do saber matemático pelo aluno. Por exemplo, foi visível o incentivo exteriorizado por Dora numa aula dedicada ao trabalho com o *tangram*: "Têm que tentar"; "Vês como já há meninos que já fizeram. Já vi vários"; "Quero que faças tu primeiro"; "Quero ver quem é capaz de fazer um triângulo retângulo"; "Já experimentaste?" [3.ª SAS].

Tarefas experimentadas: Suporte para a planificação e condução das aulas

Relativamente à planificação da prática letiva, foi particularmente evidente a evolução de Dora que, com o decorrer do PFCM, passou a considerar a planificação como essencial para estar preparada para responder aos alunos:

> Eu preparava as aulas, como é evidente, só que o fazia mais de ânimo leve e agora não, já vou mais ao pormenor. Até porque as regularidades [realização da atividade de investigação] ensinaram-me, nessa parte tenho que ser mais atenta e tenho que ter rigor quando preparo a aula, para saber se estou ou não preparada para as respostas e perguntas dos alunos. [entrevista final]

Em Sara foi visível uma pormenorização na descrição das tarefas a realizar, em nada semelhante à elaboração de um sumário, conforme o fazia anteriormente: "A partir daí cada um fazia ou a planificação diária ou tipo sumários, aquilo que íamos dar. Eu tinha um caderno onde ia pondo a data e tópicos" [entrevista inicial].

No que respeita à condução das aulas, são apresentados dois pontos: a organização do trabalho dos alunos em sala de aula e a comunicação na aula de Matemática.

Aida, muito embora o trabalho de grupo fosse o seu modo de organização preferido, diversificou as formas de trabalho em sala de aula, realizando trabalho individual, em pares e de grupo. É desta forma que justifica esta sua opção: "Acho que experimentei a maior parte das formas, desde trabalho individual, aos pares, de grupo. E tentei adequar essa forma ao conteúdo de cada aula. Eu penso que nesse aspeto resultou bastante" [entrevista final].

Dora e Sara inicialmente manifestaram preferência pela realização de trabalho individual. Dora recorda que no segundo ano do PFCM desenvolveu um projeto, envolvendo trabalho de grupo, assinalando ter criado o gosto por este modo de organização do trabalho dos alunos:

> Porque eu depois já criei o gosto por trabalhar em grupo. Quer dizer eu tinha gosto por os por a trabalhar em grupo, tinha era receio. A partir do momento em que os consegui orientar no sentido de que trabalhar em grupo tinha que ser com regras, a partir dai… e com a tua ajuda, não é?! [entrevista após 1 ano]

Sara, no primeiro ano que participou no PFCM apenas experimentou organizar os alunos em grupo para a realização de um jogo, não sendo possível retirar efeitos convincentes dessa experimentação. No segundo ano, desenvolveu um projeto que envolveu, ao longo do ano letivo, vários momentos em que o trabalho de grupo foi o modo de organização escolhido. Perante a minha surpresa com a forma ordenada como os alunos se organizaram para trabalhar na primeira aula dedicada ao projeto, Sara respondeu com naturalidade: "Também já o tinham feito [neste ano letivo]. Já tinham os grupos formados" [1.ª reflexão pós-observação, 2.º ano].

No que respeita à comunicação na aula de Matemática, é de salientar que as três professoras passaram a enfatizá-la, sobretudo, através do questionamento dos alunos, da importância atribuída à apresentação e discussão das estratégias e resultados das tarefas, e ao registo das produções efetuadas.

Neste ponto, é possível particularizar que Dora considerou ter sido alertada para a comunicação na aula de Matemática. No início do estudo sobressai a valorização da comunicação unidirecional, sobretudo quando posicionada junto aos alunos: "Ramiro, é comigo que tu tens que falar dentro da sala de aula, lá fora é que é com os colegas" [1.ª SAS]. Assegura que esta é uma forma de verificar as aquisições dos alunos: " Assim eu sei, se eles aprenderam ou não [1.ª reflexão pós-observação]. Considera que no final do ano letivo, os alunos "comunicavam mais entre si, havia mais a partilha de ideias" [entrevista final].

Em Sara foi particularmente evidente a relevância que passou a atribuir à comunicação das estratégias de resolução de problemas. Precisamente, ao assinalar os aspetos que passou a valorizar após a sua participação no PFCM destaca: "[Agora] Também dou mais valor às interações verbais" [entrevista final], indicando o seu entendimento sobre o assunto e explicitando o que valorizava, neste âmbito, antes de participar no PFCM:

> Deixá-los falar sobre o problema, sobre as suas estratégias de resolução. Não ligava tanto a estes pontos, à maneira como eles faziam. Ouvia mais a opinião dos alunos para saber o que eles já sabiam sobre o tema no início das tarefas do que propriamente durante e no final. [entrevista final]

De seguida, é apresentada a análise referente à segunda dimensão definida – reflexão sobre a prática no PFCM.

Reflexão sobre a prática: Um passo em frente

A reflexão foi um dos aspetos comummente considerado pelas três professoras de grande relevância e agrado no PFCM, como refere Aida: "A reflexão é uma das partes mais importantes [do PFCM, e] talvez a que fazíamos menos nas nossas práticas diárias" [entrevista intercalar]. Simultaneamente, reconheceram importância às formas de reflexão praticadas – escrita realizada individualmente, pós-observação com a formadora, e conjunta – apresentando, contudo, preferências distintas. Aida mostrou preferência pela reflexão escrita, fundamentando-se nas suas próprias características pessoais: “Eu acho que estou a refletir melhor quando estou a escrever, mas isso é uma questão pessoal [entrevista após 2 anos].

Dora dirigiu a sua preferência para a reflexão pós-observação com a formadora, essencialmente pela possibilidade de ter alguém que avaliasse e corrigisse as suas práticas:

> Mas eu faço-a e depois digo assim: se não tiver uma pessoa que avalie a minha ação como é que eu sei onde é que errei. Se calhar todas elas são importantes, mas a que fazia contigo ajudava-me imenso porque me sentia protegida e corrigida. Dizia assim: – Afinal pensei que estava a fazer bem e não fiz, para a próxima já não farei desta maneira. [entrevista final]

Sara indicou a reflexão conjunta como a sua preferida, pela oportunidade de trocar opiniões com os colegas: “Eu acho que era importante partilhar em grupo. Eu tinha mais interesse em ouvir as dos outros para ver os pontos fracos ou os pontos melhores, que estratégias utilizaram…” [entrevista final]

Portefólio: Servindo os propósitos do PFCM

Antes de frequentarem o PFCM, eram poucos os conhecimentos destas professoras, quanto ao conceito e forma de construção de um portefólio. No PFCM foi comum a associação deste instrumento à reflexão. Por exemplo, a este respeito, Aida salienta:

> É essencial para a reflexão. Obriga-nos a questionar-nos. A refletir. E a fazê-lo de forma organizada! Ajudou-nos a crescer como professores e a desenvolver a capacidade de reflexão e as implicações que isso tem nas nossas práticas. [entrevista final]

Acerca da construção deste instrumento, no PFCM, cada professora teve a sua forma de atuação particular, mas é de destacar que foi sendo realizada ao longo do programa e que todas as professoras interiorizaram e concretizaram a seleção de trabalhos, como refere Sara: “Não devemos incluir os trabalhos todos, devemos incluir apenas alguns e fazer uma referência à razão da escolha desse material” [entrevista após 1 ano].

Considerações finais

O PFCM, com as suas características particulares, destacando aqui a ênfase nas tarefas, na reflexão sobre a prática, e no papel do trabalho colaborativo, contribuiu para o desenvolvimento profissional de Aida, Sara e Dora. Estas professoras realizaram novas aprendizagens em e sobre a Matemática, adquiriram uma nova visão acerca da Matemática, mostraram alterações na forma de planificar e conduzir as aulas, e desenvolveram a capacidade de refletir, destacando, neste último ponto, o papel do portefólio.

Da participação de Aida saliento uma nova visão acerca da Matemática, da de Dora a melhoria da sua relação com a Matemática, e da de Sara a relevância que passou a dar à comunicação na aula de Matemática, nomeadamente no âmbito da resolução de problemas.

Os resultados deste estudo vão ao encontro da ideia de Sowder (2007) quando refere que os programas de desenvolvimento profissional devem motivar os professores a desenvolver os conhecimentos, capacidades e disposições necessárias para ensinar Matemática, contribuindo para alterar a sua compreensão sobre a forma como os alunos aprendem Matemática e sobre a sua natureza, o conhecimento matemático, e o ensino desta disciplina.

Salvaguardo, que o desenvolvimento profissional destas professoras, conseguido com a sua participação no PFCM, não pode ser separado da sua história pessoal e profissional, onde se inclui a sua relação com a aprendizagem e com a Matemática, bem como das suas expectativas face a esta participação, o que é consentâneo com as ideias expressas por Day (2001).

Referências bibliográficas

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Borko, H. (2004). Professional development and teacher learning: Mapping the terrain. *Educational Researcher*, *33*(8), 3-15.

Cole, A. L., & Knowles, J. G. (2000). *Researching teaching: Exploring teacher development through reflective inquiry.* Boston: Allyn and Bacon.

Day, C (2001). *Desenvolvimento profissional de professores: Os desafios da aprendizagem permanente*. Porto: Porto Editora.

Guimarães, F. (2006). Como se pensa hoje o desenvolvimento profissional?. *Quadrante*, *15*, 169-192.

Guskey, T. R. (2000). *Evaluating professional development*. Thousand Oaks: Corwin Press.

Hatton, N., & Smith, D. (1995). Reflection in teacher education: towards definition and implementation. *Teaching & Teacher Education*, *11*(1), 33-49.

Korthagen, F. (2001). A reflection on reflection. In F. A. J. Korthagen, J. Kessels, B. Koster, B. Lagerwerf, & T. Wubbels (Eds.), *Linking practice and theory: The pedagogy of realistic teacher education* (pp. 51-68). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Cochran-Smith, M., & Lytle, S. (1999). Relationships of knowledge and practice: Teacher learning in communities. *Review of Research in Education*, *24*, 249-305.

Menezes, L., & Ponte J. P. (2006). Da reflexão à investigação: Percursos de desenvolvimento profissional de professores do 1.º ciclo na aula de Matemática. *Quadrante*, *15*, 145-168.

Ponte, J. P., Guimarães, H., Leal, L. C., Canavarro, P., & Abrantes, P. (1997). *O conhecimento profissional dos professores de matemática: Relatório final do projecto "O saber dos professores: Concepções e práticas"*. Lisboa: Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Santos, L. (2000). *A prática lectiva como actividade de resolução de problemas: um estudo com três professoras do ensino secundário* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa).

Shulman, L. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, *1*(2), 4-14.

Sowder, J. T. (2007). The mathematical education and development of teachers. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 157-223). Charlotte: Information Age Publishing.

Stake, R. (2009). *A arte da investigação com estudos de caso* (2.ª ed.). Lisboa: Fundação Calouste Gulhenkian.

Zaslavsky, O., Chapman, O., & Leikin, R. (2003). Professional development of mathematics educators: Trends and tasks. In A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), *Second international handbook of mathematics education – Part two*. (pp. 877-917). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

SIMPÓSIO 1

NÚMEROS E OPERAÇÕES

NÚMEROS E OPERAÇÕES: UM TEMA A (RE)DISCUTIR

Elvira Ferreira
Escola Superior de Educação de Torres Novas
elvira127@netcabo.pt

Manuel Vara Pires
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Bragança
mvp@ipb.pt

Ensino e aprendizagem dos números e operações

A aprendizagem dos números e das operações ocupam uma posição central no currículo de matemática nos primeiros anos de escolaridade, podendo ser entendida como "a área mais importante da aprendizagem matemática" (Sarama & Clements, 2009, p. 28). O Programa de Matemática do Ensino Básico (Ministério da Educação, 2007), reconhecendo essa centralidade, inclui tópicos referentes a números naturais e racionais nos 1.º e 2.º ciclos e a números irracionais no 3.º ciclo, tendo por base três ideias fundamentais: "(i) promover a compreensão dos números e operações; (ii) desenvolver o sentido de número; e (iii) desenvolver a fluência no cálculo" (p. 3).

Muitos estudos e orientações curriculares recentes têm enfatizado a importância de ajudar os alunos a desenvolver o seu sentido de número (National Council of Teachers of Mathematics, 2007; Verschaffel, Greer & De Corte, 2007; Yang & Li, 2008; Yang & Tsai, 2010). Argumenta-se que a sua compreensão poderá ser útil para compreender os números em geral e desenvolver estratégias e procedimentos eficientes contribuindo para uma melhoria do conhecimento matemático dos alunos. O sentido de número (e de operação) refere-se à compreensão geral que cada um tem dos números e operações e à capacidade de os manipular de forma flexível em situações do dia-a-dia. Esta capacidade implica e exige o uso de estratégias e procedimentos eficientes, flexíveis e úteis para resolver problemas (McIntosh, Reys & Reys, 1992; Yang & Hsu, 2009).

Yang e Wu (2010, p. 379) estabelecem quatro razões principais que tornam o ensino e a aprendizagem do sentido de número prioritários nos primeiros anos de escolaridade: (i) o sentido de número é uma forma de pensar que frequentemente representa flexibilidade, criatividade e razoabilidade com números e operações; (ii) o sentido de número é um conceito holístico de quantidades, números e operações e das suas relações, as quais devem ser explicadas de modo eficiente e flexível a situações do dia a dia; (iii) as representações numéricas e o pensamento matemático dos adultos dependem, em grande parte, do seu sentido de número; e (iv) a ênfase nos cálculos escritos de papel e lápis não somente limita o pensamento e a compreensão matemática dos alunos, como também dificulta o desenvolvimento do seu sentido de número.

Consequentemente, é fundamental propor tarefas matemáticas a partir das quais os alunos desenvolvam uma boa compreensão sobre os números e operações e as suas propriedades que lhes permita calcular de modo flexível e fluente, isto é, "escolhendo estratégias, procedimentos e ferramentas adequadas" (Van den Heuvel-Panhuizen & Treffers, 2009, p. 108). É importante que os professores escolham e construam propostas que "promovam nos alunos o desenvolvimento dos conceitos e dos processos de uma forma que simultaneamente estimule a capacidade de resolver problemas e de raciocinar e comunicar matematicamente" (National Council of Teachers of Mathematics, 1994, p. 27). Assim, desenvolver o sentido de número exige um foco não só na seleção e preparação de tarefas como também na criação de ambientes de aprendizagem apropriados (Brocardo, Serrazina & Rocha, 2008). Um ambiente de sala de aula propício ao desenvolvimento do sentido de número implica proporcionar aos alunos oportunidade para "pensar com os números e operações, orientá-los na forma como olham para os números e ajudá-los a construir uma rede ativa de relações numéricas" (Dolk, 2009, p. 5).

Nos últimos anos, a investigação tem incidido, fundamentalmente, na análise do sentido de número e nas formas como se incrementa, tornando evidente que os alunos podem desenvolver melhor as suas capacidades numéricas e de cálculo através de experiências de aprendizagem que encorajem "a discussão em pequenos grupos e com toda a turma, que permitam o questionamento e a comunicação de ideias matemáticas, quando comparados com aqueles que recebem um ensino tradicional" (Yang & Tsai, 2010, p. 113).

Organização do simpósio

Este simpósio centra-se no tema Números e operações, sendo abordado a partir das diversas perspetivas apresentadas pelas contribuições aceites. A reflexão e a discussão mais aprofundada da temática em análise são enquadradas por seis comunicações orais e um poster.

A organização do simpósio distribui-se por dois momentos de trabalho conjunto. O primeiro momento incide em três comunicações orais. A primeira comunicação, de Inocêncio Balieiro Filho, traça um panorama histórico do desenvolvimento do conceito de número, procurando identificar aspetos do conhecimento, da cultura e das práticas letivas do professor de matemática. A segunda comunicação, de Joana Conceição e Margarida Rodrigues, aborda o trabalho de projeto em matemática no 1.º ciclo do ensino básico, analisando as capacidades matemáticas e as competências democráticas que são desenvolvidas ao trabalhar de uma forma integrada. A terceira comunicação, de Sónia Martins, discute os robots na aprendizagem de conceitos matemáticos no 1.º ciclo do ensino básico, em especial o uso do conceito de transparência e a sua utilização na análise da prática e do reportório partilhado de uma comunidade de alunos que utilizam robots como artefacto.

O segundo momento incide em três comunicações orais e na apresentação de um poster. A primeira comunicação, de Maria de Lurdes Serrazina, apresenta uma resenha da investigação realizada em Portugal desde o início do século, incidindo em tópicos relativos ao tema Números e operações numa perspetiva de sentido do número, com alunos do 1.º ciclo do ensino básico. A segunda comunicação, de Elvira Ferreira, aborda a resolução de problemas de subtração no 2.º ano de escolaridade, realçando a relação dos significados desta operação na escolha de estratégias e procedimentos e o seu contributo para o desenvolvimento do sentido de número dos alunos. A última comunicação, de Renata Carvalho e João Pedro da Ponte, analisa estratégias de cálculo mental na multiplicação e divisão de números racionais na representação decimal seguidas por alunos de uma turma do 6.º ano de escolaridade. Por fim, é apresentado um poster, por Teresa Vilar e Lina Fonseca, que relata e discute um estudo que procura saber como se pode desenvolver o sentido de número no âmbito da educação pré-escolar.

Referências bibliográficas

Brocardo, J., Serrazina, L., & Rocha, I. (Orgs.) (2008). *O sentido do número: Reflexões que entrecruzam teoria e prática*. Lisboa: Escolar Editora.

Dolk, M. (2009). Looking at numbers: Young children developing number sense. Em *Atas do XIX Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 1-14). Lisboa: Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

McIntosh, A., Reys, B., & Reys, R. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, *12*(3), 2-8, 44.

Ministério da Educação (2007). *Programa de matemática do ensino básico*. (disponível em http://www.dgidc.min-edu.pt/ensinobasico/index.php?s=directorio&pid=71#i)

National Council of Teachers of Mathematics (1994). *Normas profissionais para o ensino da matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

National Council of Teachers of Mathematics (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Sarama, J., & Clements, D. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. New York: Routledge.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Treffers, A. (2009). Mathe-didactical reflections on young children's understanding and application of subtraction-related principles. *Mathematical Thinking and Learning, 11*, 102-112.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 557-628). Reston, VA: NCTM.

Yang, D., & Hsu, C. (2009). Teaching number sense for 6th graders in Taiwan. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 4*(2), 92-108.

Yang, D., & Li, M. (2008). An investigation of 3rd grade taiwanese students' performance in number sense. *Educational Studies*, *34*(5), 443-455.

Yang, D., & Tsai, Y. (2010). Promoting sixth graders' number sense and learning attitudes via technology-based environment. *Educational Technology & Society*, *13*(4), 112-125.

Yang, D., & Wu, W. (2010). The study of number sense: Realistic activities integrated into third-grade math classes in Taiwan. *The Journal of Educational Research*, *103*, 379-392.

O TRABALHO DE PROJETO EM MATEMÁTICA NO 1º CICLO: UM CAMINHO PARA A CONSTRUÇÃO DA CIDADANIA

Joana Conceição

Externato "O Poeta"

joanadaconceicao@gmail.com

Margarida Rodrigues

Centro Interdisciplinar de Estudos Educacionais, Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa

margaridar@eselx.ipl.pt

Resumo

Este artigo apresenta parte de um estudo, em desenvolvimento, que visa compreender a natureza do trabalho de projeto, os pressupostos que lhe subjazem e analisar as capacidades matemáticas e as competências democráticas que são desenvolvidas ao trabalhar de uma forma integrada. No âmbito de uma abordagem qualitativa, o campo empírico do estudo incidiu num projeto desenvolvido por um grupo de quatro alunas do 3.º ano do Ensino Básico, que problematizou qual o tarifário mais económico, face às novas ofertas no mercado do fornecimento da energia elétrica. Os resultados apresentados sugerem o desenvolvimento, nas alunas, do sentido de número, ao envolverem-se em problemas autênticos da sua vida real, e de uma competência crítica na compreensão do uso social da matemática.

Palavras-chave: trabalho de projeto, democracia, cidadania, sentido de número.

Introdução

Ao longo das últimas décadas e em vários países, têm sido várias as reformas que se tentaram fazer no ensino da Matemática de forma a combater o elevado insucesso escolar que os resultados nesta área apresentam, embora nem sempre com grandes repercussões positivas. Este facto tem levado a que a Matemática continue a ser um fator de exclusão social, pessoal e profissional para muitos dos alunos que se confrontam com a exigência de um tipo de conhecimento ao qual não conseguiram aceder.

O presente artigo apresenta parte de um estudo, ainda em fase de desenvolvimento, no âmbito de uma dissertação de mestrado, o qual pretende abordar a questão do distanciamento entre o objeto epistemológico da matemática enquanto ciência e o objeto das aprendizagens matemáticas na escola, tendo como objetivo compreender a natureza do trabalho de projeto, os pressupostos que lhe subjazem e analisar as capacidades matemáticas e as competências democráticas que são desenvolvidas ao trabalhar de uma forma integrada. Para isso, definimos as seguintes questões: (1) Como se desenvolve um trabalho de projeto que seja significativo para os alunos do 1.º Ciclo do ensino básico? (2) Como é que os alunos desenvolvem a sua competência matemática através do trabalho de projeto? (3) Porquê escolher o trabalho de projeto para trabalhar os valores democráticos?

O artigo apresenta alguns resultados relativos às questões 2 e 3, atrás enunciadas, e produzidos no contexto de um projeto de investigação desenvolvido por um grupo de quatro alunas do 1.º Ciclo do ensino básico. Estas alunas tinham como intenção perceber, face às novas ofertas no mercado do fornecimento da energia elétrica, que tarifário seria o mais económico.

A matemática e a cidadania

A Educação Matemática Crítica tem como objetivo central "fornecer aos estudantes instrumentos que os auxiliem, tanto na análise de uma situação crítica quanto na busca por alternativas para resolver aquela situação." (Passos & Araújo, s.d., p. 8.). Esta abordagem valoriza, no seu objeto de análise, a relação da Matemática com as estruturas sociais e políticas e, segundo Skovsmose e Valero (2002), deve comportar objetivos gerais que procurem o desenvolvimento das relações entre educação matemática e democracia.

Skovsmose (1995) aborda o conceito de materacia, salientando a necessidade de desenvolver um espírito crítico, em que o entendimento social e político contribui para a compreensão das relações da matemática com a sociedade. Esta compreensão possibilita ao indivíduo emancipar-se social e culturalmente, participando e sendo agente de mudança. A materacia é composta por três formas de consciência: matemática, tecnológica e reflexiva. O desenvolvimento de uma competência crítica permite aos indivíduos uma utilização da matemática mais refletida e mais consciente.

A forma como a educação matemática contribui para o desenvolvimento da cidadania não se limita apenas a trazer para a aula situações contextualizadas que procurem ser significativas na aprendizagem de ideias matemáticas nos alunos. A educação matemática deve ir mais longe, ao construir a compreensão acerca dessas mesmas situações, e um olhar crítico que conduza à intervenção social e política.

O Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte el al., 2007) prevê uma formação que seja capaz de desenvolver competências matemáticas passíveis de serem usadas fora do mundo escolar. A matemática também ”deve contribuir para o desenvolvimento pessoal do aluno (…) e deve contribuir, também, para a sua plena realização na participação e desempenho sociais e na aprendizagem ao longo da vida.” (p.3).

Mas será que ser um cidadão matematicamente competente e ser um aluno matematicamente competente são o mesmo? Santos (2002) interroga-se acerca da forma como a Matemática é desenvolvida nas escolas enquanto formadora para a cidadania: "Os alunos na sua escolaridade não são, de facto, entendidos como cidadãos, eles estão em preparação para serem futuros cidadãos. Mas como se pode educar para a cidadania sem ser pela cidadania?" (p.46). Nota-se, portanto, um desfasamento entre o que é ser cidadão e o que é educar para a cidadania. A Matemática escolar não tem entendido o aluno como simultaneamente cidadão, o que cria um obstáculo ao desenvolvimento de competências matemáticas que potenciem o exercício da cidadania.

Trabalho de projeto

Dewey (1968) refere que "um autêntico projeto encontra sempre o seu ponto de partida no impulso do aluno" (p.15), embora trabalhar em projeto implique mais do que o impulso inicial. De acordo com Abrantes (1994), três componentes figuram na sua definição: atividade, intencionalidade e contextualização, sendo que a segunda componente é especialmente relevante. Isto significa que um projeto parte de um impulso inicial de um aluno ou alunos e exige uma intencionalidade, ou seja, um fim. Para atingir esse fim e cumprir essa intencionalidade, é necessário observar e avaliar o contexto de forma a poder planificar a ação e assim construir o projeto (Dewey, 1968).

É um tipo de trabalho que se processa de um modo faseado e prolongado, através da aprendizagem ativa, partindo de situações reais que constituem problemas para os alunos (Abrantes, 1994). Esta dimensão de intervenção social e até mesmo política é a característica que poderá diferenciar o trabalho de projeto de outras abordagens que valorizam a aprendizagem ativa e os interesses dos alunos (Abrantes, 1994), já que lhe dá uma autenticidade e uma intencionalidade maiores bem como a possibilidade de formar futuros cidadãos mais críticos, reflexivos, interventivos e participativos na vida democrática da sociedade (Gerardo, 2010). Esta abordagem oferece ainda aos alunos a possibilidade de desenvolverem a responsabilidade e autonomia (Abrantes, 1994) e de participarem na construção do seu próprio conhecimento e do conhecimento negociado, através da participação diferenciada num processo social partilhado (Valero, 2002), estabelecendo assim uma forte relação com a cidadania.

Reconhecem-se alguns constrangimentos no desenvolvimento de projetos, nomeadamente, por parte do professor, como sejam (i) a sobrevalorização da perfeição em detrimento das produções dos alunos, (ii) a realização de partes do projeto pelo professor como forma de poupar tempo, e (iii) a desvalorização de aspetos que os alunos consideram interessantes (Abrantes, 1994).

Abordagem metodológica

Para compreender melhor a forma como o trabalho de projeto pode contribuir para o desenvolvimento de competências matemáticas e de atitudes democráticas, em alunos do 1.º ciclo, propomo-nos desenvolver um estudo exploratório que se insere na abordagem qualitativa. A seleção desta abordagem prende-se com os objetivos do estudo, já que pretendemos analisar uma realidade complexa com especial enfoque nos processos e nos significados dos alunos (Bogdan & Biklen, 1994), procurando obter dados que permitam construir um quadro à medida que as partes e o todo vão sendo examinados.

A turma onde se desenvolveu o trabalho empírico para este estudo é um grupo com 14 alunos que frequentam o 3.º ano e 1 aluno que frequenta o 2º ano. A investigadora é simultaneamente professora da turma, embora em regime de substituição por licença de maternidade. O tipo de ensino privilegiado pela professora titular insere-se numa abordagem mais tradicional onde os alunos exercitam e mecanizam muito os procedimentos matemáticos. É um grupo com um bom desempenho face ao que é exigido pela escola.

Toda a turma desenvolveu um projeto sobre a eletricidade, procurando responder a uma série de questões que se estenderam às diversas áreas curriculares do 1.º ciclo. Para a recolha dos dados, privilegiou-se o grupo que se debruçou sobre a investigação das tarifas da eletricidade, uma vez que a natureza deste trabalho se prende diretamente com os objetivos deste estudo. Este grupo é composto por quatro alunas que se inscreveram neste projeto por ser do seu interesse. No quadro geral da turma, não se encontram no grupo das melhores alunas, pelo contrário. São alunas que têm revelado um fraco gosto e desempenho na Matemática.

Como técnicas de recolha de dados, utilizámos a observação participante com registo áudio e vídeo das sessões de trabalho das alunas incidentes no desenvolvimento deste projeto. Esta recolha decorreu entre meados de abril e princípio de junho de 2012.

A escrita do presente artigo coincidiu com a fase final da recolha de dados e a fase inicial da sua análise. De acordo com Lankshear e Knobel (2004), é fundamental encontrar padrões que permitam ao investigador ir 'arrumando' a informação recolhida, segundo critérios de convergência, em categorias e subcategorias de análise. As categorias analíticas que foram definidas previamente, são decorrentes das questões do estudo: (i) etapas do trabalho de projeto, (ii) significância do trabalho de projeto, (iii) competência matemática, (iv) competências de cidadania. Prevemos que outras categorias e subcategorias possam emergir do desenvolvimento da análise de dados. No presente artigo, apresentamos dados relativos à competência matemática no domínio dos números e operações, estabelecendo relações com a significância do trabalho de projeto e a cidadania.

Apresentação de alguns resultados

No âmbito do trabalho de projeto desenvolvido, as alunas que investigaram as tarifas da eletricidade procuraram perceber, face às novas ofertas no mercado da eletricidade, que tarifário seria o mais rentável entre o da EDP, o da EDP/Continente que apresenta um desconto de 10% em cartão Continente face à fatura da EDP e o da empresa espanhola Endesa, que apresenta um desconto de 5% diretamente na fatura. Nessa análise, procura-se relacionar os preços da tarifa bi-horária com a tarifa simples e respetivos descontos, já que nenhum dos novos tarifários apresenta este tipo de tarifação.

Apresentamos, de seguida, um episódio em que as alunas tentaram perceber o que significava 10% e como se calculava.

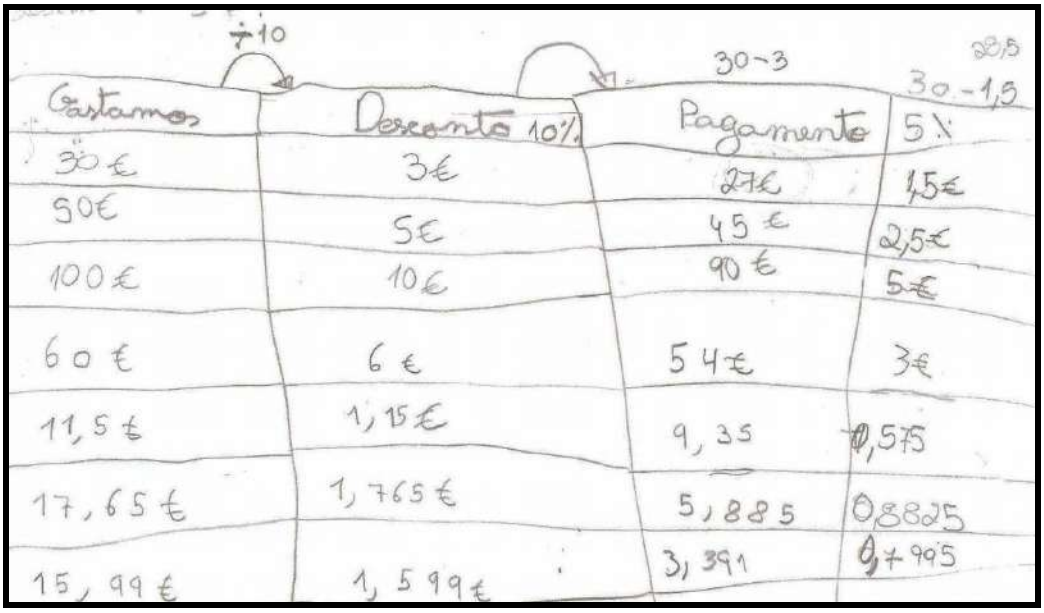
> Prof- 100% é a unidade inteira não é?
> ML- É.
> Prof- Então, como é que vamos descobrir quanto é que é 10%?
> ML-Partir ao meio…
> Prof- Se partirmos ao meio 100 fica 10?
> CC- Fica 50.
> MM- 50 mais 50.
> (…)
> Prof- A minha pergunta foi: Como é que de 100, 100% nós obtemos 10? (pausa) Qual é a relação entre 10 e 100?
> CC- 10 x 10 dá 100.
> Prof- Então de 100 como é que obtemos…?

CC- Dividimos por 10.
Prof- Então de 100% para termos 10% temos de…
CC- Dividir… por 10.

Com a ajuda da professora, que procurou levar as alunas a mobilizarem o seu conhecimento referente à composição do 100 em partes iguais, perceberam que 10% é a décima parte de 100%, logo, para achar 10% de um valor, teriam de dividir esse valor por 10. Verifica-se neste diálogo entre a professora e as alunas uma construção do conceito de percentagem ancorada no estabelecimento de relações, configurando-se como ideia matemática poderosa a noção de unidade correspondente a 100%. A forma como as alunas deram sentido à noção de 10% foi partir da sua relação com o todo 100%, todo este que as alunas compreenderam que poderia ser qualquer número.

Ao longo das aulas anteriores, o trabalho incidente nas operações numéricas parecia muito distante e abstrato para estas alunas, mas no desenvolvimento do trabalho de projeto, notou-se alguma facilidade em mobilizarem os conhecimentos matemáticos para tentarem responder às questões a que se tinham proposto no início.

Depois de perceberem, a professora sugeriu-lhes que experimentassem com vários números (Figura 1):

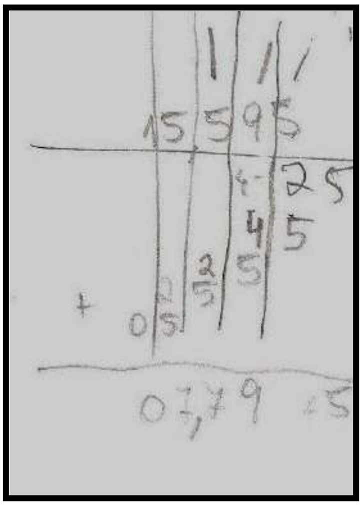

÷10 | 30−3 | 28,5 | 30−1,5

Gastamos	Desconto 10%	Pagamento	5%
30 €	3€	27€	1,5€
50€	5€	45 €	2,5€
100 €	10€	90 €	5€
60 €	6 €	54€	3€
11,5 €	1,15€	9,35	0,575
17,65 €	1,765 €	5,885	0,8825
15,99 €	1,599 €	3,391	0,7995

Figura 1. Exploração dos descontos em números hipotéticos.

A produção das alunas revela uma forma organizada de apresentação dos resultados dos cálculos efetuados, mas sobretudo faz sobressair o significado contextual de uma situação de aplicação de diferentes descontos. As alunas manifestaram uma atitude de total envolvimento na concretização desta tarefa, a qual lhes permitiu sentirem-se seguras acerca de um novo conceito matemático. O envolvimento dos alunos e a sua participação efetiva nas atividades são condições indispensáveis à aprendizagem da Matemática, importando essencialmente distinguir o que capta ou não o interesse e envolvimento dos alunos que possa dar significado à sua atividade matemática (Lave, 1992). Esta vertente de empenhamento das alunas na exploração desta tarefa assume uma especial relevância, atendendo às suas características iniciais enquanto alunas que habitualmente revelavam pouco gosto pela Matemática e um fraco desempenho nesta disciplina.

Para calcular o valor do desconto de 5%, as alunas utilizaram a divisão por 2, partindo do desconto de 10%. Usaram, pois, um conhecimento relacional — 5% como metade de 10% — e não um processo algorítmico de cálculo de 5% dos valores iniciais registados na coluna "Gastamos". No cálculo das metades dos números não naturais, utilizaram um processo algorítmico que envolveu a determinação das metades de cada um dos dígitos que compõem o número a partir da respetiva decomposição, como mostram os exemplos abaixo (Figura 2).



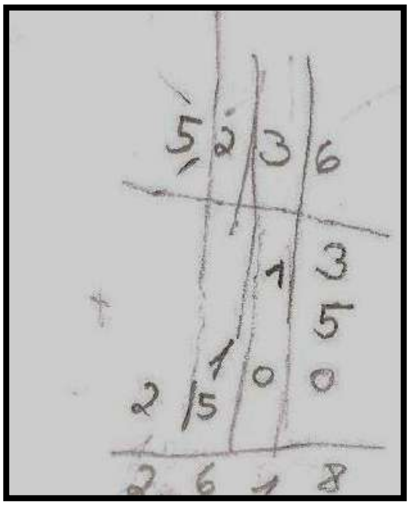


Figura 2. Cálculo da metade de números não naturais.

Este algoritmo, diferente dos habitualmente usados nas salas de aula, funciona da direita para a esquerda mas cada dígito é tratado com referência ao seu significado global no número em causa. Assim, por exemplo, no número 5,236 o dígito 2 é visto como 200 milésimas e a sua metade é registada como 100 milésimas. Após a decomposição, procede-se à recomposição da metade do número, efetuando-se a soma. Para resolver estas divisões, as alunas decompuseram os números, utilizando o valor posicional dos algarismos por ser mais fácil calcularem mentalmente a metade de cada valor, já que aplicaram factos básicos correspondentes ao conhecimento que têm da relação de dobro/metade dos números naturais. Esta estratégia foi sugerida pela professora perante a dificuldade das alunas em dividirem os valores em causa por 2.

Depois deste trabalho, resolveram aplicar os seus novos conhecimentos para responderem às suas questões. No caso das tabelas que abaixo apresentamos (*Figura* 3), estiveram a calcular o valor do desconto de 10% que o Continente oferece e a subtrair esse valor ao preço inicial da fatura, calculando assim, também, o valor final. Para este trabalho, as alunas partiram de valores presentes nas faturas que trouxeram de casa, dando mais sentido ao seu trabalho, tendo, inclusivamente, registado as iniciais dos seus nomes. Seguidamente, iriam calcular quanto pagariam com 5% de desconto.

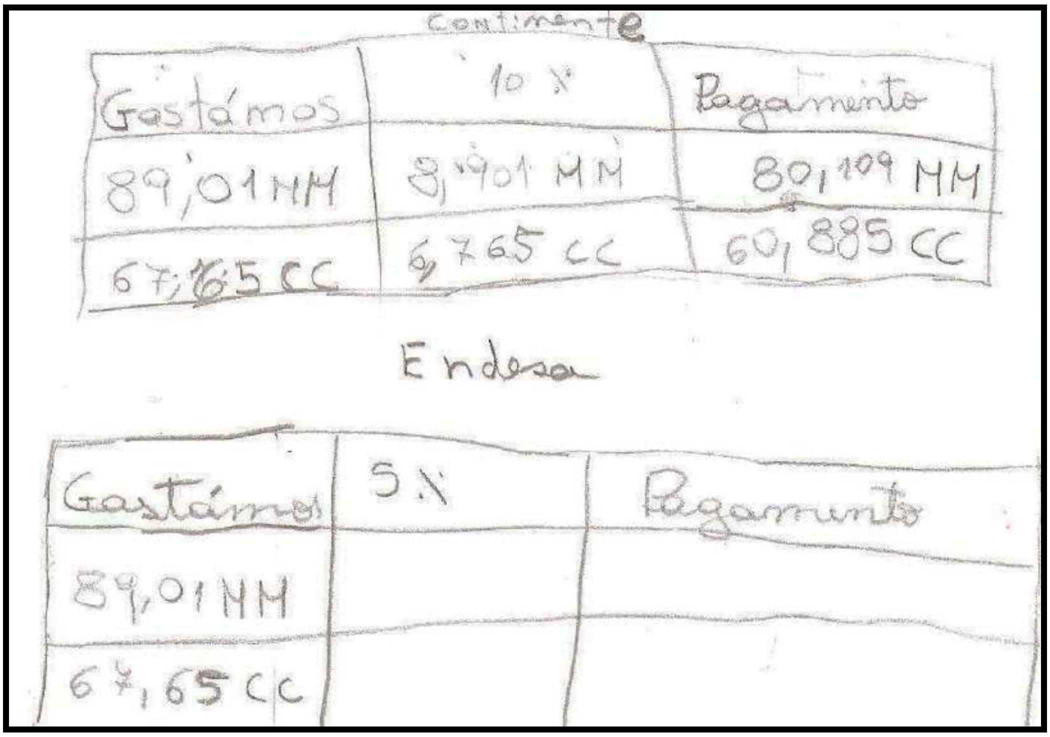


Figura 3. Cálculo dos descontos com os valores constantes nas faturas.

Encontramos aqui dois momentos de trabalho que se complementam: o trabalho de descoberta, compreensão e construção de conceitos matemáticos e o trabalho de sistematização e treino que auxilia os alunos a sistematizarem as suas aprendizagens. O primeiro momento de trabalho levou as alunas a trabalharem competências cognitivas de nível mais elevado já que pressupôs uma parte mais analítica e criativa que envolveu uma maior discussão de ideias e de estratégias de trabalho. No segundo momento, verificou-se, também, um trabalho de sistematização e uma grande interação entre as alunas, já que sentiram necessidade de se entreajudar com os algoritmos da divisão e da subtração. Ao longo do trabalho de projeto desenvolvido pelas alunas, estiveram envolvidas noções como a percentagem e a metade (5% e 10%), cálculos (divisão e subtração com números decimais) e momentos de leitura funcional (no caso dos panfletos).

Verificámos também que o trabalho de grupo foi uma mais-valia já que todas as alunas puderam contribuir para o projeto com os seus próprios conhecimentos, que nem sempre eram comuns a todo o grupo. Parece-nos que esta possibilidade se deveu ao facto de se tratar de alunas com níveis de desempenho muito semelhantes, ou seja, o facto dos seus níveis de conhecimento não serem muito díspares forçou a que todas contribuíssem. Não queremos com isto afirmar que não existam vantagens em grupos mais heterogéneos. Apenas neste caso específico, se houvesse um elemento do grupo que tivesse um desempenho muito superior, talvez não oferecesse a abertura (o espaço e o tempo) necessária para as alunas porem em ação os seus conhecimentos e capacidades. A falta de responsabilidade de alguns elementos do grupo acabou por ir sendo balizada pelos outros elementos do grupo que sentiam necessidade de fazer avançar o trabalho e dar resposta às questões colocadas. Notou-se, ao longo das sessões, progressivamente um maior empenho e focalização nos objetivos do trabalho.

Uma das questões práticas das alunas tinha a ver com o cartão Continente em si. Elas queriam saber se o dinheiro que acumulava no cartão servia para pagar depois a eletricidade. Para perceber melhor esta questão e conseguir responder à pergunta, estiveram a analisar as faturas e a verificar que meios de pagamento poderiam utilizar para efetuar o pagamento das faturas.

O que queremos saber	O que descobrimos
ós queremos saber como é ue se paga os faturas.	Nós descobrimos que a fatura pode se pagar de varias formas: pela Edp PaysHoP, multibanco, ctt e Débito Direto.
omo se pode poupar e astar na eletricidade:	

Figura 4. Registo das formas de pagamento das faturas.

Com esta análise, perceberam que apenas poderiam gastar esse dinheiro em compras no Continente. Este ponto foi importante para a sua ponderação acerca do tarifário a escolher. Apesar de matematicamente, com as tarifas simples, os números apontarem para a opção do Continente, por ter um desconto mais vantajoso, houve a preocupação de ponderar a questão desse mesmo desconto poder apenas ser usado em compras no hipermercado.

É evidente, através desta análise, que a matemática nos ajuda a interrogar e a compreender a realidade e a atuar sobre ela, mas as ferramentas que a matemática oferece não esgotam as competências necessárias para fazer opções. É o conhecimento crítico, que também é potenciado pela matemática, que ajuda as alunas a fazerem a sua opção relativamente ao tarifário. Esta ideia está de acordo com o que Skovsmose (1995) nos diz acerca do uso da Matemática.

Considerações finais

Verificamos que o trabalho de projeto dá sentido à matemática na medida em que põe os conhecimentos em ação, muitas vezes sem que as próprias alunas se apercebessem que estavam a trabalhar conceitos matemáticos. Ao existir esta 'camuflagem', notámos que as alunas não ficaram bloqueadas por não serem "boas" alunas a Matemática. Pelo contrário, foram sempre procurando mobilizar os seus conhecimentos para seguirem em frente e atingirem os objetivos do seu projeto. Tomando a aceção de competência de Perrenoud (1999; 2000) enquanto mobilização de recursos cognitivos, podemos afirmar que se tratou de um trabalho que permitiu o desenvolvimento de competências, capacitando estas alunas a operacionalizar e a mobilizar os saberes. Pela sua natureza, o trabalho de projeto oferece aos alunos a possibilidade de porem em ação, num cenário de investigação real (Skovsmose, 2000), os seus conhecimentos matemáticos.

A forma como os números foram surgindo no trabalho e a necessidade de compreenderem o seu significado nos contextos estudados levou a que as alunas lhes atribuíssem um sentido. Ao colocarem em ação conhecimentos que já tinham, mas aos quais não atribuíam muita importância ou significado, desenvolveram a sua competência numérica. As alunas usaram um cálculo flexível que tirou partido das relações numéricas emergentes na situação em causa, sendo que o mesmo se inscreveu no desenvolvimento do sentido de número, enquanto processo de desenvolvimento da capacidade e da aptidão para usar de modo flexível uma compreensão pessoal e global do número e das operações (McIntosh, Reys & Reys, 1992).

O trabalho de projeto contribuiu também para desenvolver nos alunos a sua capacidade de questionamento da realidade envolvente através da matemática, aprendendo a serem críticos à forma como a matemática lhes é apresentada. Podemos, pois, considerar que, por essa via, os alunos desenvolvem competências ligadas à cidadania, exercendo essa mesma cidadania à medida que a vão construindo (Abrantes, 1994; Skovsmose, 1995). Essa será a função social que é inerente à escola, a de desenvolver nos alunos competências que os capacitem a construir sentido ao integrar e articular os diferentes saberes.

Pela análise de faturas com tarifas bi-horárias, ganhou relevância, para as alunas, a necessidade de perceber do que se trata e que relação poderia ter com a tarifa simples e com estes descontos. Por isso, as alunas planearam confrontar os resultados alcançados com os tarifários bi-horários para tecerem conclusões acerca do problema de partida. Esse confronto será importante do ponto de vista de uma maior consciência do impacto que essa decisão poderá ter nos orçamentos familiares. Perspetivamos que esta fase de trabalho, planeada mas ainda não concretizada, conduzirá os alunos, não só a usar modelos matemáticos, mas sobretudo a questioná-los criticamente, a avançar com hipóteses que poderão subjazer a aliança da EDP com o Continente num desconto de 10%, que só é aplicável a um tarifário simples, a analisar os meios usados na divulgação dos descontos e o modo como são usados os modelos matemáticos nessas técnicas de marketing. Ou seja, esta fase de trabalho, enquadrada numa perspetiva de educação matemática crítica, dotará os alunos de instrumentos que os poderão auxiliar a analisar, de um modo fundamentado, diferentes situações colocadas em alternativa, e a fazer opções que possam ser mais vantajosas, tomando em consideração questões relacionadas com a proteção ambiental e a pertinência do gasto da eletricidade nas horas do vazio. Assim, a discussão sobre qual a melhor opção prende-se não apenas com os números obtidos por cálculo mas também com os hábitos concretos familiares e sobre o tirar ou não partido de um tarifário bi-horário.

Pelo trabalho já desenvolvido e aquele que está perspetivado, é possível identificar algumas das potencialidades do trabalho de projeto e o seu contributo para a construção da cidadania. O facto do trabalho se centrar na análise de situações reais que decorrem do quotidiano da turma, tornou significativo, para as alunas, o trabalho com os números e contribuiu para o desenvolvimento de competências matemáticas importantes para o exercício da cidadania.

Referências bibliográficas

Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a Matemática: A experiência do Projecto MAT789* (tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora. (Obra original em inglês publicada em 1991)

Dewey, J. (1968). *Democracy and education.* New York: Macmillan Publishing Company. In M. Santos, E. Leite & M. Malpique (Eds.), 1990, *Trabalho de Projeto II: Leituras comentadas*. Colecção Ser Professor. Lisboa: Afrontamento.

Gerado, H. (2010). Lendo o mundo com a matemática para intervir socialmente. In H. Gomes, L. Menezes e I. Cabrita (Orgs.), *Actas do XXI Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 672-682). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Lave, J. (1992). Word problems: A microcosm of theories of learning. In P. Light e G. Butterworth (Eds.), *Context and cognition: Ways of learning and knowing* (pp. 74-92). Hempstead: Harvester Wheatsheaf.

Lankshear, C., & Knobel, M. (2004). *A handbook for teacher research: From design to implementation*. New York: Open University Press.

McIntosh, A., Reys, B., & Reys, R. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics,* 12(3), 2-8 e 44.

Passos, C. M., & Araújo, J. L. (s.d.). *Possíveis Articulações entre Etnomatemática e Educação Matemática Crítica*. Acedido em 5 de junho, 2012, em http://www.fae.ufmg.br/ebrapem/completos/07-03.pdf.

Perrenoud, P. (1999). Construir competências é virar costas aos saberes? *Pátio. Revista Pedagógica, 11*, 15-19.

Perrenoud, P. (2000). Construindo competências. *Nova Escola, 31,* 19-31.

Ponte et al. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, Direcção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.

Santos, M. P. (2002). A partir de uma conversa sobre educação, matemática e cidadania. *Quadrante*, *11*(1), 43-48.

Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação. *Bolema,* 14*,* 66-91.

Skovsmose, O. (1995). Competência democrática e conhecimento reflexivo em Matemática. In J. F. Matos, I. Amorim, S. Carreira, G. Mota e M. Santos (Eds), *Matemática e realidade: Que papel na educação e no currículo?* (pp. 137-169). Lisboa: Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa da Ciências da Educação.

Skovsmose, O., & Valero, P. (2002). Quebrando a neutralidade política: O compromisso crítico entre a educação matemática e a democracia. *Quadrante*, 11(1), 7-28.

Valero, P. (2002). Consideraciones sobre el contexto y la educación matemática para la democracia. *Quadrante*, 11(1), 49-59.

SOBRE O DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO DO CONCEITO DE NÚMERO

Inocêncio Fernandes Balieiro Filho
UNESP – Ilha Solteira – Brasil
balieiro@mat.feis.unesp.br

Resumo

O objetivo deste trabalho foi elaborar um panorama histórico do desenvolvimento do conceito de número, buscando contribuir para o conhecimento e a cultura do professor de Matemática e para o seu trabalho em sala de aula. Para isso, por meio da historiografia, foram pesquisados e selecionados textos de matemáticos e filósofos de diferentes períodos da história que tiveram a preocupação em definir o número e consultadas obras de historiadores da Matemática.

Palavras chave: Número, História, Filosofia da Matemática.

Introdução

Nos diferentes níveis de ensino, ao se ensinar Matemática, o número é um assunto presente, ainda que sejam diferentes as formas de apresentação e os níveis de abstração. Nas séries iniciais, a noção de número está relacionada com processos de contagem e medidas. Nas séries intermediárias e no Ensino Médio, o número assume uma característica algébrica e é explorada a sua construção valendo-se de relações de equivalência e de ordem. Já em níveis avançados, valendo-se dos axiomas de G. Peano (1858-1932), é caracterizado o conjunto dos números naturais e, com base nesse conjunto, são construídos os conjuntos dos números inteiros e dos números racionais. E, finalmente, com a definição de corpo ordenado que satisfaça o axioma da completude, é construído o conjunto dos números reais.

No transcorrer da História da Matemática, diferentes matemáticos e filósofos preocuparam-se em estabelecer uma definição para “número”, por ser esse um elemento básico no desenvolvimento de uma teoria. A definição de número é uma das questões dos Fundamentos da Matemática que ocuparam e ainda ocupam os filósofos da Matemática.

Thompson (1992), em suas investigações sobre as concepções que os professores têm sobre a Matemática, aponta que esses têm uma cultura Matemática reduzida, isto é, sabem pouco sobre a História e a Filosofia dessa ciência, e isso faz que tendam para uma visão absolutista e instrumental da Matemática, considerando-a como uma acumulação de fatos, regras, procedimentos e teoremas. Fennema e Leof (1992) apresentam vários exemplos que sugerem que o conhecimento e a cultura matemática do professor podem ter influência no seu estilo de ensino.

Neste trabalho, apresentamos um panorama histórico do desenvolvimento da definição de número, buscando contribuir para o conhecimento e a cultura do professor de Matemática. Conforme Felix Klein, "esperamos que discussões deste tipo contribuam para a cultura matemática geral: ao lado do conhecimento de detalhes específicos (técnicas), que se adquire nas várias disciplinas, deve haver uma compreensão dos conteúdos e das relações históricas existentes entre eles." (Klein, 2004, p.2).

A história e a filosofia devem ter lugar de destaque nas disciplinas do curso de Matemática, já que ambas contribuem para um entendimento mais amplo dos conceitos que fazem parte dessa ciência e essa compreensão contribuirá para o trabalho do professor em sala de aula.

Sobre a Metodologia da Pesquisa

Para a elaboração do presente estudo tomou-se como base as etapas de pesquisa em História sugeridas por Besselaar (1973) e os critérios de classificação de fontes históricas indicados por May (1978).

Dadas essas referências, buscou-se adaptá-las às características da pesquisa proposta para esse trabalho. Foram seguidas sete etapas: 1. Levantamento Bibliográfico, com o intuito de encontrar os livros, artigos e documentos que estivessem relacionados com o assunto da Pesquisa; 2. Documentação, para a distinção entre as fontes primárias (obras originais) e as fontes secundárias (obras dos historiadores); 3. Leitura de Reconhecimento, para a coleta de dados referente ao tema pesquisado, com o objetivo de verificar a existência ou não das informações que estão sendo procuradas; 4. Leitura Seletiva, para a localização das respostas, em cada texto, para as questões do tema da pesquisa; 5. Leitura Reflexiva, com o propósito de compreender o que o autor assevera sobre o assunto; 6. Leitura Interpretativa, partindo dos objetivos do pesquisador e do tema pesquisado, busca-se esclarecer o que o autor declara em relação ao tema pesquisado. Nessa etapa se estabelece a relação entre o que o autor expõe no texto e o objetivo do pesquisador e são determinadas as verdades que se apresentam de forma perceptível e patente que compelem o pesquisador a uma segura anuência a respeito do assunto pesquisado; 7. Finalmente, procede-se a Redação da Pesquisa. (Maiores detalhamentos das etapas de pesquisa podem ser vistas em Balieiro, 2004 (p. 10 a 17).

O Desenvolvimento Histórico do Conceito de Número

Ainda que os egípcios e os babilônios tenham desenvolvido um sistema numérico, não há registros históricos que comprovem um interesse dessas civilizações em estudar o significado filosófico do número. Mas vale destacar que os egípcios usavam um sistema de numeração, ambos baseados em agrupamento de dez. Suas operações aritméticas básicas eram a adição e a duplicação e para multiplicar ou dividir desenvolveram um método que utilizava a duplicação.

No caso dos números racionais, os egípcios trabalharam com a ideia de "uma n-ésima parte", ou seja, as frações unitárias. Como a duplicação era importante em sua Matemática, o trabalho com as frações unitárias não era fácil. Dessa forma, eles elaboraram listas de dobros das partes. Por exemplo, o dobro de um quinto (que é dois quintos), era expresso como a soma entre um terço e um quinze avos.

Já os babilônicos representavam os números usando um sistema numérico posicional de base 60 e estenderam esse sistema para tratar das frações. Do mesmo modo que eles escreviam 72 (com seus símbolos) como "1,12" – significando 1 x 60 + 12, escreviam 72½ como "1,12;30" – significando 1 x 60 + 12 + 30 x 1/60.

Ainda assim, como enfatiza Struik, "As matemáticas orientais surgiram como uma ciência prática com os objetivos de facilitar o cálculo do calendário, a administração das colheitas, a organização das obras públicas e a cobrança de impostos." (Struik, 1992, p.47). Além disso, "as matemáticas mesopotâmicas atingiram um nível mais elevado do que o obtido pelas matemáticas egípcias" (Struik, 1992, p.56).

Além disso, Reale e Antiseri afirmam:

> Está demonstrado historicamente que os povos orientais com os quais os gregos tinham contato possuíam verdadeiramente uma forma de 'sabedoria', feita de convicções religiosas, mitos teológicos e 'cosmogônicos', mas não uma ciência filosófica baseada na razão pura (no logos, como dizem os gregos). Ou seja, possuíam um tipo de sabedoria análogo a que os próprios gregos possuíam antes de criar a filosofia (Reale & Antiseri, 1990, p.12-13).

Ainda que citemos Struik e Reale e Antiseri, devemos deixar explícito o nosso respeito pelos empreendimentos realizados pelos egípcios e babilônios na matemática,

> "pois esses mostram um considerável avanço em processos aritméticos, algébricos e geométricos. De fato, ao avaliar os problemas descritos nos papiros egípcios e nas plaquetas de argila dos babilônicos, observa-se que essas civilizações utilizaram a aritmética, a álgebra e a geometria para diversos propósitos: no comércio e na administração, na medição de superfícies de terrenos, para estimar a produção agrícola, no cálculo de volumes de reservatórios e da quantidade de ladrilhos ou blocos de rochas necessários para construir um templo ou uma pirâmide e no estudo da astronomia com o intuito de confeccionar calendários astronômicos para satisfazer suas necessidades domésticas, comerciais e religiosas." (Balieiro e Reicher, 2008, p.157)

A visão de Número dos Gregos e Árabes

Os primeiros filósofos gregos desenvolveram um pensamento reflexivo sobre o como e o porquê das coisas, não estando interessados em aplicações práticas. Conforme registros históricos, o primeiro homem, precursor desse pensamento crítico e fundador da escola jônica, foi Tales de Mileto (624-547 a.C.), que junto com Anaximandro de Mileto (611-546 a.C.) e Anaxímenes de Mileto (585-525 a.C.) iniciou um pensamento filosófico que incidia sobre a natureza, ou seja, começou a realizar reflexões importantes na orientação de atividades relacionadas ao que hoje denominamos ciência natural. Conforme Heath (2003), a primeira definição de número é atribuída a Tales de Mileto, que o definiu como uma coleção de unidades (μοναϖδων συϖστημα).

O próximo a iniciar uma nova escola filosófica foi Pitágoras de Samos (569-475 a.C.), que é considerado um personagem importante do início do desenvolvimento da filosofia e da matemática grega. Os pitagóricos consideravam importante o que se ensinava do homem, da natureza da alma humana e suas analogias com outras formas de vida e as relações que se estabelecem com essa tríade. Para eles, o conceito de número tinha um significado místico e independente da realidade, isto é, o número era responsável pelo princípio harmônico que rege a estrutura do cosmo.

Os pitagóricos concebiam o número tomando-se por base a unidade, e alguns deles o denominavam como "uma progressão de multiplicidade iniciando pela unidade e uma regressão terminando nela" (Heath, 2003, p.70).

Para Platão (429-347 a.C.) o estudo da matemática tinha como objetivo o treinamento da mente e o seu valor prático não tinha importância em sua concepção filosófica. Katz (1998) afirma que, nesse período, os geômetras e filósofos fizeram pesquisas significativas em matemática na Academia de Platão, que reuniu estudiosos de várias partes do mundo grego. Dentre eles, destaca-se Eudoxo de Cnido (408-355 a.C.) que define número como “multiplicidade determinada” (πλη϶θο∀ ωϑρισμϖνον). (Heath, 2003, p.70)

Outro discípulo de Platão, que se tornou filósofo notório, foi Aristóteles (384-322 a.C.), que começou a estudar na Academia com 18 anos e permaneceu lá até a morte de Platão. No que se refere à matemática sua influência maior foi na área da lógica. Para Aristóteles, em sua *Metafísica*: “a unidade não é um número; o termo “um” significa que é uma medida de alguma multiplicidade e o "número" que é uma multiplicidade de medidas.” (Heath, 1970, p.83-84). E, Aristóteles (1862), em sua *Física*, no livro 9, define o número como uma pluralidade que se mede pela unidade.

Para Katz (1998), a obra matemática mais importante do período dos gregos e, provavelmente, de todos os tempos, denomina-se os *Elementos* de Euclides de Alexandria (325-265 a.C.). Esse trabalho fornece um modelo de como a "matemática pura" deveria ser estruturada, isto é, com base em axiomas, postulados, definições precisas, teoremas cuidadosamente indicados e demonstrações logicamente coerentes. Nesta obra, Euclides, no livro VII, definição 1 e 2, respectivamente, escreve: “Unidade é aquilo segundo o qual cada uma das coisas existentes é dita uma. E número é a quantidade composta de unidades.” (Euclides, 2009, p. 269).

Katz (1998) afirma que quase nada se conhece sobre a vida do filósofo neo-pitagórico Nicômaco de Gerasa (60-120 d.C.). Sabe-se que provavelmente estudou filosofia e matemática em Alexandria e que seus tratados estão impregnados com as concepções de Pitágoras. Dois de seus trabalhos, *Introdução à Aritmética* e a *Introdução à Harmônica* sobreviveram. Na *Introdução à Aritmética*, Nicômaco, estabelece que: “Número é uma multiplicidade determinada ou coleção de unidades ou fluxo de quantidade composta de unidades.” (Ivor, 1957, p.73).

Burton (2011) considera que, diante da descoberta dos números irracionais, a matemática grega afastou-se da abordagem puramente aritmética, o que fez com que todos os problemas algébricos fossem desenvolvidos utilizando um inadequado esquema geométrico. Diofanto de Alexandria (200-284), em sua *Aritmética*, rompe com esse enfoque e determina um marco histórico na evolução da álgebra ao introduzir um novo procedimento para resolver antigos e novos problemas algébricos. Em sua obra *Aritmética*, no livro I, lê-se: “(...) o número que não possui algumas das particularidades precedentes, mas que possui em si uma quantidade indeterminada de unidades chama-se "arithmós" e sua marca distinta é ς[1]." (Diophante, 1926, p.2).

Na matemática árabe encontramos definições dadas por dois matemáticos. Al-Khawarizmi (780-850), escreve: "Eu também observei que cada número é composto de unidades e que qualquer número pode ser dividido em unidades." (Mohammed Ben Musa, 1831, p.5). Já para o matemático Omar Khayyam (1048-1122): "esta coisa conhecida é uma quantidade ou uma razão individualmente determinada" (Alkhayyami, 1851, p.5).

A visão de Número a partir do Século XVI

Na época considerada por alguns historiadores (Katz, 1998, Burton, 2011) como o começo da Matemática Moderna, S. Stevin (1548-1620), em sua obra *L'Arithmetique*, de 1585, apresenta uma definição de número. Ele escreve: "Definição I - A Aritmética é a ciência dos números. Definição II - Número é aquilo para o qual se explica a quantidade de cada coisa." (Stevin, 1585, p.1). Sua definição, de certa forma, segue o padrão da definição dada por Euclides. Pode-se perceber que há uma mudança em sua concepção de número em relação à estabelecida por Aristóteles, isto é, não há uma distinção entre número e magnitude.

No período de I. Newton (1643-1727) e G. W. Leibniz (1646-1716), a definição de número continua a ser foco de atenção entre os matemáticos, em face de alguns tratados publicados sobre Aritmética e Álgebra. De fato, em sua *Universal Arithmetick*, Newton define: "Por número entendemos tanto uma multiplicidade de unidades, como a razão abstraída de qualquer quantidade para outra quantidade de mesma espécie, que tomamos para a unidade." (Newton, 1720, p.2).

Pode-se salientar, conforme Bashmakova e Smirnova (2000), que na Europa do século XVI e XVII havia ainda uma preponderância da tradição euclidiana, porém, com essa definição, Newton foi o primeiro a romper com a tradição euclidiana, em especial, com a concepção de número (*quantidade composta de unidades*), pois a razão de números (números racionais) e a razão de quantidades (números reais) não eram consideradas como números na Antiguidade.

[1] Letra grega; Sigma minúsculo que só é utilizado no final de uma palavra.

Já a concepção de número de Leibniz, tinha um caráter mais filosófico. De fato, em sua *Oeuvres Philosophiques*, pode-se ler:

> Nos números as ideias são mais precisas e mais próprias de serem distinguidas umas das outras do que em seu significado, em que não se pode observar ou medir cada igualdade e cada excesso de grandeza tão facilmente como nos números, pela razão que no espaço não saberíamos chegar pelo pensamento a certa pequenez determinada além do que não poderíamos ir como é a unidade no número (Leibniz, 1765, p.113).

Num contexto filosófico amplo, a noção de número em Leibniz, segundo Brown e Fox (2006), pode ser entendida tomando-se por base dois números fundamentais: o 0 e o 2, já que ele concebeu as verdades das aritméticas como verdades eternas, cujo princípio maior residia na contradição. Qualquer verdade aritmética poderia ser reduzida a uma declaração de identidades por meio de uma sequência de definições, ou seja, “2” pode ser definido como “1+1”, “3” como “1+2”, e assim por diante. Portanto, qualquer soma correta seria redutível a uma declaração de identidades.

De acordo com Burton (2011), o século XVIII foi denominado e descrito como a Era do Iluminismo. Esse termo caracteriza o curso das ideias liberais que buscavam melhorar as condições práticas da vida humana por meio do poder da razão. Embora essas concepções fossem amplamente disseminadas na Europa, seu principal foco intelectual estava na França, nas obras de alguns pensadores como Montesquieu (1689-1755), D. Diderot (1713-1784), J. R. d'Alembert (1717-1783), J. J. Rousseau (1712-1778) e Voltaire (1694-1778). Nesse ambiente de efervescência intelectual, fértil de ideias e concepções revolucionárias nos vários campos do conhecimento, encontra-se L. Euler (1707-1783), o mais importante matemático dessa época.

Euler, em *Éléments d’Algebre*, define primeiramente grandeza e depois relação entre grandeza: “Denomina-se grandeza ou quantidade tudo o que é susceptível de aumentar ou de diminuir.” (Euler, 1774, p.1).

> As determinações ou as medidas de grandezas de todas as espécies, retornam a esta: Que se fixar em primeiro lugar à vontade certa grandeza de mesma espécie que aquela que se quer determinar, a fim de tomar por medida ou unidade; então, que se determine a relação que a grandeza prescreve com essa medida conhecida. Esta relação se exprime sempre por números, donde se resulta que um número não é outra coisa que a relação de uma grandeza para com outra estimada arbitrariamente pela unidade (Euler, 1774, p. 3-4).

D’Alembert contribuiu para enriquecer certos ramos da matemática, colaborou com Diderot na publicação da *Encyclopédie* e aproveitou para apresentar suas principais concepções matemáticas em diferentes artigos que aparecem nessa esplêndida obra. D'Alembert, na *Encyclopédie Méthodique*, define: "Número: diz-se vulgarmente em Aritmética de uma coleção ou reunião de unidades ou de coisas de mesma espécie." (D'Alembert & Diderot, 1758, p.464).

Ainda no período de Euler, encontra-se o filósofo I. Kant (1724-1804) que, para expor suas concepções filosóficas sobre a Matemática, refletiu sobre o significado filosófico do número. Em seu tratado, *Crítica da Razão Pura*, Kant define número como "uma representação que resume a adição sucessiva de uma unidade (homogênea) para outra." (Kant, 1905, p.136). Assim, parece que o número pressupõe o tempo e o espaço como o resultado de um relacionamento que implica não só a distinção dos objetos no espaço, mas também a sua sucessão no tempo.

Na transição entre os séculos XVIII e XIX, um dos matemáticos que se destaca é A. L. Cauchy (1789-1857), por introduzir inovações em diversas áreas da Matemática, ser o primeiro a estudar a teoria das funções analíticas, avançar de modo significativo nos estudos sobre a teoria de determinantes e ser o precursor em estabelecer o rigor na análise matemática. Na obra *Cours d'Analyse*, Cauchy define o que entende por número e quantidade:

> Para evitar toda espécie de confusão na linguagem e na escrita algébrica, vamos fixar nestes preliminares o significado de vários termos e de várias notações que emprestaremos da álgebra ordinária ou da trigonometria. (...) Vamos indicar primeiro que ideia nos parece conveniente para ligar estas duas palavras: número e quantidade. Tomaremos sempre a denominação de número no sentido que se emprega em aritmética, ao fazer nascerem os números da medida absoluta das grandezas; e empregaremos unicamente a denominação de quantidades às reais positivas ou negativas, isto é, aos números precedidos dos símbolos + ou -. (Cauchy, 1821, p.1-2).

O século XIX é marcado, especialmente, pelo surgimento da álgebra moderna. Ao longo desse século, os conceitos fundamentais da álgebra abstrata são consolidados, apresentando objetos de natureza distinta dos números reais ou complexos, ou seja, o estudo de algumas estruturas matemáticas com operações bem definidas. Segundo Katz (1998), os matemáticos ingleses do primeiro terço de século XIX, incluindo G. Peacock (1791-1858) e A. De Morgan (1806-1871), tentaram axiomatizar as ideias básicas da álgebra e determinar exatamente o quanto é possível generalizar as propriedades dos números inteiros para outros tipos de quantidades. Esse contexto levou W. R. Hamilton (1805-1865) à descoberta dos quatérnios, em 1843.

Com essas concepções inovadoras de novas estruturas algébricas, Peacock, em seu *A Treatise on Algebra*, define número:

> Os símbolos da Álgebra podem ser tomados como representantes de todas as espécies de quantidade, seja abstrata ou concreta: as operações a que estão sujeitos são perfeitamente gerais, e em nenhum aspecto são afetadas pela natureza das quantidades que os símbolos denotam, sendo determinadas exclusivamente pelas definições e pressupostos que constituem os primeiros princípios da ciência (Peacock, 1830, p.1).

E, De Morgan, em *Elements of Algebra*, escreve:

> Em aritmética, usamos símbolos para números. Um símbolo é qualquer sinal de uma quantidade que não é a quantidade em si. Quando 1, 2, 3, etc., significa 1 milha, 2 milhas, 3 milhas, etc., ou 1 litro, 2 litros, 3 litros, etc., esses são chamados números concretos. Mas quando parte de toda ideia de 1, 2, etc., significando um, dois, etc., de qualquer coisa em particular como quando dizemos "seis e quatro faz dez", então os números são chamados números abstratos (De Morgan, 1837, p.ii).

No final do século XIX e no início do século XX, nas discussões em Filosofia da Matemática, prevalecia a concepção de que a Matemática é uma ciência verdadeira. De um lado, os idealistas consideravam que toda a Matemática trabalhava simplesmente com aparências, ao passo que de outro, os empíricos sustentavam que toda a Matemática era uma aproximação a certa verdade exata sobre a qual nada tinham a dizer. Neste cenário conflitante, o estado conjetural e tumultuoso de concepções era completamente ingrato. Mas, no começo do século XX, alguns matemáticos e filósofos da Matemática puderam contestar essas concepções, pelo menos até o ponto de reduzir todas as suas proposições a certas noções fundamentais de lógica. Sem se ocupar de derrubar ou de mover os elementos essenciais da lógica aristotélica, as investigações de G. Boole (1815-1864), C. S. Peirce (1839-1914), E. Schröder (1841-1902), G. Frege (1848-1925), A. N. Whitehead (1861-1947), B. Russell (1872-1970) e vários outros lógicos contribuíram com resultados para a elaboração do cálculo das classes e do cálculo proposicional, nos quais a teoria do silogismo aristotélico parece ocupar somente um espaço. Nessa nova formulação, as possibilidades apresentadas pela lógica moderna, como instrumento científico, foram evidenciadas nas aplicações e investigações que se fizeram ao utilizá-la nos fundamentos da matemática. Neste ponto a discussão foi retomada pela Filosofia da Matemática, que nesse contexto, procurou indicar quais são as noções fundamentais intrínsecas da Matemática e assinalar as dificuldades filosóficas envolvidas na análise da noção e definição de número.

As principais definições de número que foram desenvolvidas nesse período são a de J. W. R. Dedekind (1831-1916), J. F. L. P. Cantor (1845-1918) e Frege. Dedekind, em *Essay on the Theory of Numbers*, define:

> Se considerando um sistema N simplesmente infinito, ordenados por uma aplicação φ, faz-se totalmente abstração da constituição particular dos elementos, que apenas retém o que os diferencia e que apenas se prende às relações que estabelece entre as aplicações φ que define a ordem, vamos nomear estes elementos números naturais ou números ordinais ou simplesmente números, e o elemento fundamental 1 é chamado o número fundamental da sequência de N números. Dada esta liberação de elementos de outros conteúdos (abstração), estamos autorizados a dizer que os números são uma livre criação do espírito humano (Dedekind, 1901, p. 33).

Cantor (1883) define os números naturais são vistos como um caso particular dos números transfinitos. Em seu artigo *Une Contribution a la Théorie des Ensembles*, propôs uma definição geral de número inteiro, sejam finitos ou infinitos, na esperança de ver a comunidade matemática aceitar facilmente os números transfinitos. Desde o surgimento da noção de potência, ele insiste sobre sua característica global. Ele escreve: "Quando os conjuntos considerados são finitos (...), a noção de potência responde então àquela de número na significação de enumeração e, por conseguinte, também àquela de número inteiro positivo." (Cantor, 1883a, p.311). E acrescenta, em seu artigo *Sur les Ensembles Infinis et Linéaires de Points*: "A noção potência (...) abrange, como caso particular, a noção de número inteiro." (Cantor, 1883b, p. 363).

F. L. G. Frege, em *The Foundations of Arithmetic*, define:

> O número não é abstração de objetos (...); não é uma propriedade dos objetos (...). A questão então permanece: quando se dá um número, o que sustenta nosso enunciado? O número não é um ser físico; mas ele não é subjetivo, ele não é uma representação. O número não é gerado de adições de um objeto com outro, e a atribuição de um nome novo após cada uma dessas junções não faz uma convenção. As expressões "multiplicidade", "conjunto", "pluralidade" são, por suas indeterminações, inaptas para trazer algum esclarecimento sobre o número (Frege em Belna, 1996, p. 227).

Finalizando essa revisão histórica, apresentamos as definições de B. Russell e J. von Neumann (1903-1957), pela contribuição às nossas discussões contemporâneas sobre o conceito de número.

Russell define: "Um número será um conjunto de classes tais que quaisquer duas são similares entre si e nenhuma fora do conjunto é similar a qualquer uma de dentro do conjunto.” (Russell, 1919, p.18-19). As ideias de lógica matemática de Peano e as preocupações de Frege em explicitar as noções entre os conceitos elementares e as proposições em Matemática influenciaram os trabalhos de Russel na elaboração da definição de número. A ênfase dada por Russell na formulação precisa dos conceitos fundamentais da Matemática e das suas relações com a lógica comprova tal influência. Entretanto, o trabalho de Russell, que predomina na Filosofia da Matemática por quase um século, apresenta uma ideia ímpar: definir número mediante a noção de classes ou coleções.

Segundo Ewald (1999), com base nos sete axiomas propostos por E. Zermelo (1871-1953) para a formalização da Teoria de Conjuntos, von Neumann constrói sua própria teoria e, como consequência, elabora uma definição de número. Considerando A como um certo campo de objetos abstratos, o axioma do infinito garante a existência em A de um conjunto B com os elementos 0, $\{0\}$, $\{\{0\}\}$, ... , e, von Neumann utiliza o conjunto enumerável de referência no sistema de Zermelo para representar a sequência 0, 1, 2, … dos números naturais.

Comentários

Observamos que cada uma das definições aqui apresentadas é caracterizada pelo desenvolvimento matemático e filosófico presente em cada época.

Ao considerar o desenvolvimento histórico do conceito de número, podemos destacar diversos aspectos. Entre eles, aqui destaco quatro. O primeiro é a ideia de número como uma determinada quantidade de unidades, presente nas concepções dos matemáticos gregos. Essa ideia permanece com poucas modificações até àquela proposta por Newton, que considera como um número a razão de números (números racionais) e a razão de quantidades (números reais) e à proposta por Leibniz, que considera o número independente do que ele representa no mundo real, apresentando uma concepção de caráter filosófico. O segundo, é que o desenvolvimento da Álgebra no século XIX, sem dúvida, promoveu um avanço nas definições de número. O terceiro são as ideias de ordem e aplicação, presente na definição proposta por Dedekind e influenciada pelas ideias de Peano. E, o quarto, é a influência das ideias de conjunto elaboradas por Cantor na definição proposta por Russell e, posteriormente, na proposta por von Neumann.

Outro ponto importante que devemos ressaltar, é que os números são parte do nosso cotidiano e, por isso, muitas vezes nos esquecemos dos esforços de vários matemáticos e filósofos que, durante séculos, estiveram envolvidos com o seu desenvolvimento e com as questões sobre os fundamentos da Matemática.

Percebemos que este desenvolvimento foi iniciado em tempos remotos, quando os números naturais surgiam naturalmente a partir da necessidade do homem de contar e, posteriormente, das relações comerciais. Porém, ainda que os egípcios e os babilônios apresentassem um conhecimento prático de frações, a utilização do número zero aparece somente no século IX e os números inteiros negativos só são aceitos e compreendidos totalmente no século XVII. Com isso, percebemos as dificuldades encontradas no desenvolvimento da concepção dos números reais.

Os números irracionais aparecem em registros das civilizações egípcias e babilônicas e também eram conhecidos pelos gregos, mas foram motivo de controvérsias até o final do século XIX, quando matemáticos como R. Dedekind e G. Cantor, por exemplo, mostram como os números irracionais podem ser construídos a partir dos números racionais. Com isso, os matemáticos puderam definir de forma precisa os conceitos de limite e continuidade, contribuindo para o desenvolvimento da análise matemática.

Com a formalização da teoria dos números reais, os matemáticos e filósofos passaram a se preocupar em dar uma fundamentação axiomática consistente para a teoria de conjuntos. Com isso, uma das questões centrais passa a ser a definição de número. De fato, em 1901, G. Peano propõe a construção dos números naturais com base em um sistema de axiomas. A teoria de G. Peano e a teoria de conjuntos de Cantor incitaram matemáticos e filósofos a estudar profundamente os fundamentos da Matemática. No início do século XX, B. Russell difundiu a ideia de que a Matemática é um ramo da Lógica e sustentou tal afirmação, definindo os números naturais tomando-se por base os conceitos de lógica. Nesse mesmo período, E. Zermelo guiou um movimento para reconstruir a teoria dos conjuntos por meio da introdução de uma formulação axiomática, em substituição ao enfoque estabelecido por Cantor. John von Neumann contribuiu com esse movimento, utilizando os axiomas de Zermelo para definir os números naturais.

Referências

Alkhayyami, O. (1851). *L'Algèbre D'Omar Alkhayyami.* Trad. F. Woepcke. Paris: Benjamin Duprat.

Aristote (1872). *Physique*. Tome II. Trad. J. B. Saint-Hilaire. Paris: Ladgrange.

Balieiro Filho, I. F. (2004). *Arquimedes, Pappus, Descartes e Polya - Quatro Episódios da História da Heurística*. Tese de Doutorado, UNESP - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (Doutorado em Educação Matemática), Rio Claro.

Balieiro Filho, I. F. & Soares, M. R. (2008). Uma Abordagem da Análise Matemática para Alguns Problemas Derivados das Concepções Filosóficas de Zenon, Atinfon e Brison. *Revista Brasileira de História da Matemática*, v. 8, p. 155-172.

Bashmakova, I. G. & Smirnova, G. S. (2000). *The Beginnings and Evolution of Algebra*. Washington: The Mathematical Association of America.

Belna, J. P. (1996). *La Notion de Nombre chez Dedekind, Cantor, Frege – Théories, conceptions et philosophie*. Paris: Vrin.

Besselaar, J. V. D. (1973). *Introdução aos Estudos Históricos*. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária Ltda.

Burton, D. M. (2011). *The History of Mathematics: An Introduction*. New York: McGraw-Hill.

Brown, S. & Fox, N. J. (2006). *Historical Dictionary of Leibniz's Philosophy*. Maryland: Scarecrow.

Cantor, G. (1883a). Une Contribution a la Théorie des Ensembles. *Acta Mathematica*, v. 2, p.311-328.

Cantor, G. (1883b). Sur les Ensembles Infinis et Linéaires de Points. *Acta Mathematica*, v. 2, p.349-380.

Cauchy, A. L. (1821). *Cours d'Analyse de L'Ecole Royale Polytechnique*. Paris: Debure.

D'Alembert, J. & Diderot, D. (1785). *Encyclopédie Méthodique*. Tome 2, Paris: Debure.

De Morgan, A. (1837). *Elements of Algebra.* London: Taylor and Walton.

Dedekind, R. (1901). *Essay on the Theory of Numbers*. Trad. W. W. Beman. Chigago: The Open Court Publishing Company.

Diophante (1926). *Les six livres arithmétiques et le livre des nombres polygones.* Trad. P. V. Eecke. Bruges: Desclée de Brouwer.

Euclides (2009). *Os Elementos.* Trad. I. Bicudo. São Paulo: Fundação Editora da UNESP.

Euler. L. (1774). *Élémens d'Algebre*. Tome Premier. Lyon: Jean-Marie Bruyset. Original: Vollständige Anleitung zur Algebra , 1770.

Ewald, W. (1999). *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics*. Volume I, New York: Oxford University Press.

Fennema, E. & Loef, M. (1992). Teacher's knowledge and its impact. Em D. A. Grouws (ed.), *Handbook of research in mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan.

Heath, T. (1970). *Mathematics in Aristotle*. Oxford: Oxford University Press.

Heath, T. (2003). *A History of Greek Mathematics*. Vol 1. New York: Dover.

Ivor, T. (1957). *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics*. Vol. 1. Cambrigde: Harvard University Press.

Kant, I. (1905). *Critique de la Raison Pure.* Trad. A. Tremesaygues & B. Pacaud. Paris: Félix Alcan, 1905.

Katz, V. J. (1998). *A History of Mathematics: An Introduction*. New York: Addison-Wesley.

Klein, F. (2004). *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint.* New York: Dover.

Leibniz, G. W. (1765). *Oeuevres Philosophiques*. Amsterdam: Jean Schreuder.

May, K. O. (1978). *Bibliography and Research Manual of the History of Mathematics*. Toronto: University of Toronto Press.

Musa, M. B. (1831). *The Algebra of Mohammed Ben Musa*. Trad. F. Rosen. London: The Oriental Translation Fund.

Newton, I. (1720). *Universal Arithmetick: or, a Treatise of Arithmetical Composition and Resolution*. Trad. J. Raphson. London: J. Senex. Versão original: *Aritmetica Universalis, sive de compositione et resolutione aritmetica liber*, 1707.

Peacock, G. (1830). *Treatise on Algebra*. London: J. & J.J. Deighton.

Reale, G. & Antiseri, D. (1990). História da Filosofia, v.1. São Paulo: Paulus.

Russell, B. (1919). Introduction to Mathematical Philosophy. London: George Allen & Unwin.

Stevin, S. (1585). *L'Arithmetique.* Leyde: Christophle Plantin.

Struik, D. (1992). *História Concisa das Matemáticas*. Lisboa: Gradiva.

Thompson, A. G. (1992). Teacher's beliefs and conceptions: A synthesis of the research. Em D. A. Grouws (ed.), *Handbook of research in mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan.

A DISCUSSÃO DE ESTRATÉGIAS DE CÁLCULO MENTAL E O DESENVOLVIMENTO DO SENTIDO DE MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS RACIONAIS[2]

Renata Carvalho

Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

renatacarvalho@sapo.pt

João Pedro da Ponte

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

jpponte@ie.ul.pt

Resumo

Analisamos as estratégias de cálculo mental dos alunos na multiplicação e divisão de números racionais na representação decimal, dada a sua importância na promoção de aprendizagens e na perceção de lacunas na aprendizagem dos números racionais. A discussão de estratégias de cálculo mental dos alunos e as suas explicações mostram que o seu sentido de multiplicação de números racionais não estava devidamente desenvolvido e que a interação entre eles contribuiu para o seu aprofundamento. As explicações dos alunos mostram terem desenvolvido flexibilidade na escolha de estratégias de cálculo mental com números racionais, com destaque para a mudança de representação.

Palavras-chave: Cálculo mental, números racionais, estratégias, multiplicação de numerais decimais.

Introdução

No 1.º ciclo do ensino básico os alunos aprendem as operações com números naturais e, posteriormente, com números racionais. No trabalho com estes números, devem relacionar as representações fracionária e decimal, desenvolvendo as suas estratégias de cálculo mental e escrito, incluindo a realização de algoritmos. No 2.ºciclo, de um modo geral, os alunos ainda possuem uma visão limitada das operações multiplicação e divisão. Para Lamon (2006), a aprendizagem dos números racionais traz novos desafios pois, enquanto no trabalho com números naturais as quantidades estavam associadas a contagens ou medições, na multiplicação e divisão de números racionais estas operações produzem novas quantidades relacionadas com as quantidades operadas.

[2] Trabalho financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia no âmbito do Projeto *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (contrato PTDC/CPE-CED/0989311/2008) e da bolsa com a referência SFRH/BD/69413/2010.

O desenvolvimento de estratégias de cálculo mental com números racionais, no 2.º ciclo, é uma oportunidade de continuar a desenvolver o sentido de número e de operação. O trabalho apresentado neste artigo insere-se numa experiência de ensino realizada no 6.º ano, centrada em tarefas de cálculo mental com números racionais envolvendo as quatro operações e na discussão das estratégias dos alunos. O seu objetivo principal é perceber as estratégias de cálculo mental com números racionais usadas pelos alunos bem como os erros e dificuldades que manifestam quando calculam mentalmente. Nesta comunicação, analisamos as estratégias de cálculo mental dos alunos na multiplicação e divisão de números racionais, na representação decimal, e a forma como a discussão contribuiu para abordar o sentido de multiplicação de numerais decimais.

Multiplicação e divisão de números racionais na representação decimal e cálculo mental

A multiplicação e divisão de números racionais na representação decimal (numerais decimais) são operações difíceis para os alunos. Para Galen, Feijs, Figueiredo, Gravemeijer, Herpen e Keijzer (2008), a compreensão das operações multiplicação e divisão com números naturais pode ser uma mais-valia no cálculo com numerais decimais. Estes autores referem três situações na divisão de decimais onde o conhecimento de divisão com números naturais pode ser usado, realçando que associar um contexto às operações com numerais decimais facilita a sua compreensão:

- em contextos de medida (como dividir 2m de tecido em pedaços de 0,25m), não é estranho que o resultado seja superior ao dividendo, embora o mesmo não aconteça quando se trabalha apenas com números naturais;

- considerar a multiplicação como a operação inversa da divisão ajuda a pensar no problema anterior como sendo …x 0,25=2 ou como uma medição realizada em vários passos em que a unidade de medida é 0,25;

- a busca de números mais fáceis de operar através da divisão ou multiplicação de ambos os números pela mesma quantidade pode contribuir para o sucesso da operação a efetuar.

Muitas crianças têm dificuldade em perceber que a multiplicação no conjunto dos números racionais pode originar resultados menores que um dos fatores. Por exemplo, é mais fácil perceberem que 6x0,21 é menor que 6 pois podem resolvê-la através de adições sucessivas, do que 0,21x6 apesar de ambas as expressões representarem o mesmo produto. A propriedade que "multiplicar aumenta" e "dividir diminui" deixa de se verificar no conjunto dos números racionais. Esta é uma mudança na aprendizagem das operações, que acrescenta novas dificuldades aos alunos.

Rathouz (2011) valoriza o papel dos contextos e considera que só é possível os alunos desenvolverem um profundo conhecimento dos números racionais e suas operações na representação decimal, se na aprendizagem forem introduzidas referências que lhes permitam fazerem conexões entre múltiplas representações, tais como a notação decimal (0,356), o dinheiro (quase 36 cêntimos), sistema métrico (0,356 metros ou 356 milímetros) ou a representação em fração (um pouco mais do que 1/3). Acrescenta ainda que a discussão acerca das diferentes interpretações da multiplicação, associada a contextos como os de área, permite aos alunos construírem significados acerca da multiplicação de numerais decimais e frações e, simultaneamente, melhorarem o seu raciocínio multiplicativo e a compreensão de temas como geometria e medida.

Calcular mentalmente envolve a mobilização de estratégias que permitam um cálculo rápido e eficiente. Heirdsfield (2011) apresenta quatro elementos fundamentais que estão na base do desenvolvimento de estratégias de cálculo mental pelos alunos:(i) conhecer a numeração e compreender a grandeza e valor dos números, (ii) o efeito das operações sobre os números, (iii) ter capacidade para fazer estimativas para verificar a razoabilidade do resultado, e (iv) conhecer um conjunto de factos numéricos que lhes permita calcular rapidamente e com precisão.

No âmbito dos números racionais, Caney e Watson (2003) realçam a importância de perceber a relação entre diferentes representações de um número racional para desenvolver o cálculo mental com estes números. Num estudo realizado com alunos do 3.º ao 10.ºano, identificaram onze estratégias usadas pelos alunos. Numa primeira fase, estes começam por usar *formas mentais de algoritmos escritos* e *imagens mentais pictóricas*, passando depois para estratégias relacionadas com conhecimentos que já possuem do trabalho com números naturais (como o *trabalho da esquerda para a direita* ou *com partes de um segundo número*), *estabelecem ligações*, recorrem a *adições e a multiplicações sucessivas* e utilizam *factos conhecidos* e *regras memorizadas*. As estratégias dos alunos no cálculo com números naturais são uma referência importante para o desenvolvimento de novas estratégias com números racionais. Numa fase mais avançada as estratégias dos alunos envolvem o sentido de número e de operação, potenciando a *utilização de representações equivalentes*, o *uso de diferentes representações* de um número racional e a *transição entre operações inversas*. As autoras caracterizam as estratégias dos alunos de instrumentais, se estes aplicam factos e regras memorizadas, ou conceptuais, se usam o conhecimento dos números e das operações.

Relativamente às estratégias de cálculo mental, Empson, Levi e Carpenter (2010) consideram que existe um conjunto de estratégias que as crianças usam no trabalho com números racionais, principalmente na representação fracionária e que se baseiam em relações matemáticas importantes para a compreensão da Álgebra, nomeadamente o pensamento relacional. Cada estratégia surge em função da compreensão da criança dos números e operações e das relações numéricas que lhe são familiares e que usa para estabelecer novas relações e efetuar o cálculo. Esta é uma perspetiva que reforça a importância de calcular mentalmente usando diferentes representações de um número racional.

Metodologia de investigação

Este estudo segue uma abordagem qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994) com *design* de experiência de ensino (Cobb, Confrey, diSessa, Lehere & Schauble, 2003). Participam uma professora, uma turma do 6.º ano que já trabalhou os números racionais em várias representações (decimal, fração, percentagem) e a primeira autora no papel de investigadora. A recolha de dados decorreu no 2.º e 3.º período em 2011/12, através de observação direta das aulas com tarefas de cálculo mental.

A experiência de ensino foi elaborada pela investigadora e discutida com a professora da turma. A condução da aula, incluindo os momentos de discussão, é da responsabilidade da professora, intervindo a investigadora pontualmente para esclarecer aspetos relacionados com a comunicação de estratégias dos alunos. As aulas são áudio e vídeo-gravadas para posterior análise e reflexão acerca dos momentos de discussão coletiva. Para a análise de dados são visionados os episódios da aula para identificar as estratégias de cálculo mental que os alunos referem nos momentos de discussão, os erros que cometem e como evoluem ao longo da experiência de ensino. As categorias de análise são baseadas no estudo deCaneye Watson (2003), tendo presente a perspetiva de autores como Galen et al. (2008) e Lamon (2006).

A experiência de ensino é composta por dez tarefas de cálculo mental em contextos matemáticos e de resolução de problemas, projetadas na sala de aula, semanalmente, usando um *Powerpoint* temporizado. Cada tarefa é constituída por duas partes e tem uma duração prevista de 15 minutos. Os alunos têm 15 segundos para resolver cada exercício e 20 segundos para resolver cada problema individualmente e anotar o resultado numa folha de papel, seguindo-se um momento de discussão.

As tarefas permitem não só rever e consolidar o trabalho com números racionais de referência, mas também ampliar estratégias de cálculo mental e conduzir à redução dos erros dos alunos. Em cada aula, a representação do número racional usada está de acordo com o tópico que a professora está a trabalhar (e.g., nos volumes usa-se mais a representação decimal e nas relações e regularidades a representação em fração). As várias representações vão surgindo repetidamente e, por vezes, em simultâneo ao longo da experiência.

Esta comunicação analisa em pormenor a primeira parte da quinta tarefa de cálculo mental da experiência de ensino uma vez que da discussão coletiva de estratégias dos alunos emergiu a necessidade de abordar o sentido de operação multiplicação de números racionais na representação decimal. Trata-se de uma tarefa em contexto matemático com multiplicação e divisão de numerais decimais, que foi realizada no momento em que os alunos estavam a abordar o tópico volumes. Esta foi a primeira tarefa que os alunos realizaram envolvendo multiplicação e divisão de números racionais usando apenas a representação decimal. Nas tarefas anteriores, foram desafiados a adicionar e a subtrair mentalmente números racionais representados por frações, multiplicar e dividir frações, efetuar cálculo mental com as quatro operações usando frações e numerais decimais em simultâneo, tanto em contexto matemático como na resolução de problemas, e adicionar e subtrair numerais decimais.

Nesta tarefa (Figura 1), a primeira parte contém cinco exercícios de cálculo mental com números racionais na representação decimal, tendo os alunos que calcular o valor de cada expressão, seguindo-se um momento de discussão das suas estratégias, erros e dificuldades. Os momentos de discussão são preparados previamente pela professora em conjunto com a investigadora que, em função da tarefa, preveem as possíveis respostas e estratégias dos alunos, erros, dificuldades e possíveis questões a colocar, tais como: Como pensaste? O que pensam da estratégia do colega? Em que aspeto é que a tua estratégia é diferente da do teu colega? Estas questões têm o objetivo de ajudar o aluno a explicar e clarificar como pensou e a ser crítico face às explicações dos colegas, gerando-se um ambiente de partilha onde se vai construindo um reportório de estratégias e se validam as respostas dos alunos, através da interação entre eles.

Pensa rápido.
Qual o valor exato?

$a)$ 0,25 × 4; $b)$ 12,2 ÷ 0,5; $c)$ 0,6 × 0,30; $d)$ 0,14 ÷ 0,2 ; $e)$ 4,2 × 0,2.

Figura 1. Primeira parte da tarefa de cálculo mental.

A construção da tarefa teve em conta os níveis de desenvolvimento de cálculo mental de Callingham e Watson (2004).Foram usados numerais decimais equivalentes a representações de referência, como 1/2, 1/4 e 1/5; multiplicação de dois decimais; divisões por 0,5 e divisão de numerais decimais quando os dígitos são múltiplos.

Assim, em a) privilegiámos a multiplicação de um numeral decimal por um número inteiro com o objetivo de obter a unidade; em b) a divisão por 0,5 para potenciar a relação entre a divisão por 0,5 e a multiplicação por 2; em c) a multiplicação de dois numerais decimais com diferentes casas decimais para evidenciar a importância do valor posicional; em d) a divisão de números múltiplos um do outro; e em e) a multiplicação por 0,2 para potenciar a multiplicação por 10, seguida do cálculo de dobros e divisão por 10 ou a relação entre a multiplicação por 0,2 e a divisão por 5.

Exploração da tarefa na sala de aula

Na preparação da tarefa, professora e investigadora esperavam que os alunos, tendo em conta as discussões ocorridas na sala de aula nas tarefas anteriores e o facto dos numerais decimais serem alvo de algum trabalho no 1.ºciclo, tivessem estratégias baseadas em regras memorizadas como a multiplicação por potências de 10, o uso de factos conhecidos para a reconstrução da unidade (e.g., 0,25x4=1), a mudança de representação de decimal para fração, o uso de equivalências, a decomposição, a compensação e as propriedades das operações. Da discussão coletiva destacam-se três aspetos: as estratégias de cálculo mental mais usadas pelos alunos; a estratégia de Pedro[3] usando pensamento relacional e a discussão do sentido de multiplicação de numerais decimais.

[3] Nesta comunicação os nomes dos alunos são fictícios.

Estratégias de cálculo mental dos alunos

Na discussão coletiva, as estratégias apresentadas pelos alunos centraram-se na mudança de representação de decimal para fração ou de decimal para números naturais referentes a 10/100; na utilização de factos conhecidos; na mudança de operação e no uso das propriedades das operações. Para calcular 0,25x4, Bruno refere que: "sabia que 25+25+25+25 dava o mesmo que 0,25+0,25+ … 4x0,25 dá 1". Na sua estratégia usa a mudança de representação e considera 0,25 como sendo 25, relaciona o produto com a adição sucessiva, estabelece paralelismo entre o produto de 4x25 com o de 4x0,25 e usa a propriedade comutativa certamente porque, para Bruno, tem mais sentido pensar no 0,25 que se repete 4 vezes do que no 4 que se repete 0,25 vezes tal como referem Galen et al. (2008). Marta usa a mudança de representação de decimal para fração: "transformei as 25 centésimas em um quarto e depois fiz vezes 4. Deu-me 4/4 e depois transformei em 1" e Pedro usa factos conhecidos referindo que "eu já sabia automaticamente que 0,25x3 era 0,75, depois somei só 25 [0,25] ".Curiosamente, Pedro usa como referência 0,75 e a expressão que lhe dá origem, mas não o facto de 0,25x4 formar a unidade.

Para calcular 12,2:0,5 Marta usa a mudança de operação. A sua explicação revela o conhecimento de uma relação numérica que memorizou - dividir por 0,5 é o mesmo que multiplicar por 2: "eu sabia que… transformei logo o 0,5 em 1/2 e depois como sabia que sempre que dividir por 1/2 era sempre vezes 2, então fiz assim". Questionada acerca da necessidade de usar a representação 1/2 em vez de 0,5, explica: "eu achava que com a outra [1/2] era mais fácil".

O pensamento relacional de Pedro

Apesar de ter calculado erradamente o valor de4,2x0,2no tempo que tinha disponível (15 segundos), Pedro partilha uma estratégia complexa no momento de discussão coletiva, que envolve pensamento relacional (Empsonet al., 2010).Usa a mudança de representação e de operação e a propriedade distributiva da adição em relação à divisão. Assim, explica: "eu sei que 0,2 é equivalente a 1/5, se for vezes 1/5 [substitui 4,2x0,2 por 4,2x1/5] é a dividir por 5. Dá … 8,4". Questionado acerca da forma como divide 4,2 por 5, Pedro acrescenta que "fiz 8x5. O 2 tenho que somar… Tenho que acrescentar casas decimais (…) até encontrar um número que multiplicado por 5 dá 2… é o 20…Dá 0,4". Apesar da dificuldade em expor verbalmente a sua estratégia é possível perceber que perante um número não divisível por 5, Pedro mudou de representação, usou 42 em vez de 4,2, o decompôs em 40+2 numa primeira fase e em vez de calcular 40:5, usou a operação inversa pensando num número que multiplicado por 5 desse 40 obtendo o 8.Posteriormente o 2 continuava a não ser divisível por 5, então multiplicou-o por 10 e pensou novamente num número que multiplicado por 5 desse 20 e obteve o 4 que o dividiu por 10 para obter 0,4, uma vez que já tinha multiplicado por 10. O raciocínio de Pedro pode ser ilustrado pela expressão: 4,2x0,2=4,2x1/5=42/10:5= (40/10+2/10):5 =(40/10:5)+(2/10:5)=(40/10:5x10)+(2/10x10:5). A estratégia de Pedro evidencia a forma como usou, com alguma flexibilidade, a mudança de representação em função dos cálculos que precisava de efetuar bem como a propriedade distributiva da adição em relação à divisão, que embora não seja uma propriedade da divisão pode ser aplicada à situação em causa.

O sentido de multiplicação com números racionais na representação decimal

A propósito da resolução de 0,6x0,30 emergiu uma discussão interessante acerca do sentido de multiplicação de números racionais na representação decimal, que pensávamos estar compreendido. Quando questionados acerca do resultado da expressão, Lídia responde 1,8 e João 0,18. Lídia explica que "eu fiz logo 6 vezes 3 que dá 18, então juntei o zero e depois pus a virgula" e João diz "deu-me zero vírgula 18. Eu vi que 6x3 ia dar 18 e então na lógica ia dar 1,8, mas como numa conta de multiplicar tem de se somar as vírgulas [ao calcular 6x3 multiplicou 0,6 e 0,3 por 10 e no final dividiu por 100] para ver onde se põe a vírgula, deu-me 0,18".

Perante estes resultados, a professora questiona a turma: "Quem está de acordo com a Lídia? E com o João?" A maioria está de acordo com Lídia, mas João mantem a sua posição e repete a sua explicação. Ana contrapõe:"o João disse que era 18 centésimas. Se... é uma conta de vezes portanto o número [resultado] vai ser maior do que os que estão ali. Se 30 centésimas e 60 centésimas são maiores que 18 centésimas não pode ser". A explicação de Ana mostra que para os alunos multiplicar é uma operação que produz um resultado maior do que qualquer um dos fatores, pois os restantes alunos concordaram com o resultado de Lídia (1,8). Mas João não desiste de apresentar as suas justificações: "Não dá. Quando se multiplica por um número decimal tem que dar um número mais pequeno, por isso o 1,8 já nunca dá (…) Professora um número a multiplicar por um decimal dá sempre um número mais pequeno". Procurando clarificar a explicação de João, a investigadora pede-lhe um exemplo e este responde:

> Uma vez estávamos a fazer um exercício [cálculo da área da porta] com a porta e vimos que a porta media por volta de um metro e setenta então tínhamos de ver quanto é que era a largura e tínhamos de multiplicar por... Um número decimal que foi dar um número mais pequeno.

Esta explicação realça a importância do uso de referências no desenvolvimento do sentido de multiplicação de numerais decimais como referido por Galen et al. (2008) e Rathouz (2011), para que mais tarde os alunos possam trabalhar em contextos matemáticos e ser críticos perante os resultados que obtêm. O contexto de medida em que João trabalhou com a representação decimal marcou-o e fê-lo compreender que no conjunto dos números racionais multiplicar não é sinónimo de obter um resultado maior. Mas a explicação de João ainda não estava clara, pois podemos operar com dois decimais menores que 1, com um decimal e um inteiro, ou com decimais maiores que 1. Perante o questionamento da professora, da investigadora e dos colegas, João sentiu necessidade de dar mais alguns exemplos para fazer vingar as suas ideias:

> 0,5x2 dá 1 e o 1, essa conta já todos temos a certeza que está certa, e 1 é mais pequeno do que o 2 (…) Por exemplo 1/2x1/2 dá um número inferior a 1/2 (…) dá vinte cinco centésimas. Quando se faz um número inteiro por um número decimal (...) a multiplicar (…) dá um número mais pequeno do que o número inteiro e maior do que o mais pequeno. Fica entre os dois. Numa conta de vezes em que está um número inteiro vezes um decimal dá um número entre os dois, quando são dois números inteiros dá um número maior do que os dois, então quando são dois decimais dá um número mais pequeno do que os dois. Está ali um exemplo no quadro [aponta para 0,24x4].

A explicação de João convenceu os colegas. A discussão que desencadeou na sala de aula a propósito da sua estratégia contribuiu para a melhoria da aprendizagem do sentido de multiplicação de números racionais dos restantes alunos da turma, uma vez que usou nos seus exemplos frações e numerais decimais e que em tarefas seguintes as suas justificações foram relembradas em situações de cálculo semelhantes.

Conclusão

Nesta aula identificamos diversas estratégias usadas pelos alunos na multiplicação e divisão de números racionais na representação decimal, também registadas por Caneye Watson (2003); como a mudança de representação de decimal para fração ou de decimal para números naturais referentes a 10/100,a utilização de factos conhecidos, a mudança de operação e o uso das propriedades das operações. Outro aspeto que se salienta é a importância da discussão não só como forma de promover aprendizagens mas também como forma de detetar lacunas na aprendizagem e modos de pensar não usuais dos alunos. Assim, foi possível perceber que os números que se consideram como referência (Galenet al., 2008; Rathouz, 2011) não são os mesmos para todos e que, por vezes, o uso de uma ou outra representação pode fazer a diferença, como vimos no caso de Marta e Pedro, o que reforça a importância das referências no cálculo mental com números racionais. O uso de diferentes representações dos números racionais confere aos alunos maior flexibilidade no cálculo, permitindo-lhes usar a representação que lhes faz mais sentido, como no caso de Pedro, bem como o uso de pensamento relacional (Empson et al., 2010). O trabalho anterior com frações e numerais decimais em simultâneo pode ter influenciado positivamente as estratégias dos alunos na tarefa, dado que a mudança de representação é uma estratégia que aparece com frequência.

O confronto de estratégias de cálculo mental dos alunos permitiu perceber que estes possuíam, na sua maioria, um sentido incorreto de multiplicação de números racionais. Para a maioria dos alunos, multiplicar dois números racionais produz um resultado maior do que qualquer um dos fatores. A interação entre os alunos, mediante questionamento do professor e, principalmente, a argumentação de João contribuiu para reforçar o sentido da multiplicação de números racionais. O presente estudo mostra que o uso de cálculo mental na sala de aula de modo sistemáticointegrando momentos de discussão coletiva, é uma forma produtiva de trabalhar o cálculo mental na aula de Matemática, promovendo o desenvolvimento do sentido de número e de operação.

Referências

Bogdan, R., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Callingham, R., & Watson, J. M. (2004).A developmental scale of mental computation with part-whole numbers.*Mathematics Education Research Journal*, *16*(2), 69-86.

Caney, A., & Watson, J. M. (2003).Mental computation strategies for part-whole numbers.*AARE 2003 Conference papers, International Education Research*. (retirado de http://www.aare.edu.au/03pap/can03399.pdf em15/05/2010).

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehere, R., &Schauble, L. (2003). Design experiments in education research. *Educational Researcher, 32*(1), 9–13.

Empson, S., Levi, L., & Carpenter, T. (2010). The algebraic nature of fraction: Developing relational thinking in elementary school. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 409-428). Heidelberg: Springer.

Galen, F., Feijs, E., Figueiredo, N., Gravemeijer, K., Herpen, E., & Keijzer, R. (2008). *Fractions, percentages, decimals and proportions: A learning-teaching trajectory for grade 4, 5 and 6*. Rotterdam: Sense.

Heirdsfield, A. (2011). Teaching mental computation strategies in early mathematics. *Young Children*, *66*(2), 96-102.

Lamon, S. (2006).*Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content and instructional strategies for teaching* (2nd ed.). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Rathouz, M., M. (2011). Making sense of decimal multiplication. *Mathematics Teaching in the Middle School*,*16*(7), 430-437.

OS ROBOTS[4] NA APRENDIZAGEM DE CONCEITOS MATEMÁTICOS: ANALISANDO O PROCESSO DE TRANSPARÊNCIA DOS ARTEFACTOS

Sónia Martins
Escola Básica dos 2.º e 3.º Ciclos dos Louros
Destacada – Projeto CEM (Construindo o Êxito em Matemática)
Universidade da Madeira
smpcm@netmadeira.com

Resumo

Este artigo discute ideias chave de uma perspetiva situada da aprendizagem, a partir da visão de Lave (1996) e Lave e Wenger (1991). Esta discussão é assistida pelo uso do conceito de transparência e a sua utilização na análise da prática e do reportório partilhado de uma comunidade de alunos que utilizam robots como artefacto.

Foi desenhado e implementado um cenário de aprendizagem, cujo enredo seguiu uma metodologia de trabalho de projeto, envolvendo duas turmas do 1.º Ciclo do ensino básico[5], trabalhando conjuntamente com robots.

A metodologia adotada foi de carácter qualitativo e a observação participante foi uma estratégia central na recolha de dados, sendo a unidade de análise constituída pelas pessoas em ação. Os dados analisados elucidam a dicotomia entre visibilidade e invisibilidade dos artefactos (programação e conceitos matemáticos) utilizados na prática com robots, possibilitando a transparência, em diferentes momentos, de uns, ou de outros. Para que a aprendizagem matemática ocorra os conceitos matemáticos devem ser, ao mesmo tempo, visíveis e invisíveis, possibilitando aos alunos a sua utilização como meios para construírem e alargarem o seu conhecimento.

Palavras-chave: Robots; Aprendizagem; Participação.

Introdução

Devido à rápida e crescente evolução tecnológica, os cenários de aprendizagem criados são cada vez mais tecnológicos. Consequentemente, tem havido um número crescente de investigadores interessados em analisar fenómenos relacionados com a aprendizagem quando os alunos interagem com estes artefactos.

Estudos internacionais tais como IPETCCO – Investigation in Primary Education Teachers' Confidence and COmpetence (referido em Peralta & Costa, 2007) e Joint Mathematical Council of the United Kingdom (2011) indicam que, apesar dos

[4] A investigação relatada no artigo insere-se no projeto DROIDE II - Robots em Educação Matemática e Informática, subsidiado pela Fundação para a Ciência Tecnologia segundo o contrato PTDC/CPE-CED/099850/2008.
[5] Usaremos a sigla 1.ºCEB para nos referirmos a 1.º Ciclo do Ensino Básico.

investimentos significativos feitos em tecnologias nas escolas, o seu uso em contexto de sala de aula é muito reduzido, incidindo particularmente na utilização, por parte do professor, de apresentações em formato PowerPoint e de software ligado ao uso de quadros interativos. Estudos nacionais (Flores, Peres & Escola, 2009; Ricoy & Couto, 2011) corroboram este facto, apresentando alguns constrangimentos sentidos pelos professores, quando procuram utilizar este tipo de ferramentas nas suas aulas. Da leitura dos resultados avançados por estes estudos emerge a necessidade de investigações relacionadas com o uso de tecnologias em contexto escolar.

A investigação a que se refere este artigo visa compreender como é que o uso de robots pode contribuir para o desenvolvimento de competências matemáticas (e outras, relacionadas com o domínio da Língua Portuguesa, da Expressão Plástica e da Formação Pessoal e Social) e para a apropriação de tópicos e conceitos matemáticos nos alunos do 1.ºCEB.

Tomando a aprendizagem como participação em comunidades de prática (Lave, 1996; Lave & Wenger, 1991 e Wenger, 1998), pretende-se aqui discutir o processo de transparência dos artefactos[6] (programação e conceitos matemáticos, nomeadamente relações entre unidades de medida de tempo) como elemento que molda de forma particular a participação e, consequentemente, a produção de conhecimento, através do engajamento na prática.

Fundamentação Teórica

A teoria da aprendizagem situada é uma plataforma teórica ampla, composta por uma variedade de teorias e escolas de pensamento que partilham um entendimento comum de que a cognição deverá ser contextualizada no mundo físico, social e cultural em que as pessoas atuam, sendo atribuída particular importância à dimensão sociocultural.

Um dos desenvolvimentos mais significativos nas abordagens educacionais propõe que o fenómeno da aprendizagem seja visto como um processo que emerge de situações e contextos específicos (Lave, 1988; Brown, Collins & Duguid, 1989; Lave, 1996; Lave & Wenger, 1991 e Wenger, 1998).

[6] De acordo com Lave & Wenger (1991), os artefactos constituem a tecnologia da prática que, na terminologia de Wenger (1998) incluem o reportório da prática que constitui um conjunto de recursos partilhados na comunidade que podem ser muito heterogéneos, tais como "rotinas, palavras, ferramentas, formas de fazer as coisas, histórias, gestos, símbolos, géneros" (p. 83). Lave & Wenger (1991) e Wenger (1998) não fazem distinção entre ferramentas e artefactos.

Lave (1988) argumenta que a aprendizagem é caracterizada em função da atividade, do contexto e da cultura em que está situada. Isto contrasta com a abordagem, geralmente adotada em contexto escolar, onde é esperado o envolvimento dos alunos em experiências em que o conhecimento é apresentado de uma forma abstrata e, muitas vezes, descontextualizada.

Lave e Wenger argumentam que a aprendizagem é um processo social e cultural, onde é relevante mudar "(...) o foco analítico do indivíduo como alguém que aprende para uma ideia de aprendizagem como participação no mundo social, e do conceito de processo cognitivo para uma visão mais alargada de prática social." (1991, p. 43).

Nesta abordagem da aprendizagem é central a ideia de que aprender está intimamente ligado à participação em comunidades, que não são só grupos de pessoas, mas pressupõem práticas e que, portanto, serão também de conhecimentos. A prática não existe no abstrato, existe porque existem pessoas que participam em ações cujo significado é negociado mutuamente. "Não reside na estrutura que a precede, reside sim numa comunidade de pessoas e nas relações de mútuo engajamento pelas quais elas podem fazer o que fazem." (Wenger, 1998, p. 73).

O termo prática usado por Wenger, McDermott e Snyder (2002) refere-se a "(…) um conjunto de abordagens comuns e maneiras partilhadas de fazer as coisas que criam uma base para comunicação, ação, resolução de problemas, desempenho e responsabilidade" (p. 38) num domínio específico.

Wenger (1998) chama reportório a um conjunto de recursos partilhados na comunidade. Combina aspetos reificativos e participativos. "Inclui o discurso pelo qual os membros criam afirmações significativas sobre o mundo, bem como os estilos pelos quais expressam as suas formas de ser membro e a sua identidade como membros." (p.83).

Para Lave e Wenger (1991) a aprendizagem ocorre através da participação convergente no currículo de aprendizagem da comunidade, isto é, tornar-se um membro pleno implica ter acesso a uma grande variedade de atividades em curso na prática. Tal acesso relaciona-se diretamente com o conceito de transparência.

A transparência da organização da prática, do seu conteúdo e dos artefactos envolvidos é um recurso crucial para aumentar a participação e, consequentemente, a aprendizagem. Lave e Wenger (1991) afirmam que o termo 'transparência', quando usado em conexão com as tecnologias, refere-se "(…) à maneira segundo a qual usar artefactos e entender o seu significado interagem para tornar-se num processo de aprendizagem.” (pp.102 e 103).

Estes autores elaboram ‘transparência’ como envolvendo a característica dual de invisibilidade e visibilidade. Invisibilidade na forma de interpretação não problemática e integração (do artefacto) na atividade, e visibilidade na forma de acesso alargado à informação. “Esta não é uma simples distinção dicotómica, uma vez que estas duas características cruciais estão numa complexa interação, a sua relação é ao mesmo tempo de conflito e de sinergia.” (Lave & Wenger, 1991, p.102). Assim, o acesso à prática relaciona-se com a dual visibilidade e invisibilidade dos seus recursos.

Metodologia da Investigação

Tomou-se como fenómeno em estudo na presente investigação a *aprendizagem*, tendo sido delineado o problema: compreender como é que o uso de robots pode contribuir para o desenvolvimento de competências matemáticas, e outras, e para a apropriação de tópicos e conceitos matemáticos nos alunos do 1.ºCEB.

Para tal, foi *desenhado* um cenário[7] de aprendizagem, envolvendo duas turmas do 1.ºCEB (2.º e 3.º anos) da mesma escola (no Funchal), trabalhando conjuntamente com robots (24 e 16 alunos, respetivamente).

De seguida descrevemos o cenário construído e, posteriormente, as opções metodológicas tomadas na investigação, sendo estabelecido um paralelismo entre a natureza do fenómeno em estudo e o campo teórico usado.

O cenário de aprendizagem

O enredo do cenário seguiu uma metodologia de trabalho de projeto no sentido de Greeno e Middle School Mathematics through Applications Project (MMAP) (1998). O projeto foi desenvolvido em dois momentos: o primeiro entre maio e junho de 2011 e o segundo começou em abril de 2012. A construção do cenário foi um processo conjunto entre: investigadores, professoras das turmas e alunos.

Na construção do cenário não foram estabelecidos que conceitos matemáticos seriam trabalhados, no entanto, existiu uma intencionalidade por parte dos investigadores em tirar proveito de situações em que estes pudessem emergir. Tendo por base essa

[7] Entende-se cenário no sentido de Carroll (1999) como uma sequência de ações e eventos a serem desenvolvidos com vista a atingir determinadas finalidades ou objetivos, que correspondem a mudanças a alcançar com a sua implementação.

intenção, assumiram uma postura de questionamento face ao trabalho dos alunos, na prática em curso com os robots. Foram muitos os conteúdos matemáticos que emergiram sendo que, neste artigo, analisaremos as relações entre unidades de medida de tempo.

Na implementação do cenário, estiveram envolvidos as professoras das áreas curriculares, os professores de expressão plástica das turmas, a professora de informática e elementos do projeto DROIDE II.

Foram formados 10 grupos de trabalho heterogéneos, constituídos por 4 alunos de ambas as turmas. Na primeira sessão conjunta, os alunos visionaram o vídeo correspondente ao *trailler* do filme Wall-E e manipularam artefactos construídos com peças Lego, sendo que uns eram robots e outros não. A discussão foi fomentada com vista a construírem uma ideia partilhada do que é um robot.

Na sessão seguinte, foram apresentados os diferentes motores, cérebros e sensores. Foram levados Kits de montagem de robots e instruções de montagem dos mesmos, em número superior ao necessário, permitindo aos grupos, opção de escolha. A partir daqui os grupos assumiram tarefas distintas pois, à medida que terminaram a montagem dos robots, iniciaram a sua programação. Em seguida, foi-lhes solicitado que elaborassem um texto onde descrevessem as características físicas e emocionais dos mesmos. Os alunos foram informados que os robots representariam o papel de personagens numa história criada conjuntamente. A história foi iniciada por um grupo e os restantes tiveram oportunidade de programar o seu robot. Ao longo das sessões seguintes a história foi passando pelos outros grupos, para a irem completando.

No ano letivo seguinte, as sessões iniciaram-se em abril de 2012. Inicialmente foi feita uma discussão acerca do trabalho realizado anteriormente. A turma de 3.º ano (2.º ano em 2011) estava nessa altura a construir uma maquete de uma cidade. Aproveitando esse recurso, foi proposto aos alunos que, em vez de procederem à encenação da história, poderiam produzir um filme, sendo a maquete usada como cenário para o mesmo. Os alunos aderiram à ideia e foi estabelecido que nas aulas de expressão plástica seriam construídos a maquete, os cenários e os adereços necessários.

Na sessão seguinte foram estabelecidas novas tarefas, de acordo com o que os alunos consideraram necessário para a produção do filme. Os alunos decidiram que teriam de ser criadas equipas de: realização, montagem, filmagem, som, programação dos NXT, programação dos RCX, vozes e iluminação. Cada aluno escolheu em qual das equipas queria participar.

A análise dos dados que se apresenta neste trabalho refere-se, exclusivamente, ao primeiro momento de implementação do cenário (ano letivo 2010/2011).

Opções metodológicas

A metodologia adotada foi de carácter qualitativo, visando desenvolver uma compreensão de um sistema de relações humanas, como por exemplo, professores e alunos usando tecnologia na sala de aula (Savenye & Robinson, 2004), sendo atribuída particular relevância ao processo e não ao produto das atividades desenvolvidas (Bogdan & Biklen, 2006).

Tomando a aprendizagem não como um atributo individual, mas como algo intrinsecamente ligado à mudança de participação do indivíduo em práticas nas quais está inserido, tornou-se importante não só "observar" como também "participar" nas atividades com as quais os alunos estiveram envolvidos, no seu contexto natural.

Com efeito, assumir, numa investigação, uma perspetiva situada da aprendizagem como enquadramento teórico, implica assumir também um determinado posicionamento em termos metodológicos, nomeadamente assumindo que investigar é participar na constelação de práticas em que decorre a investigação (Matos & Santos, 2008). Foi esse o posicionamento da equipa de investigadores envolvidos na recolha de dados. Participar foi também aprender.

Assim, a observação participante foi uma estratégia central e adquiriu o estatuto de metodologia de recolha de informação. O desafio foi manter uma participação genuína e ser capaz de refletir sobre ela (Matos & Santos, 2008).

Ao longo da investigação houve uma ligação muito estreita entre o fenómeno em estudo e o quadro conceptual adotado. A unidade de análise da investigação foi constituída pelas pessoas em ação analisada na dialética do campo teórico com as práticas (observadas/vividas/refletidas) que instanciam empiricamente o problema em estudo (Matos & Santos, 2008).

A recolha de dados foi conduzindo à necessidade de um aprofundamento a nível teórico e, por sua vez, a clarificação de determinados conceitos levou a uma melhor perceção do fenómeno em estudo. Atendendo a isto, não é possível dizer em que momento foi iniciada a análise dos dados, uma vez que estas duas fases, recolha e análise, foram feitas em simultâneo, sendo continuamente refinadas pelo investimento feito em termos teóricos, na procura de conceitos que de alguma forma interpretassem o fenómeno observado.

Foram realizadas entrevistas às professoras das áreas curriculares e a alguns alunos de ambas as turmas, com o pressuposto de clarificar alguns aspetos da prática que suscitaram dúvidas ou se manifestaram insuficientes aquando da análise. Neste sentido, voltamos ao terreno e conversamos (entrevista informal) com os alunos intervenientes em episódios que nos suscitaram dúvidas aquando da análise, tendo o intuito de triangular dados provenientes de diferentes fontes de recolha (Savenye & Robinson, 2004).

Em estudos qualitativos em que o investigador assume a posição de observador/participante as entrevistas confundem-se com conversas informais, uma vez que entrevistador e entrevistado não são propriamente estranhos (Bogdan & Biklen, 2006). Assim, as entrevistas realizadas foram do tipo semiestruturado, conduzidas com base em tópicos específicos a partir dos quais se formularam as questões.

As sessões foram gravadas em áudio e vídeo, privilegiando-se o registo das interações entre os alunos. Foram feitas transcrições dos vídeos e anotações num diário. O diário foi elaborado tendo por base tópicos registados no decorrer das sessões, e após cada uma delas foram escritas extensas notas de campo. Passado pouco tempo, essas notas e transcrições foram analisadas, no sentido de serem detetados "padrões de comportamentos, eventos e fenómenos a serem investigados em observações seguintes" (Savenye & Robinson, p.1052).

Inicialmente, tanto as transcrições dos vídeos como o diário começaram por ser muito extensos. À medida que a compreensão do mundo observado se foi ampliando, fruto de uma reflexão analítica baseada no investimento feito a nível conceptual, esses registos passaram a ser mais focados.

A transparência dos artefactos

Uma vez que o reportório de uma comunidade de prática inclui os artefactos, será importante atender ao conceito de transparência, proposto por Lave e Wenger (1991) que se relaciona com o funcionamento dos mesmos na prática. Como já foi referido, para Lave e Wenger, este conceito combina duas características – visibilidade e invisibilidade: "(...) invisibilidade na forma sem problemas de interpretação e integração na atividade e visibilidade na forma de acesso alargado à informação." (1991, p. 43).

Assim, a transparência não pode ser vista como uma propriedade de um instrumento em si próprio, mas antes como um processo que envolve formas particulares de participação, relacionadas com os propósitos do uso dos instrumentos numa determinada prática cultural e estrutura social.

Analisemos o seguinte excerto de uma entrevista a duas alunas: A (2.º ano) e H (3.º ano). I é uma das investigadoras.

1 H: Para programar dizíamos ao robot para andar 2 minutos.
2 I: Dois minutos, é muito ou pouco?
3 H: Sim, é muito.
4 A: Temos de contar até 120 segundos, porque duas horas são 120 minutos.
5 I: Como sabes?
6 A: Seis mais seis, dá 12. Se acrescentarmos zero dá 120.
7 H: Para nós, dois minutos é pouco tempo, mas para os robots é muito. Com dois minutos andavam muito tempo. No início estávamos a pôr muito e depois mudámos porque o nosso robot era muito acelerado.
8 I: Uns eram mais acelerados que outros?
9 H: Sim, o nosso era muito acelerado.

O facto de existirem robots cuja construção tinha por base um veículo, nomeadamente os insetos, fazia com que, em termos de locomoção, tivessem uma maior estabilidade e pudessem deslocar-se mais rapidamente que outros. Nas sessões de programação os alunos testaram os seus robots e, por interação com os de outros grupos, começaram a aperceber-se das particularidades e dos ajustes que tinham de ser feitos para que pudessem desempenhar as tarefas pretendidas. Desta feita, acabaram por criar um reportório partilhado de recursos tais como artefactos, vocabulário e modos de atuar que, de alguma forma, transportaram o conhecimento acumulado da comunidade.

Uma vez que a programação faz-se em segundos e os alunos pretendiam expressar as ações dos robots em minutos, frequentemente necessitavam relacionar diferentes unidades de medida de tempo, conforme se evidencia no excerto anterior.

Em alguns momentos, a matemática usada e aprendida surgiu de uma forma oculta, nas ferramentas e na própria prática do trabalho com robots. Muitos dos procedimentos e conceitos, identificados como sendo matemáticos, não foram vistos como tal, nem pelas professoras nem pelos alunos, devido a ela ser invisível para que as ferramentas pudessem apoiar a visibilidade do trabalho com robots (Fernandes, 2004).

O episódio apresentado destaca que o instrumento usado – no caso, relações entre horas, minutos e segundos – pode, ao tornar-se invisível, ser a janela através da qual a programação do robot pode ser vista. Simultaneamente, ilustra que a especificidade e significado das relações entre diferentes unidades de tempo têm de ser compreendidos pelos alunos o que requer, da sua parte, uma manifesta preocupação. Ou seja, os instrumentos, para poderem ser usados, precisam tornar-se invisíveis tal como se torna invisível uma janela numa parede, permitindo a visibilidade do que está para além dela.

Da atividade com os robots, fizeram parte vários procedimentos relativos à montagem e programação que se tornaram modos de fazer as coisas através do engajamento nesta atividade. A matemática surgiu difundida nestes procedimentos e a aprendizagem desta não existiu isolada do resto da atividade na prática, mas sim dos procedimentos e neles incorporada (Fernandes, 2004).

Analisemos a seguinte transcrição, referente a uma sessão de programação, em que o aluno de 2.º ano, F., estipulou 300 segundos, para que o robot desempenhasse uma ação.

1 I: 300 segundos? Quantos minutos são?
2 F: Não sei.
3 I: Um minuto quantos segundos são?
4 F: 60.
5 I: 60! E os 300 segundos quantos minutos serão?
Aluno não respondeu.
6 I: Um minuto são 60 segundos. Dois minutos?
7 F: 120.

A investigadora colocou a mesma questão para 3 minutos e o aluno respondeu corretamente. Quando colocou a questão para 4 minutos fez-se silêncio. A professora de 2.º ano, P, decidiu intervir:

8 P: Já estás nos 180! E agora mais 60?
9 F: Duzentos e…
10 P: Abre o número.
11 F: O sessenta?
12 P: Sim. Não te esqueças que tens 180…
13 P: 60 é 20 mais 40. 180 mais vinte….?

[O diálogo entre professora e aluno continuou, até que este concluiu que 5 minutos correspondem a 300 segundos, o que representa muito tempo para que um robot desempenhe uma determinada ação, no contexto em análise.]

O reportório da prática reflete a história do engajamento mútuo, incluindo rotinas, palavras, modos de fazer as coisas, histórias, símbolos, artefactos, ações similares no estilo e na forma, ou conceitos que a comunidade produziu ou adotou no curso da sua existência e que se tornaram parte da sua prática. O segmento anterior é elucidativo de um reportório partilhado pelo aluno e professora, no que diz respeito a formas de falar acerca dos números e de relações numéricas específicas, decorrentes da prática de sala de aula em que são trabalhados estes conceitos. Para a professora e aluno, "abrir o número" (linha 10) consistia em decompô-lo em fatores numéricos, que poderiam auxiliar o cálculo mental de operações aritméticas.

Ao invés do primeiro episódio analisado, em que se assiste à invisibilidade das relações entre unidades de medida de tempo de modo a tornar visível a programação, neste episódio verifica-se que a programação passou para segundo plano e o enfoque passou a ser a 'passagem' dos 300 segundos a minutos e todas as relações numéricas que foram aparecendo durante o processo, isto é, a programação do robot foi a janela que, ao se tornar invisível, permitiu que as relações numéricas assumissem visibilidade.

Conclusões

Os artefactos alvos de análise, neste caso o conteúdo matemático relações entre unidades de medida de tempo e aspetos resultantes da participação na prática com robots, nomeadamente no que se refere à linguagem utilizada na sua montagem e programação, passaram a fazer parte do reportório partilhado dos membros desta comunidade.

Os artefactos refletem histórias coletivas de aprendizagem e de engajamento dos membros de uma comunidade. Neste sentido, os robots constituem elementos reificativos, que refletem, de uma forma muito particular, o sentido de pertença dos alunos (e professoras) a esta comunidade.

Os dois episódios escolhidos elucidam a dicotomia entre visibilidade e invisibilidade dos artefactos programação e relações entre unidades de medida de tempo, que foi observada ao longo de todo o trabalho com os robots, possibilitando a transparência, em diferentes momentos, de uns, ou de outros.

Com efeito, na prática com robots analisada, existiram, por um lado, episódios em que os conceitos matemáticos assumiram invisibilidade para que os robots, nomeadamente a sua programação, se tornassem visíveis para os alunos. Por outro, existiram momentos em que os robots, ou a programação dos mesmos, permitiram a visibilidade de conceitos matemáticos.

A dualidade entre visibilidade e invisibilidade dos artefactos moldou a participação e consequentemente a aprendizagem por parte dos membros desta comunidade. Com efeito, quando se iniciou o trabalho com os robots, os alunos da turma de 2.º ano não tinham ainda lecionado as relações existentes entre diferentes unidades de medida de tempo. Sem a compreensão destas relações e do que cada unidade de tempo representa em termos de uma ação desempenhada por um robot, os alunos não conseguiam programar os robots de forma adequada para desempenharem determinadas tarefas. O artefacto robot levou à aprendizagem das relações entre diferentes unidades de tempo, decorrente da participação na prática em curso.

Aceder à prática matemática requer que os conceitos e procedimentos matemáticos sejam, ao mesmo tempo, visíveis e invisíveis. São estas propriedades que, interagindo de forma conjunta, possibilitam a transparência dos instrumentos. Para que a aprendizagem da matemática aconteça, os alunos devem ser capazes de os ver e de os usar, focando-se neles quando necessário, mas devem ser também capazes de os tornar invisíveis quando os estão a utilizar como meios para construírem e alargarem o seu conhecimento.

Referências bibliográficas

Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (2006). *Qualitative research in education: An introduction to theory and methods*. (5th ed). Boston, MA: Pearson Education, Inc.

Carroll, J.M. (1999). Five Reasons for Scenario-Based Design. In *Proc. 32nd Hawaii Int. Conf. On System Sciences,* Hawaii. Acedido em 17 de maio, 2012, em http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.106.5310&rep=rep1&type=pdf.

Brown, J. S., Collins, A., & Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher*, *18*(1), 32-42.

Fernandes, E. (2004). *Aprender matemática para viver e trabalhar no nosso mundo*. Acedido em 14 de dezembro, 2011, em http://dme.uma.pt/people/faculty/elsa.fernandes/.

Flores, P. Q., Peres, A., & Escola, J. (2009). Integração das tecnologias na prática pedagógica: Boas práticas. In *Actas do X Congresso Internacional Galego-Português de Psicopedagogia* (pp. 5764-5779). Braga: Universidade do Minho

Greeno, J.G., & MMAP (Middle School Mathematics through Applications Project. (1998). The situavity of knowing, learning and research. *American Psychologist*, *53*(1), 5-26.

Joint Mathematical Council of the United Kingdom. (2011). *Digital technologies and mathematics education.* (Report from a working group chaired by Professor Rosamund Sutherland, Edited by Dr Alison Clark-Wilson, Professor Adrian Oldknow and Professor Rosamund Sutherland). Acedido em 22 de fevereiro, 2012, em http://cme.open.ac.uk/cme/JMC/Digital%20Technologies%20files/JMC_Digital_Technologies_Report_2011.pdf

Lave, J. (1988). *Cognition in Practice: Mind, mathematics and culture in everyday life*. Cambridge, Cambridge: University Press.

Lave, J. (1996). Teaching, as learning, in practice. *Mind, Culture, and Activity*, *3*(3), 149-164.

Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated Learning: Legitimate Peripheral Participation*. New York: Cambridge University Press.

Matos, J. F., & Santos, M. (2008). Acedido em 12 de dezembro, 2011, em http://learn-participar-situada.wikispaces.com/methodology.

Peralta, H., & Costa, F. A. (2007). Competência e confiança dos professores no uso das TIC. Síntese de um estudo internacional. *Sísifo*, *3*, 77-86.

Ricoy, M., & Couto, M. (2011). As TIC no ensino secundário na matemática em Portugal: A perspectiva dos professores. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 14*(1), 95-119.

Savenye, W. C., & Robinson, R. S. (2004). Qualitative research issues and methods: An introduction for educational technologists. In D. H. Jonassen (Ed.), *Handbook of research on educational communications and technology*. (2^{nd} ed., pp. 1045-1071). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum.

Wenger, E. (1998). *Communities of Practice: Learning, Meaning and Identity*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Wenger, E., McDermott, R., & Snyder, W. M. (2002). *Cultivating communities of practice*. Boston, Massachusetts, USA: Harvard Business School Press.

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE SUBTRAÇÃO: SIGNIFICADOS, ESTRATÉGIAS E PROCEDIMENTOS, QUE RELAÇÃO COM O DESENVOLVIMENTO DO SENTIDO DE NÚMERO DOS ALUNOS?

Elvira Ferreira
ESE de Torres Novas
elvira127@netcabo.pt

Resumo

Esta comunicação resulta de um estudo que teve como objetivo compreender como os alunos desenvolvem o sentido de número no âmbito da resolução de problemas de adição e subtração de números inteiros positivos no 2.º ano de escolaridade. Em particular, estudei as estratégias e os procedimentos a que recorrem e dificuldades com que se deparam no decorrer de uma experiência de ensino em sala de aula. Neste estudo, a metodologia adotada seguiu o paradigma interpretativo e uma abordagem qualitativa, tendo sido realizados quatro estudos de caso. Nesta comunicação, serão apresentados os casos de dois alunos, Catarina e Daniel, focando, essencialmente, a resolução de problemas de subtração de números inteiros positivos com diferentes significados. Os resultados revelam que Catarina, e em especial Daniel, utilizam alguma diversidade de estratégias e procedimentos, havendo uma relação com os significados dos problemas apresentados. A análise dos dados na resolução dos problemas de subtração evidencia que o recurso à estratégia de adição indireta influenciou o uso de procedimentos de cálculo mais eficientes, contribuindo, deste modo, para o desenvolvimento do sentido de número dos alunos. Os dados apontam ainda a experiência de ensino em sala de aula em que os alunos estiveram envolvidos como um aspeto importante na eficácia das resoluções apresentadas.

Palavras-chave: sentido de número, resolução de problemas, subtração, estratégias e procedimentos

Introdução

Nas últimas décadas, em muitos países, educadores matemáticos têm enfatizado a importância de ajudar os alunos a desenvolver o seu sentido de número e têm recomendado que o respetivo ensino e aprendizagem devem estar integrados nos currículos de matemática nos primeiros anos (ME, 2007; NCTM, 2007; Verschaffel, Greer & De Corte, 2007; Yang & Li, 2008; Yang & Tsai, 2010), sendo considerado "um aspeto fundamental a desenvolver pela escola (Ponte & Sousa, 2010, p. 16).

Nos últimos anos, embora se tenha continuado a investigar este tópico, o foco tem-se direcionado mais para a análise das estratégias e procedimentos utilizados pelos alunos na resolução de problemas de adição e subtração (Verschaffel et al., 2007). Este foco está intimamente ligado a um dos objetivos chave da educação matemática de hoje, que os alunos aprendam a calcular de forma eficiente. Segundo Van den Heuvel-Panhuizen e Treffers (2009), calcular de forma eficiente depende, por um lado, do nível de capacidade do aluno, do seu conhecimento dos números e do repertório de estratégias e procedimentos disponíveis e, por outro lado, da natureza dos números envolvidos e o tipo de problemas.

O que significa ter sentido de número

A ênfase dada ao *sentido de número* no currículo de Matemática nos primeiros anos é bastante recente e muita da sua caracterização (Greeno, 1991; NCTM, 1991; 2007; Reys & Yang, 1998) foca a sua natureza intuitiva, o seu desenvolvimento gradual e o modo como se manifesta. Segundo Yang, Li & Lin (2008) "No século XXI, ajudar os alunos a desenvolver o sentido de número está sendo considerado, à escala global, como uma tarefa chave na educação matemática" (p. 805), reforçando, deste modo, a sua importância, quer no currículo de Matemática, quer no desenvolvimento matemático dos alunos.

Apesar de alguma dificuldade numa definição única, a discussão e reflexão sobre este tópico conduziu a uma ideia abrangente e referida por vários investigadores que consideraram que sentido de número se refere à compreensão geral que cada um tem dos números e operações e à capacidade de os manipular de forma flexível em situações do dia-a-dia. Esta capacidade implica o uso de estratégias e procedimentos eficientes, flexíveis e úteis para resolver problemas (McIntosh, Reys & Reys, 1992; Reys & Yang, 1998; Yang, Hsu & Huang, 2004; Yang & Hsu, 2009).

Estratégias e procedimentos de cálculo para a adição e subtração com números com vários dígitos

É hoje consensual que, além de encontrarem a resposta correta, "é importante que os alunos encontrem essas respostas de forma eficiente, isto é, escolhendo estratégias, procedimentos e ferramentas adequadas" (Van den Heuvel-Panhuizen & Treffers, 2009, p. 108). Como referem Heinze, Star e Verschaffel (2009), os alunos devem ser capazes de resolver tarefas matemáticas "não apenas de forma rápida e correta, mas também de forma apropriada" (p. 535), isto é, devem adquirir a capacidade de as resolver de modo flexível, através da diversidade de estratégias e procedimentos adquiridos tendo em conta as características das mesmas (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001; Verschaffel et al., 2007).

Os termos *estratégia* e *procedimento* têm sido utilizados, com bastante frequência e por muitos investigadores, como tendo o mesmo significado. Neste estudo, assume-se que o termo *estratégia* é a "a escolha de opções relacionadas com a estrutura do problema" e procedimento é "a execução de passos de cálculo relacionados com os números no problema" (Beishuizen, 1997, p. 127). Daí as estratégias assumirem um papel importante na resolução de problemas de subtração, pois estão relacionadas com "a influência exercida pela ação que é descrita no contexto do problema" (Van den Heuvel-Panhuizen & Treffers, 2009, p. 109), aspeto que não é tão relevante na resolução dos problemas de adição. As estratégias de subtração definidas neste estudo foram: *adição indireta*, *subtração direta* e *subtração indireta*. Resolver um problema de subtração através da adição indireta significa que o problema é resolvido *adicionando até* desde o subtrativo. Esta é uma estratégia eficiente quando o valor representado pelo número do subtrativo está perto do aditivo. Em vez de contar para trás ou subtrair um número maior, pode-se *contar a partir de* ou adicionar um número pequeno (Van den Heuvel-Panhuizen & Treffers, 2009). Pelo contrário, a subtração direta significa que o subtrativo é subtraído do aditivo (Torbeyns, De Smedt, Ghesquière & Verschaffel, 2009), em que a grandeza do número do subtrativo está longe da ordem de grandeza do aditivo, por exemplo, 71 – 29. Outra estratégia referida é a subtração indireta, que significa *subtrair até*, por exemplo, 71 - __ = 42.

Na resolução de problemas de adição e subtração com números com dois ou mais dígitos, existem vários projetos de investigação focados nos *procedimentos* de cálculo dos alunos que têm em atenção a estruturação dos números. Estes estudos (Beishuizen, 1997; Fuson, 1992; Fuson et al., 1997; Heirdsfield, 2001; Heirdsfield & Cooper, 2004) revelam que os alunos, geralmente, aplicam dois tipos de procedimentos de cálculo mental para resolverem problemas de adição e subtração com números com vários dígitos, decomposição (*split*), métodos dos saltos (*jump*) e métodos mistos, derivados dos anteriores.

Na literatura holandesa, encontramos, essencialmente, referência aos procedimentos *jump* e *split*. Estes procedimentos são referidos por Beishuizen (1997), pelos acrónimos N10, N10C e A10, no método dos saltos (*jump*) e a decomposição (*split*) pelos acrónimos 1010 (pronunciado como dez-dez) e 10s; e método da *compensação* pelo acrónimo N10C.

No procedimento de decomposição está implícita a ideia de que as dezenas e as unidades são separadas e tratadas isolada e independentemente (por exemplo, 65 - 49 é calculado fazendo 60 - 40 = 20 e 5 – 9 = 4 «falso inverso»). O segundo, método dos saltos, é aquele em que diferentes valores de cada dígito do subtrativo é retirado do aditivo que não foi decomposto. No N10, tomando como exemplo a mesma expressão, 65 – 49, é calculado da seguinte maneira, 65 – 40 = 25; 25 – 5 = 20 e 20 – 4 = 16. No A10, 65 – 5 = 60 «aproximação à dezena mais próxima»; 60 – 40 = 20 e 20 – 4 = 16. Calculando usando a compensação, N10C, os números são ajustados de modo flexível e inteligente para simplificar os cálculos (por exemplo, 65 – 50 = 15 e 15 + 1 = 16 (Beishuizen, 1997).

Para Beishuizen (1997), os procedimentos N10 e 1010 poderão ser considerados como dois procedimentos fundamentais. O N10 constitui o procedimento de cálculo mais eficiente, ou, como refere Heirdsfield (2001) um "procedimento mental de nível superior e eficiente" (p. 135), enquanto o 1010 dá origem a um maior número de erros, sobretudo nos problemas de subtração que exigem o reagrupamento.

Embora a parte empírica apresentada nesta comunicação incida na resolução de problemas de subtração, optei por referir aqui as duas operações, à semelhança do que acontece na literatura. Na resolução dos problemas de subtração os significados selecionados foram: *retirar*, *completar, comparar diferença desconhecida* e *comparar referente desconhecido.*

Metodologia

Dada a natureza do objeto de estudo, a metodologia de investigação segue o paradigma interpretativo e uma abordagem qualitativa na perspetiva defendida por Bogdan e Biklen (1994), Denzin e Lincoln (2008) e Schwandt (1994), tendo por *design* o estudo de caso assente na implementação de uma experiência de ensino em sala de aula.

A experiência de ensino em sala de aula tem subjacente o desenvolvimento de um percurso de aprendizagem e foi desenvolvida numa turma do 2.º ano de escolaridade com 24 alunos. Destes, foram selecionados quatro alunos a partir do desempenho manifestado na resolução de problemas de adição e subtração apresentados inicialmente com o objetivo de fazer o diagnóstico da forma como os alunos encaravam esses problemas. A recolha de dados inclui a observação dos alunos na realização dos problemas, quer na sessão de diagnóstico, quer durante a experiência de ensino, e ainda uma entrevista final a cada um dos quatro alunos participantes realizada três meses depois de ter terminado a experiência de ensino, análise de documentos por si produzidos e a transcrição das gravações em vídeo e áudio do trabalho realizado pelos alunos durante a experiência de ensino. A análise dos dados relativos às estratégias e procedimentos tem como referência categorias definidas previamente tendo em atenção a revisão da literatura realizada.

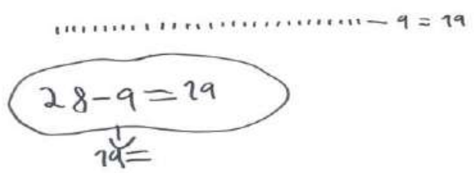
Experiência de ensino em sala de aula

Este estudo ocorreu no contexto de uma experiência de ensino em sala de aula, tal como é defendido por Gravemeijer e Cobb (2006). Trata-se de, uma experiência de ensino em sala de aula que se desenvolve em três fases: (i) preparação da experiência; (ii) experimentação na sala de aula e (iii) condução de análises retrospetivas. Na fase de planificação desta experiência, foi concebido um *percurso de aprendizagem* planeado antecipadamente que teve em conta o desempenho dos alunos antes da experiência de ensino na resolução dos problemas de adição e subtração propostos e consistiu numa sequência de problemas pensados antecipadamente para apoiar e organizar a emergência de cada prática a partir de práticas anteriores, bem como as orientações curriculares portuguesas (ME, 2007) e outros documentos curriculares (NCTM, 1991; 2007). Nesta, foi dada especial atenção à sequência de problemas de adição e subtração com diferentes significados, envolvendo números com diferentes características, de modo a influenciar as estratégias e os procedimentos dos alunos e facilitar a discussão final. Números que possibilitassem o recurso a múltiplas combinações, números distantes entre si ou mais próximos e números de referência. Outro aspeto considerado foi o desenvolvimento das aulas em quatro fases distintas: 1) apresentação do problema; 2) resolução dos problemas pelos alunos, umas vezes individualmente, outras a pares; 3) depois dos alunos, ou quase todos, terem resolvido o problema havia a discussão com toda a turma; 4) no final, a síntese procurava salientar as estratégias e procedimentos mais eficientes.

Nesta comunicação vão ser apresentados alguns dos problemas propostos aos alunos durante o seu percurso envolvendo os significados *retirar* e *completar*.

Resultados

Desempenho inicial dos alunos na resolução do problema com significado *retirar*. Na sessão de diagnóstico, um dos problemas apresentado "*Um autocarro que ia de Torres Novas para a Golegã levava 28 passageiros. No Entroncamento saíram 9 passageiros Sabendo que o autocarro não fez mais nenhuma paragem, quantos passageiros chegaram à Golegã?*", Catarina e Daniel resolvem-no como mostram as figuras 1 e 2:



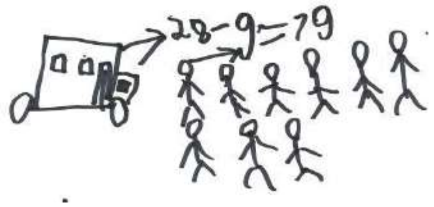


Figura1 – Resolução do problema por Catarina   Figura 2 – Resolução do problema por Daniel

Como se observa, Catarina inicia a sua resolução com recurso à representação icónica da quantidade relativa ao aditivo, 28. De seguida, coloca o sinal de subtração e representa simbolicamente 9, a quantidade correspondente ao subtrativo, usando, deste modo, a subtração direta.

Como não mostra nenhuma ação correspondente ao processo de retirar, não se compreende como chega ao resultado, 19, nem qual o processo de contagem a que recorre, embora anote a expressão 28 - 9 = 19, que parece posterior ao primeiro registo. Daniel, de modo semelhante a Catarina, também opta pela subtração direta, mas usa um processo de contagem diferente da colega. Desenha o autocarro e representa 28. De seguida, faz o desenho dos 9 passageiros que saíram e vai contando, apontando para os desenhos, 27, 26, 25, 24, 23, 22, 21, 20, 19, indicando igual a 19, apresentando um processo de contagem correspondente a um segundo nível de contagem, começa a partir de 28 e vai retirando 9 de 1 em 1.

Desempenho dos alunos na resolução dos problemas durante a experiência de ensino. No decorrer da experiência de ensino, foram apresentados alguns problemas com este significado. Em todos eles, Catarina opta pela estratégia de subtração direta. Por exemplo, num problema apresentado no final da experiência de ensino, "*Dos 303 alunos da tua escola, 83 alunos do 4º ano vão para o 5º ano. Quantos alunos vão continuar na tua escola?*", Catarina inicia o cálculo do lado esquerdo da folha, anota

303 - 3 = 300 e 300 - 80 =, mas risca. Nesta primeira resolução, usa a subtração direta e o procedimento de cálculo N10 (Figura 3):

1.ª resolução

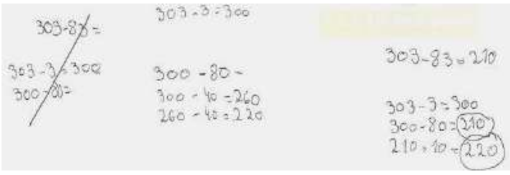
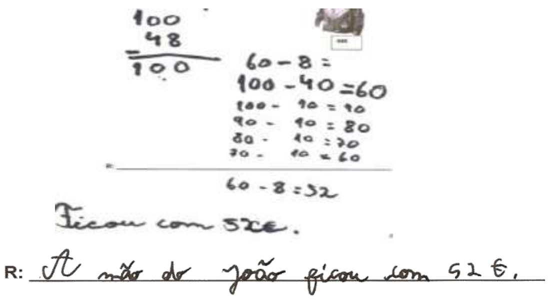


Figura 3 – Resolução do problema por Catarina Figura 4 – Resolução do problema por Daniel

Depois, reinicia do lado direito da folha utilizando o mesmo procedimento e a mesma estratégia. Quando acaba, chama a professora e pergunta-lhe se está certo. A professora questiona-a para que explique como fez 300 - 80. Perante esta pergunta, à qual não sabe responder, daí ter, provavelmente, riscado a primeira resolução, a professora sugere-lhe que, em vez de retirar 80 de uma só vez, tente fazer com outros números mais fáceis, recorrendo à decomposição de 80. De seguida, no meio da folha, indica 300- 80 e faz 300 - 40 = 260 e 260 - 40 = 220, chegando, assim, ao resultado. Foi evidente alguma dificuldade em lidar com os números e em realizar os cálculos atendendo à sua estrutura e às suas múltiplas representações.

Na resolução de Daniel (Figura 4), é visível a opção pela adição indireta (83 + __ = 283), e o procedimento de cálculo N10, mostrando um cálculo mental bastante desenvolvido dada a grandeza dos números envolvidos e a forma como os consegue manipular.

Desempenho dos alunos na resolução do problema na entrevista final. Perante o problema "*A mãe do João Pedro tinha 100€ na sua carteira. Foi à Zara e comprou uma capa para o João Pedro levar para a escola nos dias de chuva (48€). Com quanto dinheiro ficou?*", os alunos resolvem-no do seguinte modo (Figuras 5 e 6):



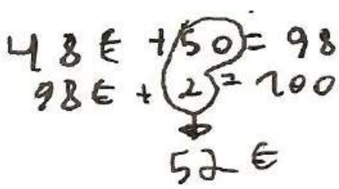


Figura 5 – Resolução do problema por Catarina Figura 6 – Resolução do problema por Daniel

Como verificado na resolução de outros problemas, com mais incidência na subtração, Catarina revela alguma dificuldade em lidar como os números bem como em calcular sem a ajuda do algoritmo, o que lhe provoca dificuldades acrescidas. Após verificar que não o consegue executar, opta pela resolução na representação horizontal, demonstrando que reconhece outros processos de resolução, embora pareça também enfrentar dificuldades ao realizar o mesmo, nomeadamente, em lidar com números maiores. Daniel resolve-o utilizando a adição indireta, aquela com que mais se identificou durante o seu percurso, e o procedimento de cálculo N10, parecendo indicar que a opção pela adição indireta contribuiu para o desenvolvimento do seu cálculo mental, visível nos poucos passos intermédios que faz e nas relações que estabelece entre os números.

Desempenho inicial dos alunos na resolução do problema com significado *completar*. No problema "*O David queria comprar uma bola que custava 37 €. Tem andado a guardar no seu mealheiro o dinheiro que o pai lhe dá quando se porta bem. Reparou que já tem 18 €. Quanto dinheiro lhe falta para poder comprar a bola?*", os alunos parecem utilizar a mesma estratégia, adição indireta, mas apresentam processos de contagem diferentes (Figuras 7 e 8). Catarina assinala 18 … 37 indicando que vai adicionar até.

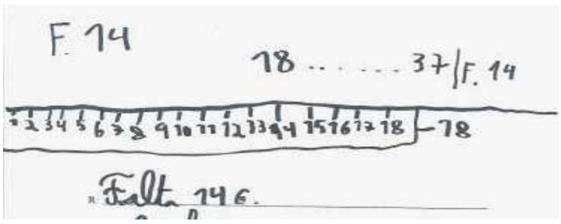


Figura 7 – Resolução do problema por Catarina

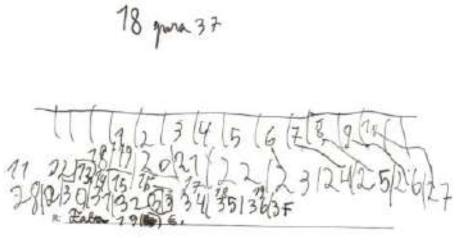
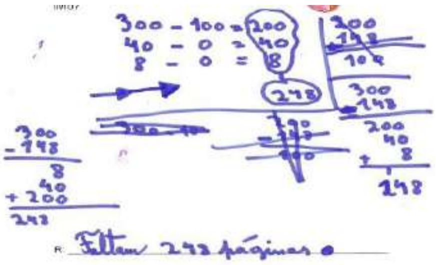


Figura 8 – Resolução do problema por Daniel

De seguida, representa os números na reta não graduada de 1 a 18 e escreve a resposta "Falta 14€", não se compreendendo como chega ao resultado do problema e qual o processo de contagem que utiliza. Daniel indica "18 para 37", representa os números de 1 a 37 na reta não graduada e conta de 1 em 1 a partir de 18 o que corresponde a um segundo nível de contagem.

Desempenho dos alunos na resolução dos problemas durante a experiência de ensino. À semelhança do verificado na resolução dos problemas de *retirar*, também nos problemas realizados com este significado Catarina escolhe sempre a estratégia de subtração direta. Vejamos as resoluções dos alunos num dos problemas realizado quase no final da experiência de ensino "*No dia de anos do Rui, a mãe deu-lhe um livro de* *histórias. O livro tem 300 páginas. Na 1.ª semana, o Rui leu 148 páginas. Quantas páginas lhe faltam para acabar de ler o livro?*" (Figuras 9 e 10):



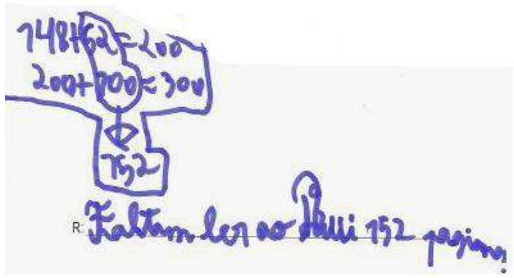
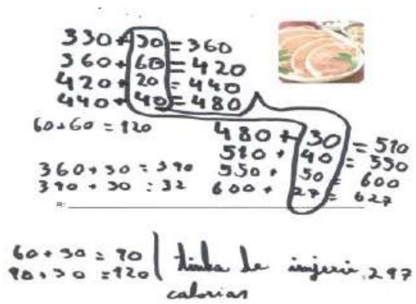


Figura 9 – Resolução do problema por Catarina Figura 10 – Resolução do problema por Daniel

A resolução de Catarina revela que tenta resolver o problema através do cálculo em coluna, de diferentes maneiras, mas sempre com recurso à subtração direta. Embora todos os resultados coincidam, os cálculos revelam alguns erros de percurso, nomeadamente, quando perante a expressão 300 – 140, faz 300 – 100 e depois 40 – 0, um erro comum quando os alunos recorrem ao procedimento 1010. Daniel usa outra estratégia, adição indireta e o procedimento de cálculo A10, onde se destaca um cálculo mental bastante eficiente.

Desempenho dos alunos na resolução do problema na entrevista final. Perante o problema "*A Carolina ao almoço comeu um bife frito que tem 330 calorias. Que poderá comer mais para ingerir 627 calorias?*", os alunos apresentam-no da seguinte forma (Figuras 11 e 12)



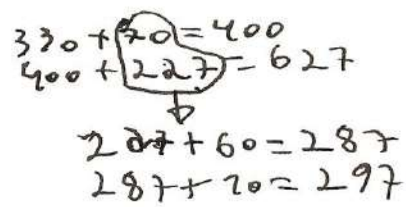


Figura 11 – Resolução do problema por Catarina Figura 12 – Resolução do problema por Daniel

Os cálculos de Catarina manifestam um avanço considerável relativamente a resoluções anteriores. Utiliza pela primeira vez a adição indireta nos problemas com este significado e o procedimento de cálculo N10, raramente usado. Demonstra conhecimento da estrutura dos números, estabelece relações adequadas e, apesar dum número excessivo de passos intermédios, nunca se perde na realização dos mesmos.

Daniel confirma o seu desempenho e aspetos do sentido de número salientados durante a experiência ensino. Emprega a adição indireta e o procedimento de cálculo A10, aproximação à centena mais próxima, 400. De imediato, adiciona 227 e chega a 627, o que revela boa manipulação dos números, atendendo à sua estrutura e às relações que estabelece entre eles, manifestando um bom cálculo mental.

Conclusões

Os resultados apresentados mostram que Catarina recorreu, quase em exclusivo, à subtração direta e ao procedimento de cálculo 1010 e, iniciando, por vezes, com o cálculo em coluna, em especial nos problemas de *retirar*, apenas não o fazendo na resolução do problema com significado *completar* na entrevista final. As dificuldades sentidas por Catarina quando usa, quer o cálculo em coluna, quer o procedimento de cálculo 1010, podem estar relacionadas com o que afirmam Fuson et al. (1997), de que a resolução de problemas de subtração com números com vários dígitos é, por vezes, fonte de maiores dificuldades e confusão quando os alunos usam o procedimento 1010, pois esta estrutura oferece uma representação problemática desses problemas e também porque a aprendizagem dos números e das operações constitui um processo complexo para os alunos (Fuson, 1992; Beishuizen, 1997), fatores que terão estado na origem de algumas das suas dificuldades. Gradualmente, Catarina parece apropriar-se, quer do uso da adição indireta, quer do procedimento de cálculo N10, mais visível na resolução de outros problemas. Esta constatação resulta dos cálculos apresentados na resolução dos problemas na entrevista final, recorrendo a este procedimento e à adição indireta. É também nestes problemas que é mais evidente uma relação estreita entre a estratégia e a eficiência dos procedimentos de cálculo adotados.

Daniel, pelo contrário, recorre, preferencialmente, à estratégia de adição indireta e aos procedimentos N10 e A10, apresentando um cálculo mental bastante eficiente, revelando uma boa compreensão de sentido de número, o que confirma o referido por Heirdsfield e Cooper (2004) de que quando os alunos exibem sentido de número, eles aplicam estratégias e procedimentos de cálculo eficientes.

Os dados indicam ainda que o recurso à adição indireta e a procedimentos mais eficientes, quer por parte de Catarina, e em especial por Daniel, foi apoiada pelos problemas propostos, envolvendo os vários significados da subtração, e o modo como eles foram apresentados ao longo da experiência de ensino que suportou este estudo. Os problemas e os números envolvidos criaram oportunidades para que os alunos desenvolvessem uma maior compreensão da relação entre as operações, proporcionando, assim, a evolução para estratégias e procedimentos mais eficientes.

Referências bibliográficas

Beishuizen, M. (1997). Mental arithmetic: Mental recall or mental strategies? *Mathematics Teaching*, *160*, 16-19.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Denzin, N., & Lincoln, Y. (2008). Introduction: The discipline and practice of qualitative research. In N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *The sage handbook of qualitative research* (pp. 1-32). Thousand Oaks: Sage Publications.

Fuson, K. (1992). Research on whole number addition and subtraction. In D. C. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 243-275). New York: Macmillan.

Fuson, K., Wearne, D., Hiebert, J., Murray, H. G., Human, P., Olivier, A., et al. (1997). Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(2), 130-162.

Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. In: J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney & N. Nieveen, (Eds). *Educational design research* (pp. 45-85). London: Routledge.

Greeno, J. G. (1991). Number sense as a situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*(3), 170-218.

Heinze, A., Star, J. R., & Verschaffel, L. (2009). Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathemetics education. *ZDM Mathematics Education, 41*, 535-540. [Acesso eletrónico]. Disponível em http://www.springerlink.com

Heirdsfield, A., M. (2001). Integration, compensation and memory in mental addition and subtraction. In *25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Utrecht, Netherlands. [Acesso eletrónico]. Disponível em: http://eprints.qut.edu.au/

Heirdsfield, A. M., & Cooper, T. J. (2004). Factors affecting the process of proficient mental addition and subtraction: Case studies of flexible and inflexible computers. *Journal of Mathematical Behavior*, *23*(4), 443-463.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up. Helping children learn mathematics.* Washington, DC: National Academy Press.

McIntosh, A., Reys, B., & Reys, R. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, *12*(3), 2-8 & 44.

ME (2007). *Programa de Matemática do ensino básico* [Acesso eletrónico]. Disponível em: http://sitio.dgidc.min-edu.pt

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar.* Lisboa: APM e IIE.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

Ponte, J. P., & Sousa, H. (2010). Uma oportunidade de mudança na Matemática do ensino básico. In GTI (Org.), *O professor e o programa de Matemática do ensino básico* (pp.11-41). Lisboa: APM.

Reys, R. E., & Yang, D. (1998). Relationship between computational perfomance and number sense among sixth – and eighth-grade students in Taiwan. *Journal for Research in Mathematics Education*, *29*(2), 225-237.

Schwandt, T. A. (1994). Constructivist, interpretivist approaches to human inquiry. In N. Denzin & Y. Lincolin (Eds), *Handbook of qualitative research*. (pp. 118-137). Newbury Park: Sage.

Torbeyns, J., De Smedt, B., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (2009). Jump or compensate? Strategy flexibility in the number domain up to 100. *ZDM Mathematics Education, 41,* 581-590. [Acesso eletrónico]. Disponível em www.springerlink.com/content

Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Treffers, A. (2009). Mathe-didactical reflections on young children's understanding and application of subtraction-related principles. *Mathematical Thinking and Learning, 11*, 102-112.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 557-628). Reston, VA: NCTM.

Yang, D. C., & Li, M. N. (2008). An investigation of 3rd grade taiwanese students' performance in number sense. *Educational Studies*, *34*(5), 443-455.

Yang, D. C., & Hsu, C. (2009). Teaching number sense for 6th graders in Taiwan. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 4*(2), 92-108.

Yang, D. C., & Tsai, Y. F. (2010). Promoting sixth graders' number sense and learning attitudes via technology-based environment. *Educational Technology & Society*, *13*(4), 112-125.

Yang, D. C., Hsu, C., & Huang, M. C. (2004). A study of teaching and learning number sense for sixth grade students in Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education, 2*(3), 407-430.

Yang, D. C., Li, M. N., & Lin, C. (2008). A study of the performance of 5th graders in number sense and its relationship to achievement in mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *6*(4), 789-807.

O SENTIDO DO NÚMERO NO 1.º CICLO: UMA LEITURA DE INVESTIGAÇÃO

Maria de Lurdes Serrazina
Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa
lurdess@eselx.ipl.pt

Resumo

Nesta comunicação apresento uma revisão da investigação realizada em Portugal (baseada em dissertações de mestrado e teses de doutoramento), desde o início deste século, incidindo em tópicos relativos ao tema Números e operações, numa perspetiva de sentido do número, com alunos do 1.º ciclo do ensino básico. Comecei por identificar, ler e analisar as dissertações de mestrado e as teses de doutoramento sobre o tema, a que tive acesso, diretamente, ou através de consultas a colegas ou a repositórios institucionais. Identifiquei seis dissertações de mestrado e três teses de doutoramento. Organizei-as em dois grupos: cinco incidem principalmente nos números naturais com o zero e quatro nos números racionais. Foram analisados e confrontados objetivos, aspetos metodológicos e principais conclusões dos diferentes estudos.

Palavras-chave: sentido do número, significado das operações, números racionais, frações, estratégias de cálculo.

Introdução

Esta comunicação tem como objetivo fazer uma revisão da investigação realizada em Portugal (concretizada em dissertações de mestrado e teses de doutoramento), desde o início deste século, incidindo em tópicos relativos ao tema Números e operações, numa perspetiva de sentido do número, com alunos do 1.º ciclo do ensino básico.

A ideia de sentido do número surge na literatura de educação matemática na segunda metade dos anos oitenta. Para Greeno (1991) é uma expressão difícil de definir, mas reconhece-se a sua presença ou ausência em contextos práticos de atividade matemática, e associando-a a importantes capacidades como o cálculo mental flexível, a estimativa de quantidades numéricas e os julgamentos quantitativos.

Em Portugal o projeto *Desenvolvendo o sentido de número: Perspetivas e exigências curriculares* (Brocardo et al., 2008), desenvolvido de 2005 a 2008, caracterizou-se por incluir de modo articulado o desenvolvimento curricular e a investigação. Ao nível do desenvolvimento curricular foram construídas, experimentadas e avaliadas, tarefas isoladas e cadeias de tarefas, concluindo-se pela importância das condições das tarefas como estímulo aos alunos de modo a transformarem as suas noções, procedimentos e representações num nível mais elevado de compreensão. Relativamente à organização da aprendizagem a partir da análise das produções dos alunos, as conclusões do projeto reafirmam a importância de "perceber qual a ligação entre o conceito ou o princípio matemático utilizado, os procedimentos de cálculo e a representação simbólica usada" (p. 503). As práticas profissionais que favorecem o sentido do número e o papel do professor no apoio ao aluno para o seu desenvolvimento foram também objeto de estudo.

Estudos relativos ao desenvolvimento do sentido do número (por exemplo, Markowitz & Sowder, 1994; Yang, 2001, 2003) mostram que o ensino que promove o desenvolvimento do sentido do número é aquele que se foca na compreensão dos conceitos, criando para isso um ambiente de sala de aula onde é encorajada a comunicação, a exploração, a discussão e o raciocínio, nomeadamente promovendo a discussão das várias estratégias na resoluçõ das tarefas.

Anghileri (2001) considera como aspetos centrais e definidores de um currículo, no que se refere ao entendimento dos números e operações: o papel da contagem, a importância do valor de posição, o desenvolvimento de estratégias de cálculo mental e o papel dos algoritmos. Em Portugal aparece, pela primeira vez, no currículo o termo "sentido do número" no Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), definido como:

> a capacidade para decompor números, usar como referência números particulares, tais como 5, 10, 100 ou 1/2, usar relações entre operações aritméticas para resolver problemas, estimar, compreender que os números podem assumir vários significados (designação, quantidade, localização, ordenação e medida) e reconhecer a grandeza relativa e absoluta de números (p. 13),

O desenvolvimento do sentido do número surge associado à compreensão das operações e à sua aplicação em situações de resolução de problemas. Assim, na sala de aula devem ser trabalhadas situações associadas às diferentes operações, uma vez que a investigação mostra que diferentes situações-problema correspondem a diferentes significados das operações (Fuson, 1992, Greer, 1992). O programa atual (ME, 2007) considera as situações de Combinar, Acrescentar na adição, Retirar, Comparar e Completar na subtração, os sentidos aditivo e combinatório para a multiplicação, e para a divisão o de medida, partilha e razão.

A relação cálculo mental e sentido do número é realçada por diferentes autores, parecendo haver uma interdependência entre os dois e o desenvolvimento de um promove o desenvolvimento do outro (Varol & Farran, 2007). Intimamente ligados com o desenvolviment do cálculo mental estão as estratégias e procedimentos de cálculo. Para a adição e subtracção são identificados na literatura holandesa estratégias para os números até 20 — Treffers e Buys (2001) consideram três níveis de cálculo: por contagem, por estruturação e formal — e estratégias com números de dois algarismos, superiores a 20, por exemplo, Beishuizen (1997) considera diferentes tipos de estratégias, organizados em duas categorias: N10 e 1010. Na categoria das estratégias N10 (número+número de dezenas ou número-número de dezenas) à primeira parcela é adicionado ou subtraído um múltiplo de 10. Ainda no N10 identifica como A10 a estratégia que à primeira parcela adiciona ou subtrai um número correspondente a uma parte da segunda parcela, de modo a que seja obtido um múltiplo de 10, que é depois adicionado ou subtraído à outra parte. Na categoria das estratégias 1010, os números são decompostos nas suas ordens e estas são adicionadas ou subtraídas, sendo o resultado obtido através da recomposição do número. Também para a multiplicação e divisão a investigação distingue estratégias para números dígitos e para números multidígitos. As estratégias da multiplicação com números multidígitos estão normalmente associadas a aspetos-chave como o uso, ainda que informal, das suas propriedades, em especial as propriedades associativa e distributiva (Ambrose, Baek &Carpenter, 2003). Para a divisão as estratégias usadas pelos alunos dependem dos contextos, nomeadamente do facto de se tratar de contextos de medida ou de partilha.

Também os números racionais e, em particular a sua representação na forma de fração têm maior visibilidade no atual programa do 1.º ciclo (ME, 2007). Aquela representação permite expressar uma multiplicidade de relações daí surgirem dificuldades na compreensão destes números pelos alunos do ensino básico. Estas prendem-se com os diferentes significados da fração a/b: relação parte-todo de uma unidade contínua, ou de uma unidade discreta, quociente entre dois números inteiros representado pela fracção, operador partitivo multiplicativo, medida e razão (Behr, Harel, Post & Lesh, 1992; Kieren, 1988), dependendo dos contextos em que se inserem e da unidade a que se refere. É na síntese desta diversidade de situações e na teia de relações que os alunos vão estabelecendo, a partir delas, que o sentido do número racional se vai desenvolvendo.

Metodologia

Após consulta a repositórios institucionais e contactos informais com colegas de outras instituições identifiquei três teses de doutoramento e seis dissertações de mestrado, com alunos do 1.º ciclo do ensino básico, e com incidência no tema Números e Operações. Depois de as ler e analisar, organizei-as em dois grupos (ver tabelas 1 e 2), de acordo com o conjunto numérico em que têm maior incidencia[8], estando no primeiro grupo as dos números naturais, e no segundo as dos números racionais. Para cada estudo fiz uma análise global focada no objetivo, metodologia utilizada e principais conclusões. Procurei, por último, traçar os aspetos comuns aos vários trabalhos, bem como aqueles que os distiguem.

Os estudos objeto de análise estão identificados nas Tabelas 1 e 2, que incluem o tipo de trabalho, respetivo autor, título, ano de escolaridade dos alunos envolvidos e ano de conclusão do mesmo, ordenados por este último item.

Tabela 1: Trabalhos realizados no âmbitos dos números naturais com o zero

Tipo de trabalho	Autor	Título	Ano de escolaridade	Data
Dissertação Mestrado	Henriqueta Gonçalves	A multiplicação e divisão em alunos do 1º ciclo do ensino básico	3.º	2003
Dissertação Mestrado	Andreia Gonçalves	Desenvolvimento do sentido do número num contexto de resolução de problemas no 1.º ciclo do ensino básico	1.º	2008
Dissertação Mestrado	Cristina Morais	O cálculo mental na resolução de problemas: um estudo no 1.º ano de escolaridade	1.º	2011
Tese de Doutoramento	Elvira Ferreira	O desenvolvimento do sentido de número no âmbito da resolução de problemas de adição e subtração no 2.º ano de escolaridade	2.º	2012
Tese de Doutoramento	Fátima Mendes	A aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número: um estudo com alunos do 1.º ciclo	3.º	2012

Os estudos desenvolvidos no âmbito dos números naturais envolvem a resolução de problmas e focam-se nas operações aritméticas, os com foco nos números racionais centram-se no desenvolvimento do sentido do número racional[9].

[8] No caso da tese de Fátima Mendes o seu trabalho estende-se também aos números racionais, embora a maior incidência seja nos números naurais com o zero, daí a sua inclusão na Tabela 1.

[9] Neste grupo o trabalho desenvolvido por Ema Mamede, embora não referindo o termo desenvolvimento do sentido do número, discute aspetos ligados à sua compreensão.

Tabela 2: Trabalhos com incidência nos números racionais

Tipo de trabalho	Autor	Título	Ano de escolaridade	Dataº
Dissertação Mestrado	Alice Carvalho	O desenvolvimento do conceito de número racional em alunos do 4º ano de escolaridade	4.º	2005
Tese de Doutoramento	Ema Mamede	The effects of situations on children's understanding of fractions	1.º	2007
Dissertação Mestrado	Mª Fernanda Martins	As frações no desenvolvi-mento do sentido de número racional no 1.º ciclo	4.º	2007
Dissertação Mestrado	Susana Macieira	Diferentes significados de fração e a sua influência na aprendizagem dos racionais	3.º/4.º	2011

O sentido do número

Nesta secção apresento uma análise dos principais resultados dos diferentes estudos, sendo sentido do número aqui entendido como incluindo a compreensão das operações.

Números naturais

Os estudos de Andreia Gonçalves (2008) e de Cristina Morais (2011) foram realizados nas turmas do 1.º ano onde lecionavam, tendo o primeiro como foco as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas numéricos, identificando as dificuldades experimentadas e os contextos favoráveis à resolução desses problemas. O segundo teve como principal objetivo compreender de que modo os alunos de 1.º ano desenvolvem estratégias de cálculo mental, num contexto de resolução de problemas de adição e subtração. Gonçalves (2008) organizou os problemas em seis tarefas resolvidas ao longo de seis aulas, apresentadas à turma, com recurso ao jogo, a dramatizações e/ou à utilização de materiais, registando, de seguida, os alunos a sua resolução numa folha, seguindo-se a fase de discussão dos resultados com toda a turma. Para cada tarefa no próprio dia da sua resolução na aula, a investigadora fez uma entrevista, tipo clínico, a cada aluno-caso. A autora conclui que os alunos mostraram usar estratégias e raciocínios flexíveis de cálculo que não tinham sido ensinados previamente, identificando dificuldades relacionadas com os contextos das tarefas, e relativos à idade dos alunos, constatando que o contexto familiar e os materiais utilizados foram uma vantagem e uma motivação para a resolução. A comunicação oral dos raciocínios contribuiu para a compreensão matemática dos alunos, ajudando-os a organizar o seu próprio pensamento e a refletir sobre as suas respostas. No estudo de Morais (2011) foram resolvidas, ao longo do ano, três cadeias de problemas, contemplando os diferentes significados das operações de adição e subtração. As primeiras duas foram resolvidas a pares, na aula, e a última individualmente, apenas pelos alunos que constituíram os casos. Conclui que as estratégias de cálculo usadas pelos alunos evoluíram de estratégias elementares baseadas em contagem e na utilização de factos numéricos, para estratégias de cálculo mental complexas, aditivas ou subtracivas das categorias 1010 e N10, identificando uma preferência por estratégias aditivas do tipo 1010 na resolução dos problemas de adição. Nos problemas de subtração, as estratégias variaram de acordo com o significado presente em cada um, nos de retirar foram usadas estratégias subtrativas do tipo 1010 e, nos de comparar e completar, de um modo geral, os alunos utilizaram estratégias aditivas do tipo A10. A autora afirma parecer haver influência do ambiente de aprendizagem na utilização de estratégias de cálculo mental mais eficientes, particularmente da estratégia aditiva do tipo 1010, concluindo que alunos do 1.º ano são capazes de desenvolver e utilizar estratégias de cálculo mental, que na literatura são associadas a alunos mais velhos.

O estudo de Elvira Ferreira (2012) também teve como objetivo analisar as estratégias e os procedimentos de cálculo a que os alunos recorrem num contexto de resolução de problemas de adição e subtração de números inteiros positivos e a sua contribuição para o desenvolvimento do sentido do número. Foi desenvolvido numa turma do 2.º ano, tendo subjacente um percurso de aprendizagem e realizou quatro estudos de caso. Os resultados mostram que os alunos utilizam uma grande diversidade de estratégias e procedimentos e estes têm relação com os contextos dos problemas apresentados, sendo que nos problemas de subtração o recurso à estratégia de adição indireta influenciou o uso de procedimentos de cálculo mais eficientes; a diversidade dos problemas propostos (significados, grandeza e tipo de números e sua sequência), bem como as resoluções selecionadas para discussão na aula, no final de cada problema, influenciaram a evolução das estratégias e procedimentos usados pelos alunos; as diferentes componentes do sentido do número, nomeadamente, o desenvolvimento da compreensão do significado dos números e das operações, o reconhecimento da grandeza relativa dos números e o reconhecimento da razoabilidade dos resultados e a sua aplicação nos cálculos apresentados parece terem sido desenvolvidos de modo integrado; a experiência de ensino em sala de aula e o ambiente social e sociomatemático influenciaram o desenvolvimento de estratégias e procedimentos adequados e eficientes na resolução de problemas de adição e subtração, tendo este ambiente contribuído para o aumento da confiança dos alunos relativamente à sua capacidade matemática.

O estudo de Henriqueta Gonçalves (2003) teve por foco a multiplicação e a divisão e procurou compreender como é que as crianças lidam com problemas de multiplicação e divisão, identificando estratégias usadas e recursos utilizados aquando da sua resolução, a natureza, o uso e o desenvolvimento de métodos próprios das crianças e a sua permanência quando lhes são ensinadas estratégias mais sofisticadas. Estudou seis alunos de uma turma do 3º ano a quem colocou, em entrevista individual, um conjunto de problemas. Os resultados apontam para uma fraca compreensão das operações de multiplicação e divisão e do sentido do número. A capacidade de escolha de uma estratégia de resolução eficaz assentou essencialmente em estratégias baseadas em procedimentos algorítmicos, com base em regras e procedimentos pré-estabelecidos. Os alunos reagiram de modo diferente conforme o tipo de problemas, parecendo haver alguns totalmente desconhecidos como os de combinatória, disposição rectangular, divisão com resto e divisão como razão. O estudo revela ainda que os alunos tendem a usar métodos próprios na resolução de problemas antes do ensino formal das operações, neste caso da divisão, que abandonam quando lhe são ensinados procedimentos mais rotineiros, com base em regras e técnicas que muitas vezes não compreendem.

Fátima Mendes (2012) teve também como foco do seu trabalho a multiplicação, mas o seu objetivo foi o de compreender o modo como alunos do 3.º ano evoluem na aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido do número, no âmbito de uma trajetória de aprendizagem. As potencialidades das tarefas e sequências de tarefas propostas foram descritas e analisadas. Mais especificamente, pretendeu caracterizar: os procedimentos usados pelos alunos quando resolvem tarefas de multiplicação, a sua evolução, as dificuldades manifestadas e os aspetos do sentido de número revelados, analisando, ainda, o contributo das tarefas e sequências de tarefas na aprendizagem, no âmbito de uma *design research* na modalidade de experiência de ensino, desenvolvida ao longo de um ano letivo. Os participantes foram os alunos e a professora de uma turma do 3.º ano. As sequências de tarefas propostas foram elaboradas, colaborativamente, pela investigadora e pela professora, e desenvolvidas por esta na aula. Ao contrário do que afirma Gonçalves (2003), este estudo concluí que os alunos utilizam uma grande diversidade de procedimentos; havendo alguns que usam vários procedimentos para realizar um mesmo cálculo, sendo uns mais frequentes que outros, e manifestando preferência por determinados procedimentos. Os resultados mostram que a evolução dos procedimentos parece ser suportada pelas características das tarefas propostas (contextos, números e sua articulação e sequenciação) e pelo ambiente da aula e que esta evolução não é linear, nem se processa do mesmo modo para todos os alunos – alguns persistem em certos procedimentos e outros, perante tarefas com características particulares, voltam a usar procedimentos menos potentes. A evolução dos procedimentos dos alunos evidencia, também, o desenvolvimento do seu sentido do número.

Números racionais

Dos quatro trabalhos com incidência nos números racionais (Tabela 2), três foram desenvolvidos em turmas do 3.º e/ou 4.º ano.

No seu estudo Ema Mamede (2006) não trabalhou com os alunos integrados numa turma. Investigou como situações, que envolvem frações, com diferentes significados (quociente, parte-todo e operador), influenciam a compreensão dos números racionais. Os participantes foram 80 crianças, de 6 e 7 anos, alunos do 1.º ano de escolas do 1º ciclo de Braga. Foi comparado o desempenho das crianças, em situações de quociente, parte-todo e operador, em tarefas lógicas e de representação, observando o seu desempenho em problemas que envolviam a equivalência e a ordem de grandeza de números racionais representados por frações. O estudo conclui que as crianças apresentam diferentes níveis de desempenho em problemas de equivalência e de ordenação de frações, em situações de quociente e de parte-todo, e que a sua capacidade de utilizar linguagem simbólica das frações também difere nas duas situações. Os resultados foram melhores nas situações de frações como operadores em contextos discretos do que nas de parte-todo, tanto nas tarefas de equivalência como nas de ordenação. O desempenho foi melhor em problemas de ordenação do que nos de equivalência de frações, tendo sido sempre melhor nas crianças de sete anos.

Alice Carvalho (2005) realizou um estudo numa turma do 4º ano com o objetivo de perceber o processo de desenvolvimento do conceito de número racional, nomeadamente que estratégias privilegiar em cada um dos construtos: parte-todo, quociente, medida e razão e como é que a conjugação dos vários modos de representação dos números e situações matemáticas (materiais, símbolos falados, modelos figurativos, símbolos escritos e linguagem simbólica) associados a problemas da vida real podem aumentar os níveis de compreensão e a construção das ideias sobre fracionários. A investigadora e a professora da turma trabalharam em conjunto na elaboração das tarefas, analisando e refletindo sobre os resultados obtidos em cada aula, o que as levou ao aprofundamento do tema, e lhes permitiu irem adequando as tarefas ao desenvolvimento da compreensão do número racional pelos alunos. O estudo conclui que o recurso a diferentes significados de fração (quociente, parte-todo e razão) foi importante para a compreensão do conceito de número racional, em especial nos problemas onde a fração aparece com o significado parte-todo. A diversificação da unidade (contínua e discreta) foi facilitador, o trabalho com os decimais a par do das frações ajudou no modo como os alunos operaram com os números usando estratégias pessoais; os diferentes modos de representação de números na ilustração de um problema, como os círculos-fração, o material Cuisenaire, e a sua relação com os símbolos matemáticos, pareceram ser um fator facilitador na construção do conceito de número racional, bem como o facto de os alunos verbalizarem sobre as situações e explicitarem a relação entre os materiais e os símbolos. Foram encontradas dificuldades na representação de números na reta e os círculos-fração foram o modo mais simples de representação.

Os estudos de Fernanda Martins (2007) e de Susana Macieira (2011) focalizaram-se no desenvolvimento do sentido do número racional em alunos do 1.º ciclo do ensino básico, o primeiro numa turma do 4.º ano e o segundo numa de 3.º/4.º anos, tendo, em ambos os casos, a investigação sido realizada na própria turma da investigadora. Uma proposta de tarefas, contemplando situações com diferentes significados de fração (quociente, parte-todo e operador) e com diferentes tipos de unidade (discreta, contínua e composta) foi elaborada a partir dos resultados do teste diagnóstico e resolvida pela turma em causa. Martins procurou identificar: os obstáculos das crianças à apropriação do sentido do número racional, as estratégias pessoais que os alunos privilegiam e como se processa a passagem das estratégias informais para a representação simbólica dos números racionais, na forma de fração e na forma decimal. Macieira pretendeu compreender a importância dos diferentes significados, o papel dos diferentes tipos de unidades e os diferentes modos de representação (desenhos, esquemas, ou símbolos) usados pelos alunos nos diferentes contextos. Martins concluiu que nas tarefas de partilha equitativa os alunos elaboraram, inicialmente, modelos visuais a partir da realidade (modelos circulares, retangulares e lineares) combinados com representações sob a forma de fração directamente relacionadas com o concreto, descrevendo relações presentes nas situações. Este contexto envolveu ativamente os alunos na procura das respostas pretendidas, permitindo o emergir de ideias intuitivas sobre frações, nomeadamente, as frações estão ligadas à divisão e à multiplicação, quanto maior o denominador mais pequena é a fração e a partilha equitativa pode ser representada por frações unitárias ou por outras frações. A progressiva passagem das representações icónicas para a linha numérica e representação simbólica sob a forma de fração e de numeral decimal facilitou a correção de alguns equívocos constituindo uma ferramenta matemática que ajudou alguns alunos a raciocinar sobre as situações. Conclui ainda que, apesar de ser necessário um trabalho mais prolongado com frações, estas passaram a ser mais significativas para os alunos, quando comparadas com as representações sob a forma de numeral decimal. Para Macieira os contextos de partilha equitativa permitiram mobilizar outras formas de representação dos números, nomeadamente a de percentagem e de numeral decimal, bem como a exploração de frações equivalentes e de adição com números representados na forma de fração, tendo os alunos compreendido melhor a lógica de equivalência de frações nestes contextos do que naqueles onde se privilegia a dimensão parte-todo. As unidades compostas a partir de outras unidades conduziram à identificação de malentendidos relacionados com a unidade de referência. Durante a resolução de problemas os alunos recorreram a vários modos de representação: linguagem oral; modelo de área (círculos e rectângulos em cartolina) para representar frações; linguagem escrita e simbólica. A manipulação de materiais revelou-se um poderoso suporte na resolução das tarefas e verificação de conjecturas, permitindo uma abordagem intuitiva às fracções equivalentes e o desenvolvimento de uma ponte entre as representações informais e as simbólicas.

Considerações finais

Os estudos analisados são distintos em várias vertentes, desde logo na metodologia. Gonçalves (2003) e Mamede (2006) propuseram aos alunos, individualmente, a realização de determinadas tarefas, analisando posteriormente o seu desempenho. Os restantes sete estudos têm por base uma proposta de trabalho, embora com formato e duração muito distinto, concretizada no contexto de uma turma de alunos, tendo sido analisados o desempenho dos alunos, individualmente ou como turma, e também as interações e raciocínios explicitados, bem como o desenvolvimento dos aspetos matemáticos envolviods. Dos últimos sete, quatro (Gonçalves, 2008, Macieira, 2011, Martins, 2007 & Morais, 2011) são investigações em que a investigadora é simultaneamente professora, tendo realizado uma investigação sobre a sua prática. Os outros três estudos (Carvalho, 2005, Ferreira, 2012 e Mendes, 2012) basearam-se num trabalho conjunto entre a investigadora e a professora da turma, tendo esta acompanhado todo o processo desde a definição das tarefas a implementar, até à sua implementação em sala de aula e posterior reflexão.

De notar que nos estudos em que foi realizado trabalho na sala de aula, os alunos progrediram no seu conhecimento, constituindo as tarefas realizadas uma mais-valia em termos curriculares. Constata-se ainda que o papel dos materiais e/ou das representações icónicas é crucial na progressão do conhecimento informal para o formal, bem como a importância atribuída aos contextos.

Referências

Ambrose, R., Baek, J. M., & Carpenter, T. P. (2003). Children's invention of multidigit multiplication and division algorithms. In A. J. Baroody & A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills* (pp. 305-336). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Anghlieri, (2001). Contrasting approaches that challenges tradition. Em J. Anghlieri (Ed.), Principles and practices in arithmetic teaching (pp. 4-14). Buckingham: Open University.

Beishuizen, M. (1997). Development of mathematical strategies and procedures up to 100. Em M. Beishuizen et al. (Eds.), *The role of contexts and models in the development of mathematical strategies and procedures* (pp. 127-162). Utrecht: Utrecht University.

Behr, M., Harel, G., Post, T. & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio and proportion. Em D. Grouws (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 296-333). NY: Macmillan.

Brocardo, J., Serrazina, L., Rocha, I., Mendes, F., Menino, H, & Ferreira, E. (2008). Um projecto centrado no desenvolvimento do sentido do número. Em R. Luengo Gonzalez, B. Gómez Alfonso, M. Camacho Machin &L. J. Blanco Nieto (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII,* (pp. 495-504). Badajoz: SEIEM, SPCE e APM.

Carvalho, A. (2005). *O desenvolvimento do conceito de número racional em alunos do 4º ano de escolaridade*. Tese de Mestrado. Lisboa: APM

Ferreira, E. (2012). *O desenvolvimento do sentido de número no âmbito da resolução de problemas de adição e subtração no 2.º ano de escolaridade*. Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa.

Fuson, K. C. (1992). Research on whole number addition and subtraction. In D. C. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 243- 275). New York, NY: Macmillan.

Gonçalves, A. (2008). *Desenvolvimento do sentido do número num contexto de reso-lução de problemas no 1.º ciclo do ensino básico*. Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa.

Gonçalves, H. (2003). *A multiplicação e divisão em alunos do 1º ciclo do ensino básico*. Tese de Mestrado. Lisboa: APM.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D. C. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 276- 294). New York, NY: Macmillan.

Greeno, J. G. (1991). Number sense as a situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education,* 22(3), 170-218.

Kieren, T. E. (1988). Personal knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development. Em L. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 162- 181): Reston, Va: NCTM.

Macieira, S. (2011). *Diferentes significados de fração e a sua influência na aprendizagem dos racionais*. Tese de mestrado, Instituto Politécnico de Lisboa, ESELx

Mamede, E. (2007). *The effects of situations on children's understan-ding of fractions*. Tese de doutoramento. Universidade de Oxford Brookes, UK.

Markovits, Z. & Sowder, J. T. (1994). Developing number sense: An intervention study in grade 7. *Journal for Research in Mathematics education, 25(1),* 4-29.

Martins, F. M. M. (2007). *As fracções no desenvolvimento do sentido de número racional no 1.º ciclo*. Tese de Mestrado.

ME (2007). Programa de Matemática do Ensino Básico. http://www.dgidc.min-edu.pt/ensinobasico/index.php?s=directorio&pid=71

Mendes, M. F. (2012). *A aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desen-volvimento do sentido de número: um estudo com alunos do 1.º ciclo*. Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa.

Morais, C. (2011). *O cálculo mental na resolução de problemas: um estudo no 1.º ano de escolaridade*. Tese de mestrado, Instituto Politécnico de Lisboa, ESELx.

Treffers, A. & Buys, K. (2001). Grade 2 (and 3) - Calculation up to 100. Em M. Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children Learn Mathematics.* Utrecht: Freudenthal Institute.

Varol, F. & Farran, D. (2007). Elementary school students' mental computation proficiencies. *Early Childhood Education Journal, 35(1)*, 89-94.

Yang, D. C. (2001). Developing number sense. *APMC, 6(3),* 20-24.

Yang, D. C. (2003). Teaching annd learning number sense – an intervention study of fifth grade students in Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education, 1(1),* 115-134.

SIMPÓSIO 2

GEOMETRIA E MEDIDA

GEOMETRIA E MEDIDA

Conceição Costa
Escola Superior de Educação de Coimbra
ccosta@esec.pt

Isabel Vale
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo
isabel.vale@ese.ipvc.pt

Este simpósio pretende envolver a audiência num diálogo crítico sobre a pesquisa em geometria e medida, dando uma visão do material de pesquisa no campo do ensino e aprendizagem da Geometria e Medida apresentado por participantes deste simpósio e convidando todos a apreciar a contribuição de Owens & Outhred (2006) no seu artigo sobre a complexidade da aprendizagem da Geometria e Medida onde é destacada a diversidade de estudos sobre a aprendizagem de espaço e geometria.

Owense e Outhred (2006) apontam-nos como é complexa a tarefa de como sintetizar a pesquisa numa visão coerente de ensino e aprendizagem em Geometria e Medida" que investigadores e professores enfrentam. Consideram que em educação em geometria, experiências que influenciam abordagens intuitivas preliminares e imagética visual complexa são importantes. Também a resolução de problemas foi mostrada ser crucial para os estudantes prestarem atenção às características chave das formas e à compreensão das relações entre as formas. Este desenvolvimento foi muitas vezes descrito em temos de dos níveis de Van Hiele, apesar das controvérsias na avaliação de estudantes de acordo com esta teoria, já que aqueles níveis, foram evidenciados serem contínuos em vez de discretos. Estudos que têm explorado o papel dos materiais, do contexto, dos programas de computador e do professor a ampliar o pensamento geométrico, têm encontrado que representações semióticas, representações sociais ou representações visuais individuais da matemática podem ser construídas e usadas pelos estudantes para construir e comunicar conhecimento, uma vez que são componentes essenciais das praticas matemáticas. Contudo muitas outras entidades matemáticas intervêm nessas práticas, tais como conceitos, preposições, procedimentos e argumentos cujo trabalho sobre eles e com eles envolve o conhecimento matemático isto é os processos de ensino e aprendizagem. Owens e Outhred dizem que Heine resumiu muita da pesquisa em espaço e geometria ao dizer que a noção de imagem pessoal de um conceito (Vinner, 1991) deveria ser alargada a um esquema de compreensão do conceito, que contenha a definição do conceito, a imagem do conceito e o uso do conceito. Relativamente aos estudos em medida, Owens e Outhred mencionam que aqueles também se focam no desenvolvimento de conceitos em particular, da importância dos estudantes reconhecerem a estrutura das unidades quando medem os atributos de comprimento, área e volume. Referem ainda que tem havido pouca pesquisa relativa ao desenvolvimento dos estudantes sobre os conceitos de volume. A pesquisa indica que estudantes, futuros professores, têm muitas das mesmas conceções erróneas sobre conceitos de geometria e medida que as dos alunos que eles eventualmente irão ensinar. O desafio para os investigadores é tomar a diversidade de pesquisa e consolidá-la para mostrar as implicações e aplicações para professores de forma que a compreensão sobre geometria e medida dos estudantes seja construída numa base firme.

A ideia básica que subentendem as dez comunicações e/ou os três posters deste simpósio, cujo âmbito vai do pré-escolar ao ensino superior, é que são amostras de pesquisa em educação em Geometria (nove estudos) ou na formação de professores no domínio da Geometria (quatro estudos).

Os estudos, focando a geometria tradicional Euclidiana com relevância para a geometria das transformações, pesquisam: o desenvolvimento de conceitos geométricos (por exemplo o conceito de ângulo); construção de secções planas do cubo num ambiente dinâmico (Geogebra); as características dos conhecimentos geométricos quer de futuros professores quer de alunos; os conhecimentos dos alunos sobre processos visuais fundamentalmente a interpretação e capacidades de visualização; aspetos pedagógicos para abordagem de conceitos (por exemplo o de reta tangente) e para a resolução de tarefas sobretudo nas situações problemáticas onde é fomentado o desenvolvimento do pensamento visual-espacial; o desenvolvimento de competências argumentativas nas soluções de tarefas matemáticas que implicam visualização de objetos no espaço.

Algumas comunicações dão ênfase aos aspetos visuais e de contexto para o desenvolvimento do pensamento geométrico e outras comunicações interpretam a aprendizagem em termos da teoria de Van Hiele.

Os estudos apresentados no âmbito da formação de professores no domínio Geometria, sofrem várias influencias, por exemplo, aqueles estudos cujo foco:

- as aprendizagens profissionais dos professores e reflexão na pratica através do uso do constructo teórico "lesson study" (Murata, 2011), ciclo de melhoramento educativo conduzido por um professor e no qual os professores trabalham de forma colaborativa;

- o conhecimento matemático para o ensino dos professores na perspetiva de Ball, Thames & Phelps (2008);

- o desenvolvimento profissional do professor nos aspetos do conhecimento curricular e didático com a implementação de uma nova ferramenta educativa nas práticas do professor, tarefas com soluções múltiplas, fundamentada em Leikin (2011).

O simpósio foi planeado para ocorrer em três sessões de duas horas cada. Cada sessão envolverá comunicações de 20 minutos cada, e agrupadas conforme a sua ênfase nos seguintes aspetos: "conhecimento geométrico de professores do ensino básico ou geometria das transformações", " visualização", "formação de professores ou preocupações pedagógicas de um curso". Para além das comunicações orais há três posters, que apesar de terem um espaço próprio de apresentação, são convidados a integrar os três momentos de apresentações.

Na primeira sessão, depois de uma introdução aos objetivos do simpósio, três comunicações serão apresentadas relativas ao primeiro aspeto mencionado, seguindo -se um tempo de 30 minutos, onde os participantes serão convidados a discutir pontos chave surgidos das apresentações ou direcionadas pelos moderadores.

S2.001 - LESSON STUDY NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DO 1.º CICLO DO ENSINO BÁSICO
S2.003- FRANCISCO GOMES TEIXEIRA: O CONCEITO DE RETA TANGENTE NO CURSO DE ANALYSE INFINITESIMAL
S2.006 – REFLEXOS DE UMA OFICINA DE FORMAÇÃO NAS PRÁTICAS DE DUAS PROFESSORAS DE MATEMÁTICA
P2.003 - CONSTRUÇÃO DAS SECÇÕES PLANAS DE UM CUBO E SUA REPRESENTAÇÃO EM AMBIENTE 2D DO GEOGEBRA

Na segunda sessão, quatro comunicações relacionadas com o desenvolvimento do raciocínio visual-espacial serão apresentadas, seguindo - se também um tempo de 30 minutos, onde os participantes serão novamente convidados a discutir pontos chave surgidos das apresentações ou direcionadas pelos moderadores.

S2.002 - ESQUEMAS DE PRUEBA DE MAESTROS EN FORMACIÓN EN TAREAS VISUALES
S2.005 – PERCEÇÃO DE RELAÇÕES NO ESPAÇO POR CRIANÇAS DOS 3 AOS 7 ANOS
S2.008 – HABILIDADES GEOMÉTRICAS DESENVOLVIDAS POR ALUNOS DA EDUCAÇÃO INFANTIL: UM ESTUDO EXPLORATÓRIO
S2.010 – A UTILIZAÇÃO DA VISUALIZAÇÃO PARA ENSINAR A APRENDER MATEMÁTICA
P2.002 - TAREFAS EM GEOMETRIA – DA SALA DE AULA PARA A FORMAÇÃO DE PROFESSORES. DESCRIÇÃO DE UM PROJETO

Na terceira sessão após serem apresentadas as restantes comunicações do simpósio, os participantes são convidados a conduzir análises aos estudos expostos. Seguir-se-á o encerramento dos trabalhos.

S2.004 – AS ISOMETRIAS NO 2º CICLO DO ENSINO BÁSICO: UMA PROPOSTA DE ENSINO BASEADA NO MODELO DE VAN HIELE
S2.007 – O CONHECIMENTO GEOMÉTRICO DE FUTUROS PROFESSORES DO ENSINO BÁSICO: UMA BREVE CARACTERIZAÇÃO
S2.009 – TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS: CONHECIMENTOS E DIFICULDADES DE FUTUROS PROFESSORES
P2.001 - CONHECIMENTO DOS ALUNOS SOBRE GEOMETRIA NO INÍCIO DO 3º CICLO: IDENTIFICAÇÃO E DEFINIÇÃO DE TRIÂNGULOS E DE PARALELOGRAMOS

Referências

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59(5),* 389-407,

Leikein, R. (2011). Multiple-solutions task: From a teacher education course to teacher partice. *ZDM,* Volume 43, Numbers 6-7 (2011), 993-1006.

Murata, A. (2011). Introduction: Conceptual overview of lesson study. In L. Hart et al. (Eds.), *Lesson study research and practice in mathematics education* (pp. 1-12). New York, NY: Springer.

Owens, K. & Outhred, L. (2006). The complexity of learning Geometry and Measurement. In A. Gutierrez, P. Boero (eds*). Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, 83-115. Rotterdam: Sense Publishers.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.). Advanced mathematical thinking (pp. 65-85).Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

LESSON STUDY NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DO 1.º CICLO DO ENSINO BÁSICO

Mónica Baptista
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
mbaptista@ie.ul.pt

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ul.pt

Estela Costa
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
ecosta@ie.ul.pt

Isabel Velez
Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
velez@campus.ul.pt

Margarida Belchior
Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
belchior.margarida@gmail.com

Resumo

Esta comunicação tem por base uma experiência de lesson study em Matemática, no 1.º ciclo, num agrupamento de escolas de tipologia híbrida do Projeto Mais Sucesso Escolar. O lesson study, que contempla a preparação e observação da aula e a reflexão pós-aula, baseia-se no trabalho colaborativo entre professores, favorecendo a reflexão sobre os processos de aprendizagem dos alunos e as suas dificuldades. Nesta comunicação, apresentamos uma experiência realizada no 4.º ano que incidiu no conceito de ângulo, tendo como objetivo identificar as aprendizagens profissionais realizadas pelos professores envolvidos. A metodologia de investigação é qualitativa e interpretativa, sendo a recolha de dados feita por registo de observação em notas de campo, gravação vídeo e reflexões escritas das professoras participantes. O balanço global da experiência é francamente positivo pelas aprendizagens profissionais realizadas relativamente ao tópico lecionado, às tarefas a selecionar e à condução da aula, bem como pelo estímulo dado a uma atitude reflexiva na prática docente.

Palavras-Chave. Lesson study, Colaboração, Reflexão, Formação de professores.

Introdução

Com origem no Japão, no início do século XX, o *lesson study* (da palavra japonesa *jugyokenkyuu*, segundo Stigler & Hiebert, 1999), constitui um processo de formação de professores que tem tido repercussões em numerosos países (Murata, 2011) e que se encontra documentado em diferentes estudos que põem em evidência a sua natureza reflexiva e colaborativa (e.g., Fernandez, Cannon & Chokshi, 2003; Perry & Lewis, 2009). A experiência de *lesson study* que aqui apresentamos foi promovida na área disciplinar da Matemática pela equipa do Instituto de Educação do Projeto Mais Sucesso Escolar – Escolas de Tipologia Híbrida, com professores do 1.º ciclo, e incidiu no conceito de ângulo. Com esta comunicação pretendemos contribuir para o conhecimento das possibilidades do *lesson study* no nosso país, sendo o nosso objetivo analisar as aprendizagens profissionais dos professores envolvidos neste processo relativamente aos processos de raciocínio e dificuldades dos alunos, à seleção de tarefas a propor, e à colaboração profissional.

O lesson study na formação de professores

O *lesson study* é um processo formativo que permite gerar momentos de reflexão sobre os processos de aprendizagem dos alunos e as suas dificuldades (Murata, 2011). Não obstante admitir numerosas variantes e adaptações, inicia-se geralmente com a definição de uma questão de interesse comum por um grupo de professores, estritamente relacionada com as aprendizagens dos alunos. A partir dessa questão, os professores planificam uma aula, preveem dificuldades, antecipam questões passíveis de surgirem durante a aula, formulam estratégias de resposta e elaboram guiões de observação da aula que é lecionada por um dos professores, enquanto os restantes assumem o papel de observadores, tirando notas de campo. Uma vez concluída, a aula é objeto de análise, promovendo-se a discussão e a partilha entre professor e observadores, num processo de aprendizagem profissional que pode conduzir à reformulação do plano da aula e à sua posterior lecionação por outro professor a outros alunos (Murata, 2011). Deste modo, o *lesson study* promove práticas de trabalho colaborativo, numa interação interpares potenciadora da reflexão sobre a prática, permitindo que "os professores aprendam uns com os outros, partilhando e desenvolvendo em conjunto as suas competências" (Hargreaves, 1998, p. 209).

Este processo de formação de professores tem vindo a ser usado em vários países. Por exemplo, reportando-se a uma experiência ocorrida na Irlanda, Corcoran e O'Reilly (2011) apresentam resultados do *lesson study* no ensino-aprendizagem da Matemática, salientando a importância da colaboração entre investigadores e professores de Matemática, com diferentes ideias e perspetivas, para o planeamento da aula. Num estudo sobre formação contínua de professores através da prática do *lesson study,* desenvolvido na Indonésia, Saito, Harun, Kubokic e Tachibanad (2006) evidenciam três tipos de mudanças nas aulas: (i) os planos de aula têm em consideração os resultados da investigação em educação, como consequência da ligação estreita entre professores e investigadores; (ii) as aulas têm um cariz exploratório, valorizando-se a discussão em grupo e em turma; e (iii) as reações dos alunos durante a aula são positivas.

Metodologia de investigação

A metodologia de investigação seguida neste trabalho é qualitativa e interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994), tendo por base observação participante (Jorgensen, 1989). Trata-se de uma experiência inovadora realizada no Agrupamento de Escolas da Lourinhã. Estiveram envolvidas cinco professoras do 1.º ciclo, três que lecionam o 4.º ano e duas do apoio educativo, pertencentes a três escolas do agrupamento. A equipa do Instituto de Educação, que conduziu a experiência, propôs o desafio da realização do *lesson study* às professoras e acompanhou de perto a sua realização. Assumimos o papel de interlocutores, discutindo e negociando com os participantes os passos a dar e o calendário a seguir e não o de responsáveis, determinando o que as professoras deveriam fazer em cada momento. Deste modo, procurámos sobretudo, proporcionar oportunidades de reflexão aos professores envolvidos sobre as aprendizagens dos alunos e sobre as suas próprias práticas.

A recolha de dados foi feita por três processos: (i) notas de campo, com registos da observação participante realizada nas reuniões na escola e na aula observada; (ii) gravação vídeo das sessões de planeamento (VP), da aula observada (VO), da reflexão pós-aula (VR) e da apresentação desta experiência num seminário nacional das escolas de tipologia híbrida (VS); e (iii) reflexão escrita coletiva realizada pelas professoras participantes (R). A análise de dados procura identificar elementos particularmente significativos do ponto de vista da aprendizagem profissional dos professores, bem como outros possíveis indicadores de desenvolvimento profissional, tanto nos momentos coletivos de trabalho, como nas suas reflexões.

A experiência

O desafio de realização de um *lesson study* foi lançado às escolas de tipologia híbrida num seminário nacional que se realizou em 3 de novembro de 2011. A coordenadora do projeto no agrupamento de escolas, que também é professora do apoio educativo, levou a sugestão a discussão numa reunião com os professores do 1.º ciclo, tendo sido bem acolhida pelas professoras do 4.º ano. O segundo passo deste *lesson study* foi a elaboração de uma proposta de calendário pela equipa do Instituto de Educação, contemplando a preparação e observação da aula e a reflexão pós-aula, que foi discutido e aperfeiçoado numa reunião realizada com a coordenadora do projeto, em 17 de novembro.

A fase de preparação envolveu quatro sessões, realizadas entre dezembro de 2011 e fevereiro de 2012, cada uma com uma duração aproximada de uma hora e trinta minutos, que decorreram às quartas-feiras. A equipa do Instituto de Educação esteve presente em todas as sessões. A primeira sessão foi antecedida por uma reunião onde as professoras decidiram o tópico a abordar – o conceito de ângulo. As professoras indicaram duas razões para esta escolha – a data prevista para a aula a observar, seguindo a programação das atividades letivas, coincidia com a abordagem deste conceito e tratava-se de um tópico que ira ser abordado pela primeira vez por estes alunos.

A primeira sessão decorreu em 7 de dezembro de 2011. As professoras começaram por fazer o reconhecimento geral do tópico no programa e nos manuais escolares. Em seguida, resolveram duas tarefas selecionadas pela equipa do Instituto de Educação, tendo procurado identificar, ao longo da sua resolução, as possíveis dificuldades dos alunos, bem como sugerir alterações.

A segunda sessão teve lugar em 4 de janeiro de 2012. Começou-se por uma discussão sobre uma comunicação num encontro científico (Morais, Cascais & Ponte, 2011), procurando-se destacar os momentos da aula referidos pelos autores. Posteriormente, a equipa do Instituto de Educação interveio, colocando questões e fazendo propostas. Decidiu-se também a tarefa a realizar pelos alunos (Figura 1) e concebeu-se a sequência de aprendizagem em que esta se integraria. Na conceção da sequência de aprendizagem foram tidos em consideração diversos aspetos relativos ao conceito de ângulo, nomeadamente, a relação deste com figuras geométricas e com os conceitos de paralelismo e de perpendicularidade.

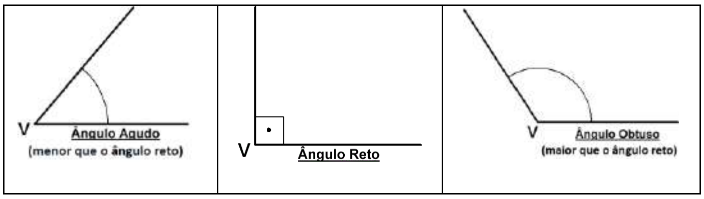
Na terceira sessão, que teve lugar no dia 11 de janeiro, definiu-se, em conjunto, os segmentos previstos para a aula observada e a sua duração aproximada. O ponto que ocupou mais tempo foi a elaboração de uma tarefa de diagnóstico, a realizar nas aulas das turmas das professoras envolvidas no *lesson study* (Figura 2). Com esta tarefa, procurou-se conhecer o que os alunos já sabiam sobre ângulos e conceitos de Geometria que tinham trabalhado no ano anterior e no início do presente ano letivo, nomeadamente o conceito de polígono e de figura geométrica. Durante a realização da tarefa, as professoras apresentaram aos alunos os vários polígonos e solicitaram-lhes que os agrupassem de acordo com determinados critérios, para chegarem ao conceito de quadrilátero. Depois, em grupo, os alunos construíram quatro quadriláteros diferentes no geoplano e desenharam-nos numa folha A3 ponteada. Os quadriláteros encontrados foram apresentados aos restantes grupos, tendo-se discutido outras possibilidades.

A quarta sessão decorreu em 1 de fevereiro, tendo-se iniciado com a reflexão sobre os resultados da aplicação da tarefa de diagnóstico, verificando-se que a maioria dos alunos não sentiu dificuldades na sua resolução. Foi então que se definiu a turma e a professora que lecionaria a aula observada. O *lesson study* foi programado para ser realizado numa turma do 4.º ano, constituída por 12 alunos. A professora, Carla, tem cerca de 35 anos e trabalha com a turma desde o 1.º ano. Durante a sessão, discutiu-se novamente a tarefa construída para a aula observada. As professoras sugeriram a introdução de quadrículas no papel a fornecer aos alunos, para facilitar a construção dos quadriláteros, pressupondo que, para eles, se tornaria mais fácil usar papel quadriculado, em que o ângulo reto está claramente definido e poderia servir de referência, do que papel em branco. Decidiu-se, ainda, que o trabalho em sala de aula seria realizado em pares e voltou a discutir-se os segmentos que a constituem. Num momento posterior, discutiu-se o modo de apresentação da tarefa, as possíveis dificuldades dos alunos, as questões a sublinhar na síntese final e os processos de observação. Em relação a este último aspeto, a equipa do Instituto de Educação propôs que, durante a introdução da tarefa e discussão e síntese final, os observadores se mantivessem no fundo da sala de aula, prestando atenção ao discurso geral e que, durante o trabalho de pares, cada um ficasse responsável pela observação de um par de alunos.

A aula observada decorreu a 8 de fevereiro. Os alunos entraram na sala e sentaram-se em pares. Em seguida, Carla introduziu a tarefa, recordando o assunto abordado na aula anterior. Um aluno leu o enunciado em voz alta e a professora destacou a frase "descobre

Tarefa

1- Tendo em conta que:



1.1- Descobre se é possível construir um quadrilátero com as características definidas em cada situação, e regista as soluções encontradas.

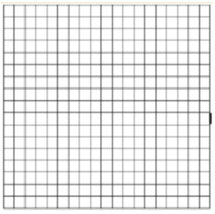
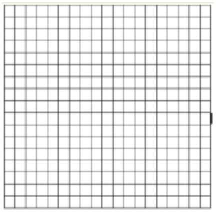
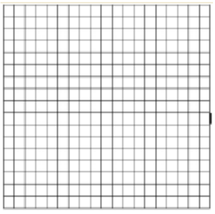
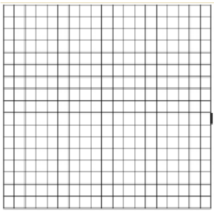
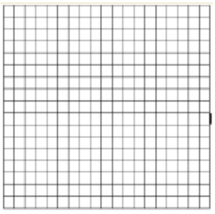
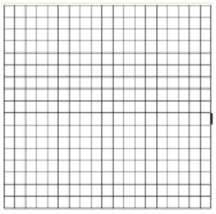
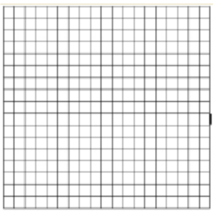
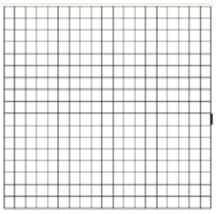
a. Sem ângulos retos 	b. Com 1 ângulo reto 
c. Com 2 ângulos retos 	d. Com 3 ângulos retos 
e. Com 3 ângulos obtusos 	f. Com 4 ângulos obtusos 
g. Com 3 ângulos agudos 	h. Com 4 ângulos agudos 

Figura 1 – Tarefa para aula do *lesson study* (4.º ano)

Tarefa Diagnóstico

Observa com atenção os seguintes polígonos.

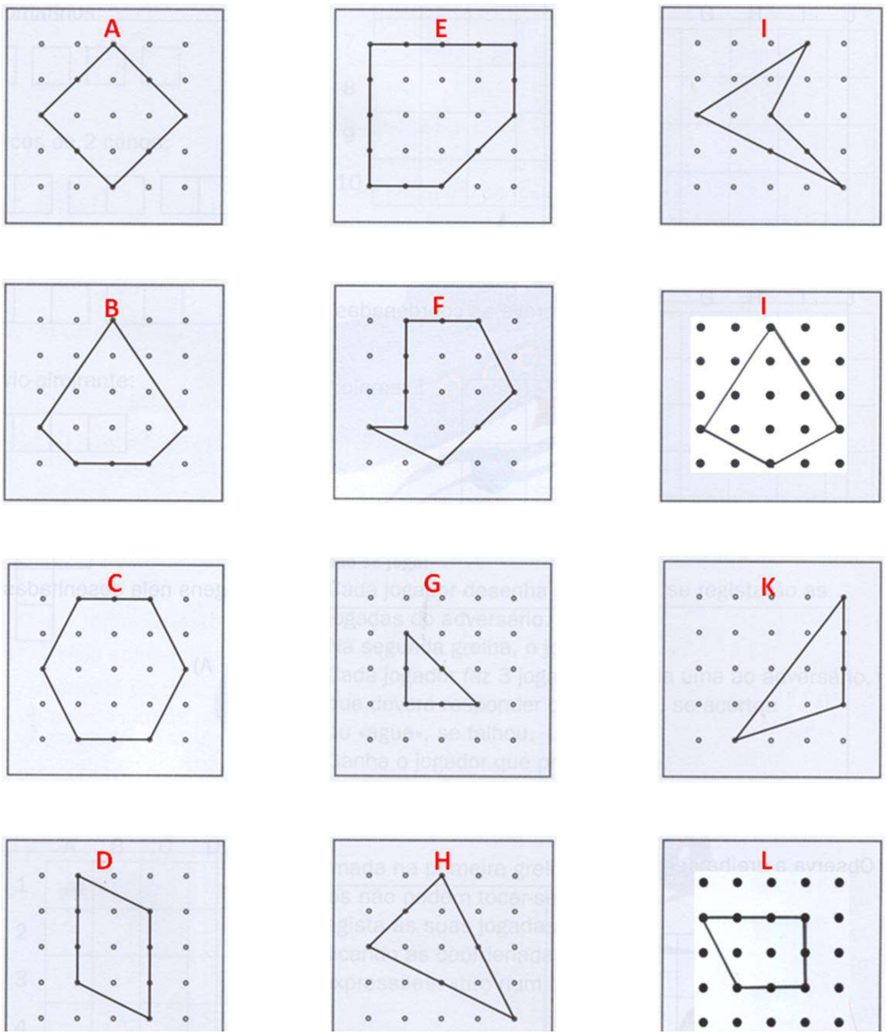


Figura 2 – Tarefa diagnóstico

se é possível construir um quadrilátero”, chamando a atenção para a possibilidade de poderem existir situações impossíveis. Foi dado aos alunos um “medidor de ângulos” ajustável, não graduado, que servia para identificar ângulos congruentes. Os alunos mostraram-se interessados e começaram a trabalhar, enquanto a professora circulava pelas mesas e os observadores se deslocaram para junto do par a observar. Passados 40 minutos, a professora deu início à discussão coletiva, que se fez questão a questão, tendo os vários pares tido oportunidade de mostrar os quadriláteros que construíram. À medida que a discussão decorria, Carla foi preenchendo uma tabela síntese no quadro (Tabela 1).

	Quadriláteros								
	Retos					Obtusos		Agudos	
n.º de ângulos	0	1	2	3	4	3	4	3	4
Possível	x	x	x	x	x	x		x	
Impossível							x		x

Tabela 1 – Tabela síntese

Para terminar a aula Carla, remetendo para a tabela construída, questionou os alunos sobre "qual é o número máximo de ângulos retos que um quadrilátero pode ter" e sobre "qual é o número máximo ângulos obtusos que um quadrilátero pode ter", tendo os alunos respondido, em coro, quatro e três, respetivamente. Perante as respostas dos alunos, Carla terminou a aula felicitando-os pelo trabalho realizado.

A reflexão sobre a aula observada teve lugar, também, no dia 8 de fevereiro, no final da tarde. A discussão foi orientada pela equipa do Instituto de Educação. Começou-se por definir que esta decorreria de acordo com a sequência das questões da tarefa. Em termos globais, as professoras consideraram que os alunos evidenciaram maiores dificuldades na construção de um quadrilátero com três ângulos retos ou três ângulos obtusos. Além disso, revelaram dificuldades em compreender por que não era possível construir o quadrilátero da alínea h (com quatro ângulos agudos). Esta situação foi amplamente discutida, tendo Gorete salientado que os alunos que observou "nem sequer se tinham consciencializado que poderia ser impossível" (VR).

Perante a questão sobre o que mudariam na tarefa, as professoras indicaram que não fariam alterações, exceto no instrumento para medir ângulos. Por exemplo, Purificação salientou que fez "uma coisa diferente da Carla". Não utilizou o medidor de ângulos, mas uma folha dobrada em quatro partes porque, na sua perspetiva, os alunos medem e "imediatamente têm consciência se é reto, se é agudo ou se é obtuso" (VR).

A esta primeira aplicação da tarefa sucedeu-se uma outra, realizada por Catarina no mesmo dia, que decidiu usar um medidor de ângulos fixo (uma folha de papel dobrado).

Finalmente, para divulgarem e partilharem esta experiência com as outras escolas que pertencem ao projeto, as professoras apresentaram uma comunicação num seminário nacional das escolas de tipologia híbrida. A apresentação pública desta experiência foi bastante discutida, tendo surgido questões que permitiram aprofundar o conhecimento das várias fases deste processo de formação e as aprendizagens que as professoras envolvidas realizaram.

Aprendizagens dos professores

Agrupamos as aprendizagens profissionais dos professores no decurso desta experiência, em três domínios: processos de raciocínio e dificuldades dos alunos, seleção das tarefas e colaboração profissional.

Processos de raciocínio e dificuldades dos alunos

A participação no *lesson study* levou as professoras a estarem mais atentas aos processos de raciocínio dos alunos. Isso pode ser observado ao longo de todo o trabalho e também na reflexão escrita coletiva que elaboraram, onde referem que o *lesson study* lhes permitiu "acompanhar, com mais pormenor, a evolução do pensamento e as diferentes estratégias de resolução apresentadas pelos grupos de alunos ao longo da realização da tarefa" (R). A apresentação que as professoras fizeram no seminário transmite a mesma perspetiva. Por exemplo, Gorete valorizou o facto do *lesson study* lhes ter possibilitado perceberem a importância de "antecipar possíveis dificuldades e modos de atuação [dos alunos]". (VS)

As reflexões que as professoras fizeram dão-nos ainda um testemunho elucidativo do modo como os alunos chegaram às respostas:

> Outra das situações verificadas foi a necessidade dos alunos partirem (sempre) da confirmação do ângulo reto para posteriormente construírem o quadrilátero pedido. Ou seja, a maioria dos alunos necessitou de visualizar o «ângulo reto» que estava no início da folha da tarefa (…) para depois poder, por tentativa erro, construir o quadrilátero (…) Outro grupo observado, para além do recurso à visualização/confirmação inicial daquilo que representava o ângulo reto (utilizando o medidor de ângulo) tentavam construir o quadrilátero pedido «desenhando-o» com o dedo no tampo da mesa ou no «ar». Só posteriormente o faziam por escrito. (R)

De salientar a surpresa evidenciada pelas professoras relativamente à forma como a turma reagiu às dificuldades sentidas, ressaltando "o modo como os alunos encararam o desafio revelando persistência e atitude de perseverança, mesmo quando alguns quadriláteros eram efetivamente impossíveis de construir" (R). Na reflexão escrita, as cinco professoras destacaram, ainda, que as maiores dificuldades ocorreram nas situações de "três e quatro ângulos obtusos e agudos". Este facto foi reiterado por Carla durante a apresentação no seminário. De acordo com a professora, tal como tinha sido previsto nas sessões de planeamento, a "parte dos três ângulos obtusos e três ângulos agudos foi um pouquinho mais complicada", tendo existido "dois grupos que não conseguiram", mas "os mais resistentes conseguiram e conseguiram perceber". (VS)

Seleção de tarefas

Na sua reflexão, as professoras salientam o contributo do *lesson study* para a seleção de tarefas que constituam um desafio para os alunos, considerando que "a forma como todos os alunos, mesmo aqueles com mais dificuldades (…) se envolveram na procura de respostas aos desafios colocados" acaba por ser uma consequência do "resultado da «aposta» das docentes no desenvolvimento de atividades de cunho investigativo e exploratório" (R). Esta ideia também foi salientada pelas professoras durante a apresentação no seminário. Gorete referiu que o *lesson study* as despertou para a necessidade de realizarem mais tarefas "de cunho investigativo e exploratório", de modo "a implicar mais os alunos no processo de aprendizagem".

Colaboração profissional

As cinco professoras definem a atividade como "benéfica para o desenvolvimento profissional" (R). De acordo com as suas palavras, a realização do *lesson study* permitiu-lhes, através "da investigação–ação–reflexão encontrar novas alternativas para aperfeiçoar a antecipação de possíveis dificuldades dos alunos no processo de ensino e aprendizagem, apontando possíveis soluções" (R). Ademais, reconheceram que a reflexão e a colaboração entre os vários participantes no *lesson study* se revelaram contributos importantes para o seu desenvolvimento profissional:

> Na fase de preparação da aula, os aspetos que destacamos como mais significativos do ponto de vista formativo foram o trabalho colaborativo entre professores, a partilha e troca de saberes e de diferentes estratégias para facilitar a compreensão da tarefa. A pesquisa efetuada e a leitura de bibliografia para aprofundamento do tema a trabalhar foi essencial para uma melhor planificação e sequenciação das várias fases que antecederam a tarefa final e a sua aplicação.
>
> A reflexão em conjunto para prever possíveis e eventuais dúvidas e/ou reações dos alunos, a discussão das várias etapas de resolução da tarefa permitiram um enriquecimento mútuo quer ao nível do desenvolvimento de boas práticas como ao nível pessoal. (R)

Durante a apresentação no seminário, Gorete mencionou que o *lesson study* é "uma experiência a voltar a repetir", pois permitiu-lhes trabalharem colaborativamente e de um modo sistemático, conduzindo a "um acréscimo maior e frutos [em termos de aprendizagens profissionais]".

Em síntese, as professoras atribuem a esta experiência potencialidades de uma prática suscetível de envolver os professores em processos de reflexão e em trabalho colaborativo.

Conclusão

Este trabalho permitiu-nos perceber que o *lesson study* possibilita que os professores estejam mais atentos aos processos de raciocínio dos alunos e às suas dificuldades, para além de evidenciar a importância da seleção de tarefas a propor na sala de aula e as potencialidades que advêm de práticas de colaboração profissional. Este processo de formação encorajou as professoras envolvidas a arriscarem situações novas na sua sala de aula. A realização desta experiência evidencia que se trata de um processo de formação de professores que potencia o aperfeiçoamento das suas práticas e da sua capacidade reflexiva. O modo como correu esta experiência e as reflexões realizadas pelos professores permitem-nos afirmar que o *lesson study*, envolvendo a preparação aprofundada de uma aula, a sua observação e a reflexão posterior, constitui um significativo processo de desenvolvimento profissional. Daqui decorre a necessidade de os professores envolvidos adotarem a "lente de investigador", que lhes permite aprender a colocar questões, saber preparar lições que respondem às questões colocadas e procurar evidências na lição que as clarifiquem (Fernandez, Cannon & Chokshi, 2003, p. 182).

Uma outra experiência realizada em paralelo, com professores portugueses do 3.º ciclo (Baptista, Costa, Velez, Belchior & Ponte, 2012), conduziu a resultados muito semelhantes. Ambos os casos evidenciam as potencialidades de uma prática que envolve os professores em processos de reflexão e em trabalho colaborativo e corroboram as conclusões de outros estudos que valorizam a observação de aulas de outros professores como ponto de partida para a reflexão sobre a prática profissional (Saraiva & Ponte, 2003).

Este caso sugere que o *lesson study* pode ser desenvolvido nas nossas escolas e que o considerável investimento, tanto por parte dos professores participantes como por parte da equipa que os apoia, é um aspeto fundamental para que esta experiência tenha sucesso. Em última instância, talvez o mais importante, do ponto de vista dos professores, consista em desenvolver uma disposição para a sua prática tendo por base uma perspetiva do ensino enquanto espaço de aprendizagem e de si mesmos enquanto atores ativos responsáveis pelo seu processo de aprendizagem contínuo.

Referências

Baptista, M., Costa, E., Velez, I., Belchior, M., & Ponte, J. P. (2012). Lesson study: Um contributo para a formação de professores e promoção do sucesso escolar. *In Atas AFIRSE 2012*. Lisboa: IE-UL.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Corcoran, D., & O'Reilly, M. (2011). The application of lesson study across mathematics and mathematics education departments in an Irish third-level institution. In C. Smith (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics 31*(1), Reino Unido. Retirado de http://www.bsrlm.org.uk/IPs/ip31-1/BSRLM-IP-31-1-10.pdf, 2 abril de 2012.

Fernandez, C., Connon, J., & Chokshi, S. (2003). A US-Japan lesson study collaboration reveals critical lenses for examining practice. *Teaching and Teacher Education, 19*, 171-185.

Jorgensen, D. L. (1989). *Participant observation: A methodology for human studies*. Newbury Park, CA: Sage.

Meyer, R., & Wilkerson, T. (2011). Lesson study: The impact on teachers' knowledge for teaching mathematics. In L. Hart et al. (Eds.), *Lesson study research and practice in mathematics education* (pp. 15-26). New York, NY: Springer.

Morais, A., Cascais, C., & Ponte, J. P. (2011). O trabalho com sequências numa turma do 1.º ano de escolaridade. In *Atas do XXII SIEM*. Lisboa: APM.

Murata, A. (2011). Introduction: Conceptual overview of lesson study. In L. Hart et al. (Eds.), *Lesson study research and practice in mathematics education* (pp. 1-12). New York, NY: Springer.

Perry, R., & Lewis, C. (2009). What is successful adaptation of lesson study in the US? *Journal Educational Change, 10*, 365-391.

Saito, E., Harun, I., Kubokic, I., & Tachibanad, H. (2006). Indonesian lesson study in practice: Case study of Indonesian mathematics and science teacher education project. *Journal of In-service Education, 32*(2), 171–184.

Saraiva, M., & Ponte, J. P. (2003). O trabalho colaborativo e o desenvolvimento profissional do professor de Matemática. *Quadrante, 12*(2), 25-52.

Stigler, J. W., & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom*. New York, NY: Free Press.

ESQUEMAS DE PRUEBA DE MAESTROS EN FORMACIÓN EN TAREAS VISUALES

Margherita Gonzato
Universidad de Granada
mgonzato@ugr.es

Juan D. Godino
Universidad de Granada
jgodino@ugr.es

Teresa Neto
Universidad de Aveiro
teresaneto@ua.pt

Resumen

El desarrollo del razonamiento espacial en los niños de primaria requiere que los maestros sean capaces de discriminar distintos tipos de explicaciones y argumentaciones en las soluciones de tareas matemáticas, y en particular aquellas que implican visualización de objetos en el espacio. En este trabajo describimos los tipos de justificaciones dadas por una muestra de 241 maestros en formación a una tarea, propia de los primeros niveles de primaria. La tarea pone en juego la coordinación e integración de las vistas ortogonales de un objeto tridimensional y su justificación requiere la explicitación verbal y/o gráfica del proceso visual utilizado para hallar la solución. Los resultados obtenidos pueden ser usados para el diseño de acciones formativas que promuevan el desarrollo de competencias argumentativas en los futuros profesores de educación primaria en tareas visuales.

Palabras clave: esquemas de prueba, visualización espacial, maestros en formación.

Problema de investigación y antecedentes

Actualmente diferentes situaciones de la vida cuotidiana y contextos de trabajo requieren habilidades relacionadas con la visualización espacial para trasmitir, codificar o manipular información gráfica. Esto justifica el interés creciente de la visualización como campo de investigación en educación matemática (Battista, 2007; Bishop, 1980; Gutiérrez, 1996; Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen, 1996; Rivera, 2011).

Sin embargo, en la enseñanza de la geometría espacial, la visualización no recibe mucha atención, de manera particular, en los libros de textos de educación primaria se presentan sólo aspectos limitados y parciales del tema, frecuentemente relacionados con actividades recreativas situadas al final de la lección correspondiente.

Para una posible incorporación real en la enseñanza de aspectos relacionados con la visualización espacial, en el contexto de la geometría espacial, es primero necesario introducir y resaltar el estudio del tema en la formación de maestros. Suponemos que un profesor de escuela primaria, además de tener buena visualización espacial, deberá tener el conocimiento para desarrollarla en sus alumnos, lo que incluye la capacidad de justificar con palabras, dibujos o gestos, las posibles soluciones de las tareas propuestas.

Diferentes estudios destacan las numerosas dificultades conceptuales y técnicas relacionadas a la representación de objetos tridimensionales en el plano (Colmez y Parzysz, 1993; Parzysz, 1988), en particular manifestadas por profesores en activo (Malara, 1998).

El objetivo de este trabajo es identificar los tipos de justificaciones que los maestros en formación proponen a las soluciones dadas a una tarea visual de coordinación e integración de vistas de objetos tridimensionales. Dicha tarea tiene una fuerte componente empírica, lo que puede suponer un mayor desafío a la hora de argumentar la solución propuesta. La respuesta, "es así porque lo veo" puede a veces parecer la única justificación posible sin tener en cuenta "lo que se sabe", esto es, los conocimientos geométrico-espaciales puestos en juego (Parsysz, 1988). Evidentemente este tipo de respuesta no se considera adecuado en el contexto de la enseñanza donde no todos los alumnos tienen porqué "ver" la solución propuesta. Suponemos que una justificación pertinente de la solución pondría de manifiesto la dialéctica entre lo visual y lo analítico presente en la tarea (Godino, Cajaraville, Fernández y Gonzato, 2012), o sea, articularía los conceptos y procesos visuales necesarios para hallar la solución, de forma deductiva.

Marco teórico y metodología

Observando la gran diversidad de términos y significados asociados a la acción de demostrar (en matemáticas), Harel y Sowder (1998, 2007) proponen la noción general de "esquema de prueba", definido como el proceso empleado por una persona para suprimir dudas (a sí misma o a otra persona) sobre la verdad de una conjetura. Así concebidos, los "esquemas de pruebas" están presentes a lo largo de todo el currículo, frecuentemente asociados a términos como: explicar, justificar, demostrar,…

Consideramos que el uso consciente de los diferentes tipos de esquemas de pruebas por parte del maestro, así como la capacidad de articularlos de forma progresiva, es de gran importancia desde los primeros niveles educativos.

Además de poder *explicar y argumentar* las soluciones a sus alumnos de forma discursiva, con el objetivo de *convencerles* de su validez (y pretender lo mismo de ellos), consideramos necesario que los maestros puedan formular una *prueba* de referencia (esquema de prueba institucional) que *justifique* la validez de la proposición y guíe su forma de argumentar en los diferentes niveles educativos.

Parzysz (2006) distingue dos principales paradigmas presentes en la enseñanza de la geometría en la escuela obligatoria: el primero (G1) se refiere a un tipo de geometría gráfico-espacial, que trabaja con objetos físicos (representaciones materiales de entidades teóricas: dibujos, maquetas,…) y que se apoya en *validaciones perceptivo-deductivas* para justificar sus afirmaciones; el segundo (G2) es un tipo de geometría proto-axiomática que involucra objetos teóricos y utiliza un razonamiento *hipotético deductivo* (basados en los axiomas de geometría euclídea y propiedades previamente aceptadas) aunque haciendo referencia al espacio "físico". El autor subraya la importancia que tiene la articulación de los dos paradigmas en la formación de maestros. De hecho, aunque las actividades propuestas a los alumnos de escuela primaria se refieren a G1, su planificación y control por parte del maestro debe tener en cuenta G2. En términos de los tipos de conocimientos del profesor de matemáticas (Hill, Ball, Schilling, 2008) podemos relacionar G1 al conocimiento común del contenido, y a G2 al conocimiento especializado del contenido y en el horizonte matemático.

Consideramos relevante estudiar con más profundidad los esquemas de pruebas subjetivos, manifestados por una muestra de futuros maestros al momento de justificar su solución a la siguiente tarea elemental (Figura 1, ítem a) de "coordinación e integración de las vistas" de objetos tridimensionales (tomada y adaptada de Ferrero, Gaztelu, Martín y Martínez, 1999, p. 173).

Dibuja el objeto que tiene estas vistas.

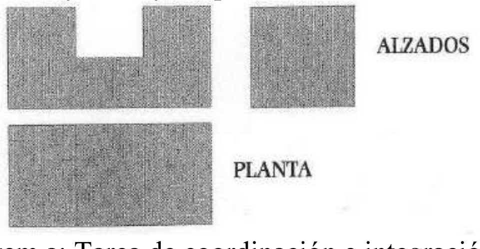


Figura 1. Ítem a: Tarea de coordinación e integración de vistas

Observamos que en la solución al ítem a) el alumno tiene que dar una representación del objeto para que sea fácilmente reconocible, integrando de forma constructiva el polo de “lo que sabe”, o sea el significado de las vistas (planta y alzados), con el polo de “lo que ve”, o sea la representación plana del objeto (Parzysz, 1988).
Los términos “vistas”, “alzados” y “planta” presentes en el enunciado se refieren a las proyecciones ortogonales del objeto sobre determinados planos. Para justificar la respuesta a la tarea (justificación pedida como ítem b) es necesario interpretar correctamente dichos términos, o bien refiriéndose a las hipotéticas vistas que tendría un observador colocado en determinadas posiciones con respecto al objeto, o bien refiriéndose a las proyecciones del objeto en los diferentes planos ortogonales.

La primera interpretación se asocia a una validación perceptiva (relacionada a la acción de *ver* el objeto desde diferentes posiciones) y, aunque la construcción geométrica del objeto y su interpretación deriva de forma más o menos directa de G2, la justificación se sitúa principalmente en G1.

Por ejemplo se puede afirmar que el objeto dibujado en la respuesta tiene las vistas requeridas, puesto que si un observador se coloca *en frente o a un lado* del objeto representado *ve* los “alzados”, mientras que si lo observa *desde arriba ve* la “planta”, o sea las “vistas” representadas en el enunciado. Este tipo de justificación se basa en la verificación de que el objeto dibujado cumpla las hipótesis dadas y tiene rasgos del esquema/justificación empírico-perceptivo (Harel y Sowder, 2007; Marrades y Gutiérrez, 2000), por la naturaleza de los conceptos que intervienen (*ver* el objeto de frente, de lado, o desde arriba).

La explicitación del significado de “ver” el objeto desde determinadas posiciones, o sea la relación que tiene la “vista” del hipotético observador (percepción) con la definición de proyección ortogonal (objeto teórico), pondría de manifiesto la dialéctica entre G1 y G2, entre objetos visuales y analíticos. Por ejemplo, se podría afirmar que si asumimos que las direcciones de mirada del observador son paralelas entre sí y perpendiculares al plano visual de la observación, entonces podemos considerar las vistas del sujeto como proyecciones ortogonales del objeto en dicho plano.

Otro tipo de justificación puede incluir la descripción del procedimiento que ha permitido llegar a la solución (descripción del proceso ascendente, Arzarello, Micheletti, Olivero, Paola y Robutti, 1998), por ejemplo, afirmando que el cuerpo correspondiente a las tres vistas representadas se construye (y dibuja) colocando las vistas en tres planos ortogonales de manera contigua, según los nombres que indican las vistas/proyecciones ortogonales. Aunque dicha justificación se basa en objetos teóricos como planos/proyecciones ortogonales, su intención es describir un procedimiento manual (construcción/dibujo del objeto), de forma más o menos precisa, lo que corresponde a una validación perceptivo-deductiva propia de G1.

También en este caso, la explicitación de la relación del procedimiento de "construcción del objeto" con las definiciones y propiedades de las distintas proyecciones en los planos correspondientes, sería un primer paso hacia una demonstración hipotético-deductiva (G2).

La componente empírica de la tarea nos permite prever una predominancia de argumentaciones deductivo-informales (Recio y Godino, 2001) por parte de los estudiantes de magisterio: argumentaciones basadas en la verificación perceptiva de las hipótesis o en la explicitación del proceso de coordinación e integración de las vistas para dibujar el objeto, y en las cuales emerge el concepto de vista como campo visual, principalmente enfocadas en G1. Estas argumentaciones, aunque informales desde un punto de vista del "formalismo matemático", se consideran pertinentes con respecto al nivel de enseñanza al cual se dirigen.

En el siguiente apartado describimos los resultados obtenidos al aplicar el ítem b) a 241 futuros profesores del segundo curso de la especialidad Educación Primaria de la Universidad de Granada del año académico 2010-2011. Los conocimientos previos de los estudiantes sobre el tema fueron los relativos a sus formaciones básicas y los que profundizaron durante el año anterior en el estudio del bloque temático de geometría para maestros. Presentamos los resultados obtenidos teniendo en cuenta la variable cualitativa "tipo de justificación", y cuando sea pertinente nos apoyaremos en los paradigmas G1 y G2 definidos por Parzysz (2006).

Resultados

Analizando las respuestas de los estudiantes al ítem b), además de los tipos de justificaciones descritos en el apartado anterior, emergen afirmaciones basadas en la interpretación incorrecta de las "vistas" dadas en el enunciado como "caras" del objeto. En estos casos, aunque la solución al ítem a) pueda ser correcta, dichas justificaciones nos proporcionan una información suplementaria sobre el concepto (incorrecto) de "vistas" sobre el cual se basan.

Analizando las respuestas de los estudiantes que contestaron correctamente al ítem a) (209 alumnos de la muestra de 241, o sea el 87%), podemos clasificar sus justificaciones en cuatro categorías:

1. Justificaciones de la tarea interpretada de forma incorrecta (vistas=caras)
2. Descripción de conceptos, propiedades o procedimientos aislados o incompletos
3. Argumentaciones deductivo-informales basadas en la verificación perceptiva de las hipótesis
4. Argumentaciones deductivo-informales basadas en la descripción del proceso de coordinación e integración de las vistas

Observamos que el 11% de los alumnos, aunque contestaron correctamente al ítem a) han dejado en blanco la respuesta relativa a la justificación.

En los siguientes sub-apartados describimos las justificaciones dadas a las soluciones en cada categoría, y su incidencia en la muestra de estudiantes.

Justificaciones de la tarea interpretada de forma incorrecta (vistas=caras)

El 23% de alumnos da una justificación a la solución de la tarea interpretando las vistas del objeto dadas en el enunciado, como si fueran las caras del objeto. La mayoría consideran que la planta es la base del objeto (y así la nombran), mientras que los alzados son las caras laterales del objeto, también nombradas como paredes. Ejemplo (figura 2):

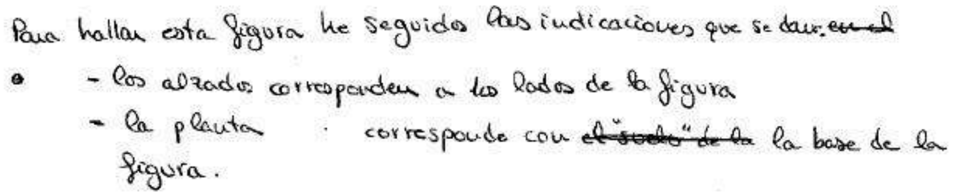


Figura 2: Justificación de la tarea interpretada de forma incorrecta

Dicha interpretación del enunciado confiere a la tarea un carácter aún más empírico, puesto que trabaja con conceptos, las caras del objeto, que se pueden materializar con más facilidad que “las vistas”.

Observamos que algunos alumnos utilizan el término “lados” para referirse a “caras” del objeto y el término “altura” para referirse a las “caras laterales”. Análogamente Gorgorió (1998), trabajando con alumnos de escuela secundaria, refiere el uso de palabras que corresponden a la geometría bidimensional para referir a partes de objetos tridimensionales.

Aunque estas justificaciones se refieren a soluciones correctas del ítem a), su análisis nos permite destacar errores conceptuales importantes, que habrían pasados ocultos con el sólo análisis de la solución al ítem a), y que pueden dar lugar a errores en otras tareas similares que involucran el concepto de vista.

Descripción de conceptos, propiedades o procedimientos aislados o incompletos

El 42% de los estudiantes intentó argumentar su solución describiendo conceptos, propiedades o procedimientos aislados o imprecisos que no permiten justificar de forma completa la respuesta. Identificamos las dos siguientes tipologías:

- Justificaciones que presentan una descripción correcta de los conceptos de planta y alzados dados en el enunciado, en términos de campos visuales desde determinadas posiciones, sin describir de forma precisa las relaciones que tienen con el objeto dibujado en la solución (27%). Ejemplo (figura 3):

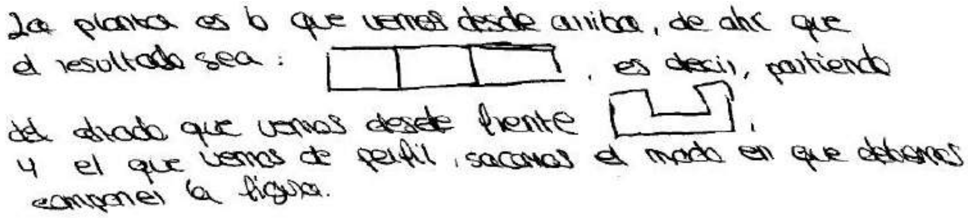

La planta es lo que vemos desde arriba, de ahí que el resultado sea: . es decir, partiendo del dibujo que vemos desde frente . y el que vemos de perfil, sacamos el modo en que debemos componer la figura.

Figura 3. Justificación imprecisa dada por una alumna

- Justificaciones en las cuales se describen propiedades o procedimientos correctos pero aislados, que no permiten argumentar de forma clara y lógica la solución (15%). Ejemplo (figura 4):

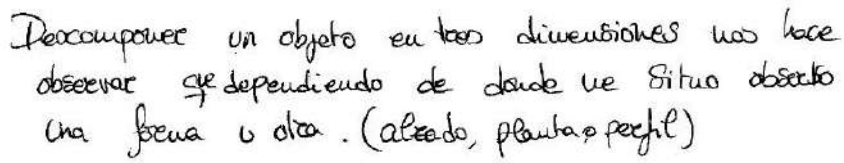

Descomponer un objeto en tres dimensiones nos hace observar que dependiendo de donde me situo observo una forma u otra. (alzado, planta o perfil)

Figura 4. Justificación incompleta dada por un alumno

Dichas justificaciones no presentan un discurso deductivo, sino únicamente afirmaciones locales, en la mayoría de los casos de tipo perceptivo.

Argumentaciones deductivo-informales basadas en la verificación perceptiva de las hipótesis

El 15% argumentan que el objeto dado en la solución tiene las vistas requeridas, apoyándose en la definición de las vistas como diferentes campos visuales que tiene un hipotético observador puesto en determinadas posiciones con respecto al objeto.

Como ya fue anticipado, dichas justificaciones se sitúan en G1 y tienen rasgos del esquema empírico-perceptivo. Ejemplo (figura 5):

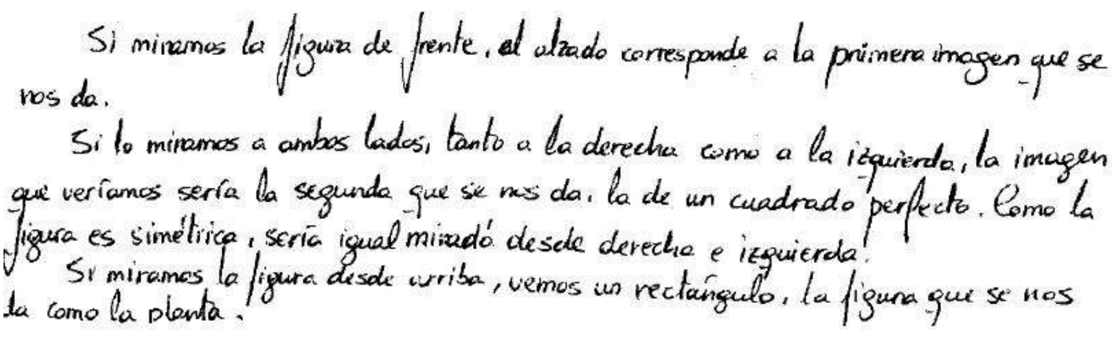

Si miramos la figura de frente, el alzado corresponde a la primera imagen que se nos da.
Si lo miramos a ambos lados, tanto a la derecha como a la izquierda, la imagen que veríamos sería la segunda que se nos da, la de un cuadrado perfecto. Como la figura es simétrica, sería igual mirado desde derecha e izquierda.
Si miramos la figura desde arriba, vemos un rectángulo, la figura que se nos da como la planta.

Figura 5. Justificación deductivo-informal dada por un alumno

Observamos que, aunque solo de forma implícita, dichas justificaciones llevan a mobilizar los dos polos identificados por Parzysz (1988): el polo de "lo que se ve" y el de "lo que se sabe". De hecho, en la representación dada por los alumnos en la solución del ítem a) (esbozos del objeto en perspectivas caballera o isométrica) no se "ven" los alzados dados en el enunciado. La interpretación del dibujo en términos de vistas, requiere una buena interacción entre "lo que se ve", o sea el objeto dibujado en perspectiva (y en el cual, por ejemplo, el segundo alzado se "ve" con forma romboédrica), y "lo que se sabe" (o sea las propiedades del dibujo en perspectiva y de las proyecciones ortogonales[10]).

El maestro que justifica su solución de esta forma, tendría que ser consciente de dicha dialéctica, lo que formaría una importante transición hacia G2. Sin embargo, los alumnos no presentan dichos argumentos de forma explícita.

[10] De manera particular las siguientes propiedades: la forma y la dimensión de los objetos dibujados en perspectiva varían dependiendo de la inclinación del objeto referente respecto al plano de proyección; en la proyección ortogonal la imagen de una figura puesta en un plano paralelo al plano de proyección es isométrica a la figura.

Pruebas deductivo-informales basadas en la descripción del proceso de coordinación e integración de las vistas

El 9% de alumnos presentaron pruebas deductivo-informales de sus soluciones, describiendo el proceso de coordinación e integración de las vistas en tres planos ortogonales de forma aproximada.

La mayoría de alumnos se apoyaron en la descripción del proceso de dibujo seguido para poder representar el objeto a partir de las tres vistas, lo que corresponde a una validación de tipo perceptivo (G1). Ejemplo (figura 6):

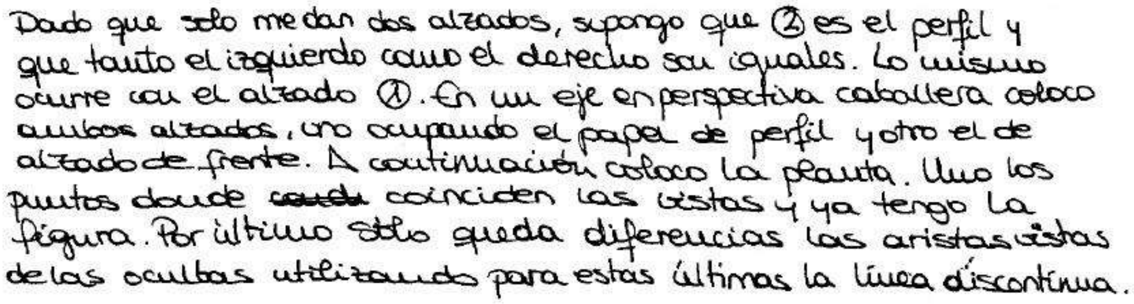

Dado que solo me dan dos alzados, supongo que ② es el perfil y
que tanto el izquierdo como el derecho son iguales. Lo mismo
ocurre con el alzado ①. En un eje en perspectiva caballera coloco
ambos alzados, uno ocupando el papel de perfil y otro el de
alzado de frente. A continuación coloco la planta. Uno los
puntos donde ~~cada~~ coinciden las vistas y ya tengo la
figura. Por último sólo queda diferencias las aristas vistas
de las ocultas utilizando para estas últimas la línea discontinua.

Figura 6. Justificación deductivo-informal dada por una alumna

Observamos que en algunas de dichas soluciones aparecen objetos conceptuales relacionados con la geometría descriptiva (sistema diédrico, planos ortogonales,…), aunque no vienen definidos de forma rigurosa, ni explicitadas sus propiedades.

Resumen de los resultados

Presentamos en la tabla 1 las frecuencias absolutas y relativas (porcentajes) de los tipos de justificaciones dadas por los estudiantes.

Tabla 1. *Frecuencias de los tipos de justificaciones*

Tipo de justificaciones	Frecuencia (%)
En blanco	22 (11)
1. Interpretación incorrecta “vistas=caras”	47 (23)
2. Descripción de conceptos, propiedades o procedimientos aislados	89 (42)
3. Verificación perceptiva de las hipótesis	32 (15)
4. Descripción del proceso de coordinación e integración de las vistas	19 (9)
Total	209 (100)

Observamos que el 76% de los alumnos que dieron una respuesta correcta al ítem a), manifestaron dificultades a la hora de dar una argumentación (deductiva) a su solución (justificación dejada en blanco, de tipo 1 o 2). Las principales dificultades manifestadas se refieren a la interpretación incorrecta de los términos teóricos presentes en el enunciado (vistas, alzados y perfil) y a la incapacidad de formular un discurso deductivo a partir de determinadas hipótesis, lo que supone una falta de conocimiento especializado del contenido (Hill, Ball, y Schilling, 2008).

De otra parte, las validaciones deductivo-informales de tipo perceptivo (tipo 3 y 4, 24%), aunque muestran escasas referencias a elementos teóricos (conceptos y teoremas de geometría euclídea), las consideramos válidas con respecto al contexto de enseñanza en el cual se sitúan (educación primaria). En términos de Parzysz (2006) se sitúan principalmente en el paradigma geométrico G1.

Conclusiones

El problema que hemos abordado en este trabajo es describir los tipos de justificaciones que espontáneamente elaboran los futuros maestros en la resolución de una tarea elemental enunciada de manera gráfica/visual, y que refiere a una situación espacial.

En las justificaciones dadas por los estudiantes emerge la interpretación de la tarea en términos empíricos asociada a una validación de tipo perceptivo (relacionada con la acción de *ver* el objeto desde diferentes posiciones).

En las argumentaciones de tipo deductivo-informales dadas por los alumnos, la sinergia entre lo visual y analítico propia de la tarea está presente de forma implícita: para describir la relación entre dos representaciones visuales (la representación en perspectiva del objeto y la representación de sus vistas ortogonales) el sujeto utiliza un vocabulario cotidiano, cuyos términos de lenguaje (vistas de un hipotético observador, punto de vista, campo visual, …) se refieren a determinados objetos (conceptos y propiedades) propios de la geometría descriptiva. Dicha relación entre los objetos visuales ("ver") y objetos analíticos ("saber"), aunque no explicitada por el estudiante, le permite no obstante hacer afirmaciones correctas sobre la solución presentada, y justificar su solución.

La falta de pruebas deductivo-formales, con referencias a objetos independientes del contexto y con potencial de generalidad a diferentes situaciones (proyecciones/planos ortogonales,..), manifiesta que la interpretación del término "justificar" por parte de los alumnos ha sido estrictamente dependiente al nivel de la tarea. La gran mayoría de estudiantes, no relacionan de forma espontánea la justificación de dicha tarea con otros temas más avanzados del currículo correspondiente, como puede ser el dibujo en perspectiva y las proyecciones ortogonales.

En términos de los tipos de geometrías propuestos por Parzysz (2006), la tarea seleccionada es propia de G1. Sin embargo, el maestro necesita desarrollar un conocimiento especializado del contenido (Hill, Ball y Schilling, 2008; Godino, 2009) que le sirva de base para planificar e implementar su enseñanza, en este caso conocimiento propio del tipo de geometría G2 (proto-axiomática, que involucra objetos teóricos y validaciones hipotético-deductivas).

Este conocimiento le permitirá cumplir una de las finalidades de la enseñanza de la geometría en los niveles educativos obligatorios, consistente en "hacer pasar a los alumnos desde una 'geometría de la observación' a una 'geometría de la demostración'" (Parzysz, 2006, p. 129). Este paso debe hacerse de manera progresiva y conectarse con el desarrollo de conocimientos y capacidades que permita discriminar las relaciones sinérgicas entre lo visual y analítico (Godino et al, 2012), lo que le llevará a un comportamiento más experto en la enseñanza de la geometría en la escuela.

De aquí la necesitad de promover acciones formativas que incluyan una reflexión sistemática sobre la interacción entre las concepciones empíricas de los objetos y acciones visuales (que tienen los alumnos) y sus significados teóricos. Como visto, dicha interacción tiene un papel central en las argumentaciones de las soluciones de tareas sobre visualización de objetos tridimensionales representados en el plano. Una forma de abordarla, suscitando interés en los alumnos, podría ser explorando a través de software de geometría dinámica (como por ejemplo Cabri 3D o GeoGebra) las funciones y límites de las diferentes representaciones utilizadas por los alumnos en el proceso de argumentación.

Reconocimiento:

Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación, EDU2010-14947, Ministerio de Ciencia e Innovación (MICINN), fondos FEDER y de la Beca FPU, AP2008-04560.

Referencias

Arzarello F., Micheletti C., Olivero F., Paola D. & Robutti O. (1998). A model for analysing the transition to formal proofs in geometry. In A. Olivier y K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 2, 32-39. Stellenbosch, South Africa: University of Stellenbosch.

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843-908). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Bishop, A. (1980). Spatial abilities and mathematics education: A review. Educational Studies in Mathematics, 11, 257-269.

Colmez, F. & Parzysz, B. (1993). Le vu e le su dans l'évolution de dessins de pyramides du CE2 a la seconde. In A. Bessot y P. Verrilon (Eds), *Espaces graphiques et graphismes d'espaces* (pp. 35-55). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Ferrero, L., Gaztelu, I., Martín, P. & Martínez, L. (1999). *Matemáticas. 6 Primaria. Serie Sol y Luna*. Madrid: Anaya.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.

Godino, J. D., Cajaraville, J. A., Fernández, T. & Gonzato, M. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias,* 30 (2), 163-184.

Gorgorió, N. (1998). Exploring the functionality of visual and non-visual strategies in solving rotation problems. *Educational Studies in Mathematics*, 35, 207-231.

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: in search of a framework. In L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, 3-19. Valencia: Universidad de Valencia.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' Proof Schemes: Results from Exploratory Studies. In A.Schoenfeld, J. Kaput, y E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education III* (pp. 234-283). Providence, RI: American Mathematical Society.

Harel, G., & Sowder, L (2007). Toward a comprehensive perspective on proof. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. National Council of Teachers of Mathematics.

Hershkowitz, R., Parzysz, B. & Van Dormolen, J. (1996). Space and shape. In A. J. Bishop et al. (Eds.), *International handbook of mathematics education*, Vol 1 (pp. 161-204). Dordrecht: Kluwer.

Hill, H. C., Ball, D. L. & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 372-400.

Malara, N. (1998). On the difficulties of visualization and representation of 3D objects in middle school teachers. In A. Olivier y K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd PME International Conference*, 3, 239-246.

Marrades, R. & Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 87–125.

Parzysz, B. (1988). 'Knowing' vs 'seeing'. Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics,* 19, 79-92.

Parzysz, B. (2006). La géométrie dans l'enseignement secondaire et en formation de professeurs des écoles: de quoi s'agit-il*? Quaderni di Ricerca in Didattica*, 17, 128-151.

Recio, A. M. & Godino, J. D. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 83-99.

Rivera, F. D. (2011). *Toward a visually-oriented school mathematics curriculum. Research, theory, practice, and issues*. Dordrecht: Springer.

FRANCISCO GOMES TEIXEIRA: O CONCEITO DE RETA TANGENTE NO *CURSO DE ANALYSE INFINITESIMAL*

Catarina Mota

Maria Elfrida Ralha

Maria Fernanda Estrada

CMAT – Centro de Matemática da Universidade do Minho11

catlexmota@gmail.com

Resumo

Francisco Gomes Teixeira destacou-se como matemático mas também como pedagogo. O seu "Curso" foi utilizado como manual de referência durante vários anos nas Universidades do Porto e de Coimbra e é, em nossa opinião, um exemplo de como, ainda hoje, deve ser composto e revisto um livro de texto. Neste artigo analisaremos a parte relativa ao tratamento dado por Gomes Teixeira ao conceito de reta tangente, explicitando as lições pedagógicas que se podem retirar desse tratamento.

Palavras-chave: Francisco Gomes Teixeira; Reta tangente; manual escolar; história da matemática.

Introdução

Francisco Gomes Teixeira (1851 – 1933) é um dos nomes mais importantes no que concerne ao desenvolvimento da Matemática e do seu ensino em Portugal.

Foi professor na Universidade de Coimbra entre 1874 e 1884 tendo-se transferido nesta altura para a Academia Polytechnica do Porto, onde foi professor e diretor, tendo sido depois professor e reitor da recém-criada Universidade do Porto, em 1911[12]. Enquanto docente lecionou essencialmente disciplinas de Análise Matemática, e foi nesta qualidade que Gomes Teixeira escreveu o seu *Curso de Analyse Infinitesimal* (doravante referido apenas como *Curso*) um manual universitário composto com o objetivo de ser o compêndio adotado para a lecionação das suas aulas, substituindo textos de autores estrangeiros, nomeadamente o *Cours de Calcul différentiel et intégral* de Serret[13]. Deste modo, Gomes Teixeira põe em prática os próprios Estatutos da Universidade de Coimbra, elaborados aquando da Reforma Pombalina de 1772, onde já

[11] Esta investigação foi parcialmente financiada pelos fundos FEDER através do "Programa Operacional Factores de Competitividade – COMPETE" e por fundos Portugueses através da FCT – "Fundação para a Ciência e Tecnologia", incluída no Projeto PEst – C/MAT/UI0013/2011.

[12] Alves, 2004, p. 42-57.

[13] SERRET, J. A. (1886). *Cours de Calcul différentiel et integral*. Paris: Gauthier-Villars.

era sugerido que os regentes compusessem os seus próprios compêndios para serem utilizados nas suas aulas. Podemos ler:

> Para as Lições elementares pois das ditas Sciencias, não haverá livro fixo, e invariável; pois que nelas se aperfeiçoam cada dia muitas coisas, e se inventam outras. Por isso principiarão os Lentes a fazer as Lições pelos Authores, que Eu for servido ordenar provisionalmente. E para o futuro se tomará deliberação na Congregação da Matemática sobre a mudança, que nisso possa haver: Procurando-se sempre que os Tratados, que se houverem de explicar, sejam feitos de um modo conciso, e elementar; e contenham os Methodos mais eficazes, e sublimes, que forem conhecidos;(…)
>
> O Lente, que achar não haver Tratato impresso, no qual se contenham as Sciencias relativas à sua Cadeira, de um modo conforme o espirito destes Estatutos, poderá compô-lo. E sendo aprovado na Congregação, por ele fará as suas lições. (*Do Curso Mathematico*, 1772, p. 164)

O presente artigo é parte de um projeto de doutoramento onde analisamos marcos importantes sobre o ensino/aprendizagem do conceito matemático de tangente, em Portugal. Atendendo a que o conceito de "tangente" é um dos conceitos matemáticos explicitamente patentes na transição do ensino básico e secundário para o superior, propomo-nos analisar o tema – no ensino superior – tal como nos foi sugerido por Gomes Teixeira no seu *Curso* e daí estabelecer possíveis pontes com o ensino do conceito nos nossos dias. Para tal, compararemos as diferentes edições do *Curso*, explicitando e analisando as diferenças/semelhanças do ponto de vista científico e pedagógico, no que concerne a: estrutura; definição do conceito de reta tangente; inclusão da história da matemática; resolução de problemas envolvendo o conceito de reta tangente.

Curso de Analyse Infinitesimal

O *Curso* teve várias edições, que foram sendo usadas, ao longo de muitos anos, na lecionação das cadeiras de Análise/Cálculo Infinitesimal quer na Academia Polytechnica do Porto e na Universidade do Porto[14], quer na Universidade de Coimbra[15]. Existem, inclusive notícias, que reportamos como fidedignas, de que este *Curso* também chegou a ser utilizado como manual universitário em Lisboa. Nas sucessivas edições Gomes Teixeira foi alterando/atualizando esta sua obra certamente com o intuito de a melhorar, científica e pedagogicamente. Estas alterações estão

[14] Annuario da Academia Polytechnica do Porto.
[15] Annuario da Universidade de Coimbra.

presentes em todo o manual e, em particular, no tratamento do conceito de reta tangente. A análise destas mudanças, ocorridas de edição para edição, permitem-nos, por exemplo, retirar ilações sobre a forma como os manuais escolares eram elaborados e eram revistos de forma efetiva; permitem-nos, além disso, extrair possíveis sugestões para o ensino da matemática na atualidade.

Estrutura

O *Curso* é composto por duas partes, *Cálculo Diferencial* e *Cálculo Integral*, publicadas em diferentes alturas e ambas com várias edições. Dada a magnitude da obra debruçar-nos-emos, nesta nossa investigação, sobre o *Cálculo Diferencial*.

A primeira edição do *Curso – Cálculo Diferencial* foi publicada em 1887, tendo contudo sido precedida por uma pré-edição, no Anuário da Academia Polytechnica do Porto, intitulada *Fragmentos de um Curso d'Analyse Infinitesimal*.

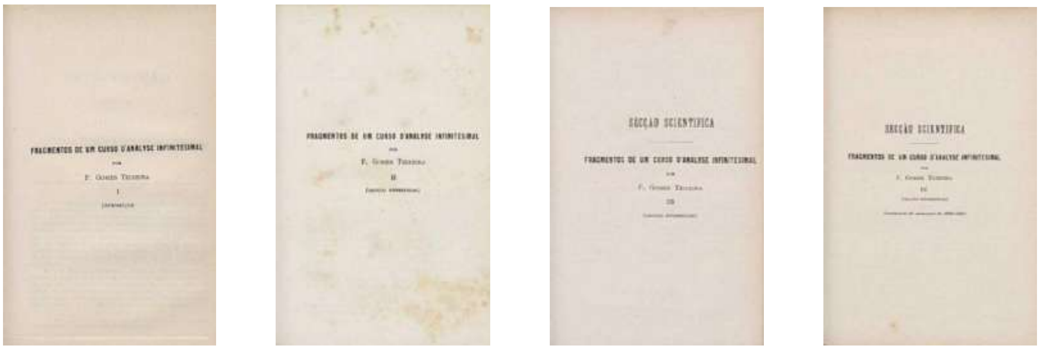


Figura 1: Primeira página dos 4 fascículos dos *Fragmentos*.

Os *Fragmentos,* publicados em 4 fascículos, correspondem, na sua totalidade, à primeira edição do *Curso - Cálculo Diferencial*, sendo possível estabelecer a seguinte relação[16]:

Tabela 1: Relação entre os *Fragmentos* e a 1ª edição do *Curso*.

Fragmentos	***Curso de Analyse Infinitesimal – Cálculo Diferencial* (1ª edição)**
1884 – 1885	*Introdução*
1885 – 1886	*Cálculo Diferencial* até à página 96
1886 – 1887	Página 97 a 215 (final do capítulo VII) do *Cálculo Diferencial*
1887 – 1888	Início do capítulo VIII (página 216) até ao final do *Cálculo Diferencial*

[16] Alves, 2004, p. 222.

O *Curso* teve posteriormente mais três edições: 2ª Edição – 1890; 3ª Edição – 1896 e 4ª Edição – 1906. A 4ª edição foi incluída no 3º volume das *Obras Sobre Matemática*, publicadas pela Imprensa da Universidade de Coimbra entre 1904 e 1915 a expensas do Governo Português e nelas se encontra coligida a maioria dos trabalhos de Gomes Teixeira.

Posteriormente, em 1926, Gomes Teixeira iniciou a escrita do *Manual de Cálculo Diferencial, Extrato do Curso de Analyse Infinitesimal* (doravante referido apenas como *Manual*). Segundo o único exemplar que conhecemos, que se encontra no Fundo Antigo da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, esta obra encontra-se inacabada e, segundo uma nota manuscrita que se encontra na página de rosto, seria uma obra não divulgada ao grande público, mas que revela as preocupações pedagógicas de Gomes Teixeira.

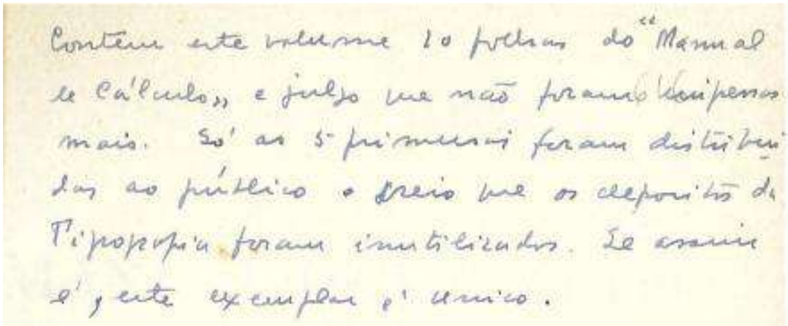

Contém este volume 10 folhas do "Manual
de Cálculo" e julgo que não foram impressas
mais. Só as 5 primeiras foram distribui
das ao público e creio que os depósitos da
Tipografia foram inutilizados. Se assim
é, este exemplar é único.

Figura 2 – Nota manuscrita na folha de rosto do *Manual de Cálculo Diferencial*[17].

Gomes Teixeira apresenta no início deste manual o motivo pelo qual o escreve, numa advertência ao leitor.

> Êste volume contem a doutrina essencial para um primeiro estudo do Cálculo Diferencial a fazer nas cadeiras de Análise das faculdades de sciências ou congéneres das outras escolas superiores.
>
> Para um estudo mais amplo, pode recorrer-se ao volume primeiro do meu Curso de Análise infinitesimal, tomo III das minhas obras sobre matemática. (Teixeira, F. G., 1926, p. 5)

As edições do *Curso* são compostas por duas partes, a Introdução e o Cálculo Diferencial, enquanto o *Manual* apenas apresenta a parte relativa ao cálculo diferencial. Na Introdução, Gomes Teixeira aborda a teoria dos números imaginários e os princípios

[17] Contém este volume 10 folhas do "Manual de Cálculo" e julgo que não foram impressas mais. Só as cinco primeiras foram distribuídas ao público e creio que os depósitos da Tipografia foram inutilizados. Se assim é, este exemplar é único.

gerais da teoria das funções. A partir da 2ª edição é acrescentada a teoria dos números irracionais e dos números negativos. No que concerne ao Cálculo Diferencial esta parte está dividida em 8 capítulos, a saber: Noções preliminares; Derivadas de primeira ordem das funções; Aplicações geométricas dos princípios precedentes; Derivadas e diferenciais de ordem qualquer; Aplicações analíticas da Fórmula de Taylor; Aplicações geométricas da Fórmula de Taylor; Funções definidas por séries; Funções de variáveis imaginárias. As quatro edições do *Curso*, assim como o *Manual*, apresentam nesta parte, uma estrutura muito semelhante[18].

O *Curso* de Gomes Teixeira foi considerado, a nível nacional e internacional, um dos melhores tratados de análise existentes. De facto, em Portugal, o seu mérito foi reconhecido com a atribuição do Prémio D. Luiz pela Academia das Ciências de Lisboa. A nível internacional várias foram as recensões positivas a esta obra, como a publicada por Pierpont no *Bulletin of the American Mathematical Society*.

> Ao usar este livro, senti-me permanente triste por a língua portuguesa não ser mais conhecida no nosso país. De outra maneira, esta obra admirável sobre o Cálculo gozaria uma popularidade generalizada entre nós. O seu autor, o distinto diretor da Academia Polytechnica do Porto, foi consistentemente bem-sucedido na difícil tarefa de seleção de entre o imenso material disponível. O modo de apresentação não deixa nada a desejar. O estilo é lúcido e elegante, e em toda a obra há a marca refrescante duma mente original. Em muitas passagens o autor incorporou partes dos seus extensos e valiosos escritos sobre o assunto. No que diz respeito ao rigor, parece-nos que o Professor Teixeira foi muito feliz na escolha da justa medida. O excessivo rigor Weierstrassiano foi sensatamente evitado; ao mesmo tempo, o autor prestou a devida atenção a este assunto. Alguma falha ocasional será seguramente corrigida em edições posteriores. No seu conjunto a obra impressionou-nos tão favoravelmente, que a veríamos traduzida para inglês de preferência a qualquer outra que conheçamos. É deplorável confessar que a língua inglesa não possui hoje uma obra desta craveira sobre o cálculo. (Pierpont, 1899, p. 483 *in* Alves, 2004, p. 1430-1431)

Também em Espanha foram muitas as críticas favoráveis a esta obra, como por exemplo a de Gascó, publicada no *Archivo de Mathematicas* (Valencia).

> Esta magistral obra distingue-se vantajosamente [sic] da grande maioria das publicações matemáticas que diariamente aparecem. Toda ela respira individualidade e manifesto domínio da matéria, características que por si só bastariam para torna-la recomendável. Valoriza também o trabalho do sábio professor português a claridade com que estão expostas todas as

[18] Para uma análise detalhada da estrutura do *Curso* consultar: Alves, 2004, p. 1549 - 1552.

teorias, a originalidade com que muitas de elas são apresentadas e a abundância de referências a trabalhos próprios (…)

As condições brevemente indicadas fazem com que o Curso de Analyse do Sr. Teixeira seja uma das pouquíssimas obras que figuram na primeira linha entre as muitas que sobre o mesmo assunto foram publicadas no último quarto de século. (D. L. Gascó, 1897, *in* Alves, 2004, p. 1434)

Dado o valor científico e didático desta obra, a sua análise torna-se ainda hoje uma valiosa fonte de conhecimento e inspiração.

Conceito de reta tangente

O conceito de reta tangente é um conceito de reconhecida importância na Matemática, quer pelo seu interesse na Geometria, quer pela sua relação com o cálculo diferencial.

Nas quatro edições do *Curso*, assim como no *Manual*, o conceito de reta tangente é abordado pela primeira vez no final do Capítulo I, da parte relativa ao Cálculo Diferencial. A definição de reta tangente apresenta diferenças nas quatro edições do *Curso* e no *Manual*, como podemos verificar na seguinte tabela, embora a figura de referência seja sempre a mesma.

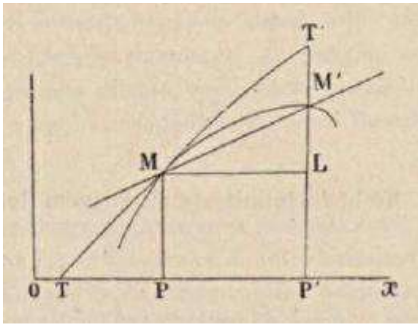


Figura 3 - Ilustração do conceito de reta tangente no *Curso* e no *Manual.*

Tabela 2 - Definição de reta tangente nas diferentes edições do *Curso*.

1ª Edição (1887)	Consideremos uma recta MM' que corte uma curva em dois pontos, e suponhamos que o segundo ponto M' se aproxima indefinidamente do primeiro M. A recta vae gyrando em roda do primeiro ponto, e, se o seu coefficiente angular tender para um limite determinado, MM' tenderá também para uma posição determinada correspondente MT. A esta linha chama-se *tangente* à curva no ponto M, que é portanto *o limite para que tende a secante MM' quando M' se aproxima indefinidamente de M*. (Teixeira, 1887, p. 10)
2ª e 3ª Edições (1890 e 1896)	Consideremos uma recta MM' que corte uma curva em dous pontos, e suponhamos que, quando o segundo ponto M' tende para M, a recta tende para um limite determinado, isto é, para um limite MT' que é sempre o mesmo qualquer que seja a série de pontos pelos quaes passa M' quando se aproxima de M. A esta recta MT' chama-se *tangente* à curva no ponto M. (Teixeira, 1890, p. 107)
4ª Edição (1906)	Consideremos uma recta MM' que corte uma curva em dois pontos, e suponhamos que, quando o segundo ponto M' tende para o limite M, a recta tende para um limite MT', e que este limite é único, qualquer que seja a série de pontos pelos quaes passa M' quando se aproxima de M. A esta recta MT' chama-se *tangente* à curva no ponto M. (Teixeira, 1906, p. 109)
Manual de Cálculo Diferencial (1926)	Consideremos uma recta MM', que corte uma curva em dois pontos M e M', e suponhamos que, quando o segundo ponto M' tende para o limite M, a recta tende para um limite MT', e que este limite é único, qualquer que seja a série de pontos pelos quaes passa M', quando se aproxima de M. A esta recta MT' chama-se *tangente* à curva no ponto M. (Teixeira, 1926, p. 86)

Note-se que, ao longo das diferentes edições, a noção de limite vai-se tornando cada vez mais explícita, nomeadamente a unicidade do limite que apenas é apresentada deste modo a partir da 4ª edição. Saliente-se também que a referência intuitiva à reta a girar em torno do ponto M apenas se encontra presente na primeira edição. Na nossa opinião, a omissão deste facto nas edições seguintes tem como objetivo tornar a definição menos intuitiva. Note-se também o cuidado na evolução da linguagem de modo a eliminar todos os dados desnecessários para que a definição contenha apenas o essencial. No *Manual* Gomes Teixeira destaca os pontos de interseção da secante com a curva, no sentido de clarificar a definição.

É também de salientar que, à época, a impressão de imagens era um processo algo complexo, o que levava a uma escolha criteriosa das imagens que acompanhavam o texto e sendo estas de efetivo complemento do mesmo e não meramente ilustrativas.

Seguidamente Gomes Teixeira deduz a fórmula do coeficiente angular da reta tangente a uma curva de equação $y = f(x)$, obtendo $\tan\theta = \lim \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, em que θ é a inclinação da reta tangente. A dedução é comum a todas as edições, sem contudo fazer qualquer referência à relação entre este valor e a derivada da função no ponto. Esta relação será apenas apresentada posteriormente aquando do estudo das propriedades do conceito de reta tangente.

História da Matemática

Em todas as edições é feita uma breve referência histórica à origem do método das tangentes e do cálculo diferencial. Contudo estas referências tornam-se mais detalhadas a partir da 4ª edição.

Tabela 3 - Observações históricas sobre o método das tangentes.

1ª, 2ª e 3ª edições	Este methodo das tangentes é devido a Fermat. (Teixeira, 1887, p. 10)
4ª edição e *Manual de Cálculo Diferencial*	Foi Descartes quem primeiro considerou as tangentes como limite das posições das secantes, e foi também este grande geómetra quem deu pela primeira vez um método geral para as achar, o qual foi publicado em 1637 na sua celebre *Geometria*. Outros métodos foram depois empregados, para resolver esta questão, por Fermat, Roberval, Sluse, etc. O método das tangentes que vimos de expor, é o de Fermat, com a forma simples que lhe deu Barrow nas suas *Lectiones geometricae*, publicadas em 1679. (Teixeira, 1906, p. 109)

Assinale-se que a informação histórica apresentada é precisa e relevante para o tema. Este resumo histórico é desenvolvido no final do Capítulo I com referência aos trabalhos de Newton, Leibniz, Euler, etc., sendo o seu desenvolvimento maior na 4ª edição e no *Manual*, comparativamente às restantes edições.

Esta evolução nos conteúdos de história da matemática prende-se com o crescente interesse de Gomes Teixeira na história da Matemática, que é patente em toda a sua obra, assim como na sua utilização no ensino, seguindo ideais já preconizados nos Estatutos da Universidade de Coimbra.

> [O mestre] recomendará porém muito aos seus discípulos, que à medida, que forem caminhando no Curso Matemático, se vão instruindo particularmente nela [História]: Mostrando-lhes, que a primeira coisa, que deve fazer quem se dedica a entender no progresso das Matemáticas, é instruir-se nos descobrimentos antecedentes; para não perder tempo em descobrir segunda vez as mesmas coisas; nem trabalhar em tarefas, e empresas já executadas. (*Do Curso Mathematico*, 1772, p. 170)

Saliente-se que nas referências históricas apresentadas Gomes Teixeira apresenta referências bibliográficas precisas, o que permite ao leitor identificar facilmente as fontes de onde poderá obter mais informação sobre o assunto.

Resolução de Problemas

Gomes Teixeira volta ao estudo do conceito de reta tangente no Capítulo III onde se dedica a estudar as aplicações geométricas das derivadas de primeira ordem das funções reais de variáveis reais.

Este capítulo começa com o estudo das tangentes e normais e somente aqui é feita a referência a que o coeficiente angular da reta tangente é a derivada da função no ponto de tangência. Neste tratamento Gomes Teixeira trabalha com funções definidas de forma implícita; contudo o tratamento é análogo ao que seria efetuado se as funções estivessem definidas explicitamente, utilizando a definição de derivada correspondente.

Gomes Teixeira começa por deduzir a equação da reta tangente à curva de equação $f(x,y)=0$, equação que é dada por $Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x)$, onde (x,y) são as coordenadas do ponto de tangência. Contudo, a partir da 2ª edição, aplica a fórmula da derivada da função implícita obtendo também a equação $\frac{\partial f}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial f}{\partial y}(Y-y)=0$.

No tratamento dado ao conceito de reta tangente as grandes diferenças surgem a partir da 3ª edição, altura em que Gomes Teixeira introduz o estudo das tangentes a curvas definidas por coordenadas polares e por coordenadas homogéneas. Estas últimas tornaram-se mais conhecidas com a obra de Julius Plucker e pela sua aplicação à geometria projetiva. Gomes Teixeira mostra conhecer os trabalhos de Plucker e a ele faz várias referências nos seus trabalhos de análise. Utilizando-as no *Curso* torna-as acessíveis aos alunos, o que demonstra a preocupação do matemático português em manter-se a par do desenvolvimento científico e dá-lo a conhecer aos seus alunos.

Também ao nível dos exemplos existem profundas diferenças entre as duas primeiras e as restantes edições.

Na 1ª edição apenas é apresentado um exemplo, que exige uma integração.

> Problema II. Achar a curva em que a subtangente é em todos os pontos igual à abcissa com sinal contrário. (Teixeira, 1887, p. 64)

Talvez por não ser um exemplo diretamente relacionado com a determinação de tangentes e envolver uma integração, o que pode ter levantado alguns problemas de entendimento por parte dos alunos, este exemplo não surge em nenhuma das outras edições.

A 2ª edição não apresenta qualquer exemplo sobre a aplicação da teoria das tangentes, facto que é alterado na 3ª edição onde são apresentados 3 exemplos distintos e que são mantidos na edição seguinte e no *Manual*.

> 1.º – Por um ponto (a, b) exterior a uma curva dada, tirar tangentes a esta curva. (Teixeira, 1896, p. 178)
>
> 2.º – Achar a condição para que a reta $\mathrm{AX} + \mathrm{BY} + \mathrm{CZ} = 0, \mathrm{Z} = 1$ seja tangente a uma curva dada. (Teixeira, 1896, p. 179)
>
> 3.º – Tirar tangentes comuns a duas curvas dadas. (Teixeira, 1896, p. 179)

Na 4ª edição é acrescentado um novo exemplo que se mantém no *Manual*:

> 5.º – Procurar o lugar geométrico dos pés das perpendiculares às tangentes a uma curva dada por um ponto fixo. (Teixeira, 1906, p. 168)

Após o estudo de outras propriedades das curvas (concavidade, assíntotas, curvatura) são apresentados três exemplos (parábola, elipse e cicloide) onde se começa por determinar a equação da reta tangente à curva num ponto genérico.

Gomes Teixeira efetuará um estudo semelhante do conceito de reta tangente para curvas no espaço e superfícies.

Considerações finais

Francisco Gomes Teixeira apresenta no seu Curso um tratamento cuidado, rigoroso e metódico do conceito de reta tangente, sem descurar as preocupações didáticas.

Conceito de reta tangente

Um dos objetivos do programa de matemática A do ensino secundário prende-se com a comunicação de conceitos, raciocínios e ideias, oralmente e por escrito, com clareza e progressivo rigor lógico (DES, 2001, p. 5).

Para que tal seja possível é necessário que os alunos tenham um conhecimento efetivo dos conceitos. Com a apresentação de uma definição clara e rigorosa, que abrange todos os casos, Gomes Teixeira permite a formação de uma imagem mental correta do conceito de reta tangente, tornando-se um modelo que os professores podem seguir na sua prática. Desta forma permitir-se-á aos alunos um melhor entendimento do conceito e consequentemente uma melhor aplicação deste na resolução de problemas e na sua comunicação.

História da matemática

A história da matemática é parte integrante dos programas de Matemática A como tema transversal, sendo a sua importância realçada no programa oficial.

> Atividades com uma perspetiva histórica humanizam o estudo da disciplina, mostrando a Matemática como ciência em construção e em constante interação com outras ciências. Proporcionam também excelentes oportunidades para pesquisa de documentação. A informação sobre a génese e o percurso de um conceito ao longo dos tempos e a sua relação com o progresso da humanidade pode fomentar, ou aumentar, o interesse pelo tema em estudo, ao mesmo tempo que constitui uma fonte de cultura (DES, 2001, p. 12).

Gomes Teixeira inclui notas históricas no desenvolvimento do Curso, com referências precisas a autores e obras pertinentes para o tema em questão, encaminhando o leitor para uma investigação mais profunda, caso assim o entenda. Apresenta o conceito de reta tangente e a sua relação com a derivada no ponto de tangência seguindo a cronologia da descoberta (em primeiro lugar apresenta a definição de reta tangente e só depois a sua relação com o conceito de derivada). Tal como se vê na obra de Gomes Teixeira os apontamentos históricos devem ser encarados como parte integrante dos conteúdos e não como observações/notas à margem. Devem também ser precisos, rigorosos e contendo informação que permita um verdadeiro aprofundamento do tema por professores/alunos interessados.

Resolução de problemas

A resolução de problemas é um dos temas transversais dos programas de matemática A do ensino secundário.

> Sempre que possível, e no desenvolvimento do programa são indicadas oportunidades para isso, os estudantes devem ser envolvidos em atividades de natureza investigativa genérica ou ligada a problemas de interesse histórico. A introdução e o desenvolvimento de todos estes temas é facilitador do "desenvolvimento da linguagem e do simbolismo para comunicar ideias matemáticas" de modo que os estudantes "reflitam sobre, e clarifiquem, o seu pensamento matemático no que diz respeito às noções e relações matemáticas, formulem definições matemáticas e exprimam generalizações descobertas através de investigações (…)".(DES, 2001, p. 21).

Deste modo, faz todo o sentido que se utilize o conceito de reta tangente na resolução de problemas diversos que permitam ao aluno a aquisição de diferentes capacidades.

Gomes Teixeira apresenta exemplos diversos e distintos relacionados com o conceito de reta tangente: determinação de retas tangentes a curvas por um ponto da curva; determinação de retas tangentes a curvas por pontos fora da curva; determinação de condições para que uma reta seja tangente a uma curva dada; determinação de retas tangentes comuns a duas curvas, etc. Estes exemplos podem servir de inspiração para que se realizem tarefas investigativas com os alunos, a propósito do conceito de reta tangente, mobilizando outras capacidades e conhecimentos, por exemplo: determinação da equação da reta tangente ao gráfico de uma função por pontos que não pertencem ao gráfico; determinação das condições para que uma reta seja tangente ao gráfico de uma função; determinação de retas tangentes a curvas históricas (como, por exemplo, as cónicas).

Em nossa opinião, a obra de Francisco Gomes Teixeira pode e deve servir de inspiração para os professores e alunos de matemática do século XXI, permitindo-lhes alargar horizontes, esclarecer dúvidas assim como fornecer pistas sobre "novas" formas de tratar "velhos" conceitos.

Referências

Estatutos da Universidade de Coimbra (1772). *Do Curso Mathematico* (vol. 3, p. 141-221). Lisboa: Na Regia Officina Typografica.

Alves, M. G. (2004). *Francisco Gomes Teixeira: o homem, o cientista, o pedagogo*. Braga: Universidade do Minho.

Annuario da Academia Polytechnica do Porto (1881 – 1910). Porto: Typographia Central.

Annuario da Academia Polytechnica do Porto (1890 – 1904). Coimbra: Imprensa da Universidade.

DES (2001). *Programa de Matemática A 10º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.

Teixeira F. G. (1887). *Curso de Analyse Infinitesimal, Calculo Differencial*. Porto: Typographia Occidental.

Teixeira F. G. (1890). *Curso de Analyse Infinitesimal, Calculo Differencial, 2.ª ed*.Porto: Typographia Occidental.

Teixeira F. G. (1896). *Curso de Analyse Infinitesimal, Calculo Differencial, 3.ª ed.* Porto: Typographia Occidental.

Teixeira F. G. (1906). *Curso de Analyse Infinitesimal, Calculo Differencial, 4.ª ed*. In *Obras sobre Mathematica* (Vol. III). Coimbra: Imprensa da Universidade.

Teixeira F. G. (1926). *Manual de Cálculo Diferencial, Extrato do Curso de Análise Infinitesimal*. Porto: Tip. da Enciclopédia Portuguesa, Lda.

AS ISOMETRIAS NO 2º CICLO DO ENSINO BÁSICO: UMA PROPOSTA DE ENSINO BASEADA NO MODELO DE VAN HIELE

Susana Pinto

Agrupamento de Escolas Cávado Sul — Barcelinhos

pintsusana@gmail.com

Lina Fonseca

Escola Superior de Educação do IP de Viana do Castelo

linafonseca@ese.ipvc.pt

Resumo

A Geometria é uma área favorável ao desenvolvimento do pensamento matemático. Constitui um meio privilegiado para representar e dar significado ao mundo que nos rodeia e o seu ensino deve promover a descoberta e a experimentação (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999).

Esta comunicação apresenta parte de uma investigação que pretendeu estudar o desenvolvimento do pensamento geométrico de alunos do 6.º ano através da implementação de um ambiente de ensino para as isometrias baseado nas fases de aprendizagem de van Hiele. Seguiu-se uma abordagem de natureza qualitativa baseada em estudos de caso.

Os resultados obtidos evidenciaram uma progressão nos níveis de van Hiele. Antes da implementação do ambiente de ensino, os alunos revelavam um pensamento condizente com o nível 1 de van Hiele, caraterizado por uma linguagem informal e pouco precisa. No final do estudo, os alunos evoluíram para o nível 2 de van Hiele, podendo apresentar, consoante a tarefa e a isometria em causa, evidências de um pensamento de nível 3. A linguagem tornou-se mais formal, consistente e precisa. Por vezes, os alunos foram capazes de estabelecer relações entre os próprios movimentos e as suas propriedades. Revelaram um bom desempenho e entusiasmo na realização das tarefas propostas, principalmente quando estas envolviam colagens ou recurso ao Geometer's Sketchpad (GSP).

Palavras-chave: pensamento geométrico, isometrias, modelo de van Hiele, tarefas, ambiente de ensino

Introdução

Portugal continua a ser considerado um país com insucesso escolar a Matemática (e.g. Gonçalves & Kaldeich, 2007; Ponte, 1994) uma realidade difícil de inverter uma vez que socialmente a matemática é vista como uma disciplina inacessível e de difícil aprendizagem. No âmbito desta disciplina, a geometria constitui uma ótima forma de relacionar a matemática com a realidade (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999), todavia é um dos temas em que, no 2.º ciclo, os alunos revelam bastantes dificuldades. Assim, na tentativa de contrariar esta realidade achei pertinente debruçar-me sobre o modelo de van Hiele que, segundo Jaime (1993), pode ser a solução para melhorar o desempenho dos alunos na geometria. Este modelo serviu de base à implementação de um ambiente de ensino sobre isometrias. Relativamente às isometrias verifica-se uma escassez de materiais: curriculares para o 2.º ciclo, reflexo das alterações trazidas pelo programa de matemática do ensino básico (PMEB) (ME-DGIDC, 2007); desenhados de acordo com o modelo de van Hiele, apesar dos vários estudos relacionados com esta teoria, existe uma grande lacuna no que respeita ao seu campo de aplicação, que se tem circunscrito ao estudo dos polígonos.

A investigação pretendeu compreender o desenvolvimento do pensamento geométrico de alunos do 2.º ciclo a partir do contributo de um ambiente de ensino no domínio das isometrias baseado nas fases de aprendizagem de van Hiele.

O estudo foi conduzido pelas questões gerais: i) Em que nível de desenvolvimento do pensamento geométrico se encontram os alunos no 6.º ano de escolaridade? ii) Como se caracteriza o desempenho dos alunos na resolução de tarefas de natureza geométrica envolvendo isometrias? iii) Que dificuldades manifestam os alunos na resolução das tarefas e como se podem ultrapassar essas dificuldades? iv) Como é que o ambiente de ensino proposto contribuiu para a evolução do pensamento geométrico?

Estado da arte

A matemática

Vivemos numa sociedade que se encontra em constante mudança e, de acordo com o NCTM (2007), os que compreendem e são capazes de fazer matemática terão mais hipóteses e condições para construírem uma vida melhor. Mais do que nunca, a escola de hoje tem o dever de dar a todos os alunos uma formação sólida em matemática que lhes permita encará-la não como um fator de seleção, mas sim como um instrumento de desenvolvimento acessível a todos (NCTM, 2007). As situações de ensino e aprendizagem a apresentar aos alunos devem conter contextos matemáticos e não matemáticos, bem como outras áreas do saber e situações do quotidiano, e o ambiente de aprendizagem deve estimular e encorajar o raciocínio matemático (ME-DGIDG, 2007).

A geometria

A geometria é uma área da matemática que facilita os processos mentais, valoriza a descoberta e a experimentação, promovendo o desenvolvimento do pensamento geométrico e o raciocínio visual (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999).

O PMEB (ME-DGIDC, 2007) trouxe algumas alterações no que diz respeito ao tema geometria, passando a ser mais valorizada e a realçar a importância da utilização de material manipulável na sua aprendizagem.

Relativamente ao desenvolvimento do pensamento geométrico é incontornável falar da teoria de van Hiele. São cinco os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico (de 1 a 5) através dos quais os alunos devem progredir, segundo van Hiele, não como resultado de um processo natural, mas sim sob a influência de um programa de ensino-aprendizagem constituído pelas cinco fases de aprendizagem do seu modelo: informação, orientação guiada, explicitação, orientação livre e integração. Vários foram os investigadores que se debruçaram sobre a teoria de van Hiele (e.g. Usiskin, 1982; Junqueira, 1994; Burger & Shaughnessy, 1986; Jaime, 1993; Mistretta, 2000; Wu & Ma, 2006) uns para testar e contestar alguns dos seus pressupostos, outros para determinar os níveis de pensamento geométrico e ainda outros para analisar os efeitos da aplicação do modelo. As investigações realizadas para determinar os níveis de pensamento geométrico dos alunos têm apontado para um predomínio do nível 2 de van Hiele (e. g. Junqueira, 1994; Wu & Ma, 2006).

As transformações geométricas: isometrias

"As transformações geométricas são mudanças que se efetuam na posição, no tamanho e na forma" (Pimentel, Vale, Freire, Alvarenga, & Fão, 2010, p. 88). As transformações estudadas no 2.º ciclo, as isometrias, não implicam mudança na forma nem no tamanho, apenas na posição; a figura mantém as dimensões e as amplitudes dos ângulos, sendo que podem preservar o sentido dos ângulos (translações e rotações) ou invertê-lo (reflexões). O PMEB (ME-DGIDC, 2007) destaca, no 2.º ciclo, as tarefas que envolvem sobretudo reflexões e rotações, pois permitem a aprendizagem de conceitos geométricos de forma dinâmica e o aprofundamento da sua compreensão. Segundo Bastos (2007), a relevância que as isometrias assumem atualmente na matemática faz do seu estudo uma matéria à qual devemos dar a máxima importância. As isometrias permitem estabelecer diversas conexões, podem ser usadas para demonstrações, para resolver problemas e “para raciocinar sobre o plano e o espaço” (Bastos, 2007, p. 23). Também Veloso (1998) enfatiza a importância das transformações geométricas no ensino da geometria.

Na tabela 1 apresento algumas características dos níveis de van Hiele nas isometrias do plano, com base em Jaime (1993); refiro-me apenas aos níveis 1, 2 e 3 uma vez que não é esperado que alunos deste ano de escolaridade alcancem os níveis 4 ou 5.

Tabela 1 – Os níveis de van Hiele nas isometrias do plano

Nível 1	Visualização consideração global das isometrias	• reconhecimento da conservação das dimensões e da forma das figuras, • utilização de propriedades fortemente visuais na identificação de isometrias, • uso do vocabulário básico das isometrias
Nível 2	Descrição as isometrias são consideradas através dos seus elementos	• uso intencional dos elementos que caracterizam as isometrias, • indicação dos elementos que caracterizam uma isometria, • descoberta e utilização das propriedades das isometrias, a partir da sua verificação em casos concretos
Nível 3	Dedução informal estabelecem-se relações entre as propriedades	• descoberta do centro de rotação através da interseção das mediatrizes, • uso das propriedades das composições básicas de isometrias, • simplificação de composições de isometrias.

A escolha das tarefas

As tarefas propostas podem ter uma grande influência na efetiva mudança do processo de ensino-aprendizagem, uma vez que a sua escolha e o modo como são exploradas na aula são a base de toda a aprendizagem dos alunos (Ponte, 2009; Vale, 2009). Ao envolver-se em tarefas matemáticas, o aluno adquire conhecimento matemático e aprende a praticar a sua matemática (Christiansen & Walther, 1986). A aprendizagem da matemática resulta do trabalho realizado pelo aluno, que por sua vez é condicionado pelas tarefas propostas pelo professor (ME-DGIDC, 2007).

Opções Metodológicas

Relativamente à metodologia seguida, de acordo com o problema do estudo, optei por uma investigação qualitativa, baseada em estudos de caso. Foi desenvolvida em ambiente natural, que era o contexto de sala de aula com toda a turma, em que, além de investigadora, assumi também o papel de professora.

Contexto e participantes

A investigação foi levada a cabo numa escola do ensino básico da região norte, numa turma do 6º ano, com 20 alunos, num total de 11 sessões de 90 minutos. O ambiente de ensino implementado envolveu toda a turma, mas a observação recaiu apenas sobre os quatro alunos-caso deste estudo: Rogério, Dinis, Cláudia e Jorge.

Recolha e Análise de dados

Sendo baseada em estudos de caso, para além das tarefas desenvolvidas em pares, a recolha de dados foi feita, como sugere Yin (1993), com recurso a múltiplas fontes: entrevistas, observações e documentos, tais como o questionário de opinião em relação à geometria (adaptado de Mistretta, 2000) e o teste individual usado para determinar os níveis de van Hiele antes e após a implementação do ambiente de ensino.

As categorias de análise foram definidas de acordo com o problema do estudo, as questões de investigação e a fundamentação teórica. A análise dos dados assumiu um carácter descritivo e interpretativo, foi ocorrendo mediante a sua recolha e no final de forma mais aprofundada, tal como sugerem Bogdan e Biklen (1994). Depois de selecionados os estudos de caso, analisei os testes individuais, complementados pela entrevista, utilizando-os para situar os alunos nos níveis de van Hiele antes da implementação do ambiente de ensino. Este teste foi adaptado das tarefas de Costa (2005) e na análise das respostas usei a codificação utilizada pela autora. Seguidamente, foram analisados todos os documentos resultantes da implementação do ambiente de ensino de modo a caracterizar o desempenho dos alunos na realização das tarefas, verificar as dificuldades sentidas e compreender como os alunos evoluem nos níveis do pensamento geométrico ao longo das tarefas propostas. Depois, analisei as respostas ao teste individual passado no final do estudo, de forma a situar os alunos-caso nos níveis de van Hiele após a implementação do ambiente de ensino, servindo de suporte à análise das alterações verificadas nesses níveis e do contributo dado pelas tarefas desenvolvidas. Os descritores de níveis de pensamento usados permitiram-me determinar o 1.º e o 2.º níveis de van Hiele. O 3.º nível foi reconhecido de acordo com as características gerais dos níveis de van Hiele, com a descrição apresentada por Jaime

(1993) para o ensino das isometrias e por Clements e Battista (citados em Costa, 2005) para os níveis de desenvolvimento geométrico para movimentos elementares.

Caracterização do ambiente de ensino implementado

O ambiente de ensino implementado contou com as tarefas desenvolvidas e com a sua sequenciação, mas também com o modo como foram exploradas, com os materiais disponibilizados e utilizados pelos alunos e com os momentos de discussão global e de síntese. A sequenciação das tarefas foi feita de acordo com as fases de aprendizagem do modelo de van Hiele e tendo como referência a proposta de Jaime (1993) para o ensino das isometrias (Anexo).

Todas as tarefas foram realizadas em pares, mas com momentos de discussão global e de síntese que envolveram toda a turma. Na realização das tarefas foi disponibilizada uma caixa, utilizada livremente de acordo com as necessidades dos pares, contendo: figuras em acetato, mira, transferidor, régua, cola, círculos em acetato e pionés. Os alunos puderam ainda recorrer ao GSP. As figuras usadas em todas as tarefas encontraram-se relacionadas à música, pelo facto de os alunos serem estudantes da academia de música e, como tal, ter considerado favorável trabalharem com figuras com as quais se sentiam à-vontade, podendo funcionar como fator de motivação; além disso, entre estes símbolos podem encontrar-se tanto figuras simétricas como assimétricas, permitindo a exploração de diferentes situações.

Como os alunos se encontravam no nível 1 de van Hiele, as tarefas 1, 2 e 3 foram pensadas de acordo com esse nível e implementadas segundo as 5 fases de aprendizagem de van Hiele. Estas fases não se encontram associadas a um determinado nível do desenvolvimento do pensamento geométrico, segundo o modelo, pretendem organizar as atividades de modo a permitir a passagem para o nível do pensamento geométrico seguinte. Em cada nível, as sessões de ensino devem começar com atividades da 1.ª fase, continuando com atividades das fases seguintes, sendo que "ao finalizar a 5.ª fase, os alunos devem ter alcançado o nível de pensamento seguinte" (Jaime, 1993, p.9). Deste modo, decorridas estas cinco fases de aprendizagem respeitantes ao nível 1, os alunos terão alcançado o nível 2 de van Hiele. Por conseguinte, as tarefas 4, 5 e 6 foram desenhadas de acordo com o nível 2 e respeitando novamente as fases de aprendizagem, excetuando-se a 1.ª fase, pois o facto de se ter vindo a aplicar uma sequência de tarefas sobre o tema dispensou a aplicação desta.

Apresentação e análise dos dados

Nesta comunicação apresenta-se uma parte da tarefa 3. Esta tarefa foi desenvolvida de acordo com a 4.ª fase de aprendizagem, a que permite ao aluno o encontro dos seus próprios caminhos para a resolução de problemas, aplicando os conhecimentos e linguagem adquiridos na fase anterior, é a fase do início da transição de um nível para o outro, neste caso do nível 1 para o nível 2 de van Hiele.

A tarefa consistia em descrever as isometrias presentes nas pavimentações e completá-las com colagens (Figura 1), em construir a sua (Figura 2) e em reproduzir no GSP a de outro par (Figura 3).

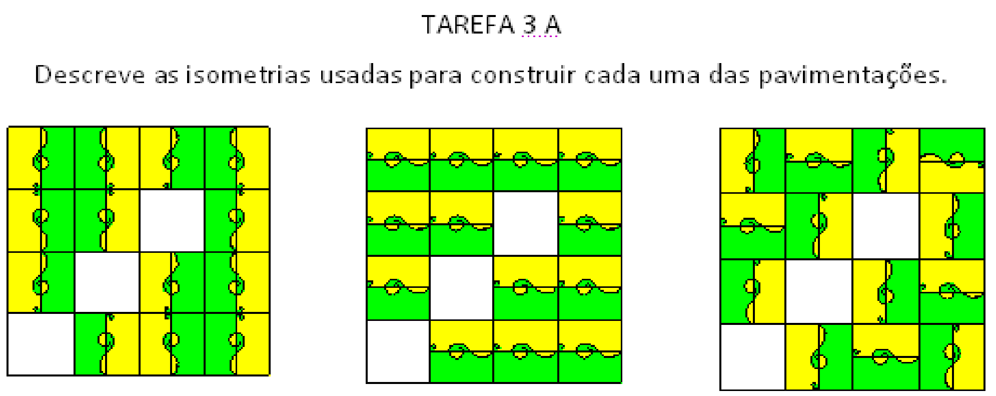


Figura 1 – Enunciado da tarefa 3A

O par RD (Rogério e Dinis)

Na construção da pavimentação livre, o par RD usou apenas rotações e na sua descrição caracterizou o sentido e a amplitude da rotação. A sua descrição foi feita por filas, tal como a colagem: descreveram a 1.ª figura de cada fila comparando-a com a posição da figura colada no 1.º espaço e depois por comparação com a anterior (Figura 2).

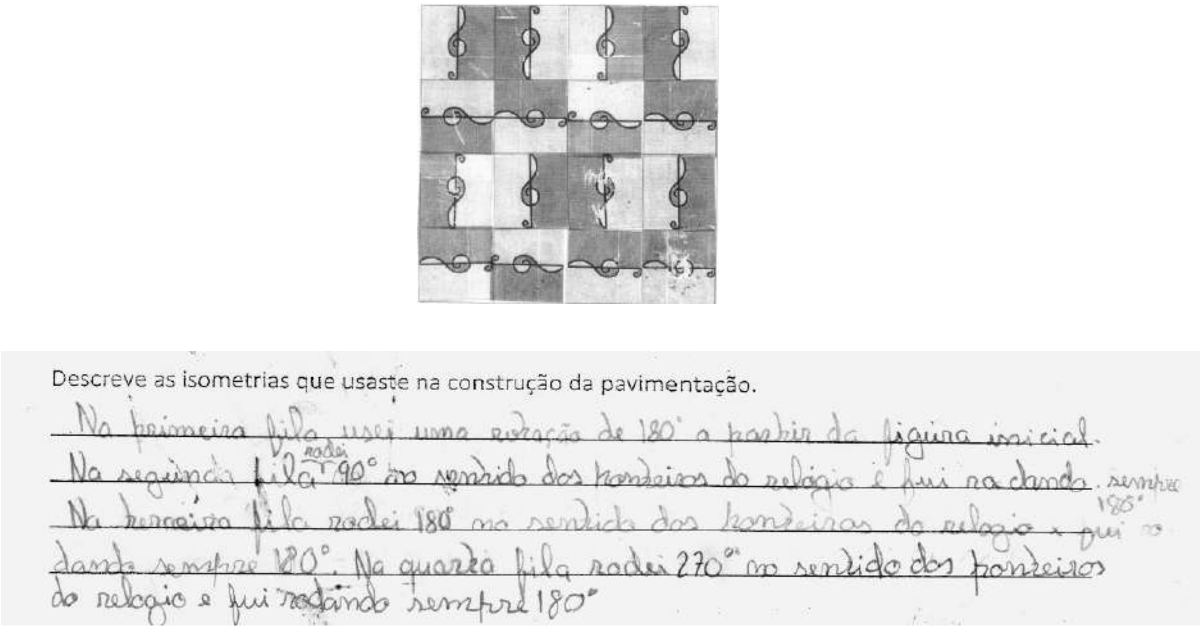


Figura 2 – Pavimentação realizada pelo par RD e respetiva descrição

Forneci uma das pavimentações livres realizadas pela turma (Figura 3) e pedi que a reproduzissem no GSP, individualmente. Para isso também forneci, numa folha aberta do GSP, o motivo da clave de sol e deixei-os fazer as suas tentativas.

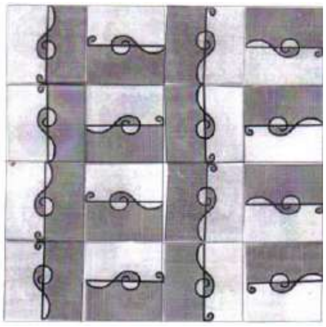


Figura 3 – Pavimentação fornecida para ser construída no GSP

No GSP, o Rogério construiu a 1.ª fila usando rotações de -90°. Para indicar o centro de rotação, percebeu que teria de ser um dos vértices da figura, marcou o superior direito como centro de rotação, mas viu que não era o pretendido e tentou com o vértice inferior direito, resultando a rotação pretendida. Completou a fila procedendo sempre desta forma. Para construir a 2.ª fila, aplicou uma reflexão de eixo horizontal à 1.ª fila e apagou as figuras que se encontravam na 2.ª e 4.ª posição e construiu-as a partir de uma rotação da figura anterior de -90° com centro no vértice inferior direito. De seguida, selecionou as duas filas e aplicou-lhes uma translação de 6 cm na vertical e 0 cm na horizontal. A imagem transladada apareceu na parte superior, contrariamente ao que o aluno estava à espera. Ia-me perguntar como se fazia, mas ocorreu-lhe uma ideia e explicou-me "se quero que vá para baixo, é ao contrário, é negativo", e refez o movimento aplicando uma translação de -6 cm na vertical.

No caso do Dinis, para construir a mesma pavimentação no GSP, também construiu a 1.ª fila usando rotações de -90º. Para indicar o centro de rotação, descobriu logo que era o vértice inferior direito. Completou a fila procedendo sempre desta forma. De seguida, refletiu a 1.ª figura, usando como eixo a base da figura, e repetiu o movimento refletindo a figura anterior até concluir a 1.ª coluna. Depois, completou cada uma das filas usando rotações de -90º com centro de rotação no vértice inferior direito da figura anterior.

Par JC (Jorge e Cláudia)

Na pavimentação livre este par, para evitar uma exaustiva descrição, preencheu a pavimentação apenas com translações, não produzindo uma descrição muito rica, apenas mencionou que aplicou translações de uma casa na vertical e na horizontal.

Para construir a pavimentação fornecida no GSP, o Jorge começou por construir a 1.ª fila usando rotações de -90º. Para indicar o centro de rotação, usou o método tentativa-erro e, para o sentido, começou por indicar 90º, mas como não rodou no sentido desejado, lembrou-se de colocar -90º. Completou a fila sempre desta forma. De seguida, aplicou uma reflexão de eixo horizontal à 1.ª figura, usando como eixo a base da figura, e repetiu o movimento refletindo sucessivamente a figura anterior até concluir a coluna. Procedeu da mesma forma para completar a 3.ª coluna. Voltou às filas e por rotação completou a 2.ª fila. Selecionou a 1.ª e a 2.ª filas e deu indicação para que deslizassem 6 cm; deslocou-se no sentido contrário ao pretendido e emitiu "ah, já sei, é como no sentido dos ângulos, não é professora?" e refez a isometria aplicando uma translação de -6 cm na vertical.

A Cláudia também começou por construir a 1.ª fila usando rotações de -90^0 (para descobrir o centro de rotação, recorreu aos círculos em acetato e pionés). Depois, refletiu a 1.ª fila toda, usando como eixo a base da figura, e utilizou sucessivas reflexões horizontais da fila anterior até concluir as colunas. Com a pavimentação completa, aplicou rotações a quatro das figuras para que ficassem na posição correta. Ao fazer rotações usando o centro da figura, o transformado e a figura original ficaram sobrepostos, então, apagou essas figuras e aplicou uma rotação -90º à figura anterior com centro no canto inferior direito da mesma.

No registo escrito de como construíram a sua pavimentação livre, os pares não foram suficientemente precisos, não indicaram todos os elementos que caracterizam as diferentes isometrias, como por exemplo o centro da rotação (par RD) ou o sentido da translação (par JC). A utilização do GSP tentou colmatar essa lacuna, pois aí seriam obrigados a indicar todos os elementos das isometrias usadas, caso contrário não obteriam a pavimentação pretendida. A reprodução no GSP da pavimentação que lhes foi fornecida, foi realizada de forma diferente pelos quatro alunos. A dificuldade maior residiu em descobrir o centro de rotação: o Rogério e o Jorge usaram a estratégia tentativa-erro, selecionando como centro cada um dos vértices do motivo até obter a figura na posição desejada; o Dinis descobriu-o logo, quando lhe perguntei como soube, respondeu-me "então, vi"; a Cláudia usou o material da caixa (acetatos e pionés) para se certificar do ponto a escolher para centro da rotação. Tiveram dúvidas com a indicação do sentido negativo da translação, estavam habituados a usar a expressão "para a esquerda/baixo" mas conseguiram ultrapassá-la sozinhos, mostrando que refletiram sobre o que estavam a construir, não precisando da minha intervenção para corrigir a opção tomada.

Conclusões do estudo

Respondendo às questões orientadoras deste estudo pude verificar que antes da implementação do ambiente de ensino os quatro alunos situavam-se no nível 1 de van Hiele; após a implementação, verificou-se um predomínio do nível 2 (Junqueira, 1994; Wu & Ma, 2006) e, pontualmente, evidências de um pensamento de nível 3. Quanto ao desempenho dos alunos na resolução de tarefas de natureza geométrica envolvendo isometrias, globalmente, os alunos observados tiveram um bom desempenho, as tarefas foram desenvolvidas com entusiasmo, principalmente as que possibilitaram o uso de materiais, colagens ou o GSP.

No que concerne às dificuldades manifestadas, elas foram visíveis (a) ao nível da linguagem que se revelou informal e imprecisa; (b) na interpretação de enunciados mais complexos; (c) no pouco rigor nas construções geométricas e (d) em marcar o centro de rotação. O trabalho de pares, bem como os momentos de discussão e de síntese envolvendo toda a turma, e ainda o recurso ao material manipulável em acetato e ao

GSP, revelaram-se bastante úteis como forma de ultrapassar as dificuldades apontadas. Assim, os materiais, as tarefas e a metodologia adotada, além de adequados à realidade destes alunos, estimularam e encorajaram o raciocínio matemático (ME-DGIDC, 2007). O ambiente de ensino assente nas cinco fases de aprendizagem do modelo de van Hiele (Jaime, 1993) permitiu desenvolver a visualização, a experimentação, a intuição, a inferência de resultados, a comunicação, a justificação e, deste modo, o pensamento geométrico.

Em suma, no ensino das isometrias o professor deverá diversificar os materiais e estruturar adequadamente as tarefas a desenvolver (Ponte, 2009; Vale, 2009), respeitando as fases de aprendizagem de van Hiele e as características do seu modelo (Jaime, 1993); proporcionar o trabalho entre pares com momentos de partilha de ideias e recorrer a um *software* de geometria dinâmica (o GSP constituiu um excelente meio), assim como a material em acetato que possibilite a construção de frisos, pavimentações e rosáceas (ME-DGIDC, 2007).

Bibliografia

Abrantes, P., Serrazina, L. & Oliveira, I. (1999). *A matemática na Educação Básica. Reflexão participada sobre os currículos do ensino básico*. Lisboa: Departamento de Educação Básica do Ministério da Educação.

Bastos, R. (2007). Notas sobre o Ensino da Geometria – Transformações Geométricas. *Educação e Matemática*, vol. 94, pp. 23-27. Lisboa: APM.

Bogdan R., & Biklen S., (1994). *Investigação Qualitativa em Educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Burger, W. F., & Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 17 n.º 1, pp. 31-48.

Christiansen, B., & Walther, G. (1986). Task and activity. Em B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). Dordrecht: D. Reidel.

Costa, M. C. (2005). *Modelo do pensamento visual-espacial: transformações geométricas no início da escolaridade.* (Tese de Doutoramento). Universidade Nova de Lisboa.

Gonçalves, M. & Kaldeich, C. (2007). *E-Learning in the School: Applied to Teaching Mathematics in Portugal.* Informing Science and IT Education Joint Conference. Escola de Engenharia. University of Minho.

Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento.* Tesis doctoral. Univesidad de Valência.

Junqueira, M. (1994). *Aprendizagem da Geometria em ambientes computacionais dinâmicos.* (Tese de Mestrado). Lisboa: Universidade Nova de Lisboa.

ME-DGIDC (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular do Ministério da Educação.

Mistretta, R. M. (2000). Enhancing geometric reasoning. *Adolescence*, 35(138), pp. 365-379.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a matemática escolar.* (Tradução portuguesa de Principles and standards for school mathematics, 2000). Lisboa: APM.

Pimentel, T., Vale, I., Freire, F., Alvarenga, D., & Fão, A. (2010). *Matemática nos primeiros anos – tarefas e desafios para a sala de aula,* pp. 87-102. Lisboa: Texto Editores.

Ponte, J. P. (1994). O Estudo de Caso na Investigação em Educação Matemática. *Quadrante*, 3 (1), pp. 3-18.

Ponte, J. P. (2009). O novo programa de Matemática como oportunidade de mudança para os professores do ensino básico. *Interacções*, 12, pp. 96-114.

Usiskin, Z. (1982*). Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry: Cognitive development and achievement in secondary school geometry project*. Chicago: University of Chicago Press.

Vale, I. (2009). *Das tarefas com padrões visuais à generalização*. Escola Superior de Educação de Viana do Castelo.

Veloso, E. (1998). *Geometria: temas actuais*. Lisboa: IIE.

Wu, D. B. & Ma, H. L. (2006). The distributions of van hiele levels of geometric thinking among 1st through 6th graders. In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N. (Eds.). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 409-416). Prague: PME.

Yin, R. (1993). *Applications of case study research*. Newbury Park: Sage Publications.

Anexo

Tabela 2 - Relação entre as fases de aprendizagem, tarefas e objetivos das sessões

Fases de aprendizagem	Tarefas	Objetivos da sessão
1.ª Fase - Informação	Tarefa 1	Aferir/introduzir algum vocabulário. Identificar/descrever a isometria em causa.
2.ª fase – Orientação dirigida 3.ª fase – Explicitação	Tarefa 2A Tarefa 2B	Construir frisos segundo uma determinada isometria. Compreender que as isometrias conservam a forma e as dimensões da figura original. Descobrir características visuais de cada uma das isometrias em causa: a mudança ou não de posição e a inversão ou não da figura. Utilizar o software de geometria dinâmica (GSP). Partilhar descobertas feitas.
4.ª fase – Orientação livre 5.ª fase - Integração	Tarefa 3A Tarefa 3B Tarefa 3C	Reconhecer e distinguir as três isometrias em causa. Construir pavimentações. Realizar translações, reflexões e rotações com e sem o auxílio do material de apoio. Utilizar o software de geometria dinâmica (GSP). Descobrir as peças que compõem o dominó formado pelos transformados do motivo dado. Reconhecer figuras simétricas, identificando e caracterizando a simetria presente. Partilhar descobertas feitas.
2.ª fase 3.ª fase	Tarefa 4 Tarefa 5	Descobrir, reconhecer e utilizar adequadamente as propriedades que caracterizam cada uma das isometrias. Determinar, na rotação, o centro, o sentido e a amplitude do ângulo de rotação. Determinar, na reflexão, o eixo de simetria. Determinar, na translação, a direção, o sentido e a grandeza. Utilizar o vocabulário matemático adequado. Partilhar descobertas feitas.
4.ª fase 5.ª fase	Tarefa 6	Realizar composições de rotações de mesmo centro e generalização de resultados. Descobrir simetrias em rosáceas. Construir rosáceas. Partilhar descobertas feitas.

PERCEÇÃO DE RELAÇÕES NO ESPAÇO POR CRIANÇAS DOS 3 AOS 7 ANOS

Cristina da Silva Alves
Agrupamento de Escolas de Vila Cova
cristinalves8@gmail.com

Alexandra Gomes
Universidade do Minho
magomes@ie.uminho.pt

Resumo

Apresentamos neste artigo os resultados de uma tarefa matemática sobre perceção de relações espaciais, realizada por crianças do pré-escolar e 1.º ano do ensino básico, no âmbito de um projeto de investigação mais alargado que pretende estudar de que forma as capacidades de visualização são trabalhadas no pré-escolar e 1.º ano e de que forma as crianças exibem essas capacidades de visualização. Analisaremos as dificuldades sentidas na execução da tarefa, as construções obtidas e também a linguagem utilizada pelas crianças na descrição da construção que veem (comunicação matemática).

Palavras-chave: competências de visualização; comunicação matemática, tarefas matemáticas; cubos coloridos.

Introdução

As crianças pequenas manifestam, desde o pré-escolar, competências surpreendentes e especializadas em vários domínios, nomeadamente em matemática, mostrando capacidade de formar conceitos diversificados e subtis. São ainda capazes de raciocinar sobre conceitos que não são totalmente óbvios sendo que a dimensão e precisão com que o fazem revelam competências precoces que não são fáceis de explicitar por si só de onde é que surgem (Barros & Palhares, 1997; Gelman, 2006; Ginsburg, Cannon, Eisenband, & Pappas, 2006).

Sendo a Matemática uma disciplina estruturada sequencialmente, onde a compreensão (ou não) de um determinado conceito ajuda (ou dificulta) a aquisição de outros (NCTM, 1994; Abrantes, Serrazina, Oliveira, Loureiro, & Nunes, 1999; Clements, Swaminathan, Hannibal, & Sarama, 1999; Maia, 2009) e onde os conceitos trabalhados num ano são a base para os conceitos do ano seguinte, faz todo o sentido estudar e compreender o processo como se desenvolve a aprendizagem das crianças, para ajudar os docentes a terem uma atuação mais profícua junto dos seus alunos e promover a construção de bases sólidas pelos alunos.

Além disso, há que ter em conta que a aprendizagem de um conceito se inicia, muitas vezes, anos antes de ser apresentada a definição formal do mesmo, no momento em que se estabelece o primeiro contacto, ainda que de modo informal, com esse mesmo conceito (Maia, 2009).

Considerando que a geometria constitui "um meio privilegiado de desenvolvimento da intuição e da visualização espacial" (Abrantes, Serrazina, Oliveira, Loureiro, & Nunes, 1999, p. 67), que a visualização espacial é "simultaneamente facilitadora de uma aprendizagem da Geometria, e desenvolvida pelas experiências geométricas na sala de aula" (Matos & Gordo, 1993, p. 13), e que "[o] período normal do desenvolvimento máximo da perceção visual se situa entre os três anos e meio e os sete anos e meio" (Frostig, Horne, & Miller, 1994, p. 10), resolvemos debruçar-nos sobre o processo de aquisição de competências geométricas nos primeiros anos, nomeadamente sobre a forma como as crianças no pré-escolar e 1.º ano exibem algumas dessas competências de visualização.

As questões de investigação que conduziram este estudo foram: Como é que as crianças percecionam o que veem? Quais as principais dificuldades/obstáculos sentidas pelas crianças na verbalização/comunicação da sua perceção?

Contextualização teórica

Segundo Frostig, Horne e Miller (1994), a perceção visual é "[a] capacidade de reconhecer e discriminar os estímulos visuais, e de interpretá-los associando-os com experiências anteriores". Ou seja, não se resume à capacidade de ver de forma correta uma figura ou objeto, mas à capacidade de analisar e interpretar aquilo que se vê, relacionando-o com o observador e com os outros objetos, pois a interpretação dos estímulos visuais não ocorre nos olhos, mas no cérebro (p. 7). Estes autores destacam o papel da linguagem nas capacidades de perceção visual e consideram o ensino da linguagem uma parte essencial do seu programa para o desenvolvimento da perceção visual. Referem que uma perceção correta depende de um desenvolvimento sensório motor adequado, mas que esta se desenvolve mais com o uso da linguagem (1994, p. 16).

Vygotsky (2001) argumenta também que o desenvolvimento do pensamento é determinado pela linguagem, escrita e falada, considerando a linguagem escrita de um nível superior à linguagem falada, já que ela exige uma ação de análise deliberada (consciência da estrutura de cada palavra, dissecação e reprodução de símbolos alfabéticos que têm que ser memorizados, entre outros).

De acordo com Piaget e Inhelder (1993), a atividade percetiva consiste na análise deliberada, que relaciona uns elementos com os outros, que implica uma série de movimentos designados por "transportes" (de dados percebidos, de comparações, de relações, de antecipações no tempo, entre outros), e é esta análise que permite que as crianças construam a sua representação do espaço, passando gradualmente das relações topológicas, para relações projetivas e euclidianas. Esta *Hipótese de Primazia Topológica* de Piaget (que as ideias geométricas se desenvolvem a partir de relações topológicas, para relações projetivas e Euclidianas) tem sido criticada por vários autores (Clements, Swaminathan, Hannibal, & Sarama, 1999).

Frostig, Horne e Miller (1994) identificaram cinco capacidades de perceção visual: a *coordenação visual motora*, que definiram como a capacidade de coordenar a visão com os movimentos do corpo ou partes deste (mão, pé, cabeça, entre outras); a *perceção figura fundo*, que consiste na capacidade de relacionar e distinguir uma figura (o foco) do que está à sua volta (o fundo); a *constância percetual*, que corresponde à capacidade de reconhecer uma característica invariante da figura (tamanho, forma, posição, cor, entre outras); a *perceção da posição no espaço*, que é a capacidade de relacionar no espaço um objeto com o observador e a *perceção de relações espaciais*, que definiram como a capacidade do observador perceber a posição de dois ou mais objetos em relação consigo mesmo e em relação uns com os outros. O (re)conhecimento destas capacidades é importante quer de um ponto de vista corretivo, quer preventivo, já que a perceção visual: (1) intervém em praticamente todas as ações da criança (nomeadamente quando esta corre e se desvia dos obstáculos; quando brinca com puzzles e procura uma peça de entre um amontoado de peças para encaixar num espaço em branco; quando come e leva a comida à boca; entre outras); (2) é essencial para o seu sucesso escolar (para ler, escrever, pintar, calcular, entre outros); (3) e porque é comum encontrar uma elevada incidência de disfunções percetuais em crianças com problemas de aprendizagem.

Anos mais tarde, Hoffer (citado por Del Grande, 1987) veio acrescentar mais duas capacidades de perceção visual às cinco já descritas: a *discriminação visual*, que consiste na capacidade de comparar imagens ou objetos encontrando semelhanças e diferenças; e a *memória visual*, que corresponde à capacidade de recordar uma imagem ou objeto que já não está visível, comparando as suas características com as de outros que estão ou não visíveis. Estas sete capacidades de perceção visual são denominadas por Gordo (1993) de capacidades de visualização espacial.

Os trabalhos desenvolvidos nesta área, em Portugal, são reduzidos, destacando-se nos últimos anos um estudo de Gordo (1993) sobre a visualização espacial e a relação entre o seu desenvolvimento e a construção de conceitos matemáticos em crianças do primeiro ciclo e um estudo de Arriaga, Silva e Esteves (2001) sobre os efeitos de um jogo de computador nas aptidões percetivas e espaciais.

No seu estudo sobre a visualização espacial e a aprendizagem da matemática, Gordo (1993) elaborou e implementou uma proposta de intervenção para desenvolver as capacidades de visualização espacial em alunos do 1.º CEB, tendo analisado os efeitos da implementação dessa proposta de intervenção na aprendizagem da Matemática. A sua proposta de intervenção, composta por várias atividades distribuídas pelas sete capacidades de visualização espacial consoante a prevalência da capacidade em análise, foi desenvolvida ao longo de 14 sessões. De acordo com a investigadora, as crianças reagiram de forma muito positiva às atividades propostas, especialmente quando estas implicavam a utilização de materiais manipuláveis tais como geoplano e tangram. Constatou, por comparação dos resultados entre os dois testes de visualização espacial efetuados antes e após a intervenção, que houve uma melhoria em todas as capacidades de visualização trabalhadas, à exceção da perceção de relações espaciais. Segundo Gordo (1993), uma das possíveis razões para esta exceção poderá ter sido o nível etário dos alunos, uma vez que não lhes permitia "uma descentração do seu próprio corpo, de forma a resolverem eficazmente algumas das actividades" (p. 92). Conclui ainda que as atividades de visualização espacial implementadas facilitaram a aquisição de alguns conceitos matemáticos, nomeadamente os relacionados com a geometria, tendo obtido melhores resultados os alunos que pertenciam ao grupo experimental, e portanto que foram expostos às atividades, do que os alunos da turma de controle.

Arriaga, Silva e Esteves (2001) analisaram os efeitos do jogo DxTris, um jogo do tipo do Tetris, em crianças do primeiro ciclo do ensino básico, ao nível das relações espaciais, constância da forma e orientação espacial. Os resultados deste estudo permitiram concluir que "os jogos de computador podem representar um importante meio de desenvolvimento das competências percetivas e espaciais, principalmente das relações espaciais" (p. 22).

O estudo

O presente estudo integra uma investigação mais abrangente, que tem por objetivo estudar a forma como as capacidades de visualização espacial são trabalhadas no pré-escolar e 1.º ano e a forma como as crianças exibem essas capacidades de visualização.

Neste artigo iremos apresentar uma das tarefas propostas e analisar os resultados obtidos relativamente à perceção de relações espaciais, capacidade que se destaca na tarefa em questão. Assumindo que a linguagem exerce um papel preponderante nas aprendizagens matemáticas não só porque permite a apropriação de conceitos, mas porque permite também a sua designação e classificação (D.E.B., 1997), iremos também debruçar-nos sobre a linguagem utilizada na comunicação matemática entre pares.

Metodologia

A investigação, de natureza qualitativa, teve como opção metodológica o estudo de caso. Após uma avaliação diagnóstica inicial realizada a 61 crianças de duas turmas do pré-escolar e duas turmas do 1.º ano (Alves & Gomes, 2011), foram escolhidas 16 crianças, para a realização de um conjunto de dez tarefas, que visavam a recolha de informações sobre as capacidades de perceção da posição no espaço e de perceção das relações espaciais das crianças. A seleção destas 16 crianças foi realizada do seguinte modo:

- foram escolhidas duas crianças de cada uma das seguintes idades: 3, 4, 5 e 6 anos, de duas turmas do ensino pré-escolar e duas turmas do 1.º ano de cada um dos estabelecimentos de ensino envolvidos (um JI, uma EB1/JI e uma EBI).

- no caso das crianças de 3 anos, a idade foi o único critério, uma vez que num dos estabelecimentos de ensino havia apenas duas crianças nestas condições e no outro estabelecimento, das quatro crianças com 3 anos, apenas duas tinham autorização dos encarregados de educação para participar no estudo.

- no caso das crianças de 4, 5 e 6 anos, a escolha recaiu sobre as crianças que, no teste diagnóstico, apresentaram respostas/construções diferentes das outras crianças da mesma faixa etária, de modo a potenciarmos a variedade de resoluções. No grupo dos 6 anos, uma das crianças foi escolhida propositadamente por ser caso único a não ter frequentado o ensino pré-escolar.

Atendendo à faixa etária das crianças envolvidas e ao tipo de tarefas propostas, decidiu-se que a recolha de dados seria feita, em cada estabelecimento de ensino, a partir de um conjunto de entrevistas semiestruturadas (a pares), gravadas em suporte vídeo e áudio. Os pares foram constituídos tendo por base a idade das crianças. Estas já estavam familiarizadas com a investigadora que conduziu as entrevistas, uma vez que já tinham estado com ela aquando da realização da avaliação diagnóstica (nos mesmos moldes) e em virtude desta frequentar a sala de aula, informalmente, desde o início do ano.

Cada entrevista foi realizada numa sala de trabalho individual contígua à sala de aula, com duração média de 30 minutos, e foi efetuada geralmente no período final da manhã (após o intervalo e o momento do lanche das crianças) e/ou tarde, no caso do ensino pré-escolar; e no período das horas correspondentes às Atividades de Enriquecimento Curricular (AEC) no caso do 1.º ano.

Apresentação da tarefa

A tarefa que a seguir se apresenta é uma de entre um conjunto de 10 tarefas que foram propostas às crianças. A realização da tarefa pressupõe que as crianças trabalhem a pares, bem como a utilização de cubos de madeira coloridos e de vários cartões com representações de construções tridimensionais. Cada criança, à vez, tem de, olhando para um cartão, descrever a construção usando apenas a linguagem como veículo da comunicação matemática. A outra criança, com base nas instruções recebidas, tem que reproduzir a construção usando os cubos coloridos. Para evitar que as crianças decorassem construções modelo e que o grau de dificuldade variasse entre quem vê e dá instruções primeiro e quem faz a construção depois, foram mantidos os tipos de construção, alterando apenas as cores dos cubos utilizados (Figuras 1 e 2).

A tarefa é composta por cinco ensaios, sendo o primeiro um ensaio de prática, para averiguar se a criança compreendeu a tarefa ou se é necessário repetir o procedimento, e os restantes, ensaios com um crescente grau de complexidade.

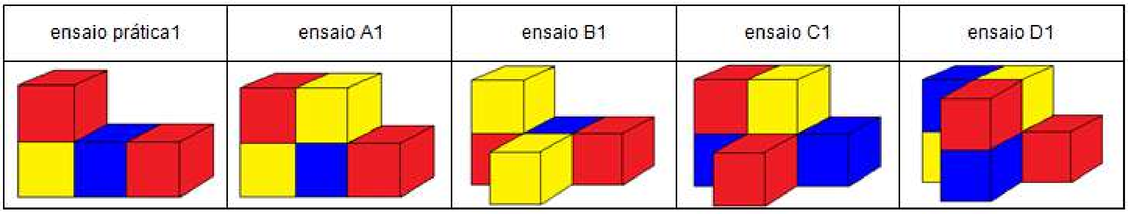


Figura 1 – Ensaios da tarefa (a criança X descreve enquanto a criança Y executa)

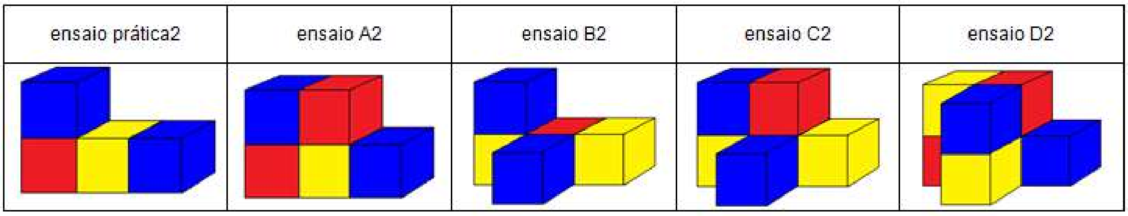


Figura 2 - Ensaios da tarefa (a criança Y descreve enquanto a criança X executa)

As crianças mostraram-se, desde o início, envolvidas e empenhadas na realização da tarefa proposta e desinibidas perante a presença da máquina de filmar e gravador. A utilização dos cubos coloridos foi uma mais-valia, pois via-se nas crianças a vontade em participar, mexer e explorar os cubos. Note-se que os cubos utilizados na resolução das tarefas eram diferentes dos materiais existentes nas diferentes salas de aula. Apesar de nas salas do pré-escolar existirem alguns cubos de madeira, estes fazem parte de kits com outros sólidos (cilindros, prismas, pirâmides, etc.), não são coloridos, e geralmente são utilizados pelas crianças nas suas brincadeiras de faz de conta. Nas salas do primeiro ano não é tão usual encontrar este tipo de materiais, apesar de neste agrupamento existirem dois baús da matemática que circulam pelas diferentes salas dos diferentes estabelecimentos de ensino do 1.º CEB e pré-escolar. Estes baús contêm alguns materiais (torre de Hanói, cartas do Tio Papel, cartas do jogo do 24, jogos do campeonato nacional de jogos matemáticos, etc.), no entanto, não possuem cubos coloridos semelhantes aos utilizados neste estudo.

Alguns resultados

As crianças mais pequenas (3 anos) demonstraram muita dificuldade em descrever as imagens dos cartões referente a cada ensaio, devido à não apropriação de alguns conceitos e à utilização e aplicação escassa de vocabulário na descrição do espaço. Uma das crianças ainda trocava o nome de algumas cores quando a descrevia, embora não o fizesse quando ouvia a descrição; os termos "*à beira de*" e "*ao lado de*" foram muitas vezes utilizados com o significado de 'ao lado esquerdo de', 'ao lado direito de', 'à frente de', 'em cima de', … desde que os cubos tivessem uma face colada. O termo "*encostado*" foi usado uma única vez e os termos 'à esquerda' e 'à direita' quase nunca foram aplicados espontaneamente pelas crianças mais novas, apesar destes vocábulos serem utilizados na prática letiva das turmas, especialmente no tempo semanal da planificação dedicado à atividade física. Nesses momentos, são proporcionadas às crianças atividades para o desenvolvimento motor (motricidade fina e global) onde, imitando o adulto que dá as indicações, as crianças tocam, por exemplo, com a mão direita no ombro esquerdo, etc. Num dos jardins-de-infância é a própria educadora que dinamiza esta atividade física enquanto no outro jardim-de-infância é uma docente de educação física que o faz. Foi possível constatar que algumas das crianças de 3 anos identificam a sua mão direita e esquerda, no entanto não conseguem transferir essas aquisições de lateralidade para outros objetos. Além disso, elas utilizam, frequentemente, palavras com o sentido de uma frase completa, o que corrobora o movimento indutivo do aspeto fonético da linguagem apresentado por Vygotsky (2001). Por exemplo, a palavra isolada "*vermelho*" é pronunciada com o significado 'pega num cubo vermelho de entre os cubos amontoados' e as palavras "*amarelo baixo*" significam 'coloca um cubo amarelo em baixo, colado ao outro cubo'. Na execução da tarefa foi possível verificar que a criança que descreve a imagem age muitas vezes como se o outro soubesse, ou tivesse a obrigação de saber, o que esta lhe diz, mesmo que a linguagem seja confusa ou incompleta. Uma das crianças mais novas, ao descrever a construção correspondente ao ensaio de prática 1 (ver Figura 1), num dado momento da sua descrição, diz à colega para colocar o cubo vermelho ao lado do cubo azul. Como a descrição não é suficientemente clara para quem a está a construir, levando-a a realizar uma diferente da imagem do cartão (coloca o cubo vermelho à frente do azul), a criança que está a descrever acrescenta "*põe na pontinha*", dando a indicação de que o cubo deve ser colocado na extremidade.

Uma das crianças de 3 anos, de acordo com as indicações dadas pelo colega, efetuou a seguinte construção correspondente ao ensaio C2:

Figura 3 – Construção efetuada por uma criança de 3 anos

Neste ensaio em particular, a criança que dá as indicações descreve unicamente os cubos visíveis e a relação destes, dois a dois, no espaço, isto é, "*um [cubo] amarelo e um vermelho em cima; um amarelo em baixo à beira do outro amarelo; um azul aqui em cima do amarelo; outro azul e põe aqui à frente do amarelo*".

Nos ensaios C e D, onde um dos cubos não é visível, foi percetível o conflito interno sentido pelas crianças de todas as faixas etárias. Esse conflito dá-se não porque o cubo não é visível, mas porque não sabem a cor do cubo escondido. Uma criança de 4 anos, que já tinha executado todas as construções dos diferentes ensaios sob as indicações da colega, quando troca de papel com esta, isto é, passa a dar as orientações no ensaio C2 diz: "*O amarelo em baixo, o azul em cima do amarelo. E agora o vermelho, do lado direito, em cima de qualquer cor*". Outra criança de 5 anos, ao descrever a imagem correspondente ao ensaio C1 diz: "*Um azul em baixo; um vermelho em cima do azul. Um amarelo ao lado do vermelho, não sei qual é o que leva por baixo…*". Esta indefinição da cor do cubo 'invisível' é muito mais confusa e sem sentido para a criança que ouve a descrição e executa a construção, do que para a criança que dá as indicações. Tal facto levou a que as crianças demorassem muito mais tempo a pensar como descrever a construção de modo que esta fosse percetível para o colega, comparativamente com os ensaios anteriores. Nalguns casos foi mesmo necessário recomeçar e/ou reformular a própria descrição e construção, pois a criança que descrevia a figura esquecia-se da cor que tinha atribuído inicialmente ao cubo 'invisível'. A descrição dos ensaios C e D tornou-se mais fácil para as crianças depois destas os terem realizado primeiro.

As crianças de 4 anos de um dos jardins-de-infância demonstraram maior domínio dos termos "*esquerda*" e "*direita*" do que as outras da mesma idade. Parece-nos que tal facto se prende com a regularidade com que as atividades de motricidade são desenvolvidas e com o facto de ser a própria educadora a fazê-lo (embora seja sempre salutar as parcerias estabelecidas entre os docentes de outras áreas de especialização, a educadora tem mais presente na sua prática pedagógica as metas de aprendizagem a desenvolver e o nível de desenvolvimento real das suas crianças).

A troca de posição de cubos verificada na execução de certas construções, por algumas crianças de 5 anos, foi justificada pelas próprias com o facto de não terem escutado com atenção as instruções, porém não foi exatamente isso que constatamos. Uma das crianças trocou várias vezes a posição 'esquerda' e 'direita' dos cubos, na execução das construções a partir das descrições do colega; no entanto, não o fez quando passou a ser ela a dar as indicações com base nas imagens. Outra criança trocou pelo menos em dois momentos diferentes a posição frente com lado, quando, privada da imagem, apenas ouvia a descrição da mesma (colocou ao lado de um cubo o que deveria ter colocado à frente deste), embora não o tivesse feito ao descrever a imagem para o colega.

Relativamente às crianças de 6 anos que realizaram esta tarefa, duas delas revelaram pouco domínio da lateralidade, trocando várias vezes a esquerda com a direita, quer na descrição, quer na execução da construção. Uma dessas crianças foi a que nunca frequentou o ensino pré-escolar, enquanto a outra frequentou um jardim de infância que não pertence ao agrupamento onde está actualmente.

No geral, foi possível constatar uma lógica visual quer na descrição narrada pelas crianças, quer na construção executada por estas com base nessa descrição. A grande maioria descreve e faz as construções correndo o espaço da esquerda para a direita, sendo pouco frequente a descrição da direita para a esquerda (apenas uma criança num único ensaio), ou a partir de um cubo central (uma criança de 6 anos), ou por patamares – primeiro os cubos que se encontram num nível inferior, apoiados na mesa, e posteriormente os cubos que se encontram num nível superior, sobre outros cubos (uma criança de 4 e outra de 5 anos). Tal facto pode dever-se à assimilação que as crianças fizeram, nas suas rotinas quotidianas, do que é a ordem ‘correta’: por exemplo, quando escrevem o seu nome no canto superior esquerdo (e portanto, da esquerda para a direita) das folhas para as atividades de desenho livre; quando imitam os adultos que leem apontando para as palavras do texto, entre outros. O facto da maioria das crianças seguir a lógica visual da esquerda para a direita permite que elas coloquem no lado correto o cubo colorido solicitado, sem que lhe seja dito se é à esquerda ou à direita de, isto é, permite que a construção seja executada corretamente pela criança apesar das informações recebidas serem incompletas.

Conclusão

No que respeita ao modo como as crianças percecionam o que veem, constatamos uma predominância das relações topológicas na representação espacial, nomeadamente relações de proximidade/vizinhança (Piaget & Inhelder, 1993), com as crianças pequenas a utilizarem com mais frequência o termo “à beira de”, do que os termos ao lado ‘esquerdo de’, ‘direito de’, ‘à frente de’ e ‘atrás de’.

Parece existir uma relação entre a capacidade de perceção da figura fundo e a capacidade de identificação de relações espaciais, pois quer ao fazer a descrição do que veem, quer ao fazer a construção, as crianças relacionam os cubos dois a dois, sendo esses cubos simultaneamente o seu foco e o seu fundo.

As principais dificuldades sentidas pelas crianças no domínio e aplicação do vocabulário espacial e na tomada de decisão relativamente à cor do cubo "invisível" levam-nos a concluir da importância da inclusão deste tipo de atividades para a construção da representação espacial na criança.

A comunicação matemática presente neste tipo de tarefas, para além de favorecer a atenção/concentração e enriquecer o vocabulário espacial da criança, ajuda-a a desenvolver as competências de visualização, na medida em que o cérebro tem de descodificar o que os olhos veem e isso só é possível através da reflexão que surge quando a criança verbaliza o seu pensamento, isto é, passa o seu discurso interior para um discurso exterior (Vygotsky, 2001). Como refere Vygotsky, "[as] palavras não se limitam a exprimir o pensamento: é por elas que este acede à existência" (2001, p. 288).

Referências bibliográficas

Abrantes, P., Serrazina, L., Oliveira, I., Loureiro, C., & Nunes, F. (1999). *A matemática na educação básica.* Lisboa: Ministério da Educação – D.E.B.

Alves, C. S., & Gomes, A. (2011). Uma avaliação diagnóstica sobre a percepção de relações espaciais em crianças dos 3 aos 6 anos. *Atas XXII SIEM.* Lisboa (versão digital).

Arriaga, P., Silva, A., & Esteves, F. (2001). *Os efeitos de um jogo de computador nas aptidões perceptivas e espaciais.* Obtido em 3 de Setembro de 2010, de http://repositorio-iul.iscte.pt/bitstream/10071/2162/1/2001_TIP_jogos_aptid%C3%83%C2%B5es.pdf

Barros, M. G., & Palhares, P. (1997). *Emergência da Matemática no jardim-de-infância.* Porto: Porto Editora.

Clements, D. H., Swaminathan, S., Hannibal, M. A., & Sarama, J. (1999). Young children's concepts of shape. *Journal for Research in Mathematics Education, 30 (2)*, 192-212.

D.E.B. (1997). *Orientações curriculares para a educação pré-escolar.* Lisboa: Ministério da Educação.

Del Grande, J. (1987). Spatial perception and primary geometry. In M. Lindquist, & A. Shulte (Ed.), *Learning and Teaching Geometry, K-12;* (pp. 126-135). Columbus College: NCTM.

Frostig, M., Horne, D., & Miller, A.-M. (1994). *Figuras y formas : guía para el maestro : programa para el desarrollo de la percepción visual : aprestamiento preescolar corporal, objetal y gráfico : niveles basico, intermedio, adelantado.* Madrid: Editorial Medica Panamericana.

Gelman, S. A. (2006). Early conceptual development. In K. M. Philips (Ed.), *Blackwell handbook of early childhood development* (pp. 149-166). WileyBlackwell.

Ginsburg, H. P., Cannon, J., Eisenband, J., & Pappas, S. (2006). Mathematical thinking and learning. In K. M. Phillips (Ed.), *Blackwell handbook of early childhood development* (First ed., pp. 208-229). WileyBlackwell.

Gordo, M. P. (1993). *A visualização espacial e a aprendizagem da matemática: um estudo no 1º ciclo do ensino básico.* Obtido em 4 de Dezembro de 2009, de http://run.unl.pt/bitstream/10362/278/1/gordo_1993.pdf

Maia, J. S. (2009). *Aprender…Matemática do jardim-de-infância à escola.* Porto: Porto Editora.

Matos, J. M., & Gordo, M. F. (1993). Visualização espacial: algumas actividades. *Educação e Matemática , 26*, 13 – 17.

Ministério da Educação. (2004). *Organização curricular e programas. Ensino básico - 1º Ciclo.* Lisboa: D. E. B.

NCTM. (1994). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar.* Lisboa: APM/IIE.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1993). *A representação do espaço na criança.* (B. M. Albuquerque, Trad.) Porto Alegre: Artes Médicas.

Vygotsky, L. S. (2001). *Pensamento e Linguagem.* (R. C. Mores, Ed.) Obtido em 15 de Março de 2012, de http://search.4shared.com/postDownload/_moRlHJm/PensamentoeLinguagem_vygotsky_.html

REFLEXOS DE UMA OFICINA DE FORMAÇÃO NAS PRÁTICAS DE DUAS PROFESSORAS DE MATEMÁTICA

Justina Pais Neto
Escola Secundária de Penafiel
justinapaisneto@gmail.com

Resumo

Nesta comunicação pretende-se compreender como se reflete a frequência de uma oficina de formação (OF), no âmbito do Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB), de duas professoras de Matemática nas suas práticas de ensino da Geometria. Em particular, procura-se perceber como concretizam as orientações programáticas relativas ao ensino-aprendizagem da Geometria e que papel tem a resolução de problemas nesse processo. A investigação seguiu uma abordagem qualitativa e os dados foram recolhidos em duas fases: durante a oficina de formação e após a mesma, em contexto de sala de aula. Os resultados sugerem que a OF teve diferentes reflexos nas práticas letivas das professoras, sendo as suas conceções sobre o ensino-aprendizagem e o papel da resolução de problemas nesse processo um fator determinante nas decisões tomadas. O apoio concreto, na sala de aula, a um ensino através da resolução de problemas parece emergir como uma necessidade para que o PMEB seja mais adequadamente concretizado.

Palavras–chave: Geometria, Resolução de Problemas, Formação Contínua, Práticas.

Introdução

O Plano de Ação para a Matemática (PAM), no terreno desde 2006, constituiu uma resposta à reflexão dos docentes sobre os resultados dos exames de Matemática do 9.º ano de escolaridade, reflexão essa que foi acompanhada por um diagnóstico efetuado pelos professores de Matemática sobre as dificuldades de aprendizagem dos alunos e as sugestões apresentadas para ultrapassar essas dificuldades e melhorar as aprendizagens. Uma das ações do PAM refere-se ao *Programa de Matemática do Ensino Básico* (PMEB) (ME, 2007), homologado em 2007. Após uma fase de experimentação, iniciou-se o processo de generalização, em 2009/10. A este início de generalização candidataram-se cerca de 400 agrupamentos de escolas ou escolas não agrupadas, beneficiando de acompanhamento científico e pedagógico durante os três anos de duração do processo (ME, 2006a), ME, 2006b); ME 2007 e Santos, Boavida, Oliveira & Carreira, 2008). Outro tipo de apoio à concretização do PMEB foi a oferta, por parte da tutela, de oficinas de formação, temáticas e por ciclos de escolaridade, destinadas prioritariamente aos professores que iniciariam a generalização do programa em 2009/10.

O PMEB é um reajustamento do programa anterior em que, entre outros aspetos, se dá uma ênfase clara às capacidades transversais – resolução de problemas, raciocínio matemático e comunicação matemática – e se destacam os papéis ativos esperados tanto dos alunos como dos professores, o que acarreta, para estes, grandes desafios em termos das práticas de sala de aula. Em particular, o PMEB privilegia o ensino através da resolução de problemas (ME, 2007; Santos et al, 2008).

A capacidade de resolução de problemas é vista como uma via para a aquisição de conhecimentos, sendo um dos principais objetivos do ensino da Matemática (ME, 2007).

Ao longo de todo o Ensino Básico, a Geometria aparece como elemento estruturante do pensamento matemático dos alunos, apresentando um grau de profundidade crescente, reforçando a importância da visualização para a aprendizagem e conferindo maior destaque às transformações geométricas (ME, 2007). O PMEB sugere uma abordagem ao ensino da Geometria que inclua tarefas de exploração, experimentação, resolução de problemas e o estabelecimento de conexões com outros temas matemáticos, utilizando diferentes recursos, tais como materiais manipuláveis, instrumentos de desenho e de medida, programas de computador e applets.

Nesta comunicação, que se insere num estudo mais vasto (Neto, 2011), pretende-se compreender como se reflete a frequência de uma OF, no âmbito do PMEB, de duas professoras de Matemática nas suas práticas de ensino da Geometria. Em particular, procura-se perceber como concretizam as orientações programáticas relativas ao ensino-aprendizagem da Geometria e que papel tem a resolução de problemas nesse processo.

Fundamentação Teórica

Neste trabalho, entendemos por problema uma tarefa fechada que comporta um grau de dificuldade considerável, estando indicado claramente o que é dado e o que é pedido, mas em que não se dispõe de um processo imediato de resolução (Ponte, 2005). No entanto, é necessário distinguir problema de resolução de problemas. O conceito de resolução de problemas tem vindo a adquirir diferentes significados ao longo do tempo. As ideias de Polya (1967, 1977) influenciaram de forma significativa este conceito e o seu lugar no currículo. O autor defende a resolução de problemas como uma forma de pensar e ensinar, considerando-a a espinha dorsal do ensino da Matemática (Polya, 1967).

De acordo com Santos-Trigo (1996), existem três perspetivas relacionadas com o ensino da resolução de problemas: (1) ensino *da* resolução de problemas (surgem no *final do capítulo,* como um exercício disfarçado); (2) o ensino *com* a resolução de problemas (esta abordagem centra-se na utilização ou aplicação de conteúdos matemáticos para resolver problemas); e (3) o ensino *através* da resolução de problemas (em que a aprendizagem matemática emerge da própria atividade de resolução de problemas). Esta última perspetiva é a que encontramos mais presente no PMEB, apesar de haver lugar para as outras duas.

A aprendizagem da Geometria é potenciada e potencia o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas. O trabalho em torno de tarefas geométricas desafiantes contribui para desenvolver a capacidade de resolução de problemas; por outro lado, a resolução de problemas contribui para a construção de conhecimento matemático (geométrico) novo e pode ser usada como forma de rever ou consolidar conceitos ou procedimentos (em Geometria). (Abrantes, 1999; Candeias, 2005; NCTM, 2007; Vale & Pimentel, 2004; Van de Walle, 2001). A ênfase da resolução de problemas no ensino-aprendizagem da Geometria presente no PMEB, e dado que o ensino através da resolução de problemas (Santos-Trigo, 1996) não tem sido uma prática regular (APM, 1998; Matos, 2008; Ponte & Serrazina, 2004) estas recomendações trazem mais desafios ainda aos professores.

As oficinas de formação pretendem, entre outros aspetos, melhorar o conhecimento matemático dos professores, dando especial atenção ao conhecimento do currículo, dos alunos e seus processos de aprendizagem, bem como dos processos instrucionais na sala de aula (Ponte & Oliveira, 2002), ou seja, o desenvolvimento do conhecimento didático do professor (Ponte, 1999), tendo como pano de fundo um tema do PMEB.

Leikin (2011) procurou investigar como é que os professores, após frequentarem uma iniciativa de formação contínua, implementavam nas suas práticas tarefas com soluções múltiplas, isto é, tarefas em que é pedido explicitamente ao aluno que as resolva de várias formas. A investigadora identificou quatro estilos de implementação: (1) simples; (2) adaptativa; (3) direta; e (4) inventiva.

No primeiro, os professores selecionam problemas prescritos pelo currículo, com pelo menos dois processos de resolução. No segundo, os professores fizeram adaptações às tarefas trabalhadas no curso de formação que escolheram para levar à sala de aula. Essas adaptações "foram baseadas nas suas perceções acerca da adequabilidade das tarefas aos seus alunos. Normalmente, os professores limitaram o "espaço de soluções" (Idem). Frequentemente, os professores concentraram-se na revisão de conhecimentos ou procedimentos previamente adquiridos. Num estilo de *implementação direta*, os professores usaram nas suas aulas materiais tal como lhes foram fornecidos durante o curso de formação realçando abordagens inovadoras às tarefas propostas e estabelecendo frequentemente conexões matemáticas. Finalmente, num estilo de *implementação inventiva*, os professores elaboraram tarefas com soluções múltiplas originais que lhes permitissem atingir os objetivos de aprendizagem traçados para os seus alunos. Este estilo exige uma "escolha cuidadosa dos problemas matemáticos" (Leikin, 2011, pp. 10-11). Foi raramente observado e aconteceu quando o objetivo da aula era o ensino de conteúdos novos.

No caso do presente estudo, procura-se perceber como duas professoras implementam os problemas no ensino-aprendizagem da Geometria, compreendendo como se reflete, nas suas práticas, uma OF que preconiza um ensino através da resolução de problemas e favorece um estilo de implementação inventivo de tarefas *inovadoras*. Neste estudo usamos o termo problema na aceção de Ponte (2005).

Metodologia

A investigação seguiu uma metodologia qualitativa e interpretativa, baseada em estudos de caso. Os estudos de caso têm contribuído para um melhor conhecimento dos problemas da prática e das instituições educativas (Bodgan & Biklen, 1994; Yin, 2002), já que incidem sobre uma situação específica, são de natureza descritiva e o interesse incide mais sobre o processo de investigação do que sobre os resultados (Carmo & Ferreira, 1998; Ponte, 2006).O estudo desenvolveu-se em duas fases. A primeira fase decorreu entre maio e julho de 2009, no contexto de uma oficina de formação que abordou as orientações do PMEB relativamente ao tema da Geometria. Esta oficina de formação foi oferecida em duas localidades distintas da zona metropolitana do Porto. A segunda fase do estudo realizou-se no âmbito da primeira fase da generalização do PMEB, no ano letivo de 2009/10. Foram constituídos dois casos, de duas professoras que frequentaram a oficina de formação, e que se desenrolaram durante o processo de ensino-aprendizagem do tópico *Triângulos e Quadriláteros* do 7.º ano de escolaridade, no ano letivo seguinte à OF.

Participantes

As participantes foram selecionadas dentre o conjunto de formandos que integraram duas turmas da oficina de formação sobre a qual incidiu a primeira fase do estudo. A seleção das professoras participantes teve como base os seguintes critérios: (1) a disponibilidade para serem observadas em sala de aula; (2) o grau de probabilidade de lecionarem tópicos de Geometria do 3.º Ciclo do Ensino Básico, durante o ano letivo de 2009/10 no âmbito do PMEB.

A escolha recaiu sobre Catarina e Maria, de turmas diferentes da OF, que lecionavam Matemática em duas escolas diferentes. No Quadro 1 apresentamos as principais características de cada uma das professoras.

Quadro 1: Principais características das professoras que participaram no estudo.

Maria	Catarina
Quadro de Escola	Quadro de Zona
43 anos, 17 de service	32 anos, 10 de serviço
Prefere álgebra, não gosta de geometria	Prefere números e geometria
Prefere lecionar ensino básico	Prefere alternar entre o ensino básico e o secundário
Prática de sala de aula: assume um papel de transmissora de conhecimentos	Prática de sala de aula: assume um papel de potenciadora de aprendizagens

Instrumentos de recolha de dados

No estudo realizado, constituíram principais fontes de dados as sessões da oficina de formação, as aulas das professoras selecionadas, as próprias professoras e documentos de origem diversa, em particular gerados no âmbito da oficina de formação e da prática letiva das professoras. Os processos de recolha de dados, utilizados foram: (1) a observação não participante das sessões da oficina de formação; (2) a observação não participante das aulas de Catarina e Maria durante o período do ano letivo de 2009/10 em que lecionaram o tópico *Triângulos e Quadriláteros* do 7.º ano de escolaridade; (3) a realização de entrevistas semiestruturadas às duas professoras em vários momentos (após a oficina de formação, durante e após a recolha de dados de natureza observacional em contexto de sala de aula) para além de várias conversas informais; e (4) a recolha de documentos produzidos por todos os formandos da oficina de formação, com enfoque nos trabalhos de Maria e Catarina, documentos produzidos no âmbito da prática letiva observada das duas professoras (planos de aula, testes, fichas de trabalho, etc.), e documentos gerados pelas observações realizadas (notas de campo).

Análise de dados

Recorremos à análise de conteúdo de todos os documentos recolhidos para dar resposta ao problema em estudo. A análise dos dados teve por base a identificação de, entre outros aspetos, as práticas de sala de aula e a procura de relações entre a frequência e conteúdo da oficina de formação e as práticas identificadas de cada uma das professoras selecionadas.

Resultados

De seguida apresentam-se, alguns elementos acerca das práticas de sala de aula, importância que atribuem à resolução de problemas na aprendizagem da Geometria (antes e depois da frequência da OF) e a influência atribuída ao acompanhamento do PMEB.

Maria

Logo após a frequência da OF, Maria assume-se como uma professora tradicional em sala de aula: "Isto que (…) [as formadoras] nos estão a fazer ver em relação ao PMEB acho fantástico. Acho muito bom. E eu olho para as minhas aulas com o método tradicional" (E., fim da OF, 07/2009). De acordo com a professora, após a exposição dos conteúdos para toda a turma, resolvem-se exercícios com o objetivo de consolidar conhecimentos e treinar procedimentos.

> Há aulas de dois tipos. As práticas de resolução de exercícios (…) do livro, ou passo no quadro e dou-lhes um bocadinho de tempo para pensar e podem conversar dois a dois, no máximo. Depois começo a corrigir no quadro, bem eu não, eles. Nas outras aulas, normalmente exponho a matéria e tento depois aplicação. (Entrevista final (EF), 04/2010)

Na verdade, foi possível testemunhar a reação de surpresa dos seus alunos quando lhes propôs uma tarefa de carácter mais problemático, demonstrando que se tratava de algo *inovador* na sala de aula.

Aluno: Esta ficha é para fazer antes ou depois da matéria?

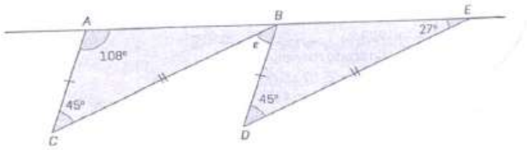
Maria: A matéria está aqui na ficha. (Aula, 03/2010)

Maria reconhece que a frequência da OF lhe foi muito vantajosa. Possibilitou-lhe conhecer o próprio programa, familiarizando-a relativamente às intenções, tópicos e metodologias de sala de aula nele preconizadas. No entanto, não parece ter-lhe despertado a atenção para o papel e importância da resolução de problemas no ensino-aprendizagem da Matemática e da Geometria em particular, mesmo após ter lecionado temas de Geometria no âmbito do PMEB:

> Estou pouco à vontade com as capacidades transversais (…)Valorizo os problemas de Geometria do dia a dia, altura das árvores, etc., como aplicação (…) Não utilizei muito este ano resolução de problemas em Geometria. Tenho dificuldade em identificar as atividades do livro que são problemas. (Entrevista final, 04/2010)

A frequência da OF não parece ter tido reflexos nas práticas de sala de aula de Maria pois a professora manteve, nas aulas observadas, as mesmas estratégias de ensino que referiu utilizar anteriormente. Por exemplo, a questão da elaboração de demonstrações não foi abordada diretamente pela Maria e quando propôs uma tarefa que se aproximava os alunos não conseguiram responder (Figura1).

5. Na figura seguinte estão representados os triângulos ABC e BED. Sabe-se que A, B e E estão alinhados, que AC≡BD e que CB≡DE.



5.1 Prova que os triângulos ABC e BED são congruentes.

5.2 Determina a amplitude do ângulo ε. Explica o teu raciocínio.

Figura 1: Aula de 04/1010

Após a frequência da OF, Maria refere que muito do que é recomendado no PMEB, especialmente quanto à necessidade de diversificação de tarefas e às orientações para o trabalho em sala de aula, não se adequa aos seus alunos, por terem mau comportamento e dificuldades em realizar as tarefas que não envolvam apenas a repetição de procedimentos. Além destes fatores, Maria demonstra alguma insegurança em utilizar as tarefas propostas pela DGIDC:

> …estive a ver aquelas tarefas e são muito difíceis… Há coisas nas brochuras que perdem um bocado de tempo (…). E … logo a seguir põem coisas que nem eu sei fazer. (E. pós-aula, 04/2010).

Nas aulas observadas, Maria nunca recorreu a tarefas propostas na OF e apenas utilizou parte de uma das disponibilizadas pela DGIDC. Assim, evidencia, em geral, um estilo *simples* de implementação (Leikin, 2011); quando muito, e com base nos dados recolhidos, poderá existir uma implementação *adaptativa*, mas, dadas as suas expectativas acerca do desempenho dos alunos, largamente associadas ao seu fraco comportamento, a adaptação inerente a este estilo de implementação não iria, decerto, ao encontro das recomendações do PMEB.

> Ela [uma das formadoras] estava a falar e eu, mas eu para saber a área só preciso do lado. E se calhar a gente já vai com estas ideias para as aulas e não têm o material e a gente chega lá e desenha…Eu devo ser um bocado má nesse aspeto (…) Por exemplo vejo-me há uns anos atrás em que tinha os miúdos mais tempo a fazer exercícios sozinhos e eu andava pelos lugares. E agora eu não me vejo muito com esse tempo. Agora mando logo para o quadro, se eu der esse tempo a aula fica um *Texas.* (E., fim da OF, 07/2009)

A falta de confiança para tentar mudar a sua prática de sala de aula pode levar a frustrações e desânimos, fazendo com que Maria se refugie no mau comportamento dos alunos, nas suas dificuldades em realizar tarefas de grau cognitivo mais complexo que os exercícios rotineiros e na questão do cumprimento do programa para não prosseguir para um outro estilo inventivo de implementação do programa (na aceção de Leikin, 2011).

Outro aspeto a referir é a importância que Maria dá ao acompanhamento do PMEB filtrava as contribuições que os colegas de escolas vizinhas levavam para as reuniões de acompanhamento, mais do que as propostas do professor acompanhante, selecionando o que considerava adequado aos seus alunos e à sua forma de estar no ensino: "Não trago grande coisa das reuniões de acompanhamento. É mais dos colegas de outras escolas. E depois olho para aquilo e vejo se vou dar tudo ou o que posso aproveitar". (E. pós-aula, 04/2010).

Catarina

Logo após a frequência da OF, Catarina reporta assumir um papel de potenciadora de aprendizagens, a partir do trabalho em torno de tarefas diversificadas.

> Às vezes até utilizo o mesmo enunciado e trabalho de uma forma diferente. (…) Uso também tarefas rotineiras, não se pode dispensar.

> Recorro ao *software* de Geometria (…) permite ver muitos exemplos em pouco tempo, refutar conjeturas iniciais facilmente. É uma motivação(…) muito mais interessante. Mas não dispenso as construções no papel. Os alunos ganham com os imprevistos que surgem durante as aulas(…), participam, não é só o professor. (E., fim da OF, 10/2009)

Nas aulas de Geometria observadas, Catarina evidencia uma abordagem exploratória e um modelo de ensino pela descoberta guiada, usando tarefas diversificadas e diferentes materiais: ”A ideia principal é não impor, exploram até chegarem…é claro que sozinhos não conseguem chegar às ideias que os matemáticos levaram anos a chegar. Mas não impor. Eu já dava assim…” (E. pós-aula 02/2010).

Na opinião de Catarina, a resolução de problemas desempenha diversos papéis nas suas aulas: como aplicação de conhecimentos já adquiridos (tanto em propostas de trabalho para a sala de aula como para trabalho de casa) e também como forma de introdução a novos conceitos (Figura 2).

4. Na seguinte figura estão representados os triângulos ABC e DEF. A recta GH é paralela ao lado AB. Qual é a amplitude do ângulo ACB?

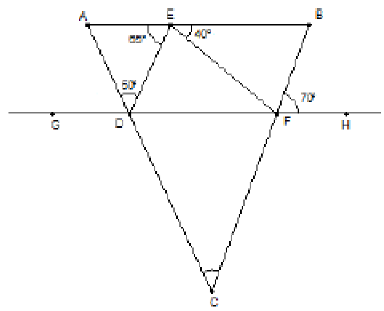


Figura 2: Aula, 02/2010

Orienta a sua prática de sala de aula por uma postura próxima das recomendações metodológicas do PMEB, procurando realizar um ensino *através* da resolução de problemas. Catarina propõe tarefas de natureza diversificada e recorre frequentemente ao trabalho em grupo: “Tenho a preocupação de também variar um bocadinho, não só trabalho de pares, nem individual, nem de grupo.” (E., pós-aula, 02/2010). Os materiais disponibilizados pela DGIDC (de apoio à concretização do PMEB), APM e pelo GAVE são uma fonte privilegiada para a escolha de tarefas para as aulas que, contudo, também recorre a diferentes manuais escolares.

No caso de Catarina, o principal impacto da OF parece estar relacionado com a perseverança com que concretiza o PMEB. Não desanima, nem recua perante as dificuldades sentidas pelos alunos quando implementa tarefas de carácter problemático, demonstrações, capacidades de ordem superior. Apesar disso, Catarina reconhece que o trabalho em sala de aula inerente à implementação do PMEB exige mais tempo, preparação e reflexão do professor relativamente ao ensino tradicional, em particular no que toca à resolução de problemas em Geometria.

Catarina indica como vantagens da frequência da OF não apenas o facto de *ter estudado* e analisado o programa, mas também ter constituído um espaço de partilha de experiências, apresentação e esclarecimento de dúvidas, o que lhe permitiu conhecer exemplos concretos de tarefas que respondem ao que é sugerido no PMEB. A professora destaca, em particular, o facto de, durante a oficina de formação, se ter abordado a questão do trabalho com os alunos sobre demonstrações geométricas por considerar que é uma abordagem difícil com alunos do 7.º ano. Este aspeto é apontado por Catarina como constituindo uma mais-valia em relação aos colegas da sua escola que não frequentaram nenhuma OF no âmbito do PMEB. Estes perante os assuntos/tarefas que envolvem demonstrações limitam-se à transmissão de processos demonstrativos e aplicação de propriedades.

> Nós vimos na formação uma tarefa que discutimos deste género. Era semelhante. Parece-me que a importância no 7.º ano está na demonstração (…) a formação ajudou, porque mostrou algo semelhante e ajudou a refletir…sim, e eu noto que mesmo outros colegas quando veem os tópicos, leem lá a soma dos ângulos internos e dizem: eles já deram isto. E eu que tive a formação sei que não é suposto dar, mas demonstrar. (E., pós-aula, 02/2010)

A OF parece também ter sido um fator motivador para Catarina, no sentido de lhe ter dado mais confiança para o trabalho a realizar em sala de aula. Por exemplo, nas tarefas que envolvem construções geométricas ou recurso a material de desenho e medida, e nas tarefas de exploração, a professora aceita melhor o facto de os alunos demorarem mais tempo do que em tarefas mais rotineiras por ter compreendido melhor a complexidade da atividade matemática dos alunos quando envolvidos nessas tarefas. Também nas tarefas que envolvem demonstrações, refere que aprendeu a não desistir perante a apatia e dificuldades demonstradas pelos alunos.

> Trabalhar uns com AGD outros com o material de desenho. Tentar trabalhar abstrato as demonstrações o que é difícil…ao mesmo tempo trabalha-se com a tecnologia e é muito mais fácil trabalhar com eles com o Geogebra do que com material de desenho, começam a ser um bocadinho mais críticos a comparar. Eles precisam de mais aulas deste tipo, mas para que não fique monótono vou quebrar com exercícios. (E pós-aula, 02/2010)

A frequência da OF parece ter reforçado a prática usual de sala de aula de Catarina, em que o aluno tem um papel ativo na construção do seu conhecimento e em que parece emergir um estilo *direto* de implementação de tarefas com resolução de problemas do PMEB, com algumas características de um estilo de implementação *inventivo* (Leikin, 2011).

Na opinião da Catarina, o acompanhamento ao PMEB não se traduz num apoio a cada um dos professores de modo a aumentar o seu conhecimento didático e justifica a sua opinião com base em dois aspetos: (1) o facto de não poder estar presente habitualmente nas reuniões mensais; e (2) o conteúdo dessas reuniões de acompanhamento (não dirigidas ao trabalho em torno do PMEB)

> O problema é que é só de longe a longe e eu só fui a uma, à que se realizou nesta escola. O que era importante é que a coordenadora da escola estivesse em contacto e colocasse essas dúvidas todas… E dá-me a impressão que nas reuniões têm ocupado bastante tempo por causa do plano[PMII] e por causa de outras questões...(E pós-aula, 03/2010).

Conclusões

Neste artigo, procura-se perceber como duas professores após a frequência de uma OF no âmbito da 1ªfase da implementação do PMEB, concretizam as orientações relativas ao ensino-aprendizagem da Geometria e ao papel da resolução de problemas nesse processo. A frequência da OF, refletiu-se de forma diferente nas práticas de cada uma das professoras envolvidas neste estudo, tanto no que toca ao ensino-aprendizagem da Geometria como ao papel da resolução de problemas. O impacto da OF nas práticas de Maria foi muito reduzido, aliado a uma visão tradicional e expositiva do ensino, e à falta de confiança nas próprias orientações metodológicas subjacentes ao PMEB, refugiando-se nas dificuldades e comportamento dos alunos. A resolução de problemas parece ser prática pouco frequente (apenas como aplicação esporádica de conhecimentos ou processos), evidenciando uma perspetiva de ensino *da* resolução de problemas (Santos-Trigo, 1996). Face à implementação da resolução de problemas no âmbito do PMEB, evidencia um estilo *simples* na aceção de Leikin (2011). Já Catarina apresentou algumas caraterísticas de um estilo de implementação *inventivo* (Leikin, 2011) e um ensino *através* da resolução de problemas (Santos-Trigo, 1996). A OF parece ter reforçado a perspetiva dinâmica do processo de ensino-aprendizagem de Catarina e as suas práticas habituais de sala de aula (alinhadas com o que é preconizado no PMEB) que, tendo a professora ganho maior confiança, sofreram um maior impulso. Apesar do balanço da

OF ser positivo, a sua frequência por si só, não pareceu produzir alterações, nos casos estudados, em termos de práticas de sala de aula, das duas professoras, relativas à Geometria e ao papel da resolução de problemas. Um apoio concreto na sala de aula, a um ensino *através* da resolução de problemas possibilitaria uma mudança de opinião no caso de Maria. A investigação em que este artigo se baseia (Neto, 2011) sugere ainda a necessidade dos professores aprofundarem o seu conhecimento geométrico em geral.

Em relação à importância dispositivo de acompanhamento ao PMEB, é referido por ambas as professoras como um espaço onde seria necessário ter um trabalho mais focado na implementação do PMEB.

Referências bibliográficas

Abrantes, P. (1999). Investigações em Geometria na Sala de Aula. In E. Veloso, H. Fonseca, J. P. Ponte & P. Abrantes (Orgs.), *Ensino da Geometria no Virar do Milénio*, Lisboa: DEFCUL, 1999

APM (1998). *Matemática 2001. Diagnóstico e Recomendações para o Ensino e Aprendizagem da Matemática - Relatório preliminar*. Retirado em 11 de março de 2009, de: http://www.apm.pt

Bodgan, R., & Biklen, S. (1994). *A investigação qualitativa em educação. Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Candeias, N. (2005). *Aprendizagem em ambientes de geometria dinâmica.* Tese de Mestrado. Universidade de Lisboa.

Carmo, H., & Ferreira, M. M. (1998). *Metodologia de investigação: Guia para a autoaprendizagem*. Lisboa: Universidade Aberta.

Leikein, R. (2011). Multiple-solutions task: From a teacher education course to teacher partice. *ZDM,* Volume 43, Numbers 6-7 (2011), 993-1006.

Matos, J. (2008). A resolução de problemas e a identidade da educação matemática em Portugal. Atas do XIX *Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp.141-158). Badajoz. Espanha: APM.

Ministério da Educação (2006a). *Plano de Ação da Matemática*. Retirado em 24 de março de 2008, de: <http://www.portugal.gov.pt/Portal/PT/Governos/Governos_Constitucionais/GC17/Ministerios/ME/Comunicacao/Outros_Documentos/20060609_ME_Doc_Sucesso_Matematica.htm>

Ministério da Educação (2006b). *Plano de Ação da Matemática*. Retirado em 24 de março de 2008, de: <http://www.min-edu.pt/outerFrame.jsp?link=http%3A//www.dgidc.min-edu.pt/>

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação – DGIDC.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar.* Lisboa: APM

Neto, J.P. (2011). *Resolução de Problemas em Geometria no 3.º Ciclo do Ensino Básico – Influência da formação contínua nas conceções e práticas dos professores de Matemática*. Dissertação de Mestrado. Universidade Portucalense.

Polya, G. (1967). *L'enseignement Mathématique, 1 XIII,* fasc. 3, 233-241

Polya, G. (1977). *A Arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro, Brasil: Edições Interciência.

Ponte, J. P. (1999). Didácticas específicas e construção do conhecimento profissional. In J. Tavares, A. Pereira, A. Pedro, & H. Sá (Eds.), *Investigar e formar em educação – Proceedings of XI EIEM* (pp. 59-72). Porto, Portugal: SPCE.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Org.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema, 25*, 105-132.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2004). As práticas dos professores de Matemática em Portugal. Educação e Matemática (Associação de Professores de Matemática), 80, 8-12.

Ponte, J. P., & Oliveira, H. (2002). Remar contra a maré: A construção do conhecimento e da identidade profissional na formação inicial. *Revista de Educação, 11*(2), 145-163

Santos-Trigo, M. (1996). An exploration of strategies used by students to solve problems with multiple ways of solution. *Journal of Mathematical Behavior, 15*, 263-284.

Santos, L., Boavida, A., Oliveira, H., & Carreira, S. (2008). *Resolução de problemas. O quê? Como? Quando? Algumas ideias*. Documento de trabalho do Acompanhamento à implementação do PMEB. Documento não publicado.

Vale, I. & Pimentel, T. (2004). Resolução de Problemas. In Pedro Palhares (Coord.), *Elementos de Matemática para professores do ensino básico* (pp. 7-51). Lisboa: Lidel.

Van de Walle, J. A. (2001). Geometric thinking and geometric concepts. In Pearson Education. (Eds.), *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally*, (4th ed.) Boston: Allyn and Bacon. Retirado em junho 1, 2011 de: <http://www.learner.org/courses/learningmath/geometry/pdfs/session9/vand.pdf>

O CONHECIMENTO GEOMÉTRICO DE FUTUROS PROFESSORES DO ENSINO BÁSICO: UMA BREVE CARACTERIZAÇÃO

Angela Couto

Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico do Porto

angel@ese.ipp.pt

Isabel Vale

Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo

isabel.vale@ese.ipvc.pt

Resumo

Este texto tem por base uma investigação, ainda em curso, cujo principal objetivo é identificar e compreender quais as principais dificuldades de futuros professores de matemática do ensino básico, ao nível dos seus conhecimentos em Geometria, no contexto da unidade curricular de Geometria durante a sua licenciatura. Optou-se por uma abordagem qualitativa na modalidade de estudo de caso, sendo a recolha de dados feita através de observações, entrevistas, realização de um conjunto diversificado de tarefas, de um teste diagnóstico e outros documentos. A presente comunicação debruça-se no Teste efetuado aos futuros professores no início da unidade curricular. A análise preliminar dos dados aponta para um fraco desempenho dos futuros professores nas questões do Teste que abordam conhecimentos elementares de Geometria.

Palavras-chave: conceitos elementares em Geometria, conhecimento geométrico e formação inicial de professores.

Introdução

A permanente constatação da ausência de conceitos básicos estruturantes nos alunos que ingressam e continuam a ingressar, desde 2007/08, nos cursos da Licenciatura em Educação Básica (LEB), abriram caminho à pretensão de investigar de que forma é que o ensino da matemática pode proporcionar não apenas a aprendizagem da matemática mas também uma aprendizagem sobre a matemática. Queremos compreender o modo como desenvolver, nos estudantes da LEB, uma sólida formação matemática e didática bem como uma atitude mais positiva em relação à matemática e às suas capacidades em Geometria. Pretendemos que estes estudantes, na sua atividade docente, sejam capazes de despertar nos seus alunos o gosto pela matemática e consequentemente torná-los mais aptos em matemática.

As diferentes recomendações e orientações curriculares, a nível nacional e internacional (e. g. PMEB, DGIDC, NCTM), em relação à Geometria do 1º e 2º ciclo, pressupõem que os futuros professores dominem esses conhecimentos. Por isso, decidimos, num contexto natural de sala de aula, procurar identificar e compreender como se relacionam os futuros professores ao nível das suas perceções e conhecimento de conteúdos em relação à Geometria.

A formação inicial de professores

A formação de professores tem sido um campo de investigação, sobretudo a partir dos anos 90. Desde então a investigação sobre a formação inicial de professores tem sido enorme, existindo um volume muito significativo sobre o conhecimento que os futuros professores desenvolvem para ensinar (Ponte & Chapman, 2008). Muitos desses estudos não consideram "as perspetivas dos futuros professores sobre o que estão a aprender, assim como não explicam o desenvolvimento de tal conhecimento, levando em conta as suas experiências passadas e presentes" (Oliveira & Hannula, 2008, p. 16). Vários formadores de professores (e. g. Ball, Bass, Sleep & Thames, 2007; Bullough & Gittlin, 2001; Korthagen, Kessels, Koster, Lagerwerf & Wubbels, 2001, Loughran, 2006; Ma, 2009; Segal, 2002; Shulman, 1986) abordaram questões sobre o professor e a formação de professores. No entanto, por diversas razões, estes contributos têm falhado na resposta a alguns dos dilemas que ainda hoje persistem na formação de professores.

Uma das finalidades da formação inicial de professores é desenvolver os conhecimentos e competências práticas nos professores, não só para que venham a reproduzi-las, mas, sobretudo, para que as suas práticas sejam mais dinâmicas, interativas e reflexivas (Vale, 2002). Esta ideia vai de encontro às ideias de Shulman (1986) quando em relação à formação de professores refere que os investigadores em educação têm como tarefa compreender os fenómenos que lhe estão inerentes, aprender como melhorar a sua implementação e descobrir maneiras de preparar e formar educadores e professores. Vários investigadores realçam a importância de proporcionar aos professores, durante a sua formação, experiências que aumentem os seus conhecimentos de matemática e sobre a matemática (e. g. Ball et al., 2007, Ma, 2009). Contudo o desenvolvimento do conhecimento necessário ao exercício da profissão de professor compreende diferentes componentes que, nos últimos anos têm vindo a ser descritas de várias formas, não se distanciando muito do modelo sobre o conhecimento do professor de Shulman (1986).

Na década de sessenta a investigação mostra que o conhecimento e a pedagogia são partes indissociáveis da compreensão (Shulman, 1986). Atualmente é consensual que para ensinar matemática é necessário desenvolver conhecimentos matemáticos e conhecimentos sobre a matemática, assim como conhecimento sobre como ensinar, tanto na vertente didática como pedagógica. Ma (2009) afirma que "um conhecimento limitado da matéria restringe a capacidade de um professor promover uma aprendizagem conceptual entre os alunos" (p. 83). Diz ainda que nos professores "o seu conhecimento pedagógico não pode compensar a ignorância do conceito" (Ma, 2009, p. 135).

Isto leva-nos a refletir se temos dado os passos certos na formação inicial dos nossos professores do ensino básico. Para Ponte (2006) são muitas as críticas à formação de professores e, na nossa sociedade, apercebemo-nos de que parece existir uma grande desconfiança em relação à qualidade da formação inicial de professores, havendo alguns que consideram que tudo o que se faz neste campo só contribui para agravar os problemas da educação. Mas o atual modelo de formação de professores, segundo Bolonha, veio alterar profundamente o peso das unidades curriculares de matemática. Muitos dos cursos de formação de professores do ensino básico das variantes tinham, exceto o da variante de Matemática e Ciências, apenas, 120 horas de Matemática, deveras insuficiente para se colmatarem as falhas que os candidatos a professores traziam do ensino básico e secundário. Contudo, o novo modelo de acordo com o processo de Bolonha acarreta outro problema ao fazer uma formação de base de banda larga, permitindo que candidatos com várias preparações tenham acesso à formação como futuros professores do ensino básico. Muitos deles provêm de humanidades, tendo consequentemente reduzida preparação matemática e/ou sem aproveitamento nas disciplinas de matemática.

A aprendizagem da matemática "é como um edifício de vários andares. Os alicerces podem ser invisíveis a partir dos pisos superiores, mas são eles que os sustentam e fazem com que o conjunto de pisos forme um todo coerente" (Ma, 2009, p. 205). Enquanto formadores é difícil diagnosticarmos qual ou quais os alicerces que faltam aos alunos. Os alunos temem dar a conhecer as suas debilidades científicas pensando que com mais conhecimento podem colmatar essas falhas. É como se resolvêssemos acrescentar mais um ou dois pisos a um edifício projetado para dois andares, sem reforçarmos os seus alicerces, o que indubitavelmente conduziria ao seu colapso. Por isso, é fundamental que os futuros professores tenham os conceitos básicos (os alicerces) muito bem compreendidos para que possam ser capazes de compreender outros mais complexos (os pisos superiores) ou desmontar todo o edifício e reconstrui-lo de novo.

Existe um objetivo que nos parece consensual na formação de professores que é “desenvolver a capacidade reflexiva dos futuros professores de forma a contribuir para a sua formação como profissionais responsáveis, autónomos e eticamente exigentes, capazes de refletirem eficazmente sobre a sua prática pedagógica” (Oliveira & Cyrino, 2011, p. 111). Poderemos então dizer que, para além de outras capacidades, um bom professor tem de ter um conhecimento matemático e didático que lhe permita identificar: o que pode ensinar, como o pode fazer e o que o aluno é capaz de aprender.

Ensinar e aprender Geometria

O nosso sistema de ensino deixa o aluno progredir sem ter tido sucesso a matemática, sem ter assimilado conceitos elementares estruturantes, em particular no campo da Geometria. As orientações anteriores para a matemática escolar davam pouca visibilidade à Geometria, tendo sido recuperada a sua importância no recente PMEB. Isso mesmo comprova Veloso (2008) quando exclama: “Como é possível andar durante 9 anos a olhar para cilindros e cones sem nunca imaginarmos cortá-los por um plano e ver o que dá?!!” (p. 19). Não é, por isso, de estranhar as dificuldades com que se depara o ensino da Geometria. O PMEB assume que, ao longo dos três ciclos, o ensino e a aprendizagem da matemática se desenvolve em quatro pilares fundamentais: o trabalho com números e operações, o desenvolvimento do pensamento geométrico e do pensamento algébrico e o trabalho com dados. Recuperada alguma da importância que a Geometria tinha à trinta anos atrás, pareceu-nos pertinente dirigir a nossa investigação para o estudo da aquisição de conceitos geométricos básicos dos futuros professores do 1º e 2º ciclo.

Em relação à Geometria o PMEB dá ênfase particular à visualização e à compreensão de propriedades de figuras geométricas, entendendo o quanto são importantes para o desenvolvimento do sentido espacial do aluno e, também, introduz o estudo das transformações geométricas logo a partir dos primeiros anos, sendo progressivamente alargado e aprofundado nos anos mais avançados. Na perspetiva de Battista (2007) é importante desenvolver, na criança, a capacidade de “ver”, analisar e refletir sobre os objetos espaciais e suas imagens. Também para Vale e Barbosa (2009) "ver" é uma componente importante da generalização e deve ser explorada, desde muito cedo, nos jovens estudantes. Sobre o papel da representação visual e sua importância, Arcavi (2003) define "a visualização como a capacidade, o processo e o produto da criação, interpretação, uso e reflexão sobre fotos, diagramas, nas nossas mentes … com o objetivo de representar e comunicar informação, pensar e desenvolver ideias até então desconhecidas e entendimentos avançados" (p. 217). Para além da visualização, a atividade geométrica envolve outros dois processos cognitivos importantes: a construção e o raciocínio (Duval, 1998). O raciocínio consolida-se através das relações que se vão estabelecendo quando se procuram objetos geométricos em determinadas condições. Mas a Matemática em geral e a Geometria em particular não admitem a falta de conceitos básicos onde se apoiam outros mais elaborados. A Geometria é como uma rede de pensamentos e conceitos interligados e de sistemas de representação utilizados para concetualizar e perceber ambientes espaciais físicos e imaginados (Battista, 2007). Se há um ciclo interrompido, temos de saber exatamente o que é que falhou. Esta a ideia, defendida na teoria de van Hiele, surge como uma referência para o ensino da Geometria. É, pois, importante compreendermos o processo construtivo, global e gradual da teoria de van Hiele para o ensino e aprendizagem da Geometria. Esta teoria pressupõe a existência de cinco níveis sequenciais para o desenvolvimento do pensamento geométrico. Esses níveis são cada vez mais complexos e a evolução do aluno ao longo dos níveis é determinada pelo ensino. Van Hiele considera ainda que o professor tem um papel fulcral no processo de ensino e aprendizagem dos seus alunos. O professor tem de definir tarefas e atividades adequadas e capazes de proporcionarem, aos alunos, a transição para níveis de pensamento superiores. Para avaliar o nível de desenvolvimento do aluno, o professor necessita de um instrumento que lhe permita avaliar se o aluno progrediu e em que medida o fez. Segundo a teoria de van Hiele a progressão nestes níveis acontece à medida que o aluno desenvolve a sua maturidade geométrica. O pensamento geométrico evolui, gradualmente, começando pelo reconhecimento de figuras, passando pela sua diferenciação até ao surgimento do raciocínio dedutivo. O desenvolvimento do raciocínio geométrico é um importante auxiliar para a resolução de problemas, no quotidiano dos alunos. Contudo a aquisição destas ideias dependem grandemente do professor e do seu conhecimento, o que vai de encontro ao referido por Gomes (2003) quando afirma que o conhecimento do conteúdo do professor é determinante na aprendizagem dos alunos e por Jones (2000) ao defender que o sucesso com o ensino da geometria depende dos conhecimentos e do modo de ensinar do professor.

Tendo em conta as considerações até aqui referidas, decidimos direcionar esta comunicação para a análise do Teste como forma de diagnosticar e caracterizar o conhecimento geométrico dos estudantes no início do seu estudo em Geometria.

O estudo

O estudo, que se encontra em progresso, desenvolve-se no contexto de uma turma do 2º ano da LEB, no início da UC de Geometria no 2º semestre lecionada por uma docente e cuja responsável é a primeira autora deste artigo. A nossa preocupação principal é identificar e compreender as principais dificuldades dos estudantes ao nível da Geometria. Partindo dos conhecimentos prévios que os estudantes trazem do ensino básico e secundário pretendemos identificar possíveis fragilidades para, no decorrer da UC, compreendermos o modo como esse conhecimento vai evoluindo. Para isso, na primeira aula desta UC passamos um Teste aos vinte e quatro alunos da turma que selecionamos para a investigação.

Este estudo decorreu em ambiente natural de sala de aula onde os participantes do estudo foram os alunos da turma, a professora e a investigadora que teve um papel de observadora não participante. A seleção da turma em estudo, de entre quatro, baseou-se sobretudo nos critérios de alunos bons informantes e disponibilidade.

Resultados e discussão

Como já referido, iremos analisar algumas das respostas obtidas em cinco das questões do Teste. Antes, porém, para termos uma ideia global da turma, vamos começar por enquadrar o Teste e analisar sucintamente os resultados obtidos pela turma.

Na primeira aula da UC de Geometria aplicamos o Teste à turma das alunas que irão ser objeto de investigação. Este Teste foi elaborado tendo por base questões adaptadas e retiradas tanto de testes nacionais, provas de aferição do 1º, 2º e 3º ciclos, como internacionais, TIMSS, PISA, assim como do teste de van Hiele. O teste tem vinte e cinco questões e para a sua elaboração tivemos em consideração não só os conhecimentos específicos de alguns dos temas de Geometria (60,5% das perguntas sobre Geometria no plano e 39,5% sobre Geometria no espaço) mas também as capacidades transversais: resolução de problemas, comunicação e raciocínio.

O quadro 1 resume os resultados da turma (%) distribuídos pelos conhecimentos e capacidades transversais. Em 1032 pontos possíveis obtiveram-se apenas 337, ou seja, 32,6% de respostas corretas.

Quadro 1 – Percentagem dos resultados da turma por conhecimentos e capacidades

CONHECIMENTOS E CAPACIDADES			
Conhecimento e compreensão de conceitos e de conhecimentos matemáticos	Raciocínio	Comunicação	Resolução de problemas
34%	43%	22%	28%

Apesar de poder ser discutível a forma como se agruparam as questões pelos conhecimentos e capacidades, tomamo-la como uma referência para aferirmos o nível de alguns dos conhecimentos elementares a Geometria.

Este primeiro elemento caracterizador da turma veio comprovar a nossa suspeita sobre os insuficientes conhecimentos básicos de Geometria. Os resultados denotam um baixo nível na aquisição dos conhecimentos elementares. Nenhuma das capacidades transversais e conhecimentos exigidos no PMEB atingiu os 44% de sucesso. Houve, apenas, 34% de respostas corretas nos conhecimentos e compreensão de conceitos e conhecimentos matemáticos. Na comunicação verificou-se a maior debilidade destes alunos, com apenas 22% de respostas corretas, seguida da resolução de problemas com 28% de sucesso. E 43% dos alunos responderam bem nas questões que envolviam raciocínio.

Analisemos agora o desempenho da turma em cinco das vinte e cinco questões. Selecionamos pelo menos uma questão por conhecimentos e capacidades.

Questão 3 – "Explique por que é que a seguinte afirmação é verdadeira: *Um triângulo retângulo não pode ser equilátero.*"

A questão insere-se na categoria do raciocínio. Aborda conteúdos de Geometria plana em relação ao triângulo. Exige conhecimentos sobre os ângulos internos de um triângulo e também sobre a classificação de triângulos quanto aos ângulos e quanto aos lados. Dados os conhecimentos exigidos, embora elementares, não esperávamos um bom desempenho dos alunos.

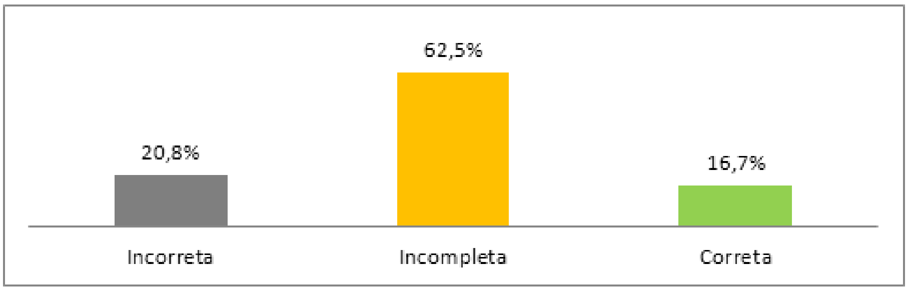
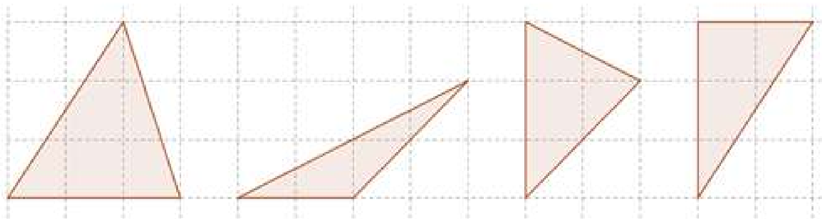


Figura 1: Resultados dos alunos à questão 3.

16,7% de respostas corretas e 62,5% dão uma explicação insuficiente. Curiosos são os erros de algumas respostas. Um aluno disse: "Um triângulo retângulo tem um ângulo de 90^0, um triângulo equilátero tem dois lados iguais e um diferente por isso não pode ter um ângulo de 90^0". O aluno confunde a noção de triângulo equilátero com a de triângulo isósceles. Um outro escreveu: "Porque um triângulo equilátero tem todos os ângulos com a amplitude de 45^0 logo se o triângulo é retângulo, isto é, com um ângulo de 90^0 então não é possível que seja simultaneamente um triângulo equilátero". O aluno não se apercebe que $45^0 x3 \neq 180^0$. Com esta resposta ficamos sem saber se o aluno sabe que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual 180^0.

Em relação aos resultados obtidos nesta questão, a nossa expetativa confirmou-se.

Questão 4 – "Para cada um dos triângulos desenhe, na própria figura, uma altura."



Esta questão está dentro da categoria do conhecimento e compreensão de conceitos e conhecimentos matemáticos. Da Geometria no plano, em relação ao triângulo, a questão aborda um conhecimento básico de um dos seus elementos: a altura. Era expectável uma boa percentagem de respostas corretas.

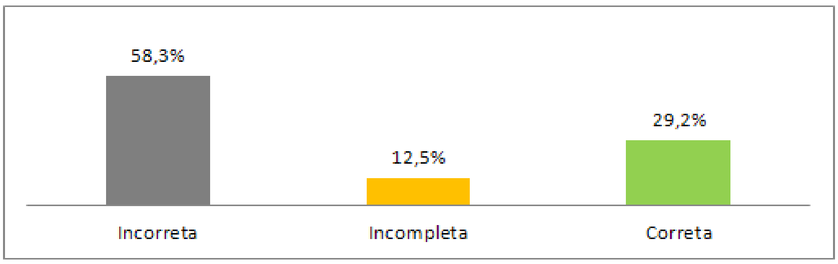


Figura 2: Resultados dos alunos à questão 4.

No entanto, como pode observar na figura 2, só 29% dos alunos é que acertaram. Este foi um resultado fraco relativamente às nossas expectativas: o conhecimento exigido – altura de um triângulo - é elementar. Na figura 3 tipificamos uma resposta destes alunos.

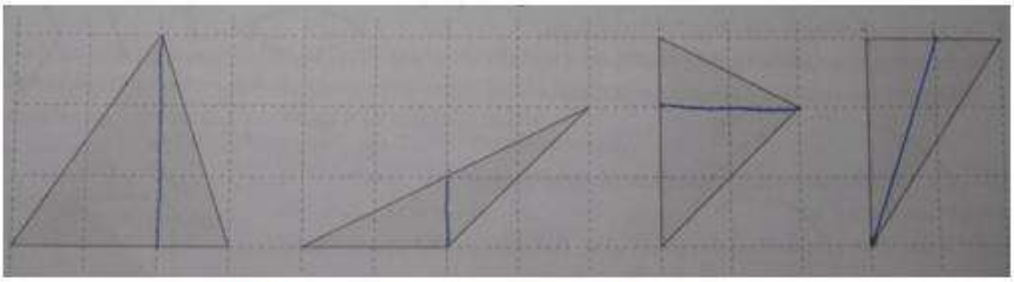
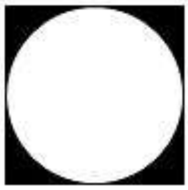


Figura 3: Uma das respostas dadas à questão 4.

Questão 6 – "As camisolas dos participantes num torneio de andebol vão ter o desenho apresentado na figura. A Cátia vai telefonar ao Sr. Tomás. Precisa de descrever o desenho para ele o fazer. Coloque-se no lugar da Cátia e descreva o desenho para o Sr. Tomás."



A questão foi adaptada da prova de aferição de matemática do 1º ciclo do ensino básico de 2008 e insere-se na categoria da comunicação. Tínhamos a expetativa de um bom desempenho dos alunos nesta questão uma vez que é de Geometria no plano e envolve o círculo, o quadrado e a noção de círculo inscrito.

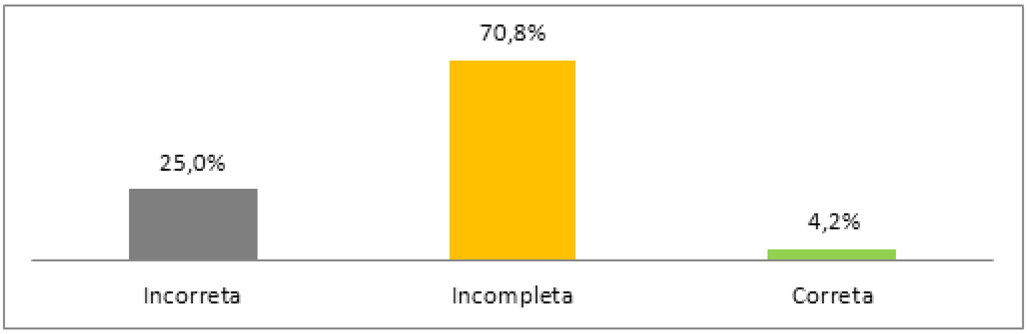
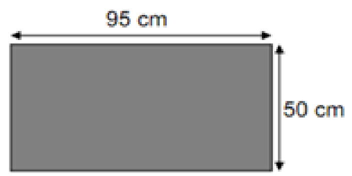


Figura 4: Resultados dos alunos à questão 6.

4,2% de respostas corretas porque só um aluno respondeu corretamente. 70,8% deram uma resposta insuficiente e 25% não respondeu. Estes resultados surpreenderam-nos bem como algumas respostas. Um dos alunos escreveu: "… um quadrado de fundo preto sobreposto por uma circunferência de fundo branco". Outro aluno disse: "A figura representa um quadrado, sendo que dentro da mesma, situa-se um sólido geométrico, neste caso, o círculo". E outro escreveu: "Um quadrado preto com uma circunferência branca em que essa circunferência terá de ter como diâmetro metade da medida do quadrado (ou o perímetro da circunferência terá de tocar em todos os lados do quadrado)".

A dificuldade demonstrada na comunicação matemática, a confusão e falta de conceitos elementares demonstrada pelas respostas que estes alunos deram a uma questão tão simples, é um fator que a todos nós educadores nos deve preocupar.

Questão 12 – "A Ana colou doze fotografias sem as sobrepor, num cartão retangular com as dimensões assinaladas na figura. Cada fotografia tem a forma de um retângulo com 20 cm de comprimento e 15 cm de largura. Qual a área do cartão que não está ocupada pelas fotografias?"



A questão foi retirada da prova de aferição de matemática do 2º ciclo do ensino básico de 2010 e enquadra-se na categoria da resolução de problemas. É um problema de Geometria no plano que envolve a área do retângulo onde o aluno pode esquematizar os passos que tem de dar para a sua resolução. Como os conceitos envolvidos são elementares a nossa expetativa era a de que uma boa parte dos alunos resolveria este problema. Porém nenhum aluno foi capaz de resolver corretamente a questão.

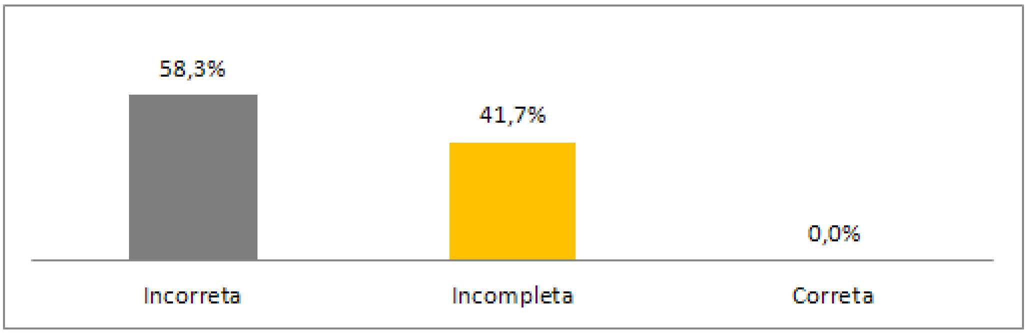
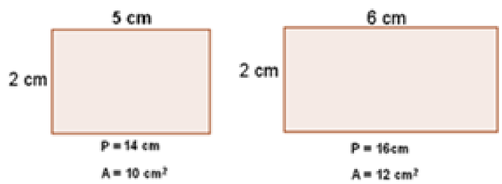


Figura 5: Resultados dos alunos à questão 12.

Observando o gráfico da figura 5 vemos que 58,3% dos alunos não conseguiram resolver a questão e 41,7% limitaram-se a fazer uma subtração de áreas não conseguindo pensar na estratégia correta.

Questão 13 – "Numa aula do 5º ano de escolaridade, um aluno entrou na sala e disse para a professora: *Professora, descobri uma regra nova: Numa figura qualquer, se aumentarmos o perímetro a área também aumenta. Trouxe um exemplo para ver como é verdade.* Coloque-se no papel de professor. Como comentaria a conjetura do aluno?"



Esta questão foi adaptada de Ma, 2009, insere-se na categoria da comunicação e dentro da Geometria no plano trata a relação existente entre o perímetro e a área de um retângulo. Por se tratar de uma conjetura que, à primeira vista, parece óbvia, tínhamos uma expectativa baixa mas estávamos longe de imaginar que não houvesse nenhuma resposta correta, como se observa na figura 6.

Figura 6: Resultados dos alunos à questão 13.

Os alunos confirmaram a conjetura, que nem sempre é verdadeira, cuja resposta se pode tipificar numa das respostas dadas por um aluno: “Muito bem, vejo que já conseguiste perceber que se o perímetro aumenta é porque o comprimento dos lados também o que implica naturalmente que a área também aumenta, uma vez que também depende do comprimento dos lados”.

É fácil errarem questões como esta porque é uma formulação que é nova para estes alunos. Exige muito mais do que simples conhecimento sobre Geometria. Envolve conhecimento didático e de avaliação da apresentação oral ao nível da retroação. O aluno não tem por hábito refletir sobre as suas aprendizagens, interrogar-se ou “contestar” o que o professor está a ensinar. E a matemática exige muita “curiosidade”.

Considerações finais

Estes resultados vêm confirmar um dos pressupostos deste estudo que é a fraca preparação dos futuros professores, estando os resultados concordantes com os obtidos pelos alunos nos diferentes níveis do ensino básico. E são estes estudantes que irão ser futuros professores nesses níveis de ensino. É, por isso, importante que nós, enquanto formadores de educadores matemáticos, passemos a dar uma atenção muito especial ao tema Geometria, identificando possíveis fragilidades no conhecimento dos futuros professores de modo que a formação inicial consiga superar essas mesmas deficiências atempadamente.

Estes resultados, que identificam algumas das falhas no conhecimento geométrico destes estudantes, concordantes com os resultados obtidos em alguns estudos ao nível da formação inicial (e. g. Gomes, 2003), são o ponto de partida para o estudo mais alargado, do qual faz parte esta apresentação, e poderão conduzir a um conjunto de estratégias e recomendações para o desenho curricular do programa de Geometria.

Referências bibliográficas

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 215-241.

Ball, D., Bass, H., Sleep, L. & Thames, M. (2007). A theory of mathematical knowledge for teaching [CD-ROM]. *Proceedings of the 15th ICMI Studdy. The Professional Education and development of Teachers of mathematics. Águas de Lindóia, Brasil, 15-21 may 2005. UNESP.*

Battista, M. T. (2007). The development of geometry and spatial thinking. In Frank K. Lester, Jr. (Ed.). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 843-908. NCTM.

Bullough, R., Jr. & Gitlin, A. (2001). *Becoming a student of teaching: Methodologies for exploring self and school context.* (2.ª ed.). London: Routledge Falmer.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.). *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century,* 29-83. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Gomes, M. (2003). *Um estudo sobre o conhecimento matemático de (futuros) professores do 1.º ciclo. O problema dos conceitos fundamentais em Geometria*. Tese de doutoramento. Universidade do Minho, Braga, Portugal.

Jones, K. (2000). Teacher knowledge and professional development in Geometry. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 20 (3), 109-114.

Korthagen, F., Kessels, J., Koster, B., Lagerwerf, B. & Wubbels, T. (2001). *Linking practice and theory: The pedagogy of realistic teacher education.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Loughran, J. (2006). *Developing a pedagogy of teacher education: Understanding teaching and learning about teaching*. London: Routledge.

Ma, L. (2009). *Saber e ensinar matemática elementar*. Lisboa: Gradiva.

Ministério da Educação (2007). *Currículo nacional do ensino básico.* Lisboa: ME, DGIDC-DEB.

National Council of Teachers of Mathematics (2001). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar. Geometria do 2.º e 3.º ciclo.* Tradução da Adenda Séries do NCTM. Lisboa: APM.

National Council of Teachers of Mathematics (2008). *Princípios e normas para a matemática escolar*. (2.ª ed.). Lisboa: APM.

Oliveira, H. & Cyrino, M. (2011). A formação inicial de professores de matemática em Portugal e no Brasil: Narrativas de vulnerabilidade e agência. *Interacções*, 18, 104-130.

Oliveira, H. & Hannula, M. (2008). Individual prospective mathematics teachers: studies on their professional growth. In T. Wood (Series Editor) & K. Krainer (Volume Editors), *International Handbook of Mathematics Teacher Education*, 3, 13-34. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Ponte, J. (2006). Os desafios do processo de Bolonha para a formação inicial de professores. *Revista de Educação*, XIV (1), 19-35.

Ponte, J. & Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teacher´s knowledge and development. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2.ª ed.), 223-261. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Segall, A. (2002). *Disturbing practice: Reading teacher education as text*. New York: Peter Lang.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15 (2), 4-14.

Vale, I. (2002). *Didáctica da matemática e formação inicial de professores num contexto de resolução de problemas e de materiais manipuláveis*. (Tese de doutoramento, Universidade de Aveiro). Lisboa: APM.

Vale, I. & Barbosa, A. (2009). *Padrões. Múltiplas perspectivas e contextos em educação matemática*. Viana do Castelo: ESEIPVC.

Veloso, E. (2008). Notas sobre o ensino da geometria. Há vida para além dos prismas, paralelepípedos, cubos, esferas, cilindros e cones. *Educação e Matemática*, 96, 18-19.

O DESENVOLVIMENTO DE HABILIDADES GEOMÉTRICAS NA EDUCAÇÃO INFANTIL

Evandro Tortora
Univesidade Estadual Paulista “Julio de Mesquita Filho”– UNESP/Brasil.
evandro_tta@hotmail.com

Nelson Antonio Pirola
Univesidade Estadual Paulista “Julio de Mesquita Filho”– UNESP/Brasil.
npirola@uol.com.br

Resumo

O objetivo geral da pesquisa foi investigar o seguinte problema: Quais e como as habilidades, relacionadas a espaço e forma, estão sendo desenvolvidas na Educação Infantil? A partir desse problema investigamos: 1 - Como estão sendo desenvolvidas habilidades básicas da geometria, como lateralidade, lateralização, percepção espacial e orientação espacial? 2 - O que pensa o professor da Educação Infantil sobre os objetivos do trabalho com espaço e forma? 3 - Qual o desempenho e as dificuldades encontradas por crianças ao término da Educação Infantil em atividades envolvendo habilidades básicas de lateralização, lateralidade, percepção espacial e orientação espacial? Foram participantes da pesquisa 25 crianças da Educação Infantil e suas respectivas professoras e foram utilizados como instrumentos para a coleta de dados questionário, entrevista, diário de campo e testes para avaliar a lateralização, lateralidade, orientação espacial e percepção geométrica. A análise dos dados nos levou a concluir que as professoras têm problemas conceituais com relação às figuras geométricas; as crianças possuem dificuldades na percepção de figuras geométricas e sua maioria consegue discriminar os lados direito e esquerdo, contudo têm dificuldade em nomeá-los corretamente. Tratou-se de um estudo exploratório cuja análise dos dados teve um caráter qualitativo.

Palavras-chave: Educação Infantil, habilidades, habilidades geométricas, geometria.

Introdução

A Psicologia da Educação Matemática – PME - é uma área interdisciplinar que tem como principal objetivo investigar processos de ensino e aprendizagem da Matemática tendo como fundamentos teorias da Psicologia. Entre os temas abordados pela PME encontra-se a formação de conceitos em geometria. Vários estudos têm sido conduzidos nessa área enfocando diferentes olhares para o problema do ensino e da aprendizagem da geometria escolar, como, por exemplo, os estudos de Viana (2000), Viana (2005), Rezi (2001), Rezi (2007), Pirola (2000), entre outros. Parece haver um consenso entre esses autores sobre a existência de um abandono do ensino da geometria nas escolas em diferentes níveis de ensino. Segundo Pirola (2000), a ênfase do ensino da matemática escolar tem sido concentrada mais nos aspectos aritméticos e algébricos sendo que a geometria quase sempre é deixada para o último semestre, não a relacionando a outros campos da Matemática, sendo que o ideal seria a articulação da geometria à álgebra, tratamento da informação, grandezas e medidas, manifestações artísticas, natureza, Física entre outras ciências.

As habilidades básicas relacionadas à geometria, como percepção geométrica e orientação espacial, que contribuem para que o aluno consiga trabalhar com noções de Espaço e Forma, devem ser desenvolvidas desde a Educação Infantil.

Segundo Pirola (2006):

> A Educação Infantil é um campo bastante fértil para o trabalho com as noções de espaço e forma, visto que as crianças, desde o nascimento, exploram os objetos e o meio em que vivem através dos órgãos dos sentidos à medida em que a criança cresce e desenvolve a coordenação de movimentos ela passa a descobrir elementos importantes presentes nos objetos, como dimensões, profundidades, contornos e vizinhanças, bem como as relações espaciais entre os objetos. (Pirola, p. 196)

Dessa forma, o desenvolvimento das habilidades básicas relacionadas à Geometria desde a Educação Infantil pode propiciar o desenvolvimento de novas habilidades favorecendo a aprendizagem de conceitos da geometria plana e espacial de forma significativa.

Embora o tema sobre o desenvolvimento das noções de espaço e forma por crianças da Educação Infantil seja relevante, pelo exposto anteriormente, nota-se, no entanto, que existe uma aparente escassez de pesquisas, no âmbito da Educação Infantil, que trata do desenvolvimento do pensamento geométrico. Como exemplo, podemos citar um levantamento feito Carneiro e Dechen (2007) sobre os temas dos trabalhos apresentados nos Encontros Paulistas de Educação Matemática (EPEM) realizados até então, no qual a Educação Infantil aparece com apenas 1,7% das pesquisas apresentadas até 2007.

Sendo assim, torna-se relevante para o âmbito das pesquisas em Educação Matemática, especificamente na Educação Infantil, um estudo exploratório dessas habilidades que os alunos devem desenvolver durante esta fase de sua escolarização para que possam desenvolver, de forma satisfatória, o de seu pensamento geométrico.

Objetivos

O objetivo geral da pesquisa foi investigar as seguintes questões:

• Como estão sendo desenvolvidas habilidades básicas da geometria, como lateralidade, lateralização, percepção espacial e orientação espacial?

• O que pensa o professor da Educação Infantil sobre os objetivos do trabalho com espaço e forma?

• Qual o desempenho e as dificuldades encontradas por crianças ao término da Educação Infantil em atividades envolvendo habilidades básicas de lateralização, lateralidade, percepção espacial e orientação espacial?

Lateralização, Lateralidade, Percepção Geométrica e Orientação Espacial

Diversas habilidades são desenvolvidas durante a Educação Infantil no intuito de promover o desenvolvimento integral do indivíduo. No que diz respeito ao trabalho com os conteúdos referentes ao eixo Espaço e Forma, as principais habilidades que as crianças começam a desenvolver são a lateralização, a lateralidade, a percepção geométrica e a orientação espacial.

Krutetskii (1976), um psicólogo russo, investigou os componentes das habilidades matemáticas durante uma década e considerou que as habilidades “são qualidades internas de uma pessoa que permitem a realização satisfatória de uma atividade definida”. Para esse autor a habilidade para aprender matemática é:

> Característica psicológica individual (primeiramente característica da atividade mental) que responde aos requerimentos da atividade matemática escolar e que influencia, sendo todas as outras condições equivalentes, o sucesso no domínio criativo da Matemática como um assunto escolar – em particular, uma relativa rapidez, facilidade e domínio profundo do conhecimento, destrezas e hábitos em Matemática (p. 75).

Entre as principais habilidades geométricas que devem ser desenvolvidas na Educação Infantil estão a lateralização e a lateralidade. Esses dois conceitos foram estudados por Pires, Curi e Campos (2001).

Segundo essas autoras, a orientação espacial das crianças começa a ser desenvolvida a partir de relações que a criança estabelece com o seu próprio corpo, as quais se referem à lateralização. Esta habilidade diz respeito à orientação da criança e sua localização no espaço tomando a si mesmo como ponto de referência. Por exemplo, quando a criança necessita dizer se um objeto está atrás dela ou a sua frente, ou quando precisa escolher uma das duas mãos (direita ou esquerda). Em ambos os casos, utiliza-se o nosso próprio corpo como referência.

Pires, Curi e Campos (2000) ainda afirmam que:

> Essa “lateralização” precisa evoluir pois a “esquerda” de uma pessoa que está a sua frente, olhando para ela, coincide com a sua “direita”. Quando isso acontece, podemos dizer que a criança conhece sua lateralidade. (p. 54)

Sendo assim, podemos dizer que esta habilidade também exige que o indivíduo coloque-se imaginariamente na posição do outro e localize um determinado objeto em sua posição real.

A lateralidade é construída a partir do momento em que outros pontos de referências são adotados. Por exemplo: “a criança deve entender que a esquerda de uma pessoa que está à sua frente, olhando para ela, coincide com a sua direita” (Pirola, 2006, p. 198).

Outra habilidade geométrica que é desenvolvida pelas crianças é a percepção. De acordo com Sternberg (2000) a percepção é “um conjunto de processos psicológicos pelos quais as pessoas reconhecem, organizam, sintetizam e fornecem significações (no cérebro) às sensações recebidas dos estímulos ambientais (nos órgãos dos sentidos)” (p. 147). No caso específico da geometria, a percepção geométrica está relacionada à percepção das formas dos objetos que estão ao nosso redor.

A orientação espacial também é uma das habilidades que as crianças começam a desenvolver desde pequenas. Conforme o recém-nascido começa a engatinhar, ele começa a perceber o “seu espaço” e logo percebe que precisa se desviar de determinados objetos para não colidir com eles. Nesse caso ele inicia o desenvolvimento da habilidade de orientação espacial que se relaciona à percepção espacial que, segundo Del Grande (1990) capacita os indivíduos a coordenarem os movimentos do corpo com a visão. Para o desenvolvimento da orientação espacial é necessário o desenvolvimento das habilidades de lateralidade e de lateralização.

Dessa forma, a percepção geométrica leva a criança a reconhecer, organizar e sintetizar as informações oriundas dos objetos que estão ao seu redor e a orientação espacial auxilia a criança a se movimentar e a localizar objetos tendo como base pontos de referências.

Materiais e Métodos

Para alcançar os objetivos da pesquisa, foram utilizados os seguintes instrumentos:

- Entrevista semiestruturada e áudio-gravadas com os professores;
- Diário de campo com observações de sala de aula;
- Teste de percepção geométrica envolvendo figuras geométricas;
- Teste de orientação espacial - envolvendo noções de deslocamento e de localização;
- Testes de lateralidade e de lateralização.

Para verificar alguns aspectos sobre o que pensa o professor da Educação Infantil a respeito dos objetivos do trabalho com espaço e forma e sobre como o professor trabalha em sala de aula no intuito de desenvolver as habilidades básicas da geometria, como lateralidade, lateralização, percepção espacial e orientação espacial, foram utilizadas entrevista semiestruturada e diário de campo de observação da sala de aula.

A entrevista constituiu-se de uma conversação de natureza profissional, efetuada face a face através do encontro entre duas pessoas, com o intuito de se obter certas informações do interesse do pesquisador, de maneira metódica (Lakatos e Marconi, 2001). Nesta pesquisa, foi seguido um roteiro pré-estabelecido elaborado para a entrevista.

O instrumento Diário de Campo constou do registro, elaborado pelo pesquisador, de observações feitas durante as aulas das professoras quando os mesmos abordavam conteúdos referentes ao trabalho com espaço e forma.

Os testes de percepção geométrica, orientação espacial, lateralidade e lateralização foram aplicados para investigar qual o desempenho e as dificuldades encontradas por crianças ao término da Educação Infantil em atividades envolvendo essas habilidades. Os testes foram elaborados pelo pesquisador, observando o referencial teórico adotado.

A pesquisa foi desenvolvida em uma escola de Educação Infantil, escolhida por conveniência, de uma cidade do interior paulista.

Foram participantes da pesquisa 25 crianças da Educação Infantil, com idade entre quatro e cinco anos, e duas professoras que lecionavam para essas crianças.

Resultados e Discussões sobre as práticas das professoras

As observações foram realizadas nas salas de aula das duas professoras entrevistadas. Pude notar uma preocupação das professoras em fazer com que os conteúdos de Espaço e Forma estivessem presentes no cotidiano das crianças. Algumas atividades eram realizadas pelas duas professoras e faziam parte da rotina das turmas, como a atividade descrita a seguir. Ao iniciar as aulas, ambas as professora faziam a contagem dos meninos e das meninas que vieram naquele dia e coloca na lousa o algarismo correspondente a quantidade cada um. Em seguida, a professora seleciona uma figura geométrica (circunferência, o quadrado, o retângulo ou triângulo) para os meninos e outra para as meninas e desenha à frente do numeral correspondente a quantidade de crianças, uma quantidade equivalente da figura selecionada. Abaixo está a fotografia da lousa da professora.

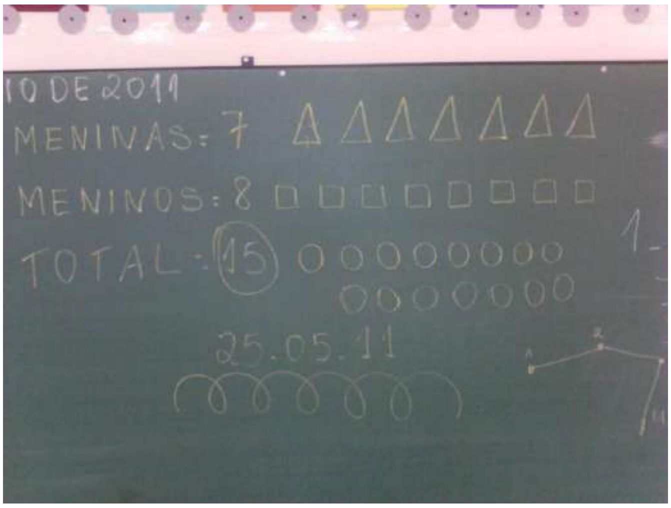


Figura 1: Atividade realizada pelas professoras no inicio de toda a aula.

Feita a contagem, as crianças pintavam no calendário o dia em que estão. Este calendário é composto por vários quadrados em que os vértices foram truncados. Neles encontram-se os numerais do mês e a criança deve limitar-se a pintura de apenas um destes quadrados, os quais são indicados pela professora que dá grande ênfase a função dos numerais presentes no calendário.

Podemos notar que as professoras fazem uso das figuras geométricas para fazer a correspondência entre o símbolo do numero e quantidade que ele representa por meio do desenho de figuras geométricas. A professora enfatizava o nome da figura selecionada quando fazia a seleção da mesma, o que auxiliava a criança a aprender o seu nome. Contudo, por vezes, percebi que as crianças já conheciam aquela atividade e a professora sempre a executava da mesma forma escolhendo as mesmas figuras.

Uma variação desta atividade poderia ser a apresentação de figuras rotacionadas ou ainda apresentar novas figuras geométricas para as crianças, como o paralelogramo.

Fazendo uma análise das aulas das professoras separedamente, uma delas demonstrou acreditar que as crianças desenvolvem essas habilidades espontaneamente, pois interferia poucas vezes nas atividades que os alunos executavam, enfatizava constantemente as atividades do tipo lápis e papel e apresentava certas dificuldades com os termos referentes à localização de objetos, um dos objetivos do ensino de espaço e forma na Educação Infantil. A outra professora se preocupava mais com a qualidade da execução das tarefas por parte dos alunos, apresentando uma maior variedade de atividades que envolviam recorte, colagem, pintura, leitura de gráficos bem como atividades de movimentação, como uma corrida de obstáculos.

Nas entrevistas, assim como pude notar na observação das aulas, ambas as professoras tiveram dificuldade em apontar quais seriam as habilidades geométricas envolvendo Espaço e Forma a serem trabalhadas nas atividades desenvolvidas em sala de aula.

As professoras consideram que as habilidades referentes a espaço e forma são importantes principalmente por dois motivos: propiciar a aprendizagem de modelos de figuras geométricas e prepar as crianças para a alfabetização, como podemos notar nas seguintes falas das professoras:

Questão: Você acredita que o trabalho com ESPAÇO E FORMA é importante na educação infantil? Por que?

Professora A: “Sim, é muito importante por que a Educação Infantil é a base da escolarização. Ela precisa ter as noções de espaço e forma para ela, posteriormente, se alfabetizar. Em tudo que observamos, existem formas também é importante que as crianças saibam distingui-las. Para a criança desenhar ela precisa observar e representar no papel e essas noções podem ajudá-la e este trabalho é essencial para a alfabetização.”

Professora B: “Acredito que sim. A criança tem que conhecer formas, pra ela formar inicialmente a imagem de um quadrado, de um retângulo, saber o que é um triangulo para que possa usar estes conceitos fora da escola. Se ela não tiver essa base, ela pode não ter acesso fora da escola. Não só figuras geométricas, mas tudo.”

Resultados e Discussões sobre os testes aplicados nos alunos

Foram elaborados três testes de percepção geométrica, dois de orientação espacial, quatro de lateralização e um de lateralidade para serem aplicados individualmente em 25 crianças.

O primeiro teste consistia em fornecer um desenho em que estavam presentes várias figuras geométricas e em seguida eram feitos alguns questões para a criança: “Que desenho é este?”, “O que você pode me dizer sobre ele?” e, caso a criança não notasse as figuras geométricas no desenho era perguntado “Você consegue reconhecer alguma figura geométrica nele?”. Todas as crianças reconheceram as figuras no desenho, contudo, 14 crianças conseguiram identificar as figuras geométricas sem o auxílio da terceira questão.

No segundo teste era mostrado para criança um trapézio feito de um material possível de ser manipulado e foi perguntado se ela conhecia aquela figura, contudo nenhuma criança acertou o nome da figura. Em seguida, eram fornecidas algumas figuras geométrica confeccionadas com material possível de ser manipulado e solicitado que a criança montasse um trapézio como o apresentado anteriormente:

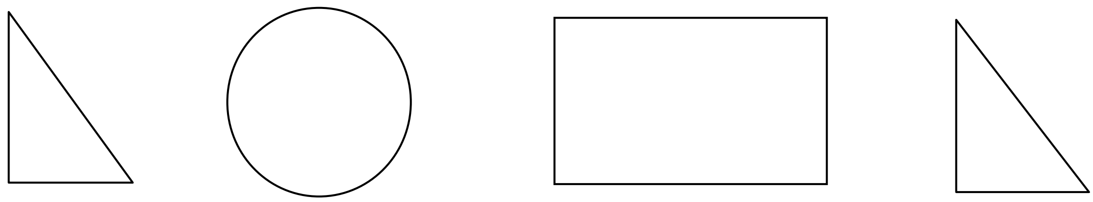


Figura 2: Formato das peças fornecidas ás crianças para a montagem de um trapézio.

Podemos notar que bastaria a criança utilizar dois triângulos e o retângulo que seria possível a montagem de um trapézio. No total, 11 crianças conseguiram realizar a montagem.

O terceiro teste consistia em apresentar para a criança o desenho de 9 figuras geométricas, e era pedido para que a criança nomeasse as figuras. A maioria das crianças teve dificuldade em reconhecer figuras geométricas quando as mesmas eram compostas por outras figuras ou quando estavam rotacionadas. O gráfico abaixo mostra o resultado do teste.

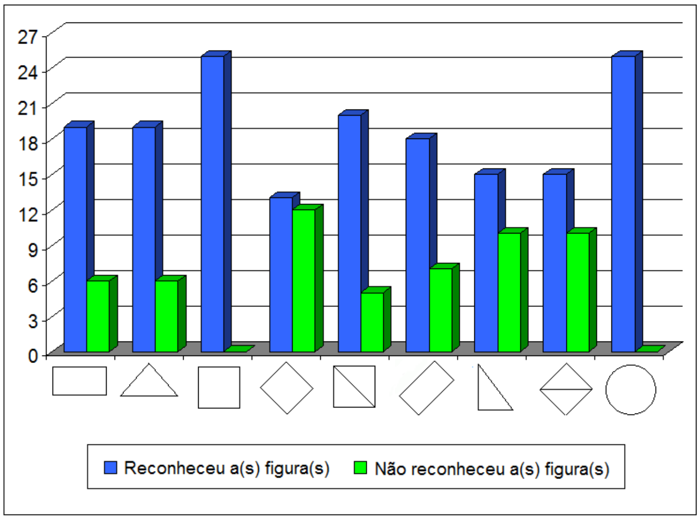


Figura 3: Gráfico de resultados do teste de percepção geométrica de figuras planas

No quarto teste era solicitado que a criança se dirigisse até uma mesa que estava entre outras duas. Foi observado que algumas crianças não sabiam o significado da palavra entre, contudo, nenhuma criança errou na localização da mesa.

O quinto teste consistia em fornecer para a criança o desenho de um labirinto e era solicitado que a criança se dirigisse ao centro do labirinto. Todas as crianças realizaram o teste sem dificuldades.

No sexto teste a criança deveria colocar um objeto em cima da mesa, um embaixo e outro do lado esquerdo. As crianças não apresentaram dificuldades em dispor os objetos em cima e embaixo da mesa, apenas apresentaram dificuldade quanto à localização do lado esquerdo, sendo que apenas oito crianças acertaram qual era o lado esquerdo da mesa.

No sétimo teste consistia na seguinte atividade:

Figura 4: Teste de lateralização

A maioria dos alunos (18 crianças) conseguiu imaginar o movimento da pessoa e, tomando o seu corpo como ponto de referência e, independente do lado dotado, teria que fazer um X na mão que estiver do lado oposto em relação à mão que marcou anteriormente. Das 18 crianças, 8 nomearam o lado corretamente.

No oitavo as crianças deveriam realizar as seguintes atividades:

Figura 5: Teste de lateralização

Observou-se que 19 crianças conseguiram identificar os lados esquerdo e direito como opostos e 10 destas crianças adotaram os lados esquerdo e direito corretamente.

No nono teste a criança deveria identificar qual a casa que estava entre duas árvores em um desenho. Notou-se que, assim como no quarto teste, algumas crianças tiveram dificuldade com o termo “entre” e oito crianças não conseguiram circular a casa correta.

No último teste a criança era posicionada em um local da sala onde se encontrava entre alguns objetos e eram feitas as seguintes perguntas: “Qual objeto está acima de você?”, “Qual objeto está a sua esquerda?”, “Qual objeto está a sua frente?”, “Qual objeto está atrás de você?” e “Qual objeto está a sua direita?”. Notou-se que as crianças possuem dificuldade em nomear os lados esquerdo e direito, contudo a maioria delas não apresentou dificuldade em discriminar estes lados, pois quando adotavam, por exemplo, o lado esquerdo chamando-o de direito, o mesmo se repetiu em todos os testes. Nesse teste nenhuma criança demonstrou dificuldade na localização de objetos que estavam acima, à frente ou atrás dela, mas, novamente, apresentaram dificuldades em nomear os lados esquerdo e direito e, ao contrário do que aconteceu nos testes de lateralização, a maioria das crianças não conseguia, por exemplo, tomar um lado como sendo o direito e manter esse mesmo lado ao longo da execução do teste.

Conclusões

Em relação à questão: "Como estão sendo desenvolvidas habilidades básicas da geometria, como lateralidade, lateralização, percepção espacial e orientação espacial?" Foi possível observar que; a maioria das habilidades geométricas não são trabalhadas unicamente nas atividades voltadas ao ensino de matemática, existe uma ênfase maior no ensino das figuras do circulo, quadrado, triângulo e retângulo.

Outra observação diz respeito à preocupação das professoras com relação a oferecer atividades, todos os dias, em que as habilidades geométricas estivessem presentes. Contudo, contatei que as crianças já dominavam bem os conhecimentos exigidos para estas atividades diárias. Seria interessante que as professoras trabalhassem com uma maior variedade de atividades, ou ainda que oferecessem novos conhecimentos na mesma atividade, por exemplo, apresentar novas figuras geométricas para as crianças na atividade em que as professoras desenhavam um figura geométrica para cada aluno no inicio das aulas.

Com relação à questão: "O que pensa o professor da Educação Infantil sobre os objetivos do trabalho com espaço e forma?", foi constatado que as professoras têm dificuldade em discriminar quais das atividades que trabalha em sala de aula desenvolvem habilidades relacionadas a espaço e forma, é dada grande ênfase para aspectos da alfabetização. A alfabetização é importante para a criança, contudo, os conteúdos referentes a geometria (espaço e forma) também será útil para outras atividades como a leitura de mapas, gráficos além do reconhecimento das figuras geométricas, habilidade essencial para o trabalho com conceitos mais complexos a serem abordados futuramente no ensino de matemática.

Por fim, com relação à questão: "Qual o desempenho e as dificuldades encontradas por crianças ao término da Educação Infantil em atividades envolvendo habilidades básicas de lateralização, lateralidade, percepção espacial e orientação espacial?", a maioria das crianças possui dificuldade na percepção de figuras geométricas; não reconhecem outras figuras que não sejam o quadrado, o círculo, o triângulo e o retângulo; possuem dificuldade em reconhecer as figuras geométricas de acordo com suas características, apresentando certa dependência do modelo mental que possuem; nos testes de lateralidade, a maioria das crianças consegue discriminar os lados direito e esquerdo, contudo tem dificuldade em nomeá-los corretamente; os alunos apresentaram dificuldade com alguns termos para orientar-se no espaço como, no caso desta pesquisa, o termo “entre”; diferentemente dos testes de lateralidade nenhuma criança conseguiu adotar um lado como sendo o esquerdo ou o direito erroneamente e manter essa nomenclatura ao longo de todas as perguntas, parece que se a criança não reconhece o lado, não consegue sustentar suas afirmações a respeito dele.

Referências Bibliográficas

Carneiro, R. F. & Dechen, T. (2007). Tendências no Ensino de Geometria: um olhar para os anais dos Encontros Paulista de Educação Matemática. *Anais do 16º Congresso de Leitura do Brasil - No mundo há muitas armadilhas e é preciso quebrá-las*, Campinas, SP, Brasil, pp. 1-10.

Del Grande, J. J. (1990). Spatial Sense. *Arithmetic teacher*, 37 (6), 14-20.

Krutetskii (1976). *The psychology of mathematical abilities in scoolchildren.* Chicago: University of Chicago Press.

Lakatos, E. M. & Marconi, M. A. (2001). *Fundamentos de Metodologia Científica.* São Paulo: Atlas.

Pires, C. M. C.; Curi, E.; Campos, T. M. M. (2001). *Espaço e forma: a construção de noções geométricas pelas crianças das quatro séries iniciais do ensino fundamental.* Chicago: University of Chicago Press.

Pirola, N. A. (2000), *Solução de problemas geométricos: dificuldades e perspectivas.* Tese de doutorado. Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil.

Pirola, N. A. (2006). Espaço e Forma da Educação Infantil. In Pirola, N.; Caldeira, A. M. A.; Moraes, M. S. S. & Nardi, R. (Eds.), *Coletânea de Textos. Centro de Educação Continuada em Educação Matemática, Científica e Ambiental – CECEMCA.* (pp. 192-237). São Paulo, Brasil.

Rezi, V. (2001) *Um estudo exploratório sobre os componentes das habilidades matemáticas presentes no pensamento em geometria.* Dissertação de mestrado. Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil.

Rezi, V. (2007) *Solução de problemas e tipos de mente matemática: relações com as atitudes e crenças de auto-eficácia.* Tese de doutorado. Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil.

Smole, K. S.; Diniz, M. I. & Candido, P. (2003). *Figuras e Formas Vol. 3 – Matemática de 0 a 6,* São Paulo: Artmed.

Sternberg, R. J. (2010). *Psicologia Cognitiva*. (A.M.D. Luche & R. Galman, Trad.). São Paulo: Cengage Learning. (Obra original publicada em 2009)

Viana, O. A. (2000) *O Conhecimento geométrico de alunos do Cefan sobre figuras espaciais: um estudo das habilidades e dos níveis de conceito.* Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil.

Viana, O. A. (2005) *O componente espacial da habilidade matemática de alunos do ensino médio e as relações com o desempenho escolar e as atitudes em relação à matemática e à geometria.* Tese de doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil.

TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS: CONHECIMENTOS E DIFICULDADES DE FUTUROS PROFESSORES

Alexandra Gomes

CIEC/IE – Universidade do Minho

magomes@ie.uminho.pt

Resumo

Ninguém questiona o facto de que o conhecimento matemático dos professores desempenha um papel crucial no seu ensino. Em Portugal, o novo programa de matemática para o ensino básico introduz as transformações geométricas a partir do 1.º ano de escolaridade. Sendo este um tema novo no currículo elementar, parece importante compreender que conhecimento detêm os futuros professores sobre o assunto.

Neste artigo são apresentados alguns resultados de um estudo realizado com futuros professores do ensino elementar que tem por objectivo avaliar os seus conhecimentos sobre transformações geométricas.

Palavras-chave: conhecimento de professores; conhecimento do conteúdo; geometria; transformações geométricas.

Introdução

Os professores do ensino elementar[19] desempenham um papel crucial na introdução de ideias matemáticas e conceitos básicos, mas fundamentais e iniciar um processo de aprendizagem matemática, com cada estágio altamente dependente do anterior. Assumindo que a matemática elementar é matemática fundamental no sentido defendido por Ma (1999), isto é, constitui os alicerces da futura aprendizagem matemática e contém os rudimentos de muitos conceitos importantes em ramos mais avançados da disciplina, então o único caminho sensato a tomar parece ser garantir conhecimentos matemáticos sólidos e eficazes nos futuros professores.

Actualmente, em Portugal, novas directrizes curriculares (DGIDC, 2007) dão um lugar de destaque à geometria, apontando para a importância do desenvolvimento da visualização e do raciocínio espacial, como o principal objectivo para o ensino de geometria. De particular interesse é uma alteração, em relação ao programa anterior, que consiste na iniciação, logo no 1.º ano, ao estudo de diferentes transformações geométricas, em primeiro lugar de forma intuitiva e depois com formalização crescente.

[19] Neste artigo, entende-se por ensino elementar o correspondente aos dois primeiros ciclos do ensino básico, ou seja, do 1º ao 6.º ano de escolaridade.

No 1.º ciclo são apenas abordadas as isometrias, que são utilizadas no estudo de frisos e rosáceas. No 2.º ciclo é continuada a exploração deste tipo de transformações, dando-se especial ênfase à reflexão e à rotação.

Sobre o conhecimento do professor

Nas últimas décadas tem-se assistido a um crescente interesse dos investigadores pelo conhecimento do professor. Um dos trabalhos mais influentes sobre este assunto foi desenvolvido por Shulman. Referindo-se, em particular, ao conhecimento do conteúdo para os professores, Shulman (1986) considera três categorias: (a) conhecimento da matéria; (b) conhecimento pedagógico do conteúdo e (c) conhecimento curricular. Muito trabalho tem sido feito desde então, nomeadamente no campo da Educação Matemática, esclarecendo e redefinindo diferentes categorias do conhecimento dos professores. Num desses trabalhos, realizado com professores do 1.º ciclo, Ball (1990) considera que o entendimento necessário para ensinar matemática engloba não só o conhecimento substantivo da matemática como o conhecimento acerca da matemática. Quase todos os estudos concordam que o conhecimento dos professores é essencial para o ensino e que a sua falta parece comprometer o ensino e, portanto, a aprendizagem. Ma (1999), por exemplo, refere que: "o conhecimento limitado da matéria restringe a capacidade de um professor para promover uma aprendizagem conceptual entre os estudantes" (p. 38). Além disso, um conhecimento adequado para garantir a eficácia do ensino da matemática depende não só um sólido conhecimento matemático, mas também da natureza desse conhecimento (Askew, Brown, Rhodes, Johnson & Wiliam, 1997). É também reconhecido que os professores necessitam de um tipo de conhecimento diferente do exigido noutras profissões, com características exclusivas. Estudos recentes têm sido direccionados no sentido de uma teoria baseada na prática de conhecimento para o ensino (Davis & Simmt, 2006; Turner & Rowland, 2008). No entanto, apenas alguns têm tentado medir a real influência dos diferentes componentes do conhecimento do professor na instrução. O grupo de Michigan (Hill, Rowan & Ball, 2005; Hill et al. 2008) parece ter sido o primeiro a abordar esta questão com sucesso tendo recolhido evidências da influência do conhecimento do conteúdo por parte do professor no seu ensino. Baumert et al. (2010) foram mais longe e investigaram a influência do conhecimento do conteúdo e também do conhecimento pedagógico do conteúdo na qualidade da instrução e no progresso matemático dos alunos do ensino secundário. Um dos resultados deste estudo foi que o conhecimento pedagógico do conteúdo é de importância fundamental para o progresso matemática dos alunos, sendo decisivo para a qualidade da instrução. No entanto, também o conhecimento do conteúdo deve merecer uma atenção especial na formação inicial e na prática lectiva uma vez que o seu deficit pode comprometer o desenvolvimento do conhecimento pedagógico do conteúdo e, consequentemente, ter efeitos negativos sobre a instrução e o progresso dos alunos.

Em resumo, parece adequado afirmar que o conhecimento do conteúdo desempenha um papel crucial no ensino e ainda que não seja suficiente para garantir um ensino eficiente, é certamente necessário. Como afirma Ma (1999):

> O conhecimento do professor pode não produzir automaticamente métodos de ensino promissores ou concepções pedagógicas novas. Mas sem o sólido apoio do conhecimento da material/conteúdo, métodos promissores ou novas concepções de ensino não podem ser realizado com sucesso (p. 38).

Sobre a Geometria

É amplamente reconhecido que o estudo da geometria é muito importante, pois contribui para o desenvolvimento da visualização, o pensamento crítico, a intuição, a resolução de problemas, a prova, entre outros.

> O estudo da geometria contribui para ajudar os alunos a desenvolver as capacidades de visualização, pensamento crítico, intuição, perspectiva, resolução de problemas, conjectura, raciocínio dedutivo, argumentação lógica e prova. As representações geométricas podem ser usados para ajudar os alunos a dar sentido a outras áreas da matemática: frações e multiplicação em aritmética, relações entre os gráficos de funções (de duas e três variáveis) e representações gráficas de dados em estatística. (Jones, 2002, p.125)

No entanto, a investigação em ensino e aprendizagem da Geometria é ainda muito escassa quando comparada com as investigações feitas noutros campos, nomeadamente Números e Operações ou Álgebra.

A literatura referente ao conhecimento geométrico dos (futuros) professores do ensino elementar revela que estes apresentam baixos níveis de conhecimento geométrico (e.g., Gomes, 2004; Jones, Mooney & Harries, 2002).

Por outro lado, Hershkowitz e Vinner (1984), num estudo em que era comparado o conhecimento de crianças com o de (futuros) professores do ensino elementar, descobriram que os professores não tinham conhecimento geométrico básico nem capacidade de raciocínio analítico e além disso, os professores tendem a apresentar padrões similares de erros e concepções erradas aos dos alunos.

As transformações geométricas

Embora a investigação relativa ao ensino e à aprendizagem de transformações esteja pouco representados na literatura, podemos encontrar alguns estudos que abordaram a compreensão dos alunos sobre transformações geométricas, especialmente referindo-se a reflexão e rotação.

Em alguns estudos envolvendo crianças com idades inferiores a 10 anos (e.g. Moyer, 1978; Shah, 1969; Schultz, 1978) verificou-se que estas consideravam que as translações eram tão ou mais fáceis do que reflexões e estas eram mais fáceis do que rotações. Além disso, as translações horizontais eram muito mais fáceis do que as oblíquas.

Kucheman (1981) desenvolveu um estudo com alunos mais velhos (11 aos 16 anos), focando apenas as seguintes isometrias: reflexão e rotação. Em relação à reflexão o autor concluiu que a posição/inclinação do eixo influencia as respostas sendo que os alunos tiveram melhor desempenho quando o eixo era vertical ou horizontal; também a complexidade do objecto parece influenciar os resultados sendo que objectos mais simples, como um ponto ou uma linha, tiveram melhores resultados. Quanto à rotação, verificou-se que os alunos consideraram mais simples efectuar rotações em que o centro estivesse na figura.

Recentemente, a maioria dos estudos sobre transformações geométricas centram-se principalmente em experiências de ensino, muitas vezes envolvendo tecnologia (Hoyles & Healy, 1997; Knuchel, 2004; Marchini & Vighi, 2011)

Deve ser notado que existem poucos estudos sobre os conhecimentos dos professores acerca das transformações geométricas. Também a investigação tende a concentrar-se na reflexão e rotação não existindo quase nenhuma sobre translação (eventualmente porque é considerada "fácil").

As transformações geométricas no actual programa

O programa actualmente em vigor em Portugal (DGIDC, 2007) propõe uma alteração de relevo em relação ao programa anterior: o estudo, logo "desde o 1.º ciclo de diversas transformações geométricas, primeiro de forma intuitiva e depois com crescente formalização.” (p. 7).

Nos dois primeiros ciclos do Ensino Básico, o estudo das transformações geométricas está limitado às isometrias. No 1.º ciclo espera-se que os alunos identifiquem figuras simétricas em relação a um eixo, que desenhem figuras simétricas relativamente a um eixo (horizontal ou vertical) e que construam frisos e identifiquem simetrias. Apesar de no programa apenas surgir explicitamente a reflexão como a isometria a ser abordada, a identificação de simetrias pressupõe que os alunos tenham alguma noção das restantes isometrias: translação, reflexão deslizante e rotação. No 2.º ciclo o estudo das isometrias é aprofundado sendo dada atenção especial à reflexão e à rotação. Os alunos deverão não só identificar e descrever as diferentes isometrias mas também construir o transformado de uma figura por uma qualquer isometria. Deverão além disso identificar e construir frisos e rosáceas.

O estudo

Considerando que o tema “Transformações Geométricas” é uma novidade no currículo do ensino elementar, parece importante compreender que conhecimento têm sobre ele os futuros professores.

Assim, a questão de investigação é: Como se pode caracterizar o conhecimento dos futuros professores do ensino elementar sobre transformações geométricas?

O objectivo do estudo é identificar e descrever as dificuldades/erros que os futuros professores têm/fazem em relação às transformações geométricas, mais concretamente em relação às isometrias.

Metodologia

O presente estudo insere-se no paradigma qualitativo (Erickson, 1986). O método de investigação utilizado foi o levantamento (survey) tendo os dados sido recolhidos através de um teste. Esse teste foi construído com foco nas três isometrias seguintes: rotação, reflexão e translação. As questões foram todas retiradas de manuais escolares do 4.º ano de escolaridade. A escolha das questões foi feita do seguinte modo: analisou-se o tipo de questões relativas às três isometrias em 6 manuais diferentes e seleccionaram-se as mais representativas de cada tipo.

No total o teste continha 5 questões: as 3 primeiras envolviam reflexão; a 4ª, translação e a última, rotação.

Nas questões sobre reflexão era pedido para: (1) marcar o(s) eixo(s) de simetria; (2) identificar se uma dada recta é eixo(s) de simetria e (3) fazer a reflexão segundo um ou mais eixos.

Em relação à translação, era pedido para fazer a translação de uma figura seguindo as setas. Note-se que, uma vez que a noção de vector não é abordada no 1.º ciclo, nos manuais consultados o vector é substituído por uma seta com um número indicando o número de quadrados para mover. Além disso, esta isometria não é muito frequente nos manuais, surgindo quase exclusivamente ligada aos frisos.

Quanto à rotação, apenas foram consideradas rotações de meia volta (tal como estipulado no programa oficial). Nos 5 itens da questão, era pedido para completar as imagens de modo a obter figuras com simetria de rotação de meia volta em torno de um ponto marcado (centro).

Os participantes no estudo eram alunas de uma turma do 3.º ano de Licenciatura em Educação Básica, todas do sexo feminino, de uma Universidade Portuguesa. Esta licenciatura está estruturada de tal forma que em todos os semestres há uma unidade curricular (UC) de matemática (5 ECTS cada), perfazendo um total de 6 UC de matemática ao longo dos três anos. Numa dessas UC, é trabalhado, de modo aprofundado, o tema das transformações geométricas. Para além das UC em Matemática há apenas uma UC de Didáctica da Matemática, no segundo semestre do último ano.

O teste foi aplicado no segundo semestre do ano lectivo de 2011/2012, no final de uma aula teórica. Responderam 64 alunas.

Após uma primeira apreciação das resoluções, procedeu-se à classificação das respostas em duas categorias: correcta e incorrecta. Nesta última categoria tentou-se identificar respostas típicas ou seja respostas que eram dadas por pelo menos 5 alunas.

Apresentação e discussão de alguns resultados

Relativamente à Reflexão

Sendo a reflexão a isometria provavelmente mais usada desde os primeiros anos e consequentemente mais conhecida, seria de esperar que as participantes não cometessem muitos erros. Contudo, não foi isso que aconteceu.

Na primeira questão para marcar o(s) eixo(s) de simetria, constatou-se que nas figuras que possuíam apenas um eixo de simetria (vertical ou horizontal) ou dois eixos de simetria (vertical e horizontal), quase todas as participantes o(s) desenharam correctamente. Mas, nas figuras com mais do que dois eixos de simetria surgiram algumas dificuldades sendo que a maior parte apenas desenhou dois eixos, um vertical e outro horizontal (como, por exemplo, na figura 1).

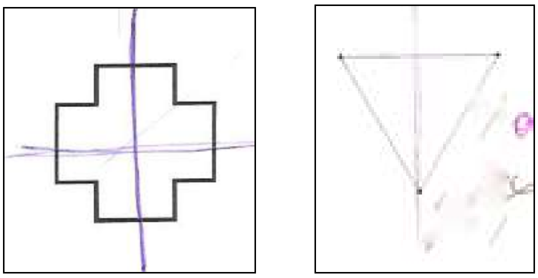


Figura 1 - Marcação incompleta dos eixos de simetria

Destaca-se aqui o caso do triângulo equilátero em que apenas 28 (44%) das participantes identificaram os três eixos de simetria (sendo que 35 participantes identificaram exclusivamente o eixo vertical), o que é surpreendente pois trata-se de uma figura que é muito familiar e normalmente é bastante explorada. Além disso, a identificação dos eixos de simetria dos triângulos surge explicitamente numa das Notas do Programa de Matemática do 2.º ciclo, pelo que se trata de algo que os professores deverão dominar.

Na segunda questão, identificar eixo(s) de simetria, os resultados foram bons com quase todas as participantes a identificarem correctamente as situações em que a(s) recta(s) traçadas é (são) eixo(s) de simetria.

Finalmente, na terceira questão, em que se pedia para fazer a reflexão segundo um ou mais eixos, surgiram muitas dificuldades especialmente quando o eixo de reflexão era oblíquo. Estas dificuldades são do mesmo tipo das identificadas em alunos, como atrás referimos (e.g., Schultz, 1978; Kucheman, 1981). A figura 2 ilustra alguns dos erros efectuados pelas participantes nesta questão.

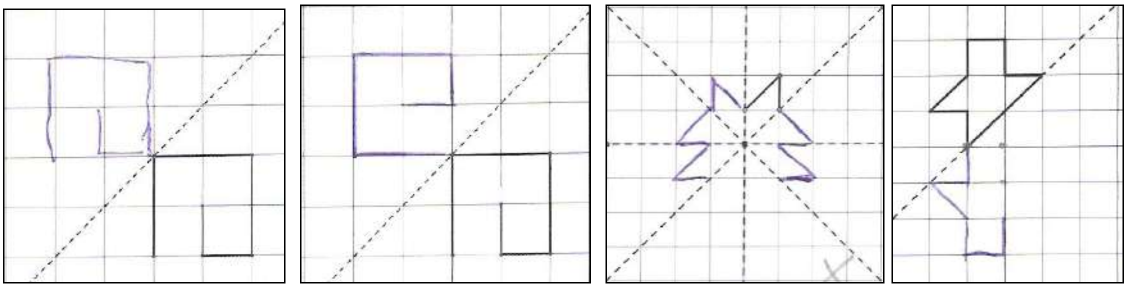


Figura 2 – Erros cometidos na reflexão

Relativamente à Translação

O caso da translação é interessante. Apesar de ser considerada uma isometria fácil (e.g. Moyer, 1978; Shah, 1969; Schultz, 1978) as participantes revelaram algumas dificuldades. Um dos erros mais frequentes foi o de considerar o comprimento do vector como o do espaço entre a figura e o seu transformado. (Figura 3)

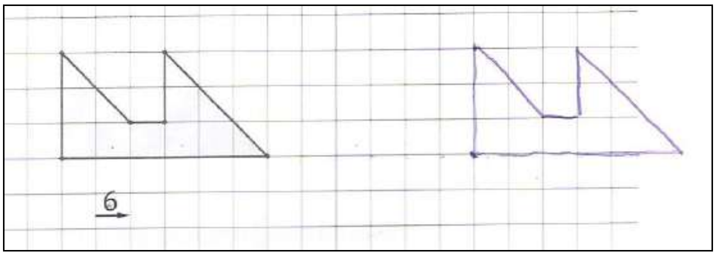


Figura 3 – Erro cometido na translação

Outro dos erros encontrados tem a ver com a deslocação da figura na direcção e sentido correctos mas sem atender ao comprimento do vector.

Relativamente à Rotação

Esta isometria parece ser aquela em que as participantes possuem mais dificuldades. Uma vez mais, estas dificuldades espelhas as referidas na literatura relativas a crianças (e.g. Moyer, 1978; Shah, 1969; Schultz, 1978).

Na questão relativa às rotações era pedido, como já foi mencionado, para completar as imagens de modo a obter figuras com simetria de rotação de meia volta em torno de um ponto marcado (centro). O máximo de respostas correctas não ultrapassou os 39% em nenhum item. Este é um resultado perturbador. Observando as respostas dadas pelas participantes é possível constatar que parece haver uma confusão em relação ao que é pedido. Com efeito, um número significativo de participantes efectua uma reflexão horizontal/vertical da figura, obtendo uma figura simétrica que não a pedida. (Figura 4).

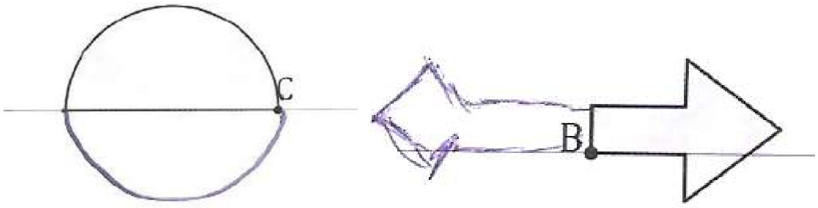


Figura 4 – Confusão entre rotação e reflexão

Este erro pode dever-se, por um lado, à linguagem usada, em particular ao termo “simetria” muitas vezes conotado com a reflexão; e por outro à representação dos itens, em que aparece uma linha horizontal em cada figura (à qual pertence o centro da rotação). Esta representação, para além de desnecessária, pode induzir os alunos em erro. Note-se que quer a representação, quer a linguagem são as usadas nos manuais escolares.

Um outro erro que se observou nesta questão, ainda que com menor frequência, foi a troca do ângulo da rotação: em vez de 180º (meia volta), algumas participantes consideraram 90º (quarto de volta) (Figura 5).

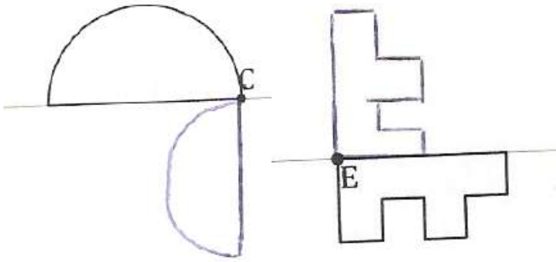


Figura 5 – Confusão entre rotação de 180º e de 90º.

Considerações finais

Este estudo apresenta alguns resultados surpreendentes e ao mesmo tempo preocupantes. Em especial, mostra que estes futuros professores não parecem estar preparados para ensinar transformações geométricas. Embora eles já tivessem tido contacto com o tema, este estudo revelou muitas dificuldades em todas as isometrias estudadas. Aparentemente o modo como as transformações geométricas foram abordadas não permitiu ultrapassar/colmatar muitas das dificuldades/erros apresentadas pelas alunas. Note-se, uma vez mais, que as questões colocadas foram retiradas de manuais escolares actuais, pelo que seria de esperar que estas alunas, futuras professoras, possuíssem os conhecimentos necessários e suficientes para responder correctamente a todas elas. Tal, como vimos, não aconteceu. Perante este cenário, como poderemos esperar que estes futuros professores ensinem este tema aos alunos se eles próprios não possuem esse conhecimento?

Mais investigação é necessária por forma a identificar com clareza as dificuldades que os (futuros) professores possuem e perceber as suas causas. É sobretudo imperioso desenhar tarefas especificamente concebidas para "atacar" essas fragilidades e ajudar estes futuros profissionais a superá-las.

Referências bibliográficas

Askew, M., Brown, M., Rhodes, V., Wiliam, D. & Johnson, D. (1997). Effective Teachers of Numeracy: Report of a study carried out for the London King's College, University of London.

Ball, D. L. (1990). The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. *The Elementary School Journal* 90(4): 449-466.

Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A. et al. (2010). Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. *American Educational Research Journal* 47 (1): 133-180.

Davis, B. & Simmt, E. (2006). Mathematics-for-teaching: an ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics* 61(3): 293-319.

DGIDC (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Dísponível em: http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/028_ProgramaMatematicaEnsinoBasico.pdf

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp.119-161). New York: MacMillan.

Gomes, A. (2004). *Um estudo sobre o conhecimento matemático de (futuros) professores do 1.º ciclo. O problema dos conceitos fundamentais em geometria.* Tese de doutoramento (não publicada). Universidade do Minho.

Hershkowitz, R., & Vinner, S. (1984). Children's concepts in elementary geometry – a reflection of teacher's concepts? In *Proceedings of PME 8*, 63-69. Darlinghurst, Australia.

Hill, H. C., Blunk, M., Charalambous, C., Lewis, J., Phelps, G., Sleep, L. & Ball, D. L. (2008). Mathematical Knowledge for Teaching and the Mathematical Quality of Instruction: An Exploratory Study. *Cognition and Instruction*, 26: 4 , 430 – 511.

Hill, H. C., Rowan, B. & Ball, D. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal* 42(2): 371-406.

Hoyles, C. & Healy, L. (1997). Unfolding meanings for reflective symmetry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 2: 27–59

Jones, K. (2002). Issues in the Teaching and Learning of Geometry. In Linda Haggarty (Ed.) *Aspects of Teaching Secondary Mathematics: perspectives on practice*, 121-139. London: RoutledgeFalmer.

Jones, K., Mooney, C. & Harries, T. (2002). Trainee primary teachers' knowledge of geometry for teaching. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics* 22(1&2): 95-100.

Knuchel, C. (2004).Teaching Symmetry In the Elementary Curriculum. *The Montana Mathematics Enthusiast,* 1:1, 3-8.

Kuchemann, D. (1981). Reflections and rotations. In K. M. Hart (ed.), *Children's Understanding of Mathematics* 11–16, 137–157. London: John Murray.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Marchini, C. & Vighi, P. (2011). Innovative early teaching of isometries. In M. Pytlak, T. Rowland and E. Swovoda (Eds.). *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 547-557. Rzeszów, Poland.

Moyer, J. (1978). The Relationship between the Mathematical Structure of Euclidean Transformations and the Spontaneously Developed Cognitive Structures of Young Children. *Journal for Research in Mathematics Education*, 9: 2, 83-92.

Shah, S. A. (1969). Selected geometric concepts taught to children ages seven to eleven. *Arithmetic Teacher*, 16, 119-128.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher* 15 (2): 4-14.

Turner, F. & Rowland, T. (2008). *The knowledge quartet: a means of developing and deepening mathematical knowledge in teaching?* Dísponível em http://www.maths-ed.org.uk/mkit/seminar5.html.

A UTILIZAÇÃO DA VISUALIZAÇÃO PARA ENSINAR A APRENDER MATEMÁTICA

Isabel Vale
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo
isabel.vale@ese.ipvc.pt

Teresa Pimentel
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo
teresapimentel@ese.ipvc.pt

Resumo

Nesta comunicação pretendemos chamar a atenção para alguns dos aspetos do papel da visualização e a sua importância na aprendizagem matemática, recorrendo a alguns exemplos de sala de aula. Desenvolveu-se um estudo exploratório que recorreu à realização de tarefas desafiantes no âmbito da geometria. O nosso principal objetivo era analisar em que medida os alunos são capazes de identificar os aspetos visuais emergentes das tarefas propostas e mobilizá-los como recurso criativo para a resolução dessas mesmas tarefas. Os resultados mostram, por um lado, a dificuldade manifestada pelos alunos em relação à visualização, e, por outro lado, o papel da instrução no desenvolvimento desta capacidade.

Palavras-chave: visualização, representações visuais, tarefas, formação inicial, criatividade.

Introdução

A Geometria tem sido uma área tradicionalmente bastante negligenciada na matemática escolar, principalmente nos níveis mais elementares, apesar dos muitos benefícios que pode proporcionar aos estudantes, mesmo quando apresentada de forma intuitiva e informal. As experiências em geometria que normalmente são propostas aos estudantes limitam-se aos níveis mais baixos de raciocínio, sendo bastante reduzidas as experiências significativas que permitam desenvolver capacidades de raciocínio mais elevadas e a criatividade. Esta prática tem sido evidenciada nos fracos resultados nos itens relacionados com geometria, quer em provas nacionais quer internacionais, o que torna a geometria um tema a que a comunidade de educadores matemáticos deve dar uma atenção especial. Uma das razões para esta aparente incapacidade para ensinar e aprender geometria pode dever-se, de acordo com Fujita e Jones (2002) à sua dupla natureza: a geometria é concetualmente teórica mas com ligações á realidade. Esta dupla natureza poderia ser uma ajuda para que os professores ensinassem mais facilmente conteúdos abstratos, e para que os alunos também aprendessem mais facilmente estes conteúdos, ao ser-lhes permitido experimentar ideias geométricas; no entanto, para muitos estudantes a conjugação destas duas vertentes não é conseguida. Ressalve-se que alguns resultados recentes, quer nacionais quer internacionais (PISA, 2009) apontam no sentido de uma melhoria do desempenho, o que incentiva a um reforço das iniciativas para manter e melhorar estes parâmetros.

Neste período de renovação curricular espera-se que os professores motivem os alunos para a aprendizagem da geometria, mostrando-lhes para isso a sua importância como parte do mundo que nos rodeia, assim como as relações entre a dualidade dos aspetos concretos e abstratos. Os aspetos visuais no ensino e aprendizagem da matemática, em particular a visualização, têm ganho bastante relevo nas últimas três décadas, sobretudo pelo seu contributo para o raciocínio matemático (e.g. Dreyfus, 1990; van Hiele, 1999; Presmeg, 2006), mas têm sido tradicionalmente negligenciados e até esquecidos nos currículos de matemática. Um dos principais propósitos em educação matemática é que os estudantes se tornem reflexivos e adquiram um pensamento flexível de modo a que possam aplicar os seus conhecimentos matemáticos nas mais variadas situações. Defendemos que, para este efeito, a aprendizagem matemática deve incluir práticas que conduzam os alunos a pensar visualmente e a desenvolver essa capacidade através de experiências que requeiram tal forma de pensamento.

A prática tradicional de ensino reflete-se nos alunos da formação inicial, que apresentam também essa falta de preparação, e neste sentido é necessário incluir num programa de formação, seja inicial seja contínua, oportunidades de mostrar a importância da geometria, e em particular da visualização, no desenvolvimento de capacidades matemáticas, e também de evidenciar que os campos numérico e geométrico não estão tão distantes como aparentemente pode parecer e que é desejável estabelecer conexões entre os dois domínios.

O estudo empírico desenvolvido decorreu com alunos de Educação Básica, tendo sido utilizadas diversas tarefas das quais se analisam três. Os dados recolhidos incidem na resolução das tarefas propostas, nas observações efetuadas e na análise do trabalho escrito dos alunos.

As representações visuais

As representações são essenciais na aula de matemática para o professor ensinar e para o aluno aprender (Stylianou, 2010). Nas últimas décadas tem-se investigado muito sobre o papel das representações em educação matemática, assim como sobre o seu significado, perspetivas nem sempre concordantes. As representações são centrais para a compreensão de um conceito matemático e na atividade individual de resolução de problemas. Tem sido discutida a importância da utilização de múltiplas representações de modo flexível na compreensão de conceitos (Stylianou, 2010). Esta flexibilidade vai permitir que os utilizadores sejam potenciais resolvedores criativos de problemas. Infere-se assim que toda a atividade matemática necessita de recorrer a representações, sendo estas entidades usadas para explicar algo, e que usualmente adquirem a forma de analogias, desenhos, manipuláveis, expressões, palavras escritas, gráficos, numerais etc.

Dreyfus (1990) considera dois tipos de representações em matemática: a simbólica e a mental. A representação simbólica é escrita, ou falada, com a finalidade de facilitar a comunicação sobre o conceito; a representação mental refere-se a esquemas internos usados para interatuar com o mundo exterior e pode diferir de pessoa para pessoa. Uma representação matemática apenas ilustra muitas vezes um dos aspetos do conceito. No entanto, só temos uma imagem holística de um conceito quando olhamos para essa ideia a partir de diferentes perspetivas. À medida que o número de pontos de vista aumenta desenvolvemos uma visão do conceito mais rica e profunda. As componentes concretas, verbais, numéricas, gráficas, contextuais, pictóricas ou simbólicas incluídas numa representação permitem descrever diferentes aspetos do conceito. A capacidade de escolher uma representação apropriada para determinado conceito e capitalizar as potencialidades dessa dada representação é uma componente importante para a compreensão das ideias matemáticas. De acordo com Tripathi (2008), a utilização de múltiplas representações no ensino e aprendizagem da matemática tem proporcionado um conjunto de evidências sobre os benefícios dessa utilização.

A visualização

A visualização é uma capacidade que começa por surgir naturalmente ligada à geometria. Os alunos não podem resolver problemas geométricos se não tiverem criado imagens mentais geométricas (Fujita & Jones, 2002). Aquilo que estes autores, com base no trabalho de Godfrey (1910), designam por *olho geométrico* pode traduzir-se pelo poder de ver propriedades geométricas a separar-se de uma figura. Ora esta capacidade pode ser uma ferramenta potente para construir a intuição geométrica. Contudo, apesar de o visual estar fortemente associado à geometria, as representações visuais podem ser usadas noutros campos da matemática. Atiyah (2001) defende que a intuição ou perceção espacial é extremamente poderosa não só em temas geométricos mas noutros que o não são. Usamos a forma geométrica porque esta permite-nos usar a nossa intuição, que é a ferramenta mais poderosa. Este autor equaciona o perigo que constitui a passagem para o cálculo algébrico, já que, quando deixamos de pensar geometricamente, deixamos de pensar sobre o significado dos entes para lidarmos apenas com manipulações. De facto, o raciocínio espacial é o processo de formar ideias através de relações espaciais entre objetos, e dado que vivemos num mundo em que o espaço é uma caraterística fundamental, este tipo de raciocínio desempenha um papel importante na resolução de problemas matemáticos, transcendendo o trabalho puramente geométrico. Este tipo de pensamento inclui o uso de diagramas e desenhos, a descoberta de padrões e estruturas, a representação gráfica de números, nomeadamente os fracionários, a concetualização de funções matemáticas, etc. (Jones, 2001). Por exemplo, um conceito aritmético como a multiplicação pode ser traduzido através de um arranjo retangular, e, assim, a visualização é também um veículo para a resolução de problemas em álgebra.

De acordo com Gilbert (2007), o termo visualização é usado para significar a apresentação visual da informação de modo sistemático e focado na forma de tabelas, diagramas e gráficos. Frobisher, Frobisher, Orton e Orton (2007) usam o termo visualização para significar o procedimento mental que permite mover de um objeto físico visível para a sua representação mental, enquanto que Arcavi (2003) define visualização do seguinte modo:

> Visualização é a capacidade, o processo e o produto da criação, interpretação, uso e reflexão sobre desenhos, imagens, nas nossas mentes, no papel ou com ferramentas informáticas, com o propósito de descrever e comunicar informação, pensar sobre, prever ideias desconhecidas e compreensões avançadas. (p.217)

Esta definição mostra quão poderosa pode ser a visualização na exploração de problemas ao dar significado a muitos conceitos matemáticos e às relações entre eles, apesar de nem sempre representar um isomorfismo entre os conceitos matemáticos e as suas relações. Os estudantes sem esta capacidade visual terão dificuldade em ter sucesso na aprendizagem da matemática (Vale, 2009). A visualização permite usar meios concretos para atacar imagens abstratas; em matemática envolve o processo de formar e manipular imagens, seja com papel e lápis, com meios tecnológicos ou mentalmente, investigar, descobrir e compreender. Quando trabalhamos em geometria recriamos uma imagem mental "visível" que é idêntica ao próprio objeto, desenho ou outro modelo com o qual é confrontada. Frobisher et al. (2007) apresentam um esquema simples que identifica os processos envolvidos na visualização (Figura 1):

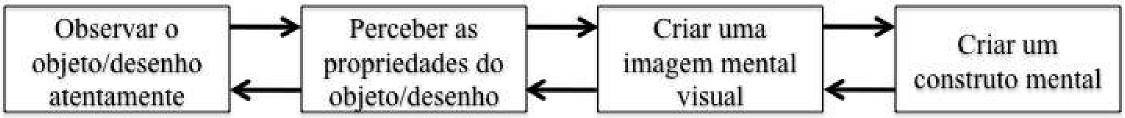


Figura 1. Procedimento durante a visualização (Frobisher et al., 2007)

Apesar de muitos reconhecerem a relevância do papel da visualização na resolução de problemas (Rivera & Becker, 2008; Triphati, 2008), e considerarem mesmo que está na génese da prova, como refere Jones (2001) quando chama a atenção que etimologicamente provar significa tornar visível ou mostrar, esta é ainda uma questão em aberto (Stylianou, 2010; Dreyfus, 1990; Jones, 2001; Presmeg, 2006). De facto, outros autores referem que o pensamento visual, por si só, não é suficiente para se fazer matemática; apesar de ser uma fonte poderosa de ideias, constitui apenas um complemento ao pensamento analítico (Goldenberg, 1996). Pode-se acrescentar ainda que algumas das dificuldades que os estudantes têm com as representações e no estabelecimento de relações entre elas se devem ao tipo de ensino que receberam, onde se privilegia apenas um tipo de representação (externa). Deste modo, o ensino deve promover uma articulação entre as diferentes representações de modo a tornar os estudantes mais flexíveis e criativos e a promover uma melhor compreensão dos conceitos. Algumas das estratégias que os professores podem adotar para fomentar as representações visuais nos seus alunos podem passar por levá-los a exprimir o que veem através de outras formas de representação, como, por exemplo, descrever padrões em sequências figurativas utilizando expressões numéricas adequadas. Com o tempo os estudantes consideram as representações visuais como ferramentas úteis na resolução de problemas e começam a usá-las independentemente de lhes ser pedido ou apresentado. Por outro lado, a visualização assume um papel relevante neste trabalho pois é central para a aprendizagem matemática uma vez que é seletiva. Esta seletividade é responsável em parte pelas diferenças qualitativas em qualquer uma das imagens visuais produzidas subsequentes. Deste modo, os estudantes têm de aprender a navegar com e entre os diferentes modos de representação.

A valorização da visualização tem ligações muito diretas com o desenvolvimento da criatividade, já que é um campo fértil para a criação e seleção de tarefas com caraterísticas que promovem um trabalho autónomo, espontâneo e original (Williams, 2002). Com efeito, as tarefas baseadas em imagens podem desenvolver a imaginação, facultar a tradução entre representações, o acesso autónomo, potencial para descoberta de sucessivas complexidades permitindo a manutenção do desafio, soluções múltiplas em vez de respostas únicas, integração de ideias matemáticas inesperadas que até aí pareciam desligadas. A visualização pode suscitar o desenvolvimento da intuição e a capacidade de ver novas relações produzindo assim o corte em fixações mentais que possibilita o pensamento criativo (Haylock, 1987).

Podemos concluir que há muitas razões que substanciam o recurso á visualização para aprender e ensinar matemática em todos os níveis da matemática escolar, desde os mais elementares até ao ensino superior. A literatura também refere que a atividade de "ver" não é apenas um processo inato mas algo que se cria e aprende. A ciência cognitiva sugere que: (a) aprendemos a ver; (b) criamos o que vemos; (c) o raciocínio visual ou o pensar a ver é aprendido e pode também ser ensinado; e (d) é importante que se ensine (Whiteley, 2000). As representações visuais tendem muitas das vezes a ser vistas pelos professores informalmente, como uma componente periférica da atividade matemática, tendo muitas vezes dificuldade em aceitar que essas representações visuais podem ser uma poderosa ferramenta na resolução de problemas. A representação não é o conceito mas faz parte dele.

Para muitos alunos uma imagem torna-se mais acessível do que um conjunto de palavras, não só para apoiar o raciocínio mas também como forma de recordar. No momento atual, em que os estudantes têm acesso a um mundo altamente visual (e.g. computadores, telemóveis, vídeojogos, vídeomúsica) estarão eventualmente mais despertos para serem orientados visualmente do que os seus próprios professores.

O contexto e aspetos metodológicos

Para a experiência didática que está na base deste trabalho utilizou-se um conjunto de tarefas, cerca de vinte, criadas e/ou adaptadas, em contextos figurativos ou que suscitavam o recurso a materiais, e que foram implementadas com futuros professores durante as aulas de uma Licenciatura em Educação Básica. Esta experiência foi orientada pela seguinte questão: Como é que os alunos mobilizam os aspetos visuais emergentes das tarefas propostas como recurso criativo para a resolução dessas mesmas tarefas? Utilizou-se uma abordagem qualitativa e interpretativa em que os dados recolhidos incidem na resolução das tarefas propostas e nas observações efetuadas. A análise documental recaiu sobre os registos feitos pelos alunos na realização de três tarefas. Nesta análise pretendeu-se identificar de que modo os alunos utilizavam os aspetos visuais das tarefas para elaborarem os seus raciocínios de modo a ter sucesso. Nesta experiência didática começou por se apresentar as tarefas aos alunos. Depois da sua realização, individualmente, em pares ou em grupos, seguiu-se a apresentação e discussão das soluções e fez-se por fim uma síntese dos aspetos mais relevantes de cada uma das tarefas, designadamente a comparação e contraste entre os percursos seguidos e a eleição dos mais simples ou profícuos.

Resultados

Neste artigo não iremos debruçar-nos sobre a análise das aulas observadas durante a intervenção didática efetuada mas antes centrar-nos na apresentação de algumas das tarefas e na abordagem efetuada pelos alunos.

Tarefa 1: Nem um quadrado!

Descubra o menor número de pregos que devem ser retirados de um geoplano de modo a não poder construir qualquer quadrado.
Comece com um geoplano de 2x2.
Generalize o problema.

Nesta tarefa os alunos têm de imaginar várias combinações de pregos para formar um quadrado e ser capazes de criar essas imagens mentais antes de tirar os pregos, sobretudo porque, à medida que o número de pregos no geoplano aumenta, essas combinações vão-se tornando mais complexas. O pensamento dedutivo está presente na justificação de uma dada combinação produzir um quadrado. Por último, proporciona uma conexão entre a geometria, os números e a álgebra, uma vez que dá origem ao padrão numérico dos números triangulares.

Nesta tarefa os alunos tinham de imaginar várias combinações de pregos para formar um quadrado antes de decidir que prego ou pregos escolher de modo a otimizar o número de pregos a retirar. Com o crescimento sucessivo das dimensões do geoplano a complexidade do problema aumentava. A estratégia de eliminação do menor número de pregos possível foi sendo progressivamente interiorizada. A procura de quadrados nem sempre se revelou fácil por terem tendência a considerar apenas os quadrados na posição horizontal/vertical. O reconhecimento dos outros quadrados, para além de exigir um pensamento visual divergente, obrigava a um raciocínio dedutivo que explicasse as razões de aquele quadrilátero ser um quadrado. Na última fase, foi surpreendente e acolhida com agrado pelos alunos a descoberta de um padrão numérico, o dos números triangulares, durante o processo de generalização.

Ilustram-se de seguida algumas fases da realização da tarefa, salientando-se o apoio gestual quando a aluna descobre que o quadrado também pode estar inclinado (Figura 2), e o registo de mais do que uma tentativa de resolução apontando a viragem de uma para outra quando os alunos descobrem que a primeira conjetura sobre a sequência de números falha uma vez que não tinham sido considerados os quadrados inclinados (Figura 3), e um registo da descoberta do padrão numérico dos números triangulares associado (Figura 4).

Figura 2

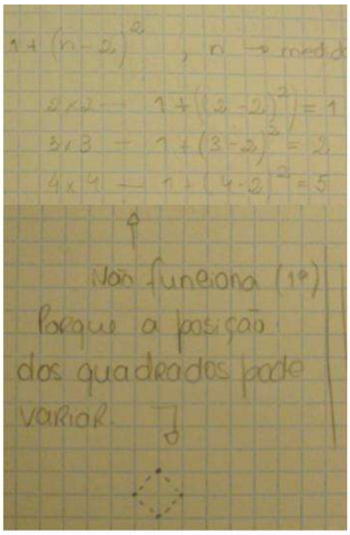


Figura 3

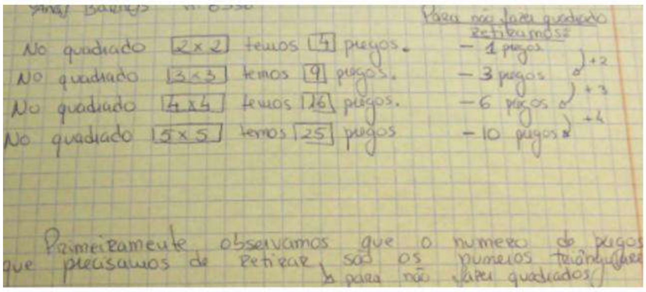
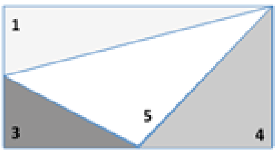


Figura 4

Tarefa 2: Áreas

A figura representa um retângulo com uma unidade de área. Qual a área de cada uma das partes numeradas do retângulo? [Os segmentos assinalados dividem os lados do retângulo ao meio].

Esta questão foi colocada aos alunos para resolver sem utilizar fórmulas. Como é que poderá ser resolvida? Explique pormenorizadamente.



Este problema, uma vez afastada a hipótese mais clássica do uso de fórmulas para a determinação de áreas, exige imaginação e intuição geométrica para visualizar outra decomposição do retângulo inicial em retângulos de que cada uma das partes numeradas seja uma parte mais óbvia de modo a poder relacionar as suas áreas com a área do retângulo inicial. Uma possível nova decomposição, e a consequente dedução da área de cada uma das partes, está sugerida de forma faseada na Figura 5.

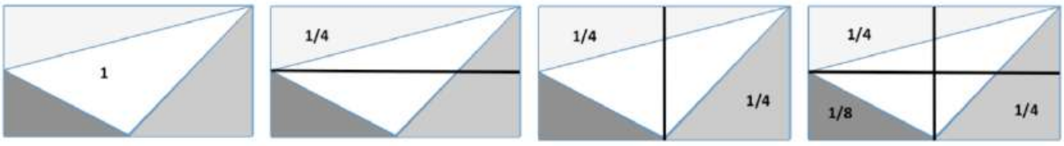


Figura 5. Relacionamento visual entre áreas

Claro que a nova decomposição poderia ter sido outra – por exemplo em dois triângulos retângulos obtidos pelo traçado da diagonal – mas levaria a um raciocínio mais complexo.

Nesta tarefa a relação entre a área e a interpretação de fração como parte-todo é muito forte e é neste caso uma via para a sua resolução. Esta revelou-se de grande dificuldade para os alunos. Ficaram desorientados pela exigência da não utilização de fórmulas por não saber como resolver a situação sem elas. Foram muito poucos os alunos que obtiveram sucesso na tarefa e que a resolveram de acordo com as condições impostas. Os alunos que a resolveram seguiram muito de perto o processo previsto, começando por fazer a decomposição do retângulo assinalada. Nas Figuras 6 e 7 surgem duas explicações baseadas no mesmo raciocínio. Apesar da indicação para o não uso de fórmulas ainda surgiram algumas resoluções corretas que as utilizavam.

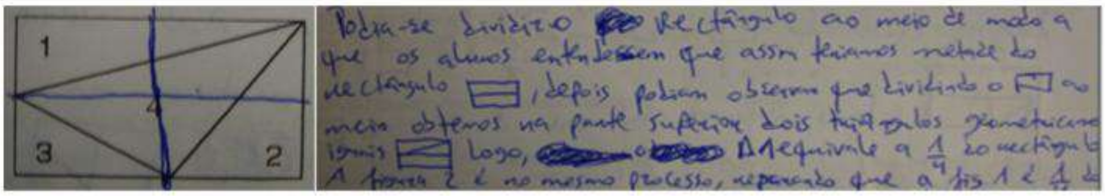


Figura 6. Explicação do raciocínio (1)

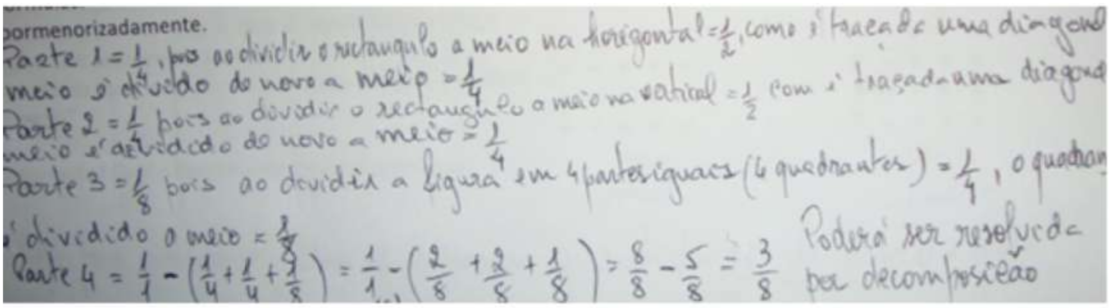


Figura 7. Explicação do raciocínio (2)

Este tipo de tarefa foi grandemente trabalhada com os alunos, incentivando-os a olhar para as figuras de outros modos que não fossem apenas o recurso a fórmulas, pretendendo, por um lado, elevar o nível cognitivo da tarefa, e, por outro, desenvolvendo as capacidades visuais e intuitivas dos alunos e as conexões matemáticas.

Tarefa 3: O cubo

A partir de uma folha de papel quadrada, desenhe a planificação de um cubo com o máximo volume.
Em seguida construa o cubo por dobragens.

Este problema envolve raciocínio geométrico e espacial. Podem ser construídas muitas planificações numa folha quadrada, mas apenas uma se ajusta às condições. É um problema com alguma complexidade, sobretudo para ser trabalhado a nível do ensino básico. A Figura 8 mostra algumas tentativas que os estudantes podem fazer para obter a solução, em que a última imagem pode ser obtida quer por desenho quer por dobragem. É necessária intuição e pensamento divergente para admitir uma face do cubo dividida em quatro triângulos. Isto requer uma ideia original. No entanto, a evolução da consideração das diferentes planificações, bem como a noção intuitiva de equilíbrio e simetria, pode permitir atingir essa ideia. Podemos considerar que esta tarefa exige criatividade na sua resolução.

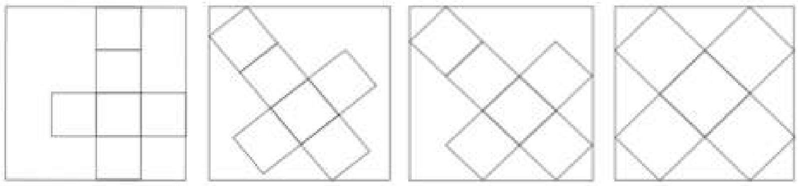


Figura 9: Diferentes tentativas para otimizar a solução

Os alunos, maioritariamente, começaram por explorar as possibilidades mais óbvias, em que os segmentos que representam as arestas na planificação são paralelos aos lados da folha de papel quadrada, e que estão ilustradas na Figura 9. Houve também uma solução que envolveu a ideia de aproveitar a diagonal do quadrado – Figura 10. As dimensões respetivas foram obtidas por tentativa e erro.

Esta tarefa revelou-se bastante difícil, não tendo surgido a solução esperada. De facto, é necessário, por um lado, conhecimento matemático aplicado à situação, e por outro a intuição ligada à visualização das diferentes planificações de um cubo. Além disso, a exploração requer pensamento divergente de modo a imaginar e admitir uma planificação completamente diferente das abordagens clássicas.

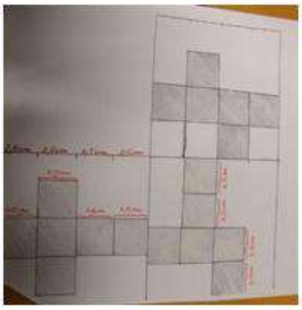


Figura 9

Figura 10

A opção dos alunos foi a de fazer o desenho da planificação. Se tivessem abordado a tarefa por tentativa e erro efetuando dobragens, teriam eventualmente chegado a resultados mais positivos. A Figura 11 ilustra essa possível sequência.

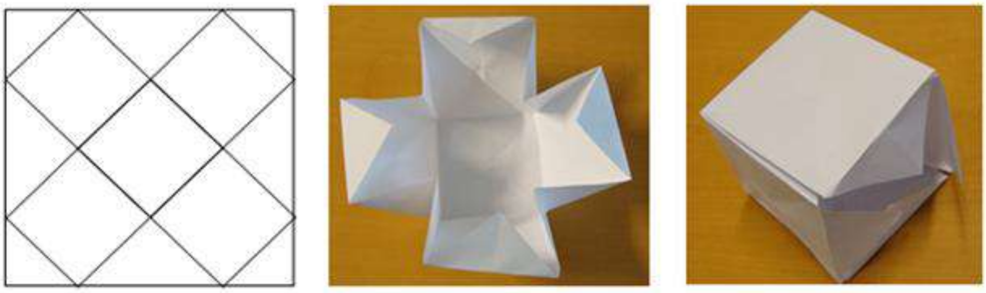


Figura 11. Planificação, dobragem e montagem do cubo

Considerações finais

As tarefas apresentadas neste texto foram selecionadas na expectativa de permitirem o recurso a propriedades das figuras de modo a promover uma abordagem e uso flexível das representações por parte dos alunos. Foram selecionadas por envolverem conceitos elementares e básicos em geometria, podendo ser aplicáveis em contextos de sala de aula do 1º e/ou 2º ciclos do ensino básico.

Nem todos os alunos tiveram o mesmo desempenho nas tarefas. Por outro lado, a tarefa 3 revelou-se demasiado complexa, não proporcionando nenhuma resolução correta de acordo com as condições do problema. No entanto, pode afirmar-se que os alunos se mostraram empenhados e com vontade de ultrapassar os obstáculos que experimentavam, conseguindo com esta postura evoluir durante o próprio processo de resolução. As discussões surgidas no final permitiram uma melhor compreensão de alguns aspetos mais obscuros.

Constatou-se que apresentar a visualização e a intuição geométrica por um lado e os temas numéricos e algébricos por outro em termos dicotómicos é uma simplificação muito limitadora, já que, como vimos, eles interligam-se proporcionando uma visão mais rica e holística das ideias matemáticas envolvidas. Na tarefa 1 este aspeto é notório. Na tarefa 2 foi inicialmente afastada a resolução com recurso a fórmulas para não afunilar a abordagem e incentivar a visualização; contudo, aproveitando a resolução surgida com recurso a fórmulas, foi feita na síntese a conexão entre os dois tipos de representação, tornando explícita a vantagem dessa dupla via pela sua complementaridade. É pois necessário, em termos curriculares, um reforço da ligação entre os diversos temas matemáticos, de modo a promover uma harmonia entre os vários tipos de raciocínio, designadamente o algébrico e o geométrico, já que essas conexões, com os diversos tipos de representações que suscitam, trazem vantagens observáveis na aprendizagem matemática dos alunos através de uma compreensão mais flexível e global dos diferentes conceitos.

Por último, voltando à questão que orientou este trabalho, pudemos verificar que a mobilização dos aspetos visuais inerentes às tarefas apresentadas revelou-se produtiva na exploração das tarefas propostas, processando-se por níveis sucessivos de aprofundamento. De facto, a primeira abordagem que os alunos apresentam é normalmente a mais clássica e esperada, e também mais pobre, mas, à medida que a exploração se desenvolve, os alunos vão enriquecendo progressivamente as suas próprias imagens mentais, permitindo-lhes este processo dar saltos qualitativos em termos de ideias novas e inesperadas que, ao mesmo tempo que possibilitam a descoberta de outras perspetivas e soluções, contribuem para o desenvolvimento da criatividade matemática.

A constatação mais importante que como formadores podemos tirar (Frobisher et al., 2007; van Hiele, 1999; Jones, 2001; Whiteley, 2010**)** é que, desde que se apresentem tarefas adequadas e que estas sejam exploradas de modos apropriados, podemos contribuir para que os alunos aprendam a "ver".

Referências bibliográficas

Atiyah, M. (2001). Mathematics in the 20th Century, *American Mathematical Monthly,* 108(7), 654-666.

Arcavi, A. (2003). The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* 52, 215–241.

Behr, M., Harel, G., Post, T. e Lesh, R. (1992). Rational Number, Ratio, and proportion. In D. A. Grouws, (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 296-333). New York: Macmillan,.

Dreyfus, T. (1990). *Advanced Mathematical Thinking. Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Cambridge: Cambridge University Press.

Frobisher, L., Frobisher, A., Orton, A. & Orton, J. (2007). *Learning to teach shape and space.* Cheltenham, UK: Nelson Thornes.

Fujita, T. & Jones, K. (2002), The Bridge between Practical and Deductive Geometry: developing the "geometrical eye". In A. D. Cockburn and E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 2, pp.384-391). UEA, UK.

Gilbert, J. (2007) (Ed.). *Visualization in Science Education*. Dordrecht: Springer.

Goldenberg, E. P. (1996). "Habits of mind" as an organizer for the curriculum. *Journal of education, 178(1),* 13-34.

Haylock, D. (1987). A framework for assessing mathematical creativity in schoolchildren. *Educational Studies in Mathematics, 18,* 59-74.

Jones, K. (2001). Spatial thinking and visualization. *Teaching and learning geometry 11-19*, 55-56. London, UK: Royal Society.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra (*pp. 65-86). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics: Emergence from psychology. In A.Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 205-235). Dordrecht, NL: Sense Publishers.

Van Hiele, P. (1999). Developing geometric thinking through activities that begin with play. *Teaching Children Mathematics*, 6, 310-316.

Rivera, F. & Becker, J. (2008). Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM Mathematics Education,* 40 (1), 65-82.

Stylianou, D. (2010. Teachers' conceptions of representation in middle school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 13 (4), 325-343.

Tripathi, P. (2008). Developing Mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School,* 13(8), 438-445.

Vale, I. (2009). Das tarefas com padrões visuais à generalização. XX SIEM. In J. Fernandes, H. Martinho & F. Viseu (Orgs.), *Actas do Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 35-63). Viana do Castelo: APM.

Williams, G. (2002). Identifying tasks that promote creative thinking in Mathematics: a tool. Paper accepted as a research report for the *Mathematical Education Research Group of Australasia Conference.* Aukland, New Zealand. July 2002.

Whiteley, W. (2004). *Visualization in Mathematics*. Acedido em 10 de Junho, 2012, em www.math.yorku.ca/whiteley/

SIMPÓSIO 3

ÁLGEBRA E PENSAMENTO ALGÉBRICO

ÁLGEBRA E PENSAMENTO ALGÉBRICO

Manuel Joaquim Saraiva
Universidade da Beira Interior
manuels@ubi.pt

Neusa Branco
Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Santarém
Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
neusa.branco@ese.ipsantarem.pt

Considerações gerais

A Álgebra consiste em generalizar ideias da Aritmética onde valores desconhecidos e as variáveis podem ser encontrados para resolver problemas (Taylor-Cox, 2003). Para Mason, Graham e Wilder (2005) a Álgebra fornece uma linguagem simbólica dentro da qual se expressam generalidades conjeturadas, onde o poder da linguagem simbólica está na capacitação para a manipulação daqueles símbolos. Kaput (2008), à generalização e aos símbolos algébricos, acrescenta o aspeto do raciocínio. Para ele, na Álgebra há dois aspetos centrais a considerar: i) a generalização simbólica de regularidades; e ii) o raciocínio e as ações sintaticamente guiadas sobre generalizações expressas em sistemas de símbolos.

Drouhard (2009), por sua vez, afirma que a invenção da linguagem simbólica da Álgebra influenciou o desenvolvimento da Matemática em todos os domínios. Para este autor, os resultados da Álgebra vêm de uma evolução histórica com as seguintes características: primeiro é uma arte, depois uma ciência de resolução de problemas numéricos; primeiro é um sistema de representação informal, depois de registos formais (sistemas de representação semiótica); primeiro é uma ciência de números, depois uma de estruturas. Aquele autor afirma ainda que a linguagem algébrica deve ser descrita em termos linguísticos (sintaxe; semântica). Quanto à semântica, o poder da Álgebra está na capacidade de, judiciosamente, "esquecer o significado". Claro que, sob o ponto de vista educacional, é importante registar que os alunos devem ao mesmo tempo ter mestria nas linguagens (natural e simbólica), na respetiva sintaxe e semântica e nos aspetos semióticos destas linguagens e serem flexíveis.

Diversos autores, como Carraher e Schliemann (2007), defendem que a separação entre Aritmética e Álgebra, que muitas vezes se verifica nos primeiros anos de escolaridade, não potencia o pensar sobre a Matemática e pode tornar mais difícil a posterior aprendizagem da Álgebra. Estes autores defendem uma perspetiva de *early algebra* que fomenta "uma visão mais integrada e desafiadora sobre o currículo da Matemática dos primeiros anos, especialmente no que diz respeito à natureza e finalidade do ensino da Aritmética" (p. 670). Sugerem, assim, que se fomente o pensamento algébrico desde cedo.

O pensamento algébrico inclui a capacidade de lidar com o cálculo algébrico, as funções, as estruturas matemáticas e o seu uso na interpretação e resolução de problemas matemáticos ou de outros domínios, bem como com a manipulação de símbolos e o seu uso na descrição de situações e na resolução de problemas (Ponte, 2005). A perspetiva da Álgebra escolar desde os primeiros anos, salientada por Ponte, Branco e Matos (2009) não se foca exclusivamente no simbolismo formal e na manipulação algébrica. Estes autores destacam a generalização e na sua representação em diferentes situações como as relações, regularidades, variação e modelação.

De acordo com as orientações curriculares nacionais, a Álgebra é um tema essencial do currículo da Matemática escolar e surge como um tema matemático fundamental a partir dos anos intermédios do ensino básico. Nos primeiros anos é promovido o pensamento algébrico dos alunos em articulação com outros temas matemáticos. O pensamento algébrico, em particular o reconhecimento e a articulação da generalidade, e para Mason, Graham e Wilder (2005), está ao alcance de todos os alunos e é essencial para eles, caso queiram participar completamente na sociedade. Os alunos precisam de tempo e de muitas experiências de expressar generalidades para que fiquem seguros de que estão a apreciar generalidades implícitas em técnicas e em conceitos, mais do que apenas tentar reproduzir essas técnicas. Ensinar de forma enfática algoritmos e procedimentos de cálculo sem que os alunos apreendam o significado das operações não se revela vantajoso para a aprendizagem da Álgebra. Tal ensino, segundo Rojano (2002), conduzirá os alunos a uma mecanização sem compreensão, o que provocará fracos desempenhos e uma atitude de rejeição à Matemática.

A investigação tem mostrado que muitos alunos com um bom desempenho na aprendizagem dos números e das operações têm, mais tarde, grandes dificuldades na aprendizagem da Álgebra (Usiskin, 1988). Para este autor, uma das razões destas dificuldades está nas subtilezas e nas mudanças de significado dos símbolos quando nos deslocamos da Aritmética para a Álgebra, ou, como afirma Schoenfeld (2005), uma das dificuldades relaciona-se com a compreensão simbólica das expressões numéricas e algébricas e as suas conexões. Assim, um aluno treinado apenas para responder a questões algorítmicas tem dificuldade em trabalhar com questões que exijam uma compreensão concetual ou que envolvam uma combinação de representações. Neste sentido, Andrade e Saraiva (2012) afirmam que a coordenação que os alunos fazem entre os vários registos de representação de uma função e de funções diferentes permite-lhes alcançar diversas perspetivas de uma função. A coordenação dos registos de representações semióticas (linguagem natural; algébrico; tabelar e gráfico) permite que os alunos deixem de confundir o objeto matemático função com uma sua representação. Também Vergnaud (1988) afirma que na passagem da Aritmética para a Álgebra, os alunos deparam-se com um grande obstáculo epistemológico, ou seja, reconhecer que as letras podem representar valores e que os símbolos matemáticos podem ter diversos significados.

Formas de pensar essenciais ao pensamento algébrico têm de ser ativadas em diferentes níveis (Harel, 2008), Estruturação, Generalização e Representação. Muitas contribuições mostraram que há etapas prévias no desenvolvimento destas formas de pensar, que deveriam ser cultivadas nos processos de aprendizagem, podendo ajudar a reduzir o "buraco cognitivo" entre a Aritmética e a Álgebra. Radford (2009) demonstrou que o simbolismo alfanumérico não é a única forma de expressar o raciocínio algébrico. Ele afirmou que há uma zona concetual antes, onde o pensamento algébrico é contextual e consubstanciado na corporalidade de ações, gestos, sinais e artefactos.

Os símbolos são parte essencial da Álgebra, pelo que não podem ser esquecidos, nem excluídos. Têm um enorme valor, pois aglutinam as ideias e transformam-nas em informação fácil de entender e de manipular (Sfard & Linchevski, 1994). Porém, o simbolismo pode facilmente conduzir ao formalismo ao perdermos de vista os significados que os símbolos representam e ao só dar atenção à sua manipulação (Davis & Hersh, 1995), prejudicando, assim, o processo de aprendizagem. Torna-se necessário encontrar um caminho para um ensino-aprendizagem da Álgebra que forneça uma entrada acessível e produtiva tanto para a linguagem como para a compreensão matemáticas.

No ensino da Álgebra é, ainda, fundamental integrar a tecnologia (Ponte, Branco & Matos, 2009) e estudar o seu uso com vista à promoção da aprendizagem. Quando é que os alunos a devem utilizar? Deverá se usada para confirmar os resultados já obtidos com métodos tradicionais ou como instrumento de exploração de novas relações?

Tall (1991), ao distinguir dois níveis de Matemática – o elementar e o avançado –, defende que a mudança para um pensamento matemático mais avançado envolve uma transição difícil que é a passagem de uma posição onde os conceitos têm uma base intuitiva, e são fundamentados na experiência, para uma outra posição, onde eles são especificados por definições formais e as suas propriedades reconstruídas através de deduções lógicas. Defende, ainda, que "a mudança do pensamento matemático elementar para o avançado envolve uma transição significativa: do descrever para o definir, do convencer para o provar numa maneira lógica baseada nessas definições" (p. 20) – e que é um problema para os alunos do ensino superior.

A trajetória de aprendizagem dos alunos pode ser fortalecida pela utilização de estratégias baseadas em trabalho exploratório e investigativo, usando situações de aprendizagem realísticas, tecnologias e sistemas de representação apropriados. Nesta trajetória, o professor, paralelamente ao seu papel clássico de expositor de informação e de conhecimentos matemáticos, pode assumir-se como um dinamizador da atividade matemática dos alunos e um sintetizador das validações matemáticas coletivas.

Sobre as comunicações deste Simpósio

As comunicações orais deste Simpósio centram-se essencialmente no ensino e aprendizagem da Álgebra Elementar, nos 1.º e 3.º ciclos do ensino básico, havendo apenas uma que aborda a Álgebra Avançada. Das primeiras, os tópicos de Matemática trabalhados e analisados são as Regularidades e Sequências, incluindo as pictóricas repetitivas e crescentes, as Expressões Algébricas e Funções, as Equações, as Quantidades variáveis e relações entre elas e os sistemas de duas equações do 1º grau. O tema abordado ao nível da Álgebra Avançada é o dos sistemas de equações lineares. A comunicação mural aborda o tema das equações do 1º grau. Seis das comunicações focam-se na aprendizagem, trabalhando com alunos, e quatro no ensino, trabalhando com professores, de forma colaborativa e onde uma delas tem uma perspetiva histórica.

O suporte teórico das comunicações é muito baseado no pensamento algébrico, em particular na *early álgebra,* nas comunicações relativas aos primeiros anos de escolaridade, confrontado com as orientações do Programa de Matemática. Em três comunicações é estudado de forma explícita o uso das tecnologias (robots, Excel e calculadora gráfica). O conjunto das comunicações aborda também temas como as representações e as dificuldades dos alunos. Nos trabalhos com professores, o foco no trabalho colaborativo visa o conhecimento profissional do professor e a promoção da reflexão e da discussão sobre o ensino e a aprendizagem.

A Metodologia de investigação seguida nos estudos apresentados nas comunicações foi essencialmente qualitativa.

As conclusões fundamentais destes trabalhos vão no sentido de que os contextos de trabalho e as abordagens pedagógicas, incluindo o uso de materiais e das diversas representações dos conceitos, tarefas e tecnologias, são fundamentais para uma melhor aprendizagem dos conceitos algébricos referidos. O trabalho reflexivo e colaborativo dos professores são assinalados como uma promoção do desenvolvimento profissional dos professores de Matemática. A investigação sobre a prática do professor contribui para o aprofundamento do conhecimento sobre o ensino desta temática.

Destes trabalhos resultam algumas questões, que serão indicadas no ponto seguinte.

Questões

Das comunicações existentes neste Simpósio podem formular-se as seguintes questões, às quais gostaríamos de dar alguma resposta durante o SIEM:

1. Qual é a dificuldade que os alunos revelam na formulação de generalizações numa sequência? Que representações usam os alunos? Que estratégias de raciocínio usam para responder a questões que envolvem generalizações?
2. Até que ponto uma leitura do gráfico apoiado na função “trace” da calculadora tem semelhanças, ou diferenças, de um ponto de vista de compreensão matemática das funções, relativamente à leitura de uma tabela?
3. No ensino superior, o que leva a que os alunos tenham mais dificuldades nos aspetos relacionados com a interpretação da situação do que com a resolução do próprio sistema de equações?
4. Como ultrapassar a dificuldade dos alunos em torno da simbologia algébrica?
5. A linguagem natural e as representações gráficas, tabelar e simbólica promovem o reconhecimento e a representação das quantidades variáveis e das relações entre elas?
6. Será possível separar o que é aprendido e o contexto em que houve tal aprendizagem? Que papel para os artefactos materiais?

7. Como é que os professores partilham e refletem sobre o desenrolar da atividade letiva? Para o professor de Matemática, qual será a necessidade da investigação estar muito ligada à prática letiva? E qual será a importância da reflexão, e das práticas reflexivas, individuais e num grupo colaborativo, enquanto fator de desenvolvimento profissional?
8. O que leva o professor de Matemática em Portugal a privilegiar as representações algébrica e gráfica e a minimizar a representação tabelar, mesmo tendo em conta as caraterísticas das tecnologias atuais?
9. Como encarar a relação entre o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos, nomeadamente o das equações, e o objeto de ensino?

Referências

Andrade, J. M. & Saraiva, M. J. (2012). Múltiplas representações: um contributo para a aprendizagem do conceito de função. *Revista Latinoamericana de Investigacion en Matemática Educativa, 15*(2), 137-169.

Carraher, D., & Schliemann, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. Lester (Ed.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 669-705). Charlotte, USA: NCTM e IAP.

Davis, P., & Hersh, R. (1995). *A experiência matemática*. Lisboa: Gradiva.

Drouhard, J. P. (2009). Epistemography and algebra. *Proceedings of CERME6*, Lyon.

Harel, G. (2008). DNR Perspective on mathematics curriculum and instruction: focus on proving, part I. *ZDM, 40*, 487–500.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), Algebra in the Early Grades. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum/Taylor & Francis Group & National Council of Teachers of Mathematics.

Mason, J., Graham, A. & Wilder, S. (2005). *Developing thinking in algebra*. The Open University.

Ponte, J. P. (2005). Números e álgebra no currículo escolar. In I. Vale et al.(Eds.), *Números e álgebra* (pp. 5-27). Lisboa: SEM-SPCE.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). Álgebra no ensino básico. Lisboa: ME-DGIDC.

Radford, L. (2009). Why do gestures matter? Sensuous cognition and the palpability of mathematical meanings. *Educational Studies in Mathematics, 70*(3), 111 - 126.

Rojano, T. (2002). Mathematics learning in the junior secondary school: Students' access to significant mathematical ideas. In L. English et al. (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 143-161). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and piftalls of reification: The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics, 26*, 191-228.

Schoenfeld, A. (2005). Curriculum development, teaching and assessment. In L. Santos et al. (Eds.), *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 13-41). Lisboa: APM.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity and proof. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 495–511). New York.

Taylor-Cox, J. (2003). Algebra in the early years?, *Young Children*, 14-21.

Usiskin, S. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A. F. Coxford & A. P. Schulte (Eds.), *The ideas of algebra*. Reston, VA: NCTM.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In Hiebert, H. and Behr, M. (Eds.). *Research Agenda in Mathematics Education. Number Concepts and Operations in the Middle Grades*. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum. pp. 141-161.

PENSAMENTO ALGÉBRICO NOS PRIMEIROS ANOS DE ESCOLARIDADE - UM TRABALHO COLABORATIVO ENTRE PROFESSORES

Célia Cascais

Agrupamento de Escolas da Ericeira

Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

celia.cascais@gmail.com

Resumo

O estudo[20] que se apresenta tem como objetivo descrever e analisar o trabalho de colaboração realizado por um grupo de professores do 2.º ano de escolaridade para desenvolver o pensamento algébrico dos seus alunos, no quadro do tópico Regularidades/sequências. A investigação segue uma abordagem qualitativa, dentro do paradigma interpretativo. Os resultados mostram que a implementação do Programa de Matemática (ME, 2007), se por um lado causa angústias e incertezas, por outro pode ser promotor de práticas profissionais de sucesso. Evidencia-se ainda a necessidade da investigação estar ligada à prática letiva, a mudança de práticas ser ancorada no conhecimento científico e, finalmente, a reflexão em sala de aula enquanto momento de aprendizagem dos alunos e a reflexão dos professores enquanto fator de desenvolvimento profissional.

Palavras-chave: pensamento algébrico, sequências, colaboração

Introdução

A recomendação para o desenvolvimento do pensamento algébrico nos primeiros anos de escolaridade constitui uma das alterações curriculares mais significativas para aprendizagem da Matemática no 1.º ciclo de ensino básico. Porém, o alcance desta proposta poderá não ser imediatamente apreendido por muitos professores. Na verdade, são muitas as questões que se podem colocar a uma alteração curricular desta natureza, nomeadamente, saber de que modo interpretam os professores esta recomendação, e, como a podem integrar na sua prática letiva.

Nesta comunicação, proponho-me discutir o modo como um grupo de professores enfrentou este desafio.

Mais especificamente, procuro descrever, analisar e compreender o trabalho realizado por um grupo de professores do 2.º ano de escolaridade para desenvolver o pensamento algébrico dos seus alunos, num contexto de trabalho colaborativo. O trabalho

[20] Um agradecimento ao Professor João Pedro da Ponte pela orientação da investigação e pela colaboração na redação deste artigo.

desenvolve-se no quadro do tópico Regularidades/sequências, tendo em vista promover nos alunos a capacidade para usar representações e fazer generalizações. A investigação orienta-se pelas seguintes questões: (1) Como é que, em conjunto, os professores interpretam os objetivos e orientações do Programa de Matemática, para o desenvolvimento do pensamento algébrico nos primeiros anos de escolaridade, nomeadamente no trabalho com sequências? (2) Como é que os professores partilham e refletem sobre o desenrolar da atividade letiva?

Pensamento algébrico e o trabalho com sequências

Para falar deste tema importa clarificar o que se entende por pensamento algébrico, um conceito que surge na década de oitenta do século passado aliado a uma nova visão da álgebra, nomeadamente da álgebra escolar. Segundo Kaput (1999), pensamento algébrico é algo que se manifesta quando, através de conjeturas e argumentos, se estabelecem generalizações sobre dados e relações matemáticas, expressas através de linguagens cada vez mais formais. Já Ponte, Branco e Matos (2009) dizem que o pensamento algébrico dá atenção aos objetos e principalmente às relações existentes entre eles, representando e raciocinando sobre essas relações tanto quanto possível de modo geral e abstrato. Este trabalho inclui três vertentes: representar, raciocinar e resolver problemas.

O NCTM (2007) considera a Álgebra como um fio condutor curricular desde os primeiros anos de escolaridade e recomenda que os professores ajudem os alunos a construir uma base sólida assente na compreensão e nas suas experiências como preparação para um trabalho algébrico mais aprofundado, em níveis mais avançados. Em Portugal o tópico do *Programa de Matemática* (ME, 2007) Sequências e regularidades, no 1.º ciclo, visa o desenvolvimento do pensamento algébrico a partir da exploração de regularidades numéricas em sequências e em tabelas de números. Os alunos identificam a lei de formação de uma dada sequência e, nos primeiros anos, expressam-na na sua linguagem natural. Este trabalho contribui para o desenvolvimento da sua capacidade de generalização. As tarefas envolvendo generalizações, para além de promoverem a capacidade de abstração, visam também desenvolver a capacidade de comunicação e o raciocínio matemático (Ponte, Branco, & Matos, 2009).

As sequências podem ser pictóricas ou numéricas (Ponte, Branco, & Matos, 2009). Numa sequência pictórica a análise incide na identificação da regularidade e na descrição das caraterísticas locais e globais das figuras que a compõem e também da sequência numérica que lhe está diretamente associada. Para estes autores existem dois tipos principais de sequências, as repetitivas e as crescentes. Nas sequências repetitivas existe uma unidade (formada por um ou mais elementos ou termos) que se repete ciclicamente. As sequências repetitivas são as mais simples e podem ser usadas para o trabalho inicial da procura de regularidades e generalizações, desde que os alunos compreendam a unidade que se repete. As sequências repetitivas e crescentes são constituídas por elementos ou termos e cada um deles depende do termo anterior e da sua posição na sequência, designada por "ordem do termo".

Conhecimento profissional dos professores, reflexão, e colaboração

O conhecimento profissional dos professores inclui diversas categorias: o conhecimento do conteúdo, o conhecimento curricular e o conhecimento pedagógico do conteúdo (Shulman, 1986). Com um sentido semelhante ao conhecimento pedagógico do conteúdo de Shulman (1986), Ponte e Oliveira (2002) falam em conhecimento didático do professor. Segundo os mesmos, este conhecimento articula-se com os outros domínios do conhecimento profissional e é um conhecimento na ação relativo à prática letiva que inclui quatro grandes vertentes: (i) o conhecimento da matemática, (ii) o conhecimento do currículo, (iii) o conhecimento do processo instrucional, e (iv) o conhecimento do aluno e dos seus processos de aprendizagem.

Relativamente ao *conhecimento da matemática*, o que está em causa é o conhecimento e a visão que o professor tem dos aspetos específicos do saber que ensina. O *conhecimento do currículo,* relaciona-se com o modo como o professor faz a gestão curricular e implica que o professor conheça as grandes finalidades e os objetivos do ensino, a organização dos conteúdos e o conhecimento que tem dos materiais, assim como das diferentes formas de avaliação que deve utilizar. O *conhecimento do processo instrucional* inclui a planificação de longo e médio prazo assim como a planificação de cada aula, a conceção das tarefas e tudo o que diz respeito à condução da aula como a organização do trabalho dos alunos, a preocupação em desenvolver uma cultura de aprendizagem na sala de aula e a regulação da comunicação. Finalmente, *o conhecimento do aluno e dos seus processos de aprendizagem,* o que, no dizer dos mesmos autores, significa conhecer o modo como os alunos aprendem.

Elementos centrais na prática do professor são as tarefas e o modo de trabalhar em sala de aula. Como diz Ponte (2005), não basta selecionar boas tarefas, é preciso ter atenção ao modo de as propor e de conduzir a sua realização em sala de aula. Ao planificar o seu trabalho o professor deve ter em atenção três aspetos essenciais: o que prevê fazer, o que prevê que os alunos façam e a sequência das atividades. Podemos considerar dois tipos de estratégias diferentes no ensino da Matemática: o *ensino direto* que pressupõe uma transmissão unidirecional do conhecimento do professor para o aluno, e o *ensino aprendizagem exploratório* em que o professor não procura explicar tudo, mas deixa uma parte importante do trabalho de descoberta e de construção do conhecimento para os alunos realizarem (Ponte, 2005). Ainda, na opinião do mesmo autor, a aprendizagem decorre, sobretudo, não de ouvir diretamente o professor ou de fazer esta ou aquela atividade prática, mas antes da reflexão realizada pelo aluno a propósito da atividade que realizou.

Em Portugal, Oliveira e Serrazina (2002) têm dedicado alguma atenção à reflexão e às práticas reflexivas em contextos de desenvolvimento profissional de professores de Matemática. Segundo as autoras a qualidade e a natureza da reflexão são mais importantes que a sua simples ocorrência, o que significa que a reflexão tem de ter força para provocar a ação, isto é, levar os intervenientes a repensar o seu ensino. No entanto, argumentam as autoras, a reflexão tem de identificar problemas e procurar resolvê-los o que na disciplina de matemática significa analisar situações concretas da sala de aula, perceber os alunos que estão a trabalhar, o que se espera que eles aprendam, o que se entende hoje por aprender e ensinar matemática e o seu papel na formação pessoal e social do aluno.

No dizer de Hargreaves (1998) a colaboração pode ser um fator de desenvolvimento profissional dos professores envolvidos, procurando formas de enfrentar, refletir e em conjunto ultrapassar problemas decorrentes das recentes alterações nas diferentes vertentes do seu trabalho. Boavida e Ponte (2002) referem que a colaboração oferece importantes vantagens para a realização de uma investigação sobre a prática, constituindo para tal um valioso recurso.

Metodologia da investigação

Considerando o objetivo e as questões orientadoras, esta investigação segue uma abordagem qualitativa, dentro do paradigma interpretativo (Bogdan & Biklen, 1994).

Esta é uma investigação de *exploração* (Eco, 1991), segue uma lógica de descoberta em que não procuro provar nada nem nenhuma teoria. Pelo contrário, procuro descrever e compreender o trabalho realizado pelo grupo de professores, para promover o pensamento algébrico dos seus alunos, de modo a gerar novas hipóteses e levantar questões para possíveis investigações futuras. Incidindo o trabalho colaborativo na planificação e na reflexão sobre a prática pedagógica, observo algumas aulas onde são realizadas tarefas com sequências. Nesses momentos procuro colaborar com os professores na identificação de evidências de pensamento algébrico dos alunos tendo em atenção: a organização e dinâmica da sala de aula, a forma como os alunos se envolvem na realização das tarefas propostas e os seus processos de aprendizagem.

Os participantes do estudo são os quatro professores que, tal como eu própria, são professores do 2.º ano numa escola do distrito de Lisboa, no ano letivo de 2011-12. As sessões de trabalho do grupo colaborativo decorrem em períodos de uma hora e trinta minutos. Estas sessões são gravadas em registo áudio e dão origem a transcrições que constituem o material empírico mais significativo do presente estudo. Note-se que eu, enquanto investigadora e sendo professora do 2.º ano na mesma escola, faço parte do grupo e assumo, aqui, o papel de investigadora participante.

Sessões de trabalho do grupo colaborativo

A investigação decorreu ao longo de 6 sessões do grupo colaborativo e terminou com uma sessão para avaliação do trabalho realizado. Durante as três primeiras sessões os professores dedicaram a sua atenção à leitura e discussão das orientações do Programa e da brochura "Álgebra no Ensino Básico" relativas ao trabalho com regularidades e sequências. Houve ainda oportunidade para realizar algumas tarefas propostas inicialmente pela professora investigadora e posteriormente trazidas para o grupo pelos outros professores ou mesmo criadas com um objetivo específico. A partir da 4.ª sessão, os professores centraram-se na partilha, análise e reflexão em torno do trabalho com sequências realizado em sala de aula.

A 1.ª sessão

Os professores manifestam a necessidade de clarificar e aprofundar o sentido das orientações e de alguns conceitos e questionam-se sobre o modo como podem desenvolver o pensamento algébrico dos seus alunos se não tiverem uma ideia clara sobre o tema e sobre o que se pretende com este tema.

> Eu acho que era importante. Nós paramos agora um bocadinho e já que estamos a desenvolver este trabalho, eu acho que é fundamental criarmos este hábito que é nós pegarmos nos programas, mexermos nos programas, falarmos sobre os programas e analisarmos…(Carlota)

Esta necessidade sentida pelos professores de ler e interpretar as recomendações em conjunto é uma forma de validar e reforçar a interpretação de cada um e as suas opções durante a prática letiva. As dúvidas e as incertezas perante o novo programa, nomeadamente no que se refere ao desenvolvimento do pensamento algébrico, aliadas a uma vontade muito forte de proporcionar aprendizagem matemática com sentido proporcionam as condições necessárias ao trabalho colaborativo.

> Quando tu nos desafiaste a fazer este trabalho eu comecei logo a pensar «o que é que será para mim enquanto professora do 1.º ciclo, o que é que eu entendo [por pensamento algébrico]? … Nós temos de ter o conceito definido… «Álgebra é um modo de pensar…» Eu sublinhei. «… método para ver e expressar relações que proporciona instrumentos poderosos para entender o mundo». E mais abaixo, o que se pretende trabalhando pensamento algébrico «é que os alunos se envolvam num processo matemático de generalização…» (Carlota)

Logo na primeira sessão é evidente uma preocupação dos professores em aprofundar o conhecimento matemático relativo a um aspeto novo, o pensamento algébrico.

A 2ª sessão

A partir da realização em sala de aula de uma tarefa com uma sequência repetitiva, proposta aos professores pela professora investigadora durante a primeira sessão, cada um dos presentes descreve o decorrer da sua aula e os aspetos que considera mais significativos. Todos referem a necessidade de seguir o questionamento proposto por ser muito orientador e garantir que não se saltam etapas. Os professores partilham aspetos de envolvimento efetivo em discussão matemática por parte dos alunos, apresentando ao grupo alguns trabalhos, realizados em sala de aula, que evidenciam o quanto a tarefa proposta potencia a comunicação e a capacidade de generalização. Os professores são unânimes em constatar que o trabalho realizado com sequências, até ao momento, apesar de ser com tarefas muito semelhantes, não era conduzido de forma a desencadear nos alunos raciocínios algébricos e que os próprios professores tinham alguma dificuldade em perceber o alcance do que se pretendia.

> Carlota – … a sequência do exercício para mim foi muito orientadora. E apesar de, no 1.º ano, nós já termos feito algum trabalho sobre as sequências, mas não tinha explorado com esta orientação.

> Daniela – Eu acho que nós olhávamos para as sequências como se fosse apenas algo que eles teriam de reproduzir, teriam de continuar. E o que há de novo nesta tarefa é o questionamento.
>
> Elsa – Mas lá está, nas sequências o que eu acho mais complicado, é a generalização.

A realização de uma tarefa em sala de aula, sustentada na leitura e discussão das orientações do *Programa,* permite que os professores comecem a identificar aspetos centrais ao desenvolvimento do pensamento algébrico.

A 4ª sessão

Uma professora partilha com o grupo uma tarefa realizada numa aula em que esteve presente a professora investigadora. Começa por clarificar que o seu objetivo era avaliar o desempenho dos alunos na realização de uma tarefa com sequências, e, em conjunto, identificar as aprendizagens já realizadas ou eventuais dificuldades manifestadas. A tarefa tinha como objetivo criar uma sequência crescente e explicitar a regra de formação da mesma. A professora explicou o modo como propôs a tarefa aos alunos, as indicações que deu, a organização da sala de aula e a dinâmica usada ao longo dos diferentes momentos. Para ilustrar as suas palavras, apresentou evidências do trabalho dos alunos. Foi dado ainda especial relevo à linguagem usada pelos alunos, ao bom ambiente de trabalho e envolvimento efetivo dos alunos na tarefa. As representações usadas e a comunicação na aula de matemática foram aspetos também muito discutidos.

> Eles surpreenderam-me. Eles estavam 3 a 3, e, eu distribuí as folhas e eles começaram logo a combinar, quais eram as figuras que iam usar, como é que iam fazer, … percebem? … Eu acho que a parte da comunicação é que… (Carlota)

A professora partilha algumas das produções dos seus alunos em que há evidência de pensamento algébrico, procurando aprofundar no grupo a compreensão do trabalho realizado em sala de aula.

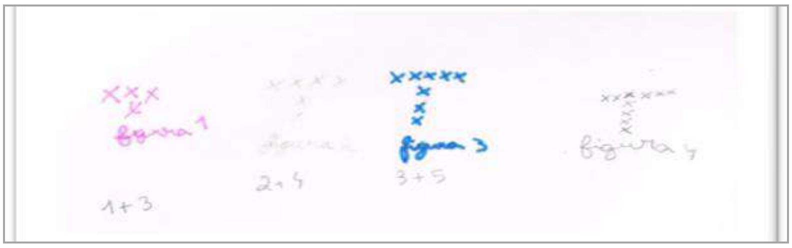


Figura 1- Sequência criada por um grupo de alunos da professora Carlota

> Carlota - Mas então o que muda da figura 1 para a figura 2? Por exemplo neste caso, quem estava a apresentar começava por dizer, esta é a figura 1 tem uma cruzinha aqui em baixo e em cima tem 3, e depois aqui, tem 2 em baixo, e em cima tem 4, porque em cima tem 3 e aqui já vai ter 4. E depois conseguirem dizer [os alunos].

Um dos trabalhos apresentado proporciona não apenas forte evidência de pensamento algébrico, mas também as potencialidades de um trabalho com sequências realizado nesta faixa etária. Os professores analisam e discutem as diversas formas de representação usadas pelos alunos.

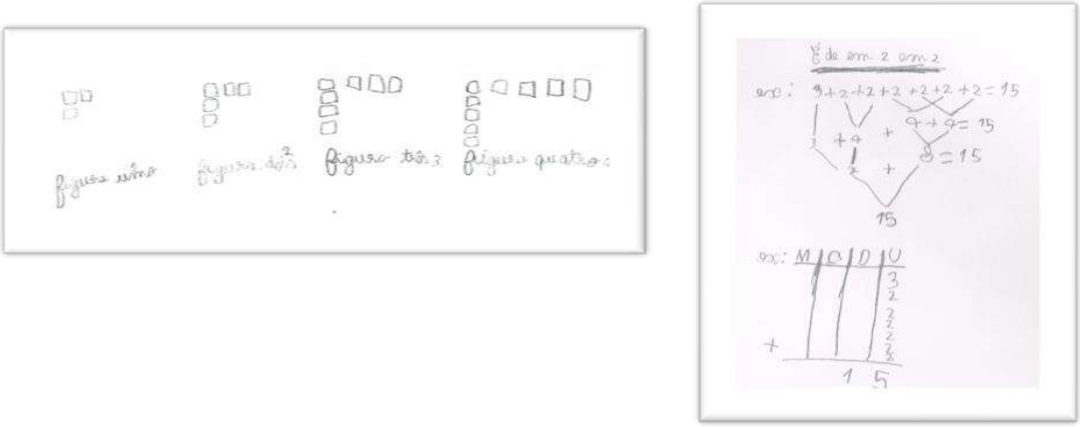


Figura 2- Sequência criada por um aluno da professora Carlota e respetiva lei de formação

> Carlota – Ele explicou de maneiras diferentes. Ele chegou à multiplicação.
>
> Amália – Ele disse, então isto são 3+ (5x2). Ai não, emendou, 6x2. Foi extraordinário.
>
> Carlota - Para mim foi importante circular pelos grupos e perceber como é que eles estavam a fazer.

A reflexão em torno do trabalho realizado para desenvolver o pensamento algébrico dos alunos, as dificuldades evidenciadas e as diferentes estratégias usadas em sala de aula, revelam a atenção dada às recomendações do *Programa,* lidas e discutidas durante as primeiras sessões, e o modo como os professores as assimilam e as implementam nas suas práticas.

6ª sessão

Na última sessão os professores partilham o trabalho com sequências realizado durante as últimas semanas, trazendo à discussão evidências do trabalho dos seus alunos. A professora investigadora começa por partilhar com o grupo uma aula que assistiu na turma de Bernardo. Refere o modo como a tarefa foi conduzida, como o professor procurou estabelecer conexões com outros conteúdos matemáticos e as diferentes representações usadas pelos alunos:

Figura 3- Sequência criada pelos alunos do professor Bernardo, em trabalho coletivo

> Amália – Mas o que foi engraçado foi a forma como iam representando. Quando começaram a explorar, foi engraçado que eles foram escrevendo expressões por baixo. Depois andaram um bocado à volta das questões da comutatividade. Ainda exploraram a subtração enquanto inversa da adição.

Refletindo sobre o modo como procurou potenciar os raciocínios desenvolvidos pelos seus alunos, o professor continua:

> Então no dia seguinte eu voltei a pegar no mesmo material e voltámos às sequências. Eles iam ao quadro, um de cada vez e iam recordando o que tínhamos feito e iam registando no caderno. Foi giro porque no dia seguinte chegámos à multiplicação… Eles diziam que era sempre o que estava antes e iam enchendo à volta. Mas depois chegaram à multiplicação. (Bernardo)

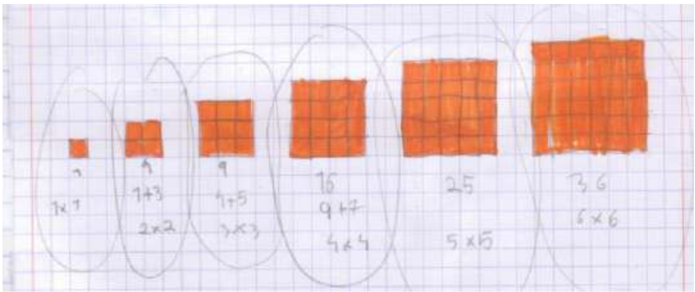


Figura 4- Sequência criada pelos alunos do professor Bernardo

Mais uma vez é possível verificar como as conexões estabelecidas permitem raciocínios progressivamente mais elaborados e facilitam a compreensão matemática.

A partilha de sequências criadas pelos alunos continua ao longo de toda a sessão e os professores incidem a análise na compreensão dos processos de aprendizagem evidenciados pelos alunos e na capacidade de generalização verbalizada em alguns casos, como se percebe no diálogo que se segue:

> Bernardo – Eles foram continuando e eu ia fazendo perguntas. E depois se chegassem à 10…

Amália – Este é um processo de generalização. A aluna vai descobrindo 2+1, 3+2+1, 4+3+2+1, portanto vai até à figura 4. Na 10ª imagem o que é que faz? Começa no 10 e depois até põe entre parenteses (+9+8+7+6+5+4+3+2+1) e depois escreve o resultado. Esta conseguiu perceber perfeitamente se fosse a figura 50 como é que chegava lá.

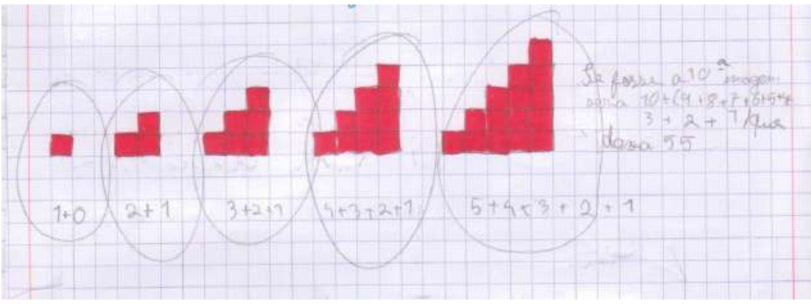


Figura 5- Evidência de generalização numa sequência criada pelos alunos do professor Bernardo

A concluir

Relativamente à primeira questão do estudo, os professores leem e discutem as recomendações para desenvolvimento do pensamento algébrico, mas entendem que este trabalho fica muito limitado se não houver uma discussão prévia relativa a outros aspetos da atividade matemática. Consideram ainda que esta oportunidade pode representar um salto qualitativo no ensino que praticam e na aprendizagem dos seus alunos, procurando assim que a reflexão tenha força para provocar a ação (Oliveira & Serrazina, 2002).

A realização em sala de aula de uma tarefa com sequências, seguindo o questionamento proposto, permite ao grupo concluir que é possível desenvolver a capacidade de abstração e estabelecer generalizações nos primeiros anos de escolaridade (Kaput, 1999). Consideram que continuar uma sequência, identificar a unidade que se repete ou descrever a relação entre os termos e a sua ordem e expressar essa relação através da linguagem natural é fundamental numa fase inicial do trabalho (Ponte, Branco, & Matos, 2009). Quando um professor pede aos seus alunos que criem uma sequência e explicitem a lei de formação, ele revela uma preocupação muito clara com o que pretende fazer, com o que pretende que os seus alunos façam e com o modo como vai conduzir a atividade em sala de aula (Ponte, 2005). Ele pretende com esta tarefa promover o pensamento algébrico dos seus alunos e simultaneamente identificar dificuldades ou fragilidades na aprendizagem matemática.

No que respeita à segunda questão, a análise das sequências criadas pelos alunos permite ao grupo de professores refletir sobre os processos de aprendizagem, o envolvimento dos alunos nas tarefas e a organização e dinâmica da sala de aula. Verifica-se ainda uma atenção especial às representações usadas pelos alunos e à comunicação matemática. A preocupação em ouvir os alunos, compreender os seus raciocínios e procurar, de acordo com o ritmo de aprendizagem da turma, estabelecer conexões e evidenciar relações, revela o emergir das práticas reflexivas de que falam Oliveira e Serrazina (2002) e simultaneamente o desenvolvimento das diversas vertentes do conhecimento profissional dos professores envolvidos (Shulman, 1986; Ponte & Oliveira, 2002). Esta investigação permite concluir que as alterações curriculares que decorrem da implementação do novo Programa de Matemática (ME, 2007) são um fator que, se por um lado provoca angústias e incertezas, por outro pode ser promotor de práticas profissionais de sucesso. Evidenciam-se três aspetos: (a) a necessidade da investigação estar muito ligada à prática letiva; (b) a mudança de práticas assente no conhecimento científico; e (c) a importância da reflexão e das práticas reflexivas enquanto fator de crescimento, tanto na sala de aula com os alunos enquanto verdadeiro momento de aprendizagem, como em termos individuais e no seio do grupo colaborativo enquanto fator de crescimento e desenvolvimento profissional do professor.

Referências

Boavida, A. M., & Ponte, J. P. (2002). Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas. In GTI (Org.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 43-55). Lisboa: APM.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em Educação, uma introdução à teoria e aos métodos.* Lisboa: Porto Editora.

Eco, U. (1991). *Como se faz uma tese em ciências humanas.* Lisboa: Editorial Presença.

Hargreaves, A. (1998). *Os Professores em Tempos de Mudança.* Lisboa: McGraw-Hill.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. F. (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah: NJ:Erlbaum.

ME-MGIDC (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: DGIDC.

NCTM. (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar.* Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Oliveira, I., & Serrazina, L. (2002). A reflexão e o professor como investigador. In GTI (Org.) Investigação, *Reflectir e investigar* (pp. 29-42). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI-(Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., & Oliveira, H. (2002). Remar contra a maré: A construção do conhecimento e da Identidade profissional na formação inicial. *Revista de Educação* , pp. 145-163.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no Ensino Básico.* Lisboa: ME- DGIDC.

Shulman, L. (Fevereiro de 1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher, Vol.15, nº 2* , pp. 4-14.

A APRENDIZAGEM DAS EXPRESSÕES ALGÉBRICAS POR UMA ALUNA DISCALCÚLICA

Corália Pimenta
Instituto Educativo de Lordemão
coraliapimenta@gmail.com

Manuel Joaquim Saraiva
Departamento Matemática, UBI
manuels@ubi.pt

Resumo

As dificuldades que os alunos manifestam na aprendizagem e utilização dos conceitos de Matemática devem ser um motivo de preocupação e de justificação para um maior investimento no ensino e aprendizagem daquela disciplina, pois tais dificuldades poderão condicionar o futuro dos alunos. Reeducar jovens com dificuldades de aprendizagem em Matemática poderá ajudar a resolver alguns dos problemas da sociedade atual, face às inúmeras capacidades que os alunos poderão desenvolver com a aprendizagem e utilização da Matemática.

Esta comunicação identifica as dificuldades de uma aluna do 7.º ano de escolaridade, discalcúlica, evidenciadas durante a construção e manipulação de expressões algébricas, no contexto da aprendizagem das funções, e indica algumas das vantagens que podem ser aquiridas por quem usufrui de uma intervenção educativa atempada e adequada a esta especificidade. A comunicação apoia-se numa investigação recente que visava identificar e compreender as dificuldades de uma aluna do 7.º ano de escolaridade, discalcúlica, na aprendizagem de conceitos específicos das funções. Pretendia, ainda, identificar as vantagens que a aluna poderia ter ao usufruir de uma intervenção educativa atempada e adequada à sua especificidade. Nesse estudo utilizou-se uma metodologia qualitativa de cunho descritivo e interpretativo. Os resultados indicam que a aluna evoluiu na aprendizagem das expressões algébricas, tendo também alterado a sua atitude para com a aprendizagem da Matemática.

Palavras-chave: Discalculia, Aprendizagem das expressões algébricas.

Astract

The difficulties that students demonstrate in the learning and use of the mathematics' concepts should be a motive for concern and of justification for increased investment in teaching and learning in that discipline, because they can influence the future of the students. Re-educate young people with learning difficulties in mathematics can help to solve some of the problems of society today, because of the many skills that students can develop with the learning and use of mathematics. The study that supported this article aimed to identify and understand the difficulties of a student in the seventh degree, with characteristics consistent with dyscalculia, in the learning of specific concepts of mathematical functions. He intended also to identify the advantages that the student could have benefit of an educational intervention timely and appropriate to her *specificity. We used a qualitative methodology of a descriptive and interpretive perspective. The study results indicate that the student progressed in learning functions and has also changed her attitude toward learning mathematics, and even on the use of mathematical concepts of functions.*

Keywords: Dyscalculia, Learning Functions, Algebraic Expression.

Introdução

O papel que hoje se reserva à Educação Matemática está mais direcionado para o sucesso e exige que o professor promova situações de igualdade de oportunidades para todos os alunos. A diferenciação tornou-se uma palavra de ordem, preocupando-se o professor em perceber o motivo pelo qual o aluno revela determinadas dificuldades e/ou apresenta um ritmo de aprendizagem e qualidade de trabalho inferiores ao dos seus pares.

Nesta comunicação identificam-se as dificuldades de uma aluna do 7.º ano de escolaridade, discalcúlica, evidenciadas durante a construção e manipulação de expressões algébricas, no contexto da aprendizagem das funções, e indicam-se algumas das vantagens que podem ser aquiridas por quem usufrui de uma intervenção educativa atempada e adequada a esta especificidade. Depois de um enquadramento dos problemas de aprendizagem em Matemática, nomeadamente dos alunos discalcúlicos, abordam-se as dificuldades na aprendizagem das expressões algébricas. Posteriormente faz-se uma apresentação da intervenção educativa desenvolvida, ajustada à especificidade da aluna/caso, Alice, e uma abordagem da metodologia de investigação utilizada. Segue-se a caracterização da aluna Alice e alguns dos resultados do estudo, bem como as respetivas conclusões.

Dificuldades de aprendizagem em Matemática e a Discalculia

As dificuldades de aprendizagem sentidas na disciplina de Matemática não derivam de uma causa única (Garcia, 1995). Havendo uma disfunção neurológica, a memória, a atenção, a atividade percetivo-motora, a organização espacial, as habilidades verbais, a consciência e o sentido estratégico poderão ser, entre outros aspetos, condicionadores das aprendizagens matemáticas (Butterworth, 2005*a*; 2005*b*). Poderá acontecer que determinado aluno registe resultados bastante satisfatórios em determinadas áreas académicas, mas sérias dificuldades na concretização de tarefas que exijam conhecimentos de Matemática. Se esse aluno for tão ou mais empenhado que o seu grupo de pares, se usufruiu e continua a usufruir de métodos de ensino adequados, mas continua a apresentar um ritmo de trabalho lento e níveis de ansiedade superiores ao esperado para a sua idade, para além de dificuldades específicas à disciplina, então poderá sofrer de algum tipo de distúrbio específico – discalculia.

Neste estudo valorizaram-se os resultados obtidos pelos investigadores Dehaene (1997), Butterworth, (2005*a*; 2005*b*) e Chinn & Ashcroft (2007), entre outros, bem como a definição de discalculia publicada pela DfES (2001):

> Os alunos com discalculia têm dificuldade em adquirir competências matemáticas. Podem ter dificuldade em compreender conceitos numéricos simples, podem não ter uma compreensão numérica intuitiva e podem ter problemas na aprendizagem de factos e procedimentos numéricos.
>
> (http://www.education.gov.uk)

Aceita-se que a discalculia se refere a um transtorno estrutural de maturação das habilidades matemáticas, manifestando-se em erros variados na compreensão dos números, nas habilidades de contagem e computacionais e na resolução de problemas verbais. Um aluno discalcúlico, comparativamente com o seu grupo de pares, pode alcançar resultados académicos equivalentes ou superiores, em todas as áreas, mas registar baixo rendimento a Matemática. Porém, as dificuldades presentes na discalculia podem persistir, mesmo quando o aluno domina o procedimento matemático, ao nível do entendimento concetual e de aplicação desse mesmo procedimento a novas situações.

Dificuldades na interpretação e utilização das expressões algébricas

Kieran (1992) considera serem comuns as dificuldades na interpretação e utilização de expressões algébricas, podendo essas ocorrer:

i. No cálculo do valor de expressões do tipo $x+3$, para determinado x (letra avaliada);
ii. Na visualização das letras, havendo tendência para atribuir à letra apenas um número (letra considerada como número generalizado);
iii. Na aplicação de fórmulas – objeto concreto;
iv. Na interpretação da letra enquanto variável (letra considerada como variável).

As dificuldades podem surgir no entendimento da variável enquanto termo desconhecido ou incógnita, como sendo um número generalizado ou pelo facto de se poder estabelecer uma relação funcional entre as variáveis (Ursini & Trigueros, 2001). Um aluno pode considerar f como sendo o nome da função, fazer-lhe corresponder um valor, interpretá-la como sendo uma fórmula ou até pensar que se trata de uma abreviatura da palavra função. No que se refere à representação de funções, Duval (2006) considera que a habilidade para transitar entre diferentes representações promove melhor consolidação de conceitos específicos. Tal situação colmata também as desvantagens apresentadas por algumas das representações (Pais & Saraiva, 2011). A aprendizagem das funções resulta de uma complexa atividade cognitiva, pois exige a aquisição de linguagem e simbologia próprias, compreensão e flexibilidade na aplicação de conceitos, utilização de representações diferenciadas, aptidão para identificar analogias e estabelecer relações e correspondências biunívocas ordenadas, capacidade de abstração e de generalização, entre outras.

Um aluno discalcúlico pode manifestar dificuldades diversas durante a aprendizagem das funções. Essas poderão ocorrer durante a construção e manipulação de expressões algébicas, podendo estar relacionadas com a compreensão e relação de conceitos, números e variáveis. Poderão ainda estar associadas à simbologia própria das funções (Kieran, 1992) ou a dificuldades específicas de linguagem (inversões, omissões e substituições) cometidas por alunos disléxicos (Chinn & Ashcroft, 2007).

O processo de aprendizagem deve assim ser construtivo e resultar da aplicação de um conjunto de experiências diversificadas que permitam passar dos métodos informais para os formais.

Metodologia do estudo

Seguiu-se uma metodologia de natureza qualitativa, de cunho descritivo e interpretativo, conduzida pelo método de estudo de caso (Yin, 1994). O processo de investigação individualizado ocorreu em três fases: consulta e análise de informação; diagnóstico e apoio pedagógico personalizado e tratamento e análise dos dados. O apoio individual foi facultado durante um período aproximado de três meses, ocorrendo uma vez por semana. Visou, sobretudo, identificar dificuldades, redefinir objetivos, selecionar material didático adequado (numa forte ligação com o trabalho matemático desenvolvido nas aulas, nomeadamente com as tarefas propostas aos alunos), implementar estratégias, observar o desempenho da aluna, intervir para promover a aprendizagem dos conceitos e recolher dados. A estes objetivos acrescem-se, na pedagogia diferenciada na sala de aula, a criação de um ambiente estruturado (os conteúdos foram expostos de forma sequencial depois de preparar a aluna, durante as sessões de apoio individual, para as novas aprendizagens) e confiante, propício à aprendizagem (o reposicionamento na sala de aula, próximo da professora, facilitou o contato directo e imediato entre professora e aluna, permitindo controlar, auxiliar e estimular o trabalho desenvolvido por Alice, minimizando as dificuldades sentidas comparativamente ao seu grupo de pares e o seu baixo autoconceito, sentindo-se Alice mais confiante para expor as suas dúvidas e raciocínios perante a turma).

Os instrumentos de recolha de dados distinguem-se entre os que serviram de base à avaliação efetuada pela técnica de educação especial e os que foram produzidos e aplicados pela professora da turma, e de Alice, que é a primeira autora desta comunicação (registos escritos pela aluna; registos escritos pela professora; registos aúdio). Na análise, os dados foram separados e analisados por categorias, entre as quais a selecionada para a presente comunicação (*expressão algébrica*) e de forma temporal (*antes*, *durante* e *após a unidade de ensino*), dando-se atenção às informações relativas aos níveis de empenho, autonomia, ritmo de trabalho, ansiedade e sucesso na execução das tarefas, fazendo-se o confronto entre os resultados obtidos e o suporte teórico.

Caracterização da aluna Alice

O estudo apresentado incidiu em Alice, uma aluna discalcúlica, com doze anos de idade, que apresenta resultados académicos bastantes satisfatórios, excetuando às áreas que exijam conhecimento matemático. Observaram-se dificuldades na utilização do raciocínio, na seleção de estratégias adequadas, na retenção e no processamento de informação, que talvez justifiquem a apatia e lentidão demonstrada, comparativamente com o seu grupo de pares.

Resultados

Desempenho antes da unidade de ensino.

Na tarefa n.º 4 (figura 1), trabalhada no apoio individual, procurou aferir-se a capacidade da aluna para reconhecer padrões numéricos, relacionar variáveis, generalizar e construir expressões algébricas. Para além disso, tratando-se de conteúdos já lecionados e trabalhados pela aluna, serviu para identificar características compatíveis com a discalculia.

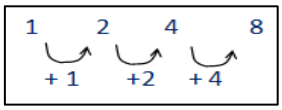
Fig. 1 – Sequências numéricas (tarefa n.º 4)

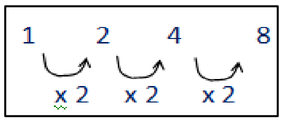
A professora/investigadora registou:

> *Alice iniciou a leitura do exercício em silêncio, mantendo-se, depois disso, calada… até à intervenção da professora. Esta atitude já se havia verificado noutras situações em que Alice, por não perceber o solicitado e não conseguir concretizar a tarefa, ficou ansiosa e "bloqueou"… (RP/RG):*
>
> **Professora**: Então Alice, não percebes o enunciado do problema?
>
> **Alice**: [abanou a cabeça em sinal de não]
>
> **Professora**: Não reconheces a forma como nos é apresentada a informação? Repara bem nas palavras formatadas a negrito!
>
> **Alice**: Já demos esta matéria!
>
> **Professora**: Não te lembras de alguma estratégia que tenhamos aplicado?
> **Alice:** [fez-se silêncio…]
>
> **Professora**: Eu vou ler em voz alta e tu registas o que é importante… [a Professora fez a leitura elevando o tom de voz quando se tratavam das palavras escritas a negrito, intencionando o rechamamento da memória]
>
> **Alice**: [a aluna começou então a escrever…]
>
> (Diálogo; RP;RG; 07-02-2011)

Reconhecem-se dificuldades em Alice quanto ao estabelecer uma relação numérica entre ordem (número de anos) e termo (número de ramos), transparecendo a existência de uma pequena compreensão numérica intuitiva. Tratando-se de competências já trabalhadas, manifestaram-se particularidades observadas usualmente em alunos discalcúlicos: memória numérica reduzida, dificuldade em selecionar dados relevantes e aplicar estratégias de forma lógica, mesmo que treinadas, ansiedade e a desistência. O diálogo continuou:

> **Professora**: É isso mesmo! Então se eu perguntar qual é o elemento que está na 1.ª posição…
>
> **Alice**: um [o tom de voz elevou-se, notando-se a aluna mais relaxada/motivada…]
>
> **Professora**: E o que está na 2.ª posição…
>
> **Alice**: dois
>
> **Professora**: E na 3.ª posição…
>
> **Alice**: quatro
>
> **Professora**: E ao fim de quatro anos há …
>
> **Alice**: oito ramos
>
> **Professora**: É isso mesmo! E ao fim de 10 anos, será assim tão difícil saber?
>
> **Alice**: [a aluna iniciou um esquema utilizado nas aulas…], [curiosamente, utilizou a contagem pelos dedos para obter o +2 e o +4…], [sem dizer nada, apagou o que tinha feito e escreveu…]

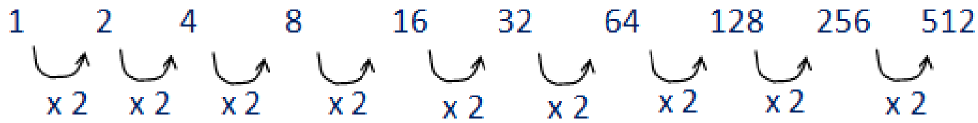




(Diálogo; RP;RG; 07-02-2011)

O comportamento da professora foi importante para a resolução da tarefa, sendo que o reforço positivo e a utilização de estratégias de sequencialização e esquematização do raciocínio promoveram uma mudança de atitude em Alice, permitindo a execução correta de resoluções intermédias. Embora qualquer aluno possa revelar dificuldades em generalizar processos, não deixa de ser curioso a contagem pelos dedos durante o "manuseamento" de números simples, características evidenciadas por alguns discalcúlicos. O diálogo prosseguiu:

> **Alice**: [continuando em silêncio, completou o esquema utilizando a calculadora…]



[foram várias as vezes em que recontou as posições, até chegar à décima…]

Professora: Muito bem! E agora ao final de ***n*** anos?

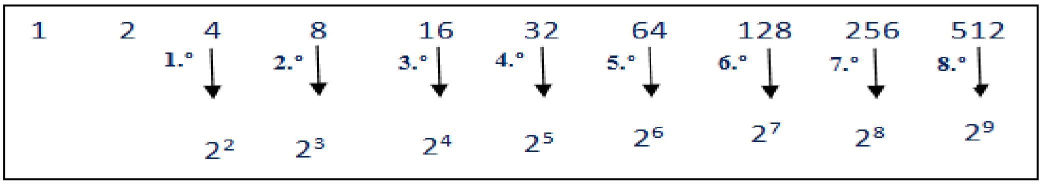
Alice: [fez-se silêncio] Não sei, esta é difícil!...

(Diálogo; RP;RG; 07-02-2011)

Regista-se uma evidente dificuldade em Alice interpretar e utilizar a letra n enquanto variável, em generalizar e construir uma expressão algébrica que represente a situação. Nota-se também uma atitude de desistência perante a necessidade de generalização. Contudo, a implementação de estratégias específicas (exemplificação, sequencialização do racíocinio, rechamamento da memória, reforço de aspetos essenciais, repetição constante, incentivo à esquematização e utilização da calculadora) permitiram que a aluna concluísse, embora erradamente:

Professora: Já descobriste a lei de formação desta sequência?

Alice: 2^n

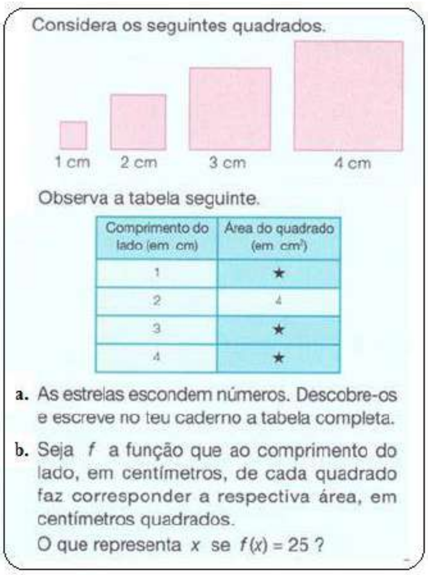


(Diálogo; RP;RG; 07-02-2011)

Alice evidenciou dificuldades em estabelecer uma relação entre os números e em generalizar. No caso desta tarefa, a dificuldade parece relacionar-se com o facto de a letra ser apresentada na forma de número generalizado (2^{n-1}). Ainda assim, o treino de respostas modelo, a memorização e agilidade na utilização de estratégias e procedimentos permitiram que Alice fosse mais autónoma na resolução da tarefa, ou em parte dela.

Desempenho durante a unidade de ensino

Com a tarefa n.º 5 (figura 2), trabalhada na aula, relacionando elementos de dois conjuntos e obrigando à interpretação e utilização de expressões algébricas, pretendeu-se aferir dificuldades na aplicação de fórmulas, na atribuição de significado às letras e na interpretação de simbologia/linguagem própria das funções.



Considera os seguintes quadrados.

1 cm 2 cm 3 cm 4 cm

Observa a tabela seguinte.

Comprimento do lado (em cm)	Área do quadrado (em cm^2)
1	★
2	4
3	★
4	★

a. As estrelas escondem números. Descobre-os e escreve no teu caderno a tabela completa.

b. Seja f a função que ao comprimento do lado, em centímetros, de cada quadrado faz corresponder a respectiva área, em centímetros quadrados.
O que representa x se $f(x) = 25$?

Fig. 2 – Área do quadrado (tarefa n.º 5)[4]

[4]Tarefa retirada do manual *Matemática Dinâmica 7.º ano*, página 17

A tarefa exigia a leitura e interpretação da informação constante nos polígonos e na tabela apresentada, a aplicação da noção e fórmula da área de um quadrado e a interpretação da expressão $f(x) = 25$. Descreve-se o desempenho de Alice:

> *a) Alice leu o exercício em voz baixa, demorando algum tempo a tomar outra atitude;*
>
> *b) Escreveu nas imagens correspondentes aos quadrados, em todos os seus lados, os valores numéricos 1; 2; 3 e 4;*
>
> *c) Escreveu as expressões: 1+1+1+1=4; 3+3+3+3=12 e 4+4+4+4=16;*
>
> *d) Preencheu a tabela, substituindo ★ pelos valores 4; 12 e 16, ignorando a informação correspondente ao quadrado cujo lado tinha 2cm de comprimento, a qual estava corretamente preenchida (4).* (RP;RG; 07-02-2011)

Observou-se, em Alice, confusão na aplicação das noções e fórmulas de perímetro e área, tendo sido incapaz de confrontar os seus resultados com os dados da figura. Esta dificuldade já tinha sido observada em situações análogas (figura 3), trabalhada nas aulas:

Qual é a área do retângulo?

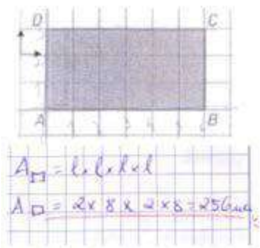


Fig. 3 – Perímetro/Área do quadrado (RA; 25-01-2011)

As estratégias aplicadas parecem não ter sido suficientes para a aprendizagem dos conceitos, incluindo para a memorização das fórmulas. Relativamente à alínea *b* da tarefa n.º 5, que exigia compreensão, leitura e interpretação do enunciado escrito e da expressão $f(x)=25$*: Alice foi incapaz de resolver a questão. Leu o enunciado, afirmando logo à partida não perceber (...) identificou a presença do número 25 e percebeu estar associado a um quadrado de lado 5 cm. Contudo (...) não associou o comprimento do lado do quadrado ao valor de x.* (RP; 14-02-2011)
Voltaram a verificar-se dificuldades ao nível da compreensão e aplicação de conceitos numéricos simples, denotando-se uma fraca compreensão numérica intuitiva. As dificuldades persistiram, nomeadamente aquando da aplicação do mesmo procedimento, simples, a novas situações. Denotaram-se também dificuldades ao nível da compreensão e utilização de linguagem específica – letra enquanto objeto concreto, como refere Kieran (1992). Alice revelou, durante a resolução desta tarefa, maior empenho, aplicando estratégias análogas às aplicadas em outros contextos.

Desempenho após a unidade de ensino

Com a resolução da tarefa n.º 6 (figura 4), trabalhada nas aulas, pretendia-se compreender se Alice havia evoluído na aplicação de fórmulas e na utilização de variáveis para construir e trabalhar com expressões algébricas.

Considera os quadrados cujos comprimentos dos lados são: 0,5 cm; 1 cm; 1,5 cm e 2 cm.

Lado do quadrado (cm) X	0,5	1	1,5	2	X
Perímetro do quadrado Y	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*

Na tabela que se segue, quais os números que devem estar no lugar das letras *a*, *b*, *c* e *d* e que expressão deve figurar no lugar da letra *e*?

Fig. 4 – Letras (tarefa n.º 6)[5]

[5]Tarefa adaptada do caderno de atividades *Matemática Dinâmica 7.º ano*, página 34

A aluna escreveu (figura 5):

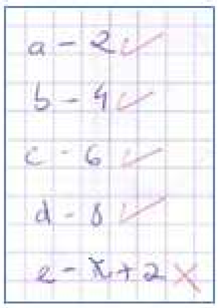


Fig. 5 – Resolução da tarefa n.º 6 alínea a) (RA; 03-03-2011)

Alice conseguiu interpretar o enunciado e indicar qual o perímetro do quadrado, contudo, não foi capaz de generalizar o processo. Trata-se, segundo Kieran (1992), de uma dificuldade relacionada com o reconhecimento da letra enquanto variável.

As dificuldades de Alice persistem, embora a aluna tenha passado a dominar o procedimento ao nível do entendimento concetual e de aplicação a novas situações. Esta é também uma das características evidenciadas pelos discalcúlicos.

Conclusões

No decorrer deste estudo foi possível identificar e compreender as dificuldades sentidas pela aluna na aprendizagem e utilização das expressões algébricas e relacioná-las com algumas características presentes em alunos discalcúlicos, corroborando com o que é afirmado por Chinn & Ashcroft (2007). Foi ainda possível compreender que vantagens resultaram da intervenção personalizada ministrada, atempadamente, à aluna.

De acordo com os resultados apresentados, e em conformidade com o referido na revisão de literatura, denotaram-se, relativamente às expressões algébricas, lacunas ao nível da compreensão numérica intuitiva, dificuldades em reconhecer padrões numéricos e em estabelecer uma relação numérica e operacional entre variáveis. Evidenciaram-se, sobretudo, dificuldades em interpretar determinada letra enquanto variável ou número generalizado (Kieran, 1992) e em generalizar o processo mediante a construção de uma expressão algébrica. A utilização da fórmula da área do quadrado e a interpretação de linguagem simbólica específica, nomeadamente associações do tipo $f(x)=25$, revelaram ser uma dificuldade acrescida, impeditiva da concretização assertiva das tarefas propostas.

Para além das dificuldades específicas supracitadas, identificaram-se défices generalizados, também comuns a alunos discalcúlicos: interpretação dos enunciados, compreensão e organização dos dados, sequencialização de raciocínios, ritmo de trabalho, sentido estratégico e rechamamento da memória, ansiedade, entre outros.

Considera-se que o apoio personalizado permitiu que se evidenciassem melhorias na interpretação e aplicação de fórmulas, na interpretação das letras enquanto número ou variável, na seleção de procedimentos adequados à resolução da tarefa. Evidenciaram-se também melhorias ao nível da autoestima, dos hábitos de persistência, do ritmo de trabalho, , da memorização, da motivação e atitude em relação à Matemática.

Entende-se assim que, à semelhança do conhecimento e apoio ministrado a alunos disléxicos, os professores também deveriam estar despertos para existência da problemática dos alunos discalcúlicos. Identificar características compatíveis com a discalculia, encaminhar para despiste e concertar medidas adequadas à especificidade desses alunos, ajudá-los-à a compreender e a minimizar as suas limitações em relação à Matemática.

Nestes casos, considera-se que o professor deverá evitar mostrar impaciência pelas incorreções cometidas, mesmo que essas pareçam básicas e sistemáticas. Por vezes torna-se mais benéfico transitar para outras aprendizagens, até que o aluno adquira as competências necessárias à compreensão e assimilação dos novos conteúdos.

Referências

Butterworth, B. (2005a). Developmental dyscalculia. In J. I. D. Campbell (Ed.), *Handbook of mathematical cognition* (pp. 455–467). Hove: Psychology Press.

Butterworth, B. (2005b). The development of arithmetical abilities. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, 46(1), 3–18.

Chinn, S. & Ashcroft, R. (2007). *Mathematics for Dyslexics, including Dyscalculia*. 3rd edition, London.

Dehaene, S (1997). *The number sense: how the mind creates mathematics*. London. Oxford university Press.

DfES (2001). *Guidance to Support Pupils with Dyslexia and Dyscalculia* (DfES 0512/2001). London: Department for Education and Skills.

Duval, R. (2006). Quelle semiotique pour l'analyse de la activité et dês productions mathématiques? *Revista Latinoamericana de Investigacion en Matemática Educativa, 9 (Extra 1)*, 45-82.

García, S. (1995). *Manual de Dificultades de Aprendizaje: Lenguaje. Lecto- Escritura y Matemáticas*. Madrid: Narcea.

Kieran, C. (1992). *The* learning and teaching of school algebra. In E. D.A. Grouws (Ed), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York, NY: Macmillan.

Pais, S. & Saraiva (2011). O significado das representações da função afim para alunos do 8.º ano de escolaridade. *Quadrante*, Vol. XX, nº 2, 17-55.

Ursini, S. & Trigueros, M. (2001). A model for de uses of variable in elementary algebra. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceeding of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 327-334). Utrecht: Utrecht University.

Yin, R. (1994). *Case Study Research: Design and Methods* (2ª Ed) Thousand Oaks, CA: SAGE Publications.

APRENDER MATEMÁTICA COM ROBOTS: A DANÇA ENTRE A AGÊNCIA MATERIAL E AGÊNCIA CONCEPTUAL

Elsa Fernandes
Universidade da Madeira
Grupo de Investigação Educação, Tecnologia e Sociedade, IE UL
elsa@uma.pt

Resumo

Neste artigo pretendemos discutir o papel e impacto dos robots na aprendizagem da matemática. Analisando a participação dos alunos nas aulas de matemática, quando usam os robots, discutimos a sua capacidade de agir (agência) e o papel da mesma na aprendizagem da matemática.

Palavras-chave: Aprendizagem, Agência Material, Robots.

Introdução

A aprendizagem da Matemática tem, tradicionalmente, sido vista como uma atividade cognitiva individual. Aqueles que defendem o método de ensino tradicional posicionam o trabalho de sala de aula como o veículo para adquirir conhecimento matemático. A visão de aprendizagem que defendemos neste artigo é substancialmente diferente desta. Consideramos a aprendizagem da matemática como um aspeto da participação em práticas sociais (Lave & Wenger, 1991) em que as pessoas se envolvem na resolução de problemas usando representações matemáticas, conceitos e métodos (Boaler & Greeno, 2000). Esta visão da aprendizagem vai além da ideia de que as práticas sociais oferecem contextos ricos para aprendizagem da matemática – ela defende que a participação em prática sociais é o que a aprendizagem da matemática é. As práticas sociais escolares oferecem cenários de aprendizagem nos quais os alunos participam e as suas formas de participação são adaptações aos constrangimentos e conformidades desses ambientes (Greeno & MMAP, 1998). Com o projeto DROIDE II[21] – criámos cenários[22] de aprendizagem em que os robots seriam 'objetos' com que os alunos pensariam, com o propósito de compreender como é que os jovens produzem significado e desenvolvem

[21] Financiado pela FCT sob o contrato PTDC/CPE-CED/099850/2008.

[22] O conceito de cenário de aprendizagem adotado neste projeto foi o de histórias do que deve ser, não representando necessariamente o que esperamos que aconteça no futuro. Os cenários têm como propósito estimular formas criativas de pensar que ajudem as pessoas a cortar com as formas estabelecidas de olhar para as situações e planear as suas ações (Wollenberg, Edmunds & Buck, 2000)

aprendizagem de tópicos e conceitos matemáticos e informáticos quando os robots são artefactos mediadores da aprendizagem.

A base empírica do projeto tem como objetivo procurar evidência: 1) das aprendizagens matemáticas/informáticas, e outras, quando os robots são mediadores da aprendizagem o que poderá ser feito através da identificação e descrição: a) do reportório partilhado que constroem os jovens nessas práticas; b) das contradições que surgem nos ambientes de aprendizagem provocados pela introdução dos robots; c) como é que essas contradições fazem emergir novas formas de atividade? d) que contributos é que o trabalho com robots pode ter no desenvolvimento da competência matemática/informática? 2) dos contributos para a aprendizagem que decorrem da participação em ambientes sociais digitais o que poderá ser feito através da identificação e descrição de: a) como explicitam/comunicam os jovens modos de fazer e de pensar neste ambientes, b) como participam crítica mas construtivamente nesse tipo de ambientes, c) como se consciencializam da sua própria responsabilidade e iniciativa que este tipo de participação exige.

Neste artigo analisaremos a participação dos alunos em aulas de matemática (para pensar na questão 2 acima referida), no âmbito dos cenários criados, discutindo o papel da sua capacidade de agir (agency[23]) na aprendizagem da matemática.

Aprendizagem como Participação em Práticas Sociais

Em 1988, Jean Lave em Cognition in Practice, introduz mudanças na forma de olhar as teorias da cognição e a transferência da aprendizagem. Em 1991, Lave e Wenger apresentam uma 'nova conceção' da aprendizagem defendendo que para compreender a aprendizagem é importante mudar o "foco analítico do indivíduo como aprendiz para a aprendizagem como participação no mundo social, e do conceito de processos cognitivos para uma visão mais abrangente de prática social" (p.43).

Wenger (1998) defende 'aprendizagem como participação social'. Participação não é equivalente a colaboração. Refere-se não apenas a eventos locais de engajamento em certas atividades com determinadas pessoas, mas a um processo mais circundante de ser um participante ativo nas práticas de comunidades sociais e construir identidades em relação a essas comunidades. Tal participação molda, não apenas o que fazemos mas também quem somos e a forma como interpretamos o que fazemos. Molda também as

[23] Neste artigo usaremos a palavra agência como tradução de agency e para referir-se à capacidade de agir.

comunidades em que participamos; de facto, a nossa capacidade (ou incapacidade) para moldar a prática das nossas comunidades é um aspeto importante da nossa experiência de participação.

Analisar a participação na prática de uma comunidade torna-se importante quando se quer discutir e compreender a aprendizagem como fenómeno emergente da participação em práticas sociais. Participação refere-se ao processo de tomar parte e também às relações com os outros que refletem este processo. Isto sugere tanto, ação como conexão. Participação é pessoal e social. É um processo complexo que envolve fazer, falar, sentir e pertencer.

Segundo Wenger (1998) a nossa participação na prática tem padrões, mas é a reprodução desses padrões que origina uma experiência de significado. Produzimos significados que estendem, redirecionam, dissolvem, reinterpretam, modificam ou confirmam – negociam novamente – as histórias dos significados dos quais fazem parte. Neste sentido, viver é uma constante negociação de significados.

A participação numa prática social é uma negociação constante. Negociar um empreendimento conjunto dá lugar a relações de responsabilidade entre os envolvidos. Estas relações incluem o que interessa e o que não interessa, o que é importante e porque é importante, o que fazer e o que não fazer, ao que prestar atenção e o que ignorar, sobre o que falar e o que não dizer, o que justificar e o que assumir como justificado, o que exibir e o que conter, perceber quando as ações e artefactos são suficientemente bons e quando necessitam ser melhorados ou refinados.

Embora o engajamento mútuo possa ser um veículo para a partilha da posse do significado, também pode ser um veículo para negar a negociabilidade e pode resultar em não participação. Os membros cuja contribuição nunca é adotada desenvolvem uma identidade de não-participação que progressivamente os marginaliza. A sua experiência torna-se irrelevante porque não pode ser declarada e reconhecida como uma forma de competência.

Aprendizagem depende da nossa capacidade para contribuir para a produção coletiva do significado porque é por este processo que experiência e competência puxam uma pela outra. Aprendizagem depende da nossa capacidade para agir (agência).

Mas falar em participação implica também falar em reificação. Wenger (1998) usa o conceito de reificação, muito geralmente, para referir-se ao processo de ir dando forma à nossa experiência produzindo objetos que congelam essa experiência em 'coisas'. Fazendo isto, criamos pontos de foco à volta dos quais a negociação do significado se organiza. Através da negociação ativa e dinâmica do significado, a prática é algo que é produzida, ao longo do tempo, por aqueles que se engajam nela (Wenger, 2010).

Participação em práticas escolares

Não podemos ignorar o facto de que, a maioria dos trabalhos que conduziram a este esquema conceptual tiveram lugar em comunidades de prática com características bastante diferentes do que acontece na escola (alfaiates, alcoólicos anónimos, parteiras, processadoras de reclamações numa companhia de seguros). Não obstante, alguns educadores matemáticos têm utilizado esta perspetiva teórica para pensar a aprendizagem da Matemática escolar (Boaler & Greeno, 2000; Gresalfi, Martin, Hand, & Greeno, 2009; Greeno, 2011).

Boaler e Greeno (2000) consideram conhecer e compreender matemática como aspetos da participação em práticas sociais, em particular naquelas em que os indivíduos se engajam em fazer sentido e resolver problemas usando representações matemáticas, conceitos e métodos como recursos. Durante este processo acontecem muitos momentos de negociação do significado e estes moldam a prática matemática escolar afetando os participantes e a sua forma de participar.

Greeno (2011) apresenta formas de caracterizar as identidades dos alunos aquando da participação na aula de matemática. Este, seguindo Holland et al. (1998) e Wenger (1998), foca-se na forma como os alunos se posicionam na interação: distingue dois aspetos gerais do posicionamento na interação. Um, o seu posicionamento sistémico em relação aos outros alunos e ao professor. O outro, o seu posicionamento semântico em relação aos conceitos e métodos matemáticos. O posicionamento sistémico envolve o nível de expectativas dos outros em relação a quem é esperado iniciar com contribuições, questionar as propostas feitas por outros e a quem devem ser dadas explicações dos métodos e processos envolvidos nas tarefas. O posicionamento semântico envolve o que Pickering (1995) chamou de agência conceptual, em que o indivíduo faz escolhas e julgamentos envolvendo significados e adequação dos métodos e interpretações.

Para pensar sobre o posicionamento sistémico podemos analisar dois aspetos: a negociação da estrutura de participação e a forma como os alunos compreendem a tarefa proposta.

Para dar visibilidade à estrutura de participação focar-nos-emos em questões do tipo: (i) como é que uma ideia é apropriada pelo coletivo? (ii) quem é esperado assumir ou criticar as ideias dos outros? (iii) que regras de argumentação estão em jogo nessa prática? E para dar visibilidade à forma como os alunos compreendem a tarefa proposta focar-nos-emos nos seguintes aspetos: (a) requisitos para fazer sentido; (b) a estrutura da tarefa; (c) requisitos para realizar a tarefa com sucesso (Gresalfi, et al., 2009). Estes aspetos foram o foco da nossa análise porque acreditamos que analisando-os permite-nos discutir a participação nesta prática matemática escolar e tornar visível o posicionamento que os alunos assumem em relação à agência e à responsabilização.

Falando de Agência

A capacidade de agir refere-se à forma como as pessoas atuam ou se abstêm de atuar, e à forma como as ações delas contribuem para a ação conjunta de um grupo, na prática do qual estão a participar (Gresalfi, et al., 2009, p.53).

Pickering (1995) estabeleceu a distinção entre a agência humana e agência material. Os seres humanos são seres ativos e intencionais. Assim a agência humana tem uma estrutura intencional e social. Os artefactos físicos são essenciais ao mundo moderno. As pessoas atuando no campo da agência material capturam, transferem, recrutam ou materializam essa agência, domesticando-a e colocando-a ao seu serviço na realização das tarefas (p.6). A agência humana é ela própria reconfigurada no seu engajamento com a agência material.

Não há forma de desentrançar a agência material da agência humana. Ou melhor, agência e intencionalidade não são propriedades das coisas, também não são propriedades dos humanos: são propriedades do engajamento material, ou seja, da zona cinzenta onde cérebro, corpo e cultura se fundem (Malafouris, 2008).

Pickering (1995), quando desenvolveu os termos agência conceptual e agência disciplinar, refere que os matemáticos "exercem agência conceptual quando se envolvem na tomada de decisões, exploração e criação de estratégias" (p.53). Quando decidem usar um método existente, a agência é disciplinar.

De acordo com Pickering (1995) o que acontece geralmente, em Física e Matemática, são 'danças de agência' que combinam a agência conceptual com a agência disciplinar ou agência conceptual com agência material (onde os resultados dependem da forma como mecanismos funcionam no mundo – especialmente em física). Pickering não considera agência material significativa em matemática (Wagner, 2004). Mas apesar de Pickering rejeitar a possibilidade da agência material em matemática, Wagner (2007) considera que é preciso discutir e analisar este aspeto. Neste artigo discutiremos como é que esta 'dança' entre a agência material e conceptual ou disciplinar acontece na aula de matemática.

Metodologia

A natureza da investigação apresentada neste artigo é qualitativa atendendo aos objetivos de compreender um sistema humano, como é um professor com os seus alunos na sala de aula usando tecnologias (Savenye & Robinson, 2004), nomeadamente robots para aprender matemática.

Usar teorias de Aprendizagem Situada como enquadramento teórico, quando se faz investigação implica algumas suposições metodológicas tais como assumir que investigar é participar numa grande variedade de práticas nas quais a investigação ocorre (Matos & Santos, 2008). Este foi o posicionamento assumido pela investigadora envolvida na recolha de dados. Participar foi também aprender. Assim, a observação participante foi uma estratégia central e assumiu o estatuto de metodologia de recolha de dados.

A recolha de dados foi feita entre fevereiro e abril do ano letivo 2010-2011. Trabalhamos com duas turmas de 7º ano de escolaridade (com idades compreendidas entre os 13 e os 15 anos) de uma escola básica e secundária do Funchal na unidade didática Funções. A turma tinha 4 professoras – 3 estagiárias e a professora titular da turma que era a orientadora cooperante. A investigadora era também orientadora deste grupo de estagiárias e por isso já conhecia relativamente bem os alunos.

Houve uma sessão inicial, no Laboratório DROIDE, da Universidade da Madeira, onde os alunos tiveram o seu primeiro contacto com os robots. Montaram e programaram os robots e com eles resolveram algumas situações propostas. Foi utilizada uma câmara de vídeo focada num grupo. Depois, já na escola, mais 4 sessões de 90 minutos foram gravadas, também com uma câmara focada num grupo.

A análise de dados foi feita com base nas transcrições das aulas e nas notas feitas pela investigadora e pelas professoras da turma. A unidade de análise inclui a pessoa, a atividade e o contexto onde a atividade teve lugar (Matos, 2010). Tentamos encontrar padrões de interação, entre os alunos e entre estes e as professoras e investigadora usando as questões apresentadas no enquadramento teórico para pensar sobre e com os dados. Abaixo apresentamos uma pequena parte da análise que temos estado a realizar.

Discussão – O caso do 'He'

Na sessão inicial os alunos foram à Universidade da Madeira, ao Laboratório DROIDE, para construir e programar robots. Os alunos estavam responsáveis por construir um robot passível de ser programado na 2.ª parte da sessão e que funcionasse, pois estavam com grande vontade de ver o robot (o carro) andar. Tinham que convencer a si próprios e aos outros grupos de que eram capazes de fazê-lo, fazendo-o, uma vez que, apesar do grande companheirismo e cooperação entre os grupos, também havia uma certa competição para ver qual seria o grupo a terminar primeiro e quem fazia melhor. Não houve qualquer tipo de negociação explícita sobre a construção do robot. Cada elemento do grupo assumiu uma tarefa e os outros colegas não questionaram, simplesmente assumiram outra, cooperando na construção do robot.

Na aula seguinte, já na escola, a proposta de trabalho "Noção de função" foi realizada em dois blocos de 90 minutos. Esta tinha uma estrutura fechada e bastante escolar. A novidade estava na inclusão dos robots para pensar sobre os conceitos matemáticos envolvidos. Cada grupo de alunos recebeu uma ficha de trabalho e antes dos robots serem distribuídos pelos grupos, a professora pediu-lhe que lessem atentamente o enunciado.

Na primeira tarefa foram idealizadas, pelo António e pelo Rui, duas viagens de robot, através de dois gráficos (ver abaixo). Na primeira questão pretendia-se que os alunos analisassem os dois gráficos e descrevessem a viagem do robot relativamente à distância do ponto de partida. Na segunda pretendia-se a programação do robot para realizar tais viagens, caso fosse possível. Os dois gráficos idealizados pelo António e o Rui, foram respetivamente os seguintes:

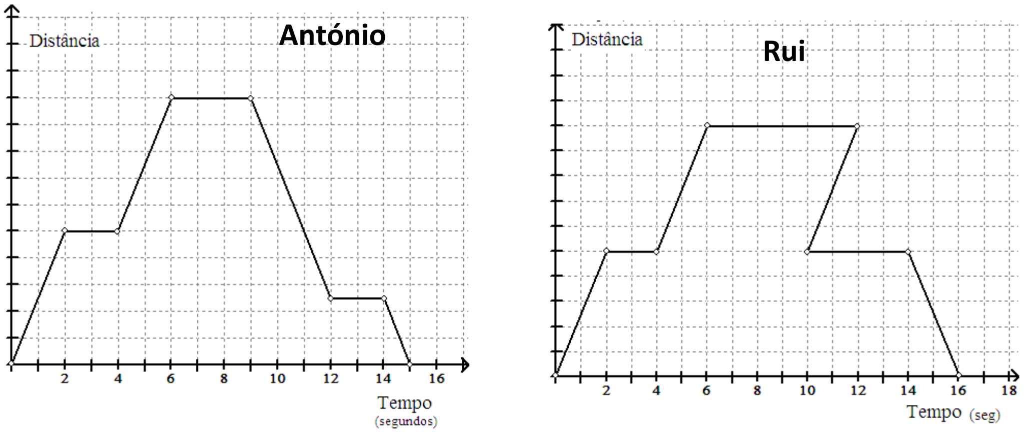


Figura 3 – Gráficos apresentados na ficha de trabalho

A prática matemática escolar das duas turmas aqui analisada podia ser caracterizada pela resolução das propostas de trabalho em grupo, em que os alunos tinham que discutir cada tarefa, descrever o processo que os levara aos resultados e finalmente, no momento de discussão em grande grupo, apresentar à turma as conclusões a que tinham chegado. A discussão em grande grupo era orientada por uma das professoras.

'He' era um dos 10 rapazes repetentes da turma e normalmente tinha uma participação marginal nas aulas de matemática. A inclusão dos robots motivou-o e fê-lo empenhar-se na resolução da proposta. 'He' era o elemento do grupo que manipulava o robot, programando-o e testando os resultados da programação.

O grupo do 'He' analisou o gráfico relativo à viagem do António sem grandes hesitações. Depois de o analisarem e programarem o robot para realizar tal viagem, regressaram à mesa e pediram auxílio a uma das professoras. 'He' questionou:

> He: Professora no segundo gráfico não temos que fazer nada, não é?
>
> Prof.: Porque que dizes isso? Como assim não fazer nada?
>
> He: Já analisamos o gráfico do Rui e não dá para programar.
>
> Prof.: Porquê que não dá?
>
> He: Não dá para programar esta viagem porque não existe um comando que faça o robot andar para trás no tempo.
>
> Prof.: Mas onde é que estás a ver no gráfico que o robot teria que andar para trás no tempo?
>
> He: A professora que veja aqui (apontando para gráfico do Rui no instante 12s), aos 12 segundos o robot estava a uma distância de 10, mas também estava a uma distância de 5, porque o robot recuou e o tempo não recua. Ele não pode estar em dois lugares ao mesmo tempo. Não podemos programa-lo, porque não é possível.

O aluno estava muito convencido que a programação não era possível. Mas não conseguiu convencer os colegas, que não estavam a perceber a sua ideia. Depois de esclarecer a sua ideia com a professora, começou a escrever, e deixou os colegas programarem o segundo trajeto, mesmo sabendo que não era possível. Passado algum tempo, a professora voltou ao grupo e perguntou se já tinham chegado a acordo. Ao que outro elemento do grupo respondeu:

> Pe: Já. Não dá para programar, só conseguimos programar até aqui (mostrando no ambiente de programação, o trajeto até aos 12s).

A inclusão dos robots motivou o 'He' e fê-lo comprometer-se com a resolução da proposta de trabalho. Mas a sua explicação, convenceu a professora, mas não convenceu os colegas. Provavelmente pela forma como os colegas o viam em termos de conhecimento matemático. Era um aluno com uma participação marginal e, talvez por isso, a sua explicação não foi aceite pelo grupo. Não era um aluno a quem os outros elementos do grupo reconhecessem autoridade matemática. Não era esperado, por parte dos colegas, que este aluno se responsabilizasse pela resolução das questões matemáticas nem que propusesse ideias para resolvê-las dada a sua trajetória nas aulas de matemática até a chegada dos robots.

O questionamento do 'He' à professora serviu para incluí-la no sistema de responsabilização, ou seja, se a professora aprovasse a sua resposta, os colegas do grupo convencer-se-iam, visto que não estava a conseguir convencê-los. Mas provavelmente foi também uma forma do 'He' mostrar o que tinha(m) sido capaz(es) de fazer (responsabilização por). Depois de resolvidas as outras questões da ficha, que passavam pelo preenchimento de um diagrama de Venn e por escreverem uma condição necessária para que uma correspondência fosse função, os alunos tiveram que comentar a seguinte afirmação "A correspondência apresentada pelo António é uma função. A correspondência do Rui não é uma função".

O 'He' voltou a chamar a professora para colocar uma questão, para a qual ele aparentemente já tinha resposta, mostrando-lhe o que tinha(m) sido capaz(es) de fazer, responsabilizando-se assim pela ideia.

> He: Prof. Podemos dizer que o gráfico do Rui não é função, porque há um tempo com duas distâncias?
>
> Prof.: E é isso que não pode acontecer para que uma viagem seja possível?

He: Sim, para que uma viagem seja possível não pode estar em dois lugares ao mesmo tempo. O robot do Rui aos 10s está a uma distância de 5 e 10.

O 'He' foi o 'motor' deste grupo para a 'boa' resolução das questões matemáticas propostas, exibindo a sua agência conceptual que foi sendo reconfigurada no seu engajamento com a agência material[24] perante o grupo e as professoras. A utilização dos robots, pelos quais ele, desde a sessão introdutória, se mostrou muito interessado, parece ter sido a alavanca para a mudança na sua atuação. Ele foi capaz de explicar porque é que a correspondência não era uma função em termos do funcionamento do robot - '[o robot] não pode estar em dois lugares ao mesmo tempo'. O robot, associado à noção de função, passou a fazer parte do reportório partilhado desta turma, visto que usavam sempre esta frase para justificar se uma correspondência era uma função e só depois 'traduziam-na' para a situação que tinham que resolver.

Considerações Finais

Ao longo destas aulas, algumas vezes os conceitos matemáticos tornaram-se invisíveis porque a visibilidade estava nos robots ou na sua programação mas, muitas vezes os robots ou a sua programação foram invisíveis para permitir uma maior visibilidade aos conceitos matemáticos. Esta dualidade entre visibilidade e invisibilidade dos artefactos (físicos e conceptuais) moldou a participação dos alunos nesta prática e consequentemente a aprendizagem matemática dos alunos.

Introduzir os robots neste cenário de aprendizagem revelou uma ligação dinâmica entre o trabalho com robots e a forma como os alunos pensaram sobre o conceito de função. A agência emerge da ação de usar os robots para pensar matematicamente. A agência material é irredutível à agência humana. No entanto, é preciso realçar que a trajetória da emergência da agência material está fortemente ligada à agência humana (Pickering, 1995). Neste caso, fez emergir agência conceptual num aluno que normalmente tinha uma participação marginal na aula de matemática.

A forma de pensar dos alunos sobre o conceito de função com os robots exibiu uma ligação dinâmica entre o lidar com os conceitos matemáticos e o lidar com os robots que se assemelhou a uma 'dança de agências'. Mas temos que realçar que a dança é entre

[24] Ao longo das aulas em que trabalharam com os robots, foi cada vez mais visível o 'He' a responsabilizar-se pelas tarefas propostas e a ser responsabilizado pelos colegas e pelas professoras (no sentido de que estes esperavam que ele resolvesse ou propusesse soluções para as questões). Não há espaço neste artigo para essa análise.

dançarinos 'igualmente bons'. Isto não quer dizer que por vezes um deles não esteja a conduzir a dança. O que significa é que se os separarmos, o resultado da dança será bastante diferente. Ou seja, não se pode separar o que foi aprendido da ação de trabalharem com os robots. Tentar separar estes dois aspetos é como 'tentar construir um pote mantendo as mãos limpas do barro'. A agência é relacional e um produto emergente do engajamento com os artefactos materiais (Malafouris, 2008). Os robots foram determinantes no tipo de participação que os alunos tiveram, no seu engajamento com os artefactos materiais e a agência material esteve fortemente relacionada com o tipo de agência conceptual exibida pelos alunos.

Referências

Boaler, J. & Greeno, J.G. (2000). Identity, agency, and knowing in mathematical worlds. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp. 171-200). Stanford, CT, Ablex.

Greeno, J. (2011). A Situative Perspective on Cognition and Learning in Interaction. In T. Koschmann (ed.), *Theories of Learning and Studies of Instructional Practice, Explorations in the Learning Sciences, Instructional Systems and Performance Technologies*, 1(2), 41-71

Greeno, J.G. & MMAP (1998). The situavity of knowing, learning and research. *American Psychologist*, 53(1), 5-26.

Gresalfi, M.S., Martin, T., Hand, V.& Greeno, J. (2009). Constructing competence: An analysis of student participation in the activity systems of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 70(1), 49-70

Lave, J. (1988). *Cognition in Practice: Mind, mathematics and culture in everyday life.* Cambridge, Cambridge: University Press.

Lave, J. & Wenger, E. (1991). *Situated Learning: Legitimate Peripheral Participation.* New York: Cambridge University Press.

Malafouris L. (2008). "At the Potter's Wheel: An argument for Material Agency."In C. Knappett & L. Malafouris (eds). *Material Agency: Towards a non-anthropocentric perspective*. (pp.19-36). New York: Springer..

Matos, J.F. (2010). Towards a Learning Framework in Mathematics: taking participation and transformation as key concepts. In M. Pinto & T. Kawasaki (Eds), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol.1, pp.41-59). Belo Horizonte, Brasil: PME.

Matos, J.F. & Santos, M. (2008). Documento consultado em http://learn-participar-situada.wikispaces.com/methodology a 12 de dezembro de 2011

Pickering, A. (1995). *The mangle of practice*. Chicago: University of Chicago Press.

Savenye, W. C. & Robinson, R. S. (2004). Qualitative research issues and methods: An introduction for educational technologists. In D. H. Jonassen (Ed), *Handbook of research on educational communications and technology.* (2nd ed., pp.1045-1071). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum.

Wagner, D. (2004). Critical awareness of voice in Mathematics classroom discourse: Learning the steps in the 'dance of agency' In Marit Johnsen Høines & Anne Berit Fuglestad

(Eds), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol.4, pp.409-416). Bergen, Norway: PME.

Wagner, D. (2007). Students'critical awareness of voice and agency in mathematics classroom discourse. *Mathematical Thinking and Learning*, 9(1), 31-50.

Wenger, E. (1998). *Communities of Practice: Learning, Meaning and Identity*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Wenger, E. (2010). Communities of practice and social learning systems: the carrer of a concept. In: Blackmore, C. (Ed.) *Social Learning Systems and communities of practice.* Springer Velag and the Open University. pp.179-198.

Wollenberg, E., Edmunds, D. & Buck, L. (2000). *Anticipating Change: Scenarios As a Tool For Adaptive Forest managemen. A Guide.* Indonesia: SMT Grafika Desa Putera.

DESENVOLVER O PENSAMENTO ALGÉBRICO A PARTIR DA EXPLORAÇÃO DE SEQUÊNCIAS E REGULARIDADES

Ana Morais
Agrupamento de Escolas da Ericeira
analeandromorais@gmail.com

Resumo

Este estudo insere-se numa experiência de ensino no 2.º ano de escolaridade, cujo objetivo é promover o pensamento algébrico a partir do desenvolvimento das capacidades de representação e de generalização no trabalho com sequências pictóricas repetitivas e crescentes. Nesta comunicação analiso as representações e estratégias dos alunos bem como as suas dificuldades na exploração das tarefas apresentadas. A metodologia seguida é qualitativa e interpretativa. Para a recolha de dados é usada observação participante na sala de aula, com registos de notas de campo, registo áudio e vídeo e análise documental. Os resultados da aprendizagem mostram que os alunos compreendem a representação em sequência e, desde que apoiados, conseguem associá-la explicitamente à sequência dos números naturais. Os alunos utilizam diversas representações e conseguem formular generalizações usando diferentes estratégias. No entanto, alguns deles revelam dificuldade, nomeadamente, na formulação de generalizações relativas a termos distantes.

Palavras-chave: Pensamento algébrico, Sequências, Representações, Estratégias e Dificuldades.

Introdução

O ensino da Álgebra, desde os primeiros anos, visa possibilitar um maior sucesso dos alunos na aprendizagem posterior deste domínio da Matemática (ME, 2007). O presente estudo exploratório visa promover o pensamento algébrico a partir do desenvolvimento das capacidades de representação e de generalização. Tem como conjetura de ensino-aprendizagem a ideia que os alunos do 2.º ano desenvolvem estas capacidades realizando tarefas matemáticas exploratórias (Ponte, 2005), que envolvam sequências pictóricas e regularidades, interagindo socialmente a partir do trabalho em pequenos grupos e em grupo turma e utilizando diferentes representações matemáticas.

Nesta investigação, procuro compreender como se desenvolve o pensamento algébrico dos alunos, na fase inicial do 1.º ciclo, explorando situações que envolvam sequências e regularidades. Mais especificamente, procuro saber:

- Que representações usam os alunos na realização destas tarefas?
- Que estratégias de raciocínio usam para responder a questões que envolvem generalizações?

- Que dificuldades apresentam os alunos ao realizar estas tarefas?

A recente e crescente importância dada ao ensino da Álgebra na fase inicial da escolaridade, associada à falta de conhecimento sobre o modo como concretizar este ensino são as motivações fulcrais para o desenvolvimento do trabalho que me proponho apresentar. Começo por fazer uma revisão da literatura tendo em vista discutir aspetos que caracterizam e enquadram o ensino da Álgebra no 1.º ciclo e refiro as representações, estratégias de generalização e dificuldades dos alunos perante o trabalho com sequências. Posteriormente, apresento a metodologia seguida no estudo e analiso a prestação dos alunos em duas das tarefas aplicadas. Por fim, faço um balanço do trabalho realizado.

Álgebra e pensamento algébrico

Durante muitas décadas, o ensino da Álgebra teve o seu início no 3.º ciclo, sendo muito marcado pela manipulação dos símbolos e das expressões algébricas. Porém, os investigadores afastaram-se da resolução de equações como a principal atividade do ensino da Álgebra, e passaram para abordagens ligadas à generalização, sequências numéricas, variáveis, e funções (Carraher & Schliemann, 2007). Nesta perspetiva, Zazkis e Liljedahl (2002) referem que o termo "Álgebra" engloba dois conceitos distintos: pensamento algébrico e simbolismo algébrico. Fundamentam esta distinção na possibilidade de não se dar tanta atenção como até aqui à manipulação de símbolos e na existência de um movimento de "early algebra", no ensino básico, que assenta na estrutura em vez do cálculo.

O desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos corresponde então a uma nova ênfase no ensino da Álgebra, abordado nas recentes orientações curriculares para o ensino básico e secundário (Ponte, Branco & Matos, 2009), numa fase inicial, a partir do trabalho com regularidades generalizáveis em sequências de formas, desenhos e/ou conjuntos de números.

O pensamento algébrico envolve as capacidades de estabelecer generalizações e relações, interpretar situações e resolver problemas (Matos et al., 2008), representando essas relações e raciocinando sobre elas tanto quanto possível de modo geral e abstrato (Ponte, 2006). A capacidade de generalização pode ser desenvolvida a partir da exploração de sequências e regularidades, onde os alunos identificam a lei de formação de uma dada sequência (Ponte, Branco, & Matos, 2009). Assim, ao generalizar sequências os alunos são introduzidos na Álgebra (Radford, 2010), e para tal podem seguir diversas estratégias. Ponte, Branco e Matos (2009) apresentam algumas que surgem com maior frequência na investigação realizada no âmbito das sequências pictóricas, nomeadamente: (i) representação e contagem, em que o aluno representa todos os termos da sequência até ao termo solicitado e conta os elementos que o constituem para determinar o termo da sucessão numérica correspondente; (ii) aditiva, tendo por base uma abordagem recursiva, em que o aluno compara termos consecutivos e identifica a alteração que ocorre de um termo para o seguinte; (iii) objeto inteiro, onde o aluno considera um termo de uma dada ordem e com base nesse termo determina o termo de uma ordem múltipla desta; e (iv) decomposição dos termos, onde o aluno decompõe um termo, identifica o seu processo de construção e estabelece uma relação entre esse termo e a sua ordem, o que pode ser indicado por uma expressão algébrica ou não.

A capacidade de generalização promovida pelo trabalho com sequências e regularidades envolve, segundo Vale e Pimentel (2009), regras que os próprios alunos podem formular de modo mais intuitivo, a partir da linguagem verbal, ou mais formal, recorrendo à simbologia, variáveis e fórmulas e utilizando formas diversas de representação (desenhos, esquemas, diagramas, tabelas). Estas representações podem ser (i) ativas, caraterizadas por um conjunto de ações apropriadas para alcançar determinado resultado; (ii) icónicas, dizendo respeito a um conjunto de imagens ou gráficos simples que representam um conceito sem o definir por completo; e (iii) simbólicas, descritas como um "conjunto de proposições simbólicas ou lógicas extraídas de um sistema simbólico que é regido por regras ou leis para a formação e transformação de proposições" (Bruner, 1999, p. 66).

As tarefas que envolvem sequências pictóricas repetitivas e crescentes podem trazer dificuldades a alguns alunos. Por exemplo, uma dificuldade que pode surgir nas sequências repetitivas prende-se com a compreensão, por parte dos alunos, da unidade que se repete, pois só compreendendo essa unidade podem generalizar a sequência (Ponte, Branco, & Matos, 2009). No que diz respeito às sequências pictóricas crescentes, por exemplo, Radford (2010) refere que, para os alunos mais jovens, verificar o que é comum entre um termo e o seu antecessor não é algo que aconteça naturalmente, pelo contrário, é um processo caracterizado pela distinção entre o igual e o diferente.

Metodologia

O presente estudo consiste numa experiência de ensino, envolvendo a realização de 7 tarefas, numa turma do 2.º ano. Esta experiência decorre de outubro a dezembro de 2011 no âmbito do tópico Sequências e Regularidades do *Programa do Ensino Básico* (ME, 2007), no 1.º ciclo, tendo como principal objetivo contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Tendo em conta o objetivo principal e as questões da investigação, uso uma metodologia qualitativa de cariz interpretativo (Bogdan & Biklen, 1994). A preparação e realização das aulas são concretizadas por mim, no duplo papel de professora titular da turma e investigadora. O trabalho com sequências para descrever, identificar a parte que se repete e encontrar termos distantes é realizado pela primeira vez, nestes moldes, tanto por mim, enquanto professora, como pelos alunos.

O processo de recolha de dados é observação participante, registo áudio e vídeo, notas de campo, e análise documental. Posteriormente estes registos são transcritos e é feita uma análise de conteúdo, a partir da técnica da análise temática ou categorial, e uma análise de discurso, modalidades de análise frequentes nas investigações em abordagem qualitativa (Fiorentini & Lorenzato, 2006), tendo em vista responder às questões do estudo.

Para cada tarefa é elaborada uma sequência de questões apresentadas por escrito aos alunos. Cada tarefa é realizada em pequenos grupos, seguindo-se a discussão em coletivo, onde o questionamento que dirige a realização da tarefa assume a espontaneidade própria da comunicação oral. Passo a apresentar 2 das 7 tarefas realizadas neste estudo.

Tarefa 3: Sequência repetitiva no sentido contrário

A terceira tarefa proposta aos alunos no âmbito desta investigação é uma sequência repetitiva e solicita a continuação da sequência para a esquerda, tendo sido adaptada de Vale e Pimentel (2009). Estas autoras referem que este tipo de procedimento é muito importante e constitui uma tarefa "mais difícil" (p. 38). Nesta sequência a unidade que se repete é formada por três elementos (triângulo verde, triângulo verde, retângulo azul).

Apresento oralmente a tarefa colocando no quadro triângulos e retângulos em cartolina, de modo a reproduzir a sequência apresentada na figura 1:

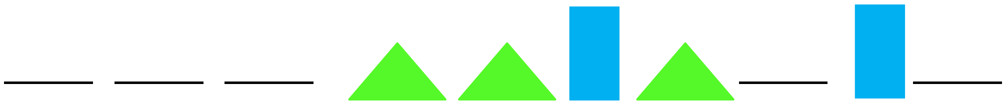


Figura 1: Continuação da sequência no sentido contrário.

Os alunos respondem ao questionamento em pequenos grupos, tendo à sua disposição materiais diversos: folha A3 branca, triângulos e retângulos em cartolina com as mesmas cores das figuras da sequência e uma folha com o enunciado da tarefa.

O questionamento é o seguinte:

1. Reproduzam a sequência apresentada.
2. Completem a sequência.
3. De que figuras vamos precisar em maior quantidade para continuar a sequência? Porquê?
4. Na sequência apresentada, qual é a parte que se repete?
5. Qual será o primeiro elemento, à esquerda?
6. E o próximo elemento, à direita?
7. Se a sequência continuar para a direita, qual será o 18.º elemento?
8. Digam em que lugar aparece o retângulo.
9. Em 20 elementos, quantos triângulos aparecerão? Como descobriram?
10. Qual será o 30.º elemento? Como descobriram?
11. E o 45.º? Como descobriram?

Para responder à primeira questão, dois grupos de alunos (grupos 1 e 4) optam por reproduzir e completar a sequência recorrendo ao material manipulável, utilizando uma representação ativa, enquanto os restantes grupos desenham os elementos que a compõem, usando pela sua vez uma representação icónica. É evidente a facilidade dos alunos dos diversos grupos, em completar a sequência.

Na questão 4, a maioria dos alunos também revela facilidade em reconhecer a parte que se repete. Alguns grupos conseguem fazer esse reconhecimento aquando da identificação dos elementos em falta na sequência.

Em relação às questões 5 e 6, em todos os grupos, os alunos também evidenciam facilidade em identificar os elementos solicitados. Os alunos do grupo 2 optam por associar, escrevendo, a sequência numérica dos números naturais à sequência pictórica e assim indicar o número de elementos que já representou, utilizando uma representação simbólica. O grupo 3, ao encontrar o 18.º elemento, rodeia-o, fazendo uma representação icónica. No entanto, neste grupo há um aluno, Fernando, que identifica uma sequência numérica associada à pictórica e recorre aos elementos que desenha na sua ficha (10 elementos) para os contar, apontando com o seu dedo, volta ao primeiro e continua a contagem oral até ao 18.º elemento. Quando questionado, o aluno consegue perceber que não está a contar da forma correta. O aluno utiliza uma representação ativa, ao usar os seus dedos e a partir da sua linguagem oral.

Também nesta questão, os alunos tendem a usar a estratégia de representação e contagem, desenhando todos os elementos da sequência até ao termo solicitado. Com o avançar da exploração em coletivo, os alunos identificam a regularidade presente nos múltiplos de 3, na questão 8.

A partir desta situação e ao ter conhecimento sobre a posição que um termo ocupa na sequência, alguns grupos relevam facilidade em encontrar termos mais distantes, através da recursividade, utilizando a estratégia aditiva. Para responder à questão 9, o grupo 4, procurando generalizar, recorre à estratégia do objeto inteiro. Por coincidência o mesmo grupo que identifica a regularidade da sequência, ao generalizar, não tem em conta essa regularidade. Este e outros grupos não trabalham com uma unidade composta por 3 elementos ou múltiplos desta, mas sim com uma unidade composta por 10 elementos:

Grupo 5

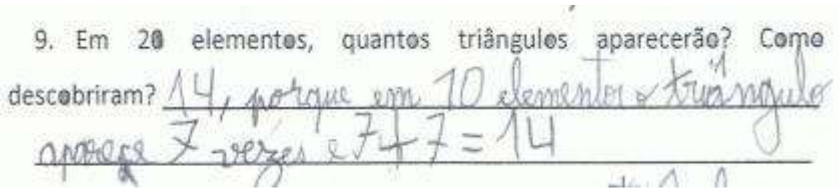


Figura 2: Justificação apresentada pelo grupo 5.

Ainda, em relação à questão 7, um reduzido número de alunos manifesta dificuldades no uso da terminologia, nomeadamente em usar a nomenclatura dos números ordinais. Quando questionados sobre qual será o 30.º elemento, alguns alunos, que apesar de identificarem a regularidade da sequência, não têm em conta essa regularidade e recorrem erradamente à estratégia do objeto inteiro, trabalhando com uma unidade composta por 10 elementos e não por 3 ou múltiplos de 3, e consequentemente não conseguindo generalizar.

Concluo que completar esta sequência parece ser bastante fácil e óbvio para os alunos. Reproduzir, descrever e continuar uma sequência pictórica repetitiva, bem como identificar a parte que se repete são capacidades já adquiridas pela maioria dos alunos. O mesmo não se passa com a identificação de termos mais distantes nem com a formulação de uma generalização. Apesar dos alunos reconhecerem a regularidade presente nos múltiplos de 3, tendem a utilizar erradamente a estratégia do objeto inteiro, recorrendo a outros múltiplos mais trabalhados na sala de aula (múltiplos de 2, 5 e 10). Revelando assim dificuldades de generalização, ou seja, em encontrar termos mais distantes.

Tarefa 5 – Sequência dos Ts

A quinta tarefa apresentada aos alunos é a segunda sequência crescente proposta. É também adaptada de Vale e Pimentel (2009). Esta sequência recorre a arranjos visuais identificáveis com letras do alfabeto (T). A estratégia utilizada para desenvolver esta tarefa é idêntica à da tarefa anterior. Apresento a seguinte sequência no quadro:

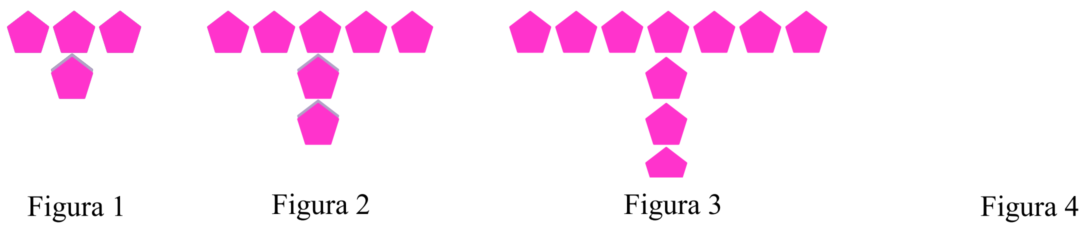


Figura 3: Sequência dos Ts.

Cada grupo de alunos utiliza o material à disposição: folha A3, pentágonos em cartolina e uma folha com o enunciado da tarefa, respondendo assim ao questionamento apresentado, que é o seguinte: Reparem na seguinte sequência de figuras. Podem construí-la usando o material à disposição.

1. Descubram como será a figura seguinte.
2. Quantos pentágonos tem?
3. Completem a tabela.

Nº da figura	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**…**	**20**
Nº de pentágonos							

4. De quantas formas diferentes conseguem ver esta sequência?
5. Quantos pentágonos terá a 10.ª figura? Expliquem como pensaram.

6. Descrevam como podemos obter o número de pentágonos necessários para construir qualquer figura.

Durante a apresentação da tarefa, os alunos reconhecem que a sequência está "sempre a crescer da mesma forma", como diz por exemplo Filipa. É com facilidade que alguns dos alunos associam a forma de cada elemento da sequência à forma da letra "T".

Para reproduzir e continuar a sequência a maioria dos grupos começa por utilizar o material manipulável (grupos 1, 2 e 3), utilizando uma representação ativa, desenhando depois a 4.ª figura no enunciado da tarefa, enquanto os outros grupos optam apenas por desenhá-la, usando uma representação icónica. Juliana utiliza uma representação ativa quando recorre aos seus dedos para conseguir perceber como se decompõe cada termo, tapando a figura do centro de cada elemento:

> **Juliana –** É três em baixo. Tapamos a de cima, fica três de um lado e três do outro. (Diz enquanto tapa com o dedo polegar direito o pentágono que se encontra no meio deste elemento.)

Para responder à questão 3 os alunos utilizam uma representação ativa. Na questão 5, Filipe (grupo 4) utiliza a estratégia aditiva, para descobrir o número de figuras que terá o 10.º termo e recorre à sua linguagem natural para explicar o seu raciocínio:

> **Filipe –** Eu vi que a sexta figura tinha dezanove, porque dezasseis mais três é dezanove.

Em relação à questão 4, no grupo 2 rodam a folha do enunciado da tarefa e contam as várias formas em que veem a sequência, concluindo que a veem de 4 formas diferentes e representando essas formas na sua folha. Para isso utilizam uma representação icónica:

Figura 4 – Representação feita pelo grupo 2.

Em relação à questões 5 e 6, Mónica (grupo 5), tenta recorrer a uma expressão numérica para justificar as suas respostas e utiliza o ponto de interrogação para representar a variável "qualquer figura", usando representações simbólicas:

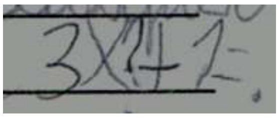


Figura 5 – Representação simbólica utilizada por Mónica (questão 6).

Os grupos 1, 2 e 4, na fase inicial do questionamento, identificam a regularidade presente e parecem compreender a diferença comum entre os termos. Uma vez identificada a diferença que existe de um termo para o seguinte, os alunos do grupo 4 recorrem à estratégia aditiva para descobrir o número de pentágonos da 4.ª figura:

> **Filipe –** Pois, quatro mais três, sete mais três.**(…)** Pois é. Dez mais três igual a treze.

Nas questões que se seguem a tendência dos grupos é recorrer a esta mesma estratégia (aditiva) para assim conseguir encontrar os termos solicitados. Na última questão, o grupo 2 é um dos que a responde, destacando-se a explicação de Miguel por estar mais completa e explícita. Os alunos recorrem à estratégia da decomposição dos termos para generalizar a sequência apresentada:

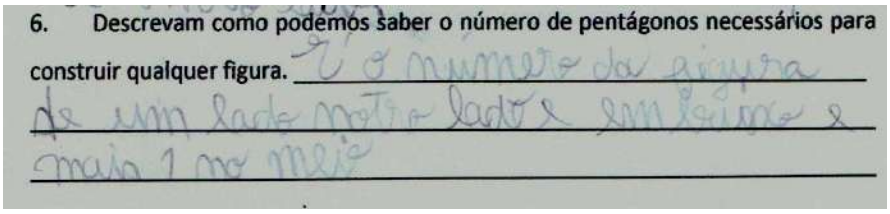

6. Descrevam como podemos saber o número de pentágonos necessários para construir qualquer figura. é o numero da figura de um lado noutro lado e em baixo e mais 1 no meio

Figura 6 – Explicação dada por Miguel à questão 6.

Na questão 1, os alunos dos grupos 1 e 3, apesar de identificarem a diferença comum a todos os elementos da sequência, isto é, de saberem que acrescentam 3 pentágonos à figura anterior, manifestam dificuldades de representação e de análise, pois quando desenham a 4.ª figura parecem não saber onde colocar essas 3 figuras:

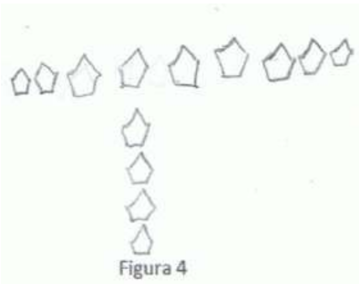


Figura 7 – Representação da figura 4, realizada por José.

Ao completar a tabela, os alunos do grupo 1 utilizam uma estratégia errada na descoberta do número de pentágonos da 10.ª figura: a estratégia do objeto inteiro, recorrendo ao número de elementos da 5.ª figura (16 pentágonos) para descobrir o número de elementos da 10.ª figura. Revelam assim dificuldades de estratégia, nomeadamente em criar uma regra a partir do uso da estratégia do objeto inteiro:

> **José –** A figura cinco tem dezasseis. Se eu fizer mais cinco figuras faz mais dezasseis… Dezasseis mais dezasseis, trinta e dois.

Em suma, quanto às estratégias de generalização utilizadas pelos alunos, destacam-se a aditiva, em que os alunos, tendo consciência que de um termo para o seguinte aumenta três pentágonos, utilizam-na sobretudo para completar a tabela. Alguns alunos conseguem decompor cada termo e associá-lo à sua posição na sequência, descobrindo a regra de formação a partir da estratégia da decomposição dos termos.

Os alunos, de uma forma geral, têm facilidade em descobrir a diferença comum entre os termos apresentados e saber quantos pentágonos formam a 4.ª figura, porém alguns deles manifestam dificuldades em construí-la, por acrescentarem em qualquer parte os 3 pentágonos, revelando assim dificuldades de representação e de análise. É também evidente a dificuldade em generalizar.

Conclusão

Neste estudo, os alunos usam diversas representações. Assim, usam a linguagem natural para explicar os seus modos de pensar e as suas estratégias. Utilizam a representação ativa quando recorrem aos seus dedos para realizar contagens e acompanhar o seu raciocínio. Alguns reproduzem e continuam as sequências com recurso ao desenho, usando uma representação icónica; outros recorrem ao material manipulável, utilizando uma representação ativa. Na tarefa 3, a maioria dos alunos associa a sequência numérica à pictórica, mas apenas oralmente, sendo poucos os que o fazem por escrito e os que o fazem utilizam uma representação simbólica. Esta associação permite-lhes responder a questões mais complexas. Na tarefa 5, a maioria dos alunos usa a tabela apresentada como representação ativa para organizar e apresentar os dados, permitindo-lhes identificar e compreender a regularidade presente com mais facilidade. Usam a representação icónica quando optam por desenhar a 4.ª figura e quando representam as diferentes formas em que conseguem ver a sequência, fazendo a letra “T” em várias posições. Outra representação presente na realização desta tarefa é a simbólica, em que alguns alunos recorrem a expressões numéricas, nomeadamente nas suas respostas às questões 5 e 6.

Na sequência repetitiva, muitos alunos reconhecem que a unidade que se repete é composta por 3 elementos, no entanto, a regularidade presente nos múltiplos de 3 ainda não é evidente para eles, e como tal limitam-se à generalização recorrendo às estratégias de representação e contagem, e aditiva. A estratégia do objeto inteiro é utilizada erradamente por alguns alunos. Apenas uma aluna consegue recorrer a esta estratégia de forma construtiva e assim generalizar. Penso que o facto da multiplicação por 3 ainda não ter sido trabalhada na sala de aula contribui para a utilização da estratégia do objeto inteiro, a partir de múltiplos já conhecidos pelos alunos (múltiplos de 2, 5 e 10), o que pode estar na origem das dificuldades de generalização e argumentativas, em encontrar uma justificação válida para a formação da sequência. São estas as principais dificuldades manifestadas e que surgem quando os alunos se confrontam com a procura de elementos mais distantes.

Na sequência crescente, destaca-se a estratégia aditiva em que os alunos, tendo consciência que de um termo para o seguinte aumenta 3 pentágonos, utilizam-na sobretudo para completar a tabela. Alguns alunos, durante o trabalho em pequenos grupos, conseguem decompor cada termo e associá-lo à sua posição na sequência, descobrindo assim a regra de formação. Estes alunos recorrem à estratégia da decomposição dos termos. Nesta tarefa, os alunos, de uma forma geral, têm facilidade em descobrir a alteração do número de pentágonos que ocorre de um termo para o seguinte, e assim saber quantos pentágonos formam a 4.ª figura. Porém, alguns deles manifestam dificuldades em construir essa figura, por não compreenderem a diferença comum entre os termos apresentados, tal como refere Radford (2010), revelando então dificuldades de representação e de análise, pois não acrescentam os 3 pentágonos nos locais devidos. É também evidente a dificuldade em generalizar.

Em conclusão, estes resultados sugerem que as tarefas selecionadas são adequadas aos alunos do 2.º ano. Estes conseguem expressar generalizações usando palavras ou até mesmo símbolos mais abstratos, em expressões simbólicas. Cabe ao professor incentivar o uso de representações cada vez mais formais. Os alunos desenvolvem capacidades de generalização e expressam e sistematizam, justificando, as suas generalizações. As estratégias utilizadas pelos alunos são idênticas às usadas por alunos do 3.º ciclo e referidas por Ponte, Branco e Matos (2009). Na sequência crescente, a tabela parece-me facilitar a identificação e compreensão da regularidade. Penso que será vantajoso que o professor procure focar mais a atenção dos alunos nos aspetos visuais, para que estes analisem o padrão visual da sequência pictórica apresentada e assim percebam onde é que a figura é aumentada. O presente trabalho mostra a possibilidade e o interesse em promover o pensamento algébrico, nos primeiros anos de escolaridade.

Referências

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação: Uma Introdução à Teoria e aos Métodos.* Porto: Porto Editora.

Bruner, J. (1999). *Para uma teoria da educação.* Lisboa: Relógio D'Água.

Carraher, D., & Schliemann, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. L. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (669-705). Greenwich: Information Age.

Fiorentini, D., & Lorenzato, S. (2006). *Investigação em educação matemática.* Brasil: Autores Associados.

Matos, A., Silvestre, A., Branco, N., & Ponte, J. P. (2008). Desenvolver o pensamento algébrico através de uma abordagem exploratória. *Actas SEIEM,* 505-516.

ME. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação-DGIDC.

Ponte, J. P. (2005). Gestão Curricular em Matemática. In G. (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2006). Números e álgebra no currículo escolar. In I. Vale, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, P. Canavarro, & (Eds.), *Números e álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (5-27). Lisboa: SEM-SPCE.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no Ensino Básico.* Lisboa: ME-DGIDC.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA - Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática , 4(2)*, 37-62.

Vale, I., & Pimentel, T. (2009). *Padrões no Ensino e Aprendizagem da Matemática - Propostas Curriculares para o Ensino Básico.* Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo, Projecto Padrões.

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics , 49*, 379-402.

O MOVIMENTO HISTÓRICO E LÓGICO DOS CONCEITOS ALGÉBRICOS E O OBJETO DE ENSINO DA ÁLGEBRA: O CASO DAS EQUAÇÕES

Maria Lucia Panossian
Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo - Brasil
malupanossian@hotmail.com

Manoel Oriosvaldo de Moura
Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo - Brasil
modmoura@usp.br

Resumo

Sendo impossível abarcar no ensino escolar a experiência humana historicamente acumulada, é necessário reconhecer critérios para determinar o objeto de ensino. Neste sentido se desenvolve a pesquisa de doutorado com objetivo de explicitar as relações entre o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos e o objeto de ensino da álgebra. Assume-se teoricamente que o movimento lógico e histórico dos conceitos, a partir da lógica dialética, revela a essência dos fenómenos pela via do pensamento teórico. Exemplifica-se a análise relativa ao ensino da álgebra, com o estudo das equações. A síntese do movimento histórico e lógico do conceito algébrico de equação, em suas diferentes etapas (retórica, sincopada, geométrica, simbólica) que geram diferentes formas de pensamento e de linguagem é relacionada ao que é apresentado das equações como objeto de ensino. Historicamente, as equações deixam de ser métodos que resolvem problemas particulares sobre encontrar um valor desconhecido para serem estudadas como métodos gerais para resolução de problemas, objeto de estudo da ciência matemática. A análise de programas curriculares do Estado de São Paulo (Brasil) e as discussões com professores revelam que, as equações, como objeto de ensino são apresentadas por seus aspectos técnicos, seus métodos de resolução. Reconhece-se o descompasso entre as equações como instrumento matemático fruto da experiência humana e como objeto de ensino destituído de sentido e significado para o estudante.

Palavras-chave: movimento histórico e lógico; conceitos; álgebra.

Introdução

Que critérios são considerados para reconhecer de entre o conhecimento historicamente acumulado pela humanidade, o que deve ser objeto de ensino? Em busca de resposta a esta questão está em andamento uma pesquisa de doutorado que tem por objetivo estabelecer as relações entre o movimento histórico e lógico dos conceitos e o objeto de ensino da álgebra.

Um dos elementos analisados é o papel que as equações desempenham neste ensino. O aspecto técnico que este ensino adquire prolonga-se ao longo dos anos de escolaridade e é fonte de dificuldades dos estudantes, que não compreendem o significado atribuído ao símbolo e mesmo ao conhecimento algébrico como um todo. As equações são tratadas de forma apenas técnica, enfatizando-se o seu processo de resolução, e não são reconhecidas pelos estudantes como instrumentos matemáticos para estabelecer a relação entre as quantidades, encontrando valores desconhecidos.

É objetivo desta comunicação, recorrer ao estudo das equações em seu movimento histórico e lógico e explicitar relações com as ações de ensino sobre equações enquanto objeto de ensino de álgebra.

A hipótese geral que aqui se apresenta é a de que o estudo do movimento lógico e histórico dos conceitos (no caso os algébricos) oferece elementos que podem ser usados como fundamentos para estabelecer critérios ou princípios para a organização do ensino (de álgebra), para a elaboração de programas curriculares visando formação do pensamento teórico dos estudantes.

A força do pensamento teórico está em permitir que se capte nos objetos e fenómenos, movimentos que não podem ser representados. Sendo assim sua tarefa é de "[…] elaborar os dados da contemplação e da representação em forma de conceitos e com eles reproduzir o sistema de conexões que geram o conceito dado por descoberto, a sua essência" (Davydov, 1982, p. 142).

Método e metodologia

A unidade do histórico e do lógico é premissa para compreender a essência de um objeto. Kopnin (1978) indica que "para revelar a essência do objeto é necessário reproduzir o processo histórico real de seu desenvolvimento, mas este é possível somente se conhecemos a essência do objeto" (p. 184).

Neste sentido, o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos é ao mesmo tempo objeto e instrumento de análise. Objeto de análise por que é necessário estudá-lo e aprofundar a compreensão a respeito de como se constituem os conceitos algébricos historicamente, e instrumento de análise por que servirá para fundamentar as análises realizadas sobre as situações de ensino e os currículos propostos para ensino de álgebra.

Assim, nesta pesquisa com conteúdo algébrico, a análise segue em dois movimentos: No primeiro, registros históricos analisados a partir de textos de historiadores matemáticos, são singularidades analisadas por formas de pensamento e conceitos e conduzem ao universal, essência do conhecimento algébrico. No segundo movimento de análise serão usados como dados a proposta curricular do Estado de São Paulo, situações de ensino, e as gravações de um curso realizado com professores da rede pública de ensino (a ser explicitados em item posterior), buscando identificar como o movimento histórico e lógico das equações é contemplado no objeto de ensino da álgebra. A figura a seguir expressa a relação entre os movimentos.

Movimento Histórico e Lógico dos Conceitos algébricos

O estudo do SINGULAR	Registros da História da Álgebra
PARTICULARIDADES	Forma de pensamento Formação de conceitos Manifestações da linguagem
Busca do UNIVERSAL	A história da álgebra compreendida em seu movimento lógico e em sua relação com a atividade humana

SINGULAR	PARTICULARIDADES	UNIVERSAL
Isolados do ensino de álgebra:Sequências, Equações;Funções	Manifestações nos programas curriculares, no curso com professores, em situações de ensino.	Constituição do objeto de ensino da álgebra promovedor do pensamento teórico dos estudantes a partir do movimento histórico e lógico dos conceitos

Movimento do Objeto de Ensino da Álgebra

O movimento histórico e lógico das equações

O estudo do movimento histórico e lógico dos conceitos realizou-se a partir de registros históricos e filosóficos matemáticos (Boyer, 1996; Baumgart, 1992; Caraça, 1952; Eves, 1995; Viète, 2006) que isoladamente entendidos como singularidades, mediados pelo processo de formação de conceitos através de formas de pensamento teórica e compreendidos por meio da lógica dialética nos conduzem ao universal, a essência do conhecimento algébrico.

Segue uma síntese do estudo realizado para compreender o movimento lógico e histórico relativo ao tópico equações.

Por muito tempo na humanidade a preocupação na resolução de problemas foi a de encontrar o valor desconhecido. As condições objetivas em relação a formas de pensamento e linguagem utilizadas em cada época possibilitavam que métodos particulares fossem gerados para resolver algumas formas de problemas. A necessidade de encontrar métodos gerais de resolução ainda não se apresentava. Isso pode ser identificado em alguns registros singulares de história da álgebra como se pretende mostrar a seguir. Diferentes modos para resolver problemas podem ser encontrados desde os registros babilónicos. Em escrita cuneiforme, e recorrendo apenas a algarismos e palavras, os babilônios usavam um método paramétrico para resolver problemas (Baumgart, 1992), em geral relacionados a questões do cotidiano. Também os egípcios resolviam equações, a partir do que foi posteriormente classificado por Nesselman em meados do século XIX de álgebra retórica (Puig&Rojano, 2004).

> Para equações lineares, os egípcios usavam um método de resolução consistindo em uma estimativa inicial seguida de uma correção final – um método ao qual os europeus posteriormente deram o nome um tanto abstruso de 'regra de falsa posição'. "A álgebra do Egito, como a da Babilônia, era retórica" (Baumgart, 1992, p.6).

A álgebra grega (entre 500 a.C. e 300 a. C) também possuía métodos similares de resolução de equações, entretanto usava recursos geométricos. A álgebra geométrica superava algumas dificuldades conceituais que os gregos possuíam com as frações e os números irracionais.

Em outro momento da álgebra grega, chamado Segunda Idade Alexandrina, entre 250 d.C e 350 d.C encontra-se Diofanto, considerado um grande algebrista grego e sobre o qual não se conhecem as datas precisas de vida (Boyer, 1996)

Com Diofanto a resolução de equações conquista nova simbologia, sendo usadas abreviações de palavras. Ainda que haja avanços na forma de representar as equações usadas como soluções dos problemas, o conteúdo não se altera. Diofanto segue a linha babilônica e expressa todas as incógnitas em função de um parâmetro (Baumgart, 1992). A álgebra sincopada de Diofanto ainda não é suficiente para encontrar métodos gerais para a resolução das equações, e consequentemente para resolução dos problemas.

As equações até a época de Diofanto eram instrumentos da matemática para resolver alguns problemas. A simbologia da época, desde a álgebra retórica passando pela álgebra geométrica e a sincopada, dificultava avanços de generalização. E assim as equações eram geradas presas à natureza dos objetos, fossem números, ou abreviações ou entes geométricos.

O livro Al-jabr Wa'l muqabalah, do matemático Mohammed ibu-Musa al-Khowarizmi (do ano 830 aproximadamente), de onde vem o nome Álgebra, não recorre a sincopação apresentada por Diofanto. Escrito com palavras e números características da álgebra retórica, está mais próximo da álgebra elementar de hoje por conter uma exposição direta da resolução de equações, principalmente as de segundo grau (Boyer, 1996), e com uma exposição sistemática apresenta seis casos particulares de equações lineares e quadráticas com raízes positivas. Ainda que se reconheça o seu valor para o desenvolvimento da álgebra "[…] a obra de Al-Khowarizmi tinha uma deficiência séria que precisava ser removida antes de poder servir eficazmente aos seus fins nos tempos modernos: uma notação simbólica tinha que ser desenvolvida para substituir a forma retórica" (ibid., p.160).

A 'Algebra' de Omar Khayyan (1050-1122), incluía a resolução das equações de terceiro grau. Apesar de considerar que estas equações só poderiam ser resolvidas por métodos geométricos e não aritméticos, Khayyam '[…]deu o passo importante de generalizar o método para cobrir todas as equações de terceiro grau' (ibid., p.164)

O método de resolução das equações de quarto grau vem a público com o livro Ars Magna de Gerônimo Cardano (1501-1576) que também usava pouca sincopação. Descobrir estes métodos de resolução das equações era o objetivo dos matemáticos da época e por vezes gerava intrigas e duelos entre eles.

Mas o salto de qualidade, em relação à manifestação da linguagem e forma de pensamento é dado com Viète (1540-1603) e a passagem da álgebra sincopada para a simbólica. Viète oportunizou que a álgebra alcançasse o mesmo status da Geometria no século XVI, apresentando-a também de maneira axiomática. O fato de atribuir letras para os valores desconhecidos, mas também para os valores conhecidos da equação, o que hoje entendemos por parâmetros, alavancou o desenvolvimento da álgebra. A intenção de Viète com sua Introdução à Arte Analítica (Viète, 2006) era resolver todos os problemas. Para Viète, a álgebra era um método de cálculo simbólico envolvendo grandezas abstratas, ele manipulava as grandezas independentemente da sua natureza, fossem elas numéricas ou geométricas. Um único símbolo devia poder representar todos os tipos de grandezas. A lógica de Viète denomina-se speciosa, a lógica das grandezas ‘em espécie’, em que usava as letras para representar simbolicamente grandezas abstratas.

Se a álgebra de Diofanto tratava ainda de casos particulares e gerava uma metodologia para resolver cada tipo de equação que encontrava, uma forma de generalização empírica em que a preocupação principal era encontrar o elemento desconhecido (a incógnita), em equações com coeficientes numéricos específicos, a introdução de Viète de consoantes para representar quantidades conhecidas (parâmetros) e vogais para identificar quantidades desconhecidas gerou avanços no sentido de possibilitar o tratamento das equações de forma geral.

Estes poucos registros nos revelam parte do movimento que envolve o surgimento e o estudo das equações. Geradas a partir de necessidades práticas da resolução de problemas do cotidiano, desenvolvem-se através de registros retóricos, geométicos ou sincopados. Em todos estes casos, o objetivo principal, o que seria o conteúdo algébrico é a solução de problemas específicos, particulares, encontrar o valor desconhecido. Entretanto a forma variava, ou por palavra, ou por entes geométricos, ou por símbolos. Não se havia encontrado ainda um método geral de solução, mas métodos particulares que resolviam tipos específicos de equações, que solucionavam alguns problemas. Os avanços da humanidade e do conhecimento científico levaram a encontrar métodos gerais de solução para equações de até ao 4º grau inclusive. Mas ainda com dificuldades na representação. A necessidade de sistematizar a força do conhecimento algébrico e recorrer a símbolos para representar grandezas de forma abstrata se concretiza com Viète.

> A matemática é uma forma de raciocínio, e não uma coleção de truques, como Diofante possuíra; no entanto a álgebra durante o tempo dos árabes e o começo do período moderno não tinha ido longe no processo de libertação do uso de tratar casos particulares. Não poderia haver grande progresso na teoria da álgebra enquanto a preocupação principal fosse a de encontrar a ‘coisa’ numa equação com coeficientes numéricos específicos (Boyer, 1996, p.208).

O movimento das equações enquanto objeto de ensino: analisando dados a partir do movimento histórico e lógico das equações.

Mas como as equações são tratadas no ensino? O movimento histórico e lógico das equações é contemplado no ensino?

O estudo do movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos, aqui de forma particular das equações, enquanto primeiro movimento de análise, explicitado no item anterior nos fundamenta para realizar o segundo movimento da análise.

Neste segundo movimento são utilizados como dados a Proposta Curricular do Estado de São Paulo (São Paulo, 2008) e as gravações realizadas em audio e vídeo em um curso para professores da rede estadual de ensino.

Para esta análise foram obtidos dados a partir de um Curso de Atualização para Professores do Estado de São Paulo, realizado no primeiro semestre de 2011, com a participação de oito professores, durante nove encontros de quatro horas. Estes professores têm por orientação a Proposta Curricular do Estado de São Paulo (São Paulo, 2008), e os Cadernos de Professor e de Aluno que são elaborados bimestralmente e distribuídos para toda a rede pública do Estado de São Paulo. O Caderno do Professor contém de forma detalhada objetivos que se pretende que os estudantes atinjam e modos para o encaminhamento das situações de aprendizagem que são propostas nos Cadernos dos Alunos.

A análise inicial do tópico equações, na forma como é desenvolvido neste material, revelou que o trabalho com equações e fórmulas é formalmente apresentado ao estudante a partir da 6ª. Série (7º. Ano), e supõe-se que é mais fácil para o estudante manipular as letras na fórmula do que na equação. Espera-se que o aluno use os símbolos e represente a relação entre as grandezas de mais de uma forma. Por exemplo, $P = 4. a$ então $a = P/4$, dominando a manipulação simbólica.

A partir deste entendimento apresentam-se na 6ª. Série fórmulas relacionadas à geometria: perímetro de um retângulo, área de um triângulo retângulo, entre outras como média aritmética; fórmulas relacionadas à economia (cálculo de imposto), à saúde (IMC), à física (distância) etc.

Ainda na 6ª. Série (7° ano) são introduzidos procedimentos de resolução de equações de 1º. Grau e entende-se que uma equação nada mais é do que uma pergunta feita em linguagem matemática. Recorre-se ao uso de balanças, ressaltando-se suas limitações em relação às raízes negativas, ou necessidade de extração de raiz quadrada e recomenda-se que o estudante compreenda a equivalência das expressões algébricas.

Com a intenção de aprofundar o trabalho com equações o material apresenta para o aluno da 7ª. Série uma advertência sobre situações de transposição da linguagem materna para a linguagem algébrica que normalmente induzem ao erro. É o caso do exemplo "Há seis vezes mais alunos do que professores" que normalmente é erroneamente escrita como 6 A = P, sugere-se a verificação com recursos aritméticos como uma estratégia para constatar o erro.

Espera-se ainda que na 7ª. Série (8º. ano) o aluno tenha condições para resolver tecnicamente equações mais complexas, e que reconheça as equações como uma ferramenta importante para a representação e resolução de problemas cujo encaminhamento através de recursos aritméticos seria muito complicado. No final desta série, são discutidas as equações com mais de uma incógnita que possuem soluções inteiras positivas.

Durante o segundo semestre da 8ª. Série (9º. ano) desenvolve-se o tópico de equações do segundo grau. Os procedimentos de resolução das equações são enfatizados e exigem conhecimentos de factorização, exponenciação, radiciação. A resolução de problemas é sugerida, mas destaca-se sobre ela o objetivo de sintetizar os diversos procedimentos utilizados para a obtenção das raízes de uma equação quadrática.

Retomando o movimento histórico e lógico das equações, observamos que por muito tempo a álgebra esteve associada ao desenvolvimento de métodos e linguagens próprias para encontrar valores desconhecidos e modos de resolução cada vez mais gerais para encontrar tais valores, o que chamamos de equações. Assim, identificamos historicamente a predominância da álgebra como o estudo das equações, o que ocorre em diferentes momentos da álgebra, da retórica, da sincopada, da geométrica, da simbólica como atualmente encontramos.

Entretanto no ensino este desenvolvimento histórico das equações não está contemplado. Nenhuma situação da proposta curricular analisada faz referência ao trabalho com equações com outras linguagens que não a simbólica. O desenvolvimento dos procedimentos técnicos usando a linguagem simbólica para resolução de equações é enfatizado. Entretanto não se esclarece a relação deste aperfeiçoamento técnico com a aprendizagem conceitual da relação entre as grandezas, e nem se o fato do estudante ter acesso a diversificadas técnicas de resolução de equação em linguagem simbólica lhe possibilita condições de se apropriar do conceito. Compreende-se historicamente que as equações são um instrumento da álgebra que permite encontrar valores desconhecidos através da relação entre as grandezas. Enquanto instrumento, seu uso é aprimorado ao longo do desenvolvimento humano, o que pode ser observado nas transformações de suas representações na forma retórica, sincopada, geométrica, simbólica e também nos seus modos de resolução traduzidos em técnicas que de forma geral resolvem equações de até quarto grau. Pode ser apresentada a seguinte questão: Os estudantes compreendem as equações como instrumento da álgebra que expressa a relação entre grandezas e encontra valores desconhecidos, ou só aprendem seus diferentes modos de resolução sem atribuir sentido ou significado à técnica que estão reproduzindo?

Durante o curso com os professores do Estado de São Paulo, no primeiro encontro foi feita a referência sobre estes diferentes estágios da álgebra (retórica, sincopada, simbólica, geométrica) e que estes seriam discutidos no decorrer do curso. No início do 5º. Encontro, a professora Marly alegou desconhecer estes estágios da álgebra e que para se preparar para as discussões do curso teve que procurar a respeito em arquivos da internet.

O desconhecimento acerca de diferentes momentos da história da álgebra, por exemplo, da álgebra retórica, sincopada, geométrica, bem como de possibilidades de trabalho com estes momentos em sala de aula, faz com que a álgebra simbólica no seu estágio mais sistematizado e formalizado tenha presença marcante nas situações de ensino apresentadas, desconsiderando-se todo o movimento histórico que originou este estágio simbólico.

Durante as discussões do curso, os professores identificaram dificuldades epistemológicas no processo de aprendizagem dos estudantes, por exemplo, o professor Antônio em depoimento expõe suas dificuldades ao usar a estratégia metodológica 'da balança', recomendada em situações da Proposta Curricular do Estado de São Paulo para o 6º. Ano, para o aprendizado das equações pelos estudantes.

> Na verdade, eu pensei que a atividade ia alavancar o conhecimento da álgebra, mas você percebe que os alunos ficam meio dependentes de você então assim você passa a situação para eles parece que mentalmente eles conseguem elaborar ali, chegar na resposta porém na hora que você precisa passar aquilo pra álgebra, parece que eles vem e te pedem uma ajuda ali então, eu não sei, é uma atividade que particularmente, eu, não funciona muito bem pra mim, isso é o que eu sinto, me parece que eles não tem ainda o conceito de variável, de incógnita e na hora que vai partir para uma atividade dessa, ele chega na resposta, mas na hora de passar isso pra álgebra eu não tenho bons resultados. (Antônio, 1º. encontro, 01:08:50)

A ‘balança’ como recurso metodológico pressupõe o equilíbrio. Na equação cada um dos membros da igualdade deve ser mantido para que a igualdade não se desfaça, não se ‘desequilibre’, neste caso a ênfase é em esclarecer que para cada movimento realizado em um dos lados da balança (um dos membros da igualdade) seja este de adição ou subtração de objetos, deve ser também realizado no outro lado da balança (no outro membro da igualdade) para que o equilíbrio se mantenha. Como qualquer procedimento metodológico este tem suas potencialidades e limitações e é necessário consciencialização a este respeito. Este procedimento torna palpável o movimento e a relação a ser estabelecida entre as quantidades na balança, é um caso singular, sobre o qual ainda são necessários processos de abstração e generalização para que a sua representação escrita adquira sentido e significado. Como recurso metodológico a balança torna perceptível a necessidade de que para se estabelecer o equilíbrio na equação, é necessário realizar operações idênticas em ambos os lados da igualdade, no caso em ambos os lados da equação. Assim, por exemplo, se somarmos uma determinada quantidade a um lado da balança (ou a um dos membros da equação) devemos somar a mesma quantidade ao outro lado da balança (e no caso ao outro membro da equação). Este recurso esclarece para os alunos alguns dos procedimentos que se utilizam na técnica da equação, em que se vão aos poucos eliminando ou alterando quantidades em busca de encontrar o valor desconhecido. Entretanto mais uma vez o foco do trabalho do professor está em ‘como se resolve uma equação’, e não em identificar a equação como um instrumento da álgebra historicamente utilizado para estabelecer a relação entre as grandezas e resolver situações problemas.

Outra professora analisando situações de ensino de equações do segundo grau apresentadas no caderno do aluno da 8ª. Série /9º. Ano, descreve suas experiências com os estudantes, ressaltando que aritmeticamente há compreensão pelos estudantes em relação ao problema que estão resolvendo, mas existem dificuldades com o registro simbólico, e com a possibilidade de utilizar as equações para resolver os problemas. Sendo assim, os problemas que possuem resolução aritmética possível são resolvidos pelos estudantes, mas os que exigem resolução algébrica através de equações, por exemplo, não são resolvidos, apesar dos estudantes conhecerem as técnicas de resolução de equações. O relato da professora Helena destaca esta ênfase sobre o ensino da técnica das equações, ressaltando:

> ele traz a ideia de trabalhar a técnica, e estávamos na discussão de quanto a técnica faria que o aluno entendesse realmente a situação, […]esta seria uma ideia para introduzir o conceito de equação com o aluno acho que até ai tudo bem, mas daqui pra frente mas aí na pagina 6 e 7 ele já vai trazendo uma série de equações […] e assim é um exemplo de cada para o aluno aplicar técnica uma vez e se apropriar daquela forma de resolução então eu acho que fica um pouco jogada[…]e eu não queria ficar presa só nisso, eu acho que uma equação deste tipo não é de jeito nenhum suficiente para que o aluno se aproprie daquele conceito, mesmo da técnica, e eu estava tendo que ficar presa nisso, eu não vou ficar, mas era imposição, aqui a partir de agora, começa a usar técnica, técnica, técnica, e as situações problemas mesmo ficam um pouco de lado[…]acho que são poucas a gente não aprende fazendo 5 exercícios, a gente tem que aprimorar bastante então acho que falha neste sentido[…]quebra e passa pra outra como se quebrasse ali o conhecimento do aluno para o aluno começar nova técnica, esquece essa […] tem situações muito interessantes, bem contextualizadas, mas insuficientes para o aprendizado do aluno[…]e aí a compreensão do conteúdo, da equação em si, fica um pouco perdida (Helena, 9º. encontro, 00:06:10)

O que esta professora analisa é o papel da técnica e do conceito de equação no ensino. O privilégio da técnica lhe causa um desconforto, inclusive por perceber as dificuldades de aprendizagem de seus estudantes que não atribuem sentido ao que estão realizando. E as equações se tornam para os estudantes um objeto matemático escolar, sem significado, e sobre o qual se estudam as técnicas de resolução que serão cobradas nas avaliações. Entende-se que a falta de compreensão histórica e lógica das equações como instrumento da álgebra para estabelecer a relação entre as grandezas e encontrar o valor desconhecido dificulta a atribuição de significado pelos estudantes sobre as equações e suas técnicas de resolução.

A hipótese desta pesquisa, ainda em andamento, é de que o equilíbrio a ser atingido no ensino entre a técnica e os conceitos, sejam eles de equação ou outro, depende da compreensão do desenvolvimento histórico deste objeto do conhecimento. Ignorar momentos históricos em que as equações eram instrumentos para resolver situações problemas específicos, bem como momentos em que foram estudadas como objeto para representar e resolver qualquer tipo de problema é ignorar o movimento do processo de conhecimento, e encerrá-lo em si.

Considerações finais

Com o objetivo de explicitar as relações entre o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos e o objeto de ensino da álgebra, esta pesquisa ainda está em desenvolvimento. O movimento das equações, apresentado aqui é usado como exemplo da análise já iniciada sobre os dados compostos de textos históricos e filosóficos de matemática, documentos curriculares e discussão com professores.

Observa-se que diferentes técnicas para resolução de equações são reforçadas para encontrar a solução de um problema específico, investindo em recursos e metodologias diferenciadas, como é o caso da balança, e não se proporcionam aos estudantes o que seria então sua essência, a possibilidade de partir de um problema particular para compreender métodos que tratem das grandezas abstratamente e permitam efetivamente a generalização. Algumas dificuldades encontradas pelos estudantes na aprendizagem da álgebra e pelos professores em seu ensino são derivadas da organização do ensino de álgebra que procura apresentar este conhecimento como produto e a partir de sua forma simbólica no estágio mais formalizado.

Não é tarefa fácil promover situações para os estudantes que considerem o movimento histórico e lógico dos conceitos, entretanto recolher os produtos deste desenvolvimento e apresentá-los, independente de estratégia metodológica, tampouco fará com que os estudantes atribuam sentido e significado a estas situações ou desenvolvam seu pensamento teórico e a compreensão da constituição do conhecimento humano em seus avanços e retrocessos, em seu movimento.

Há um longo caminho a percorrer em relação à compreensão do movimento lógico e histórico dos conceitos e suas relações com o objeto de ensino da álgebra. Puig e Rojano (2004) indicam que a idéia é olhar para o futuro do ensino e aprendizagem da álgebra em termos de que lições podem ser extraídas de uma perspectiva histórica. Este processo de apropriação do movimento lógico e histórico dos conceitos deve necessariamente fazer parte da formação dos professores, para que a partir de estudos filosóficos e históricos de sua disciplina possam estabelecer os nexos entre os conceitos, no caso os algébricos, para que estes não sejam usados isoladamente, de forma técnica e empírica em sala de aula.

Os conteúdos de ensino não são vulgarizações ou adaptações de conhecimentos científicos (Chervel, 1990), portanto é necessário rever os critérios que definem a presença de um conteúdo no programa escolar. Entre estes critérios encontram-se os relacionados diretamente ao objeto do conhecimento. Neste sentido o estudo do movimento lógico e histórico dos conceitos fornece critérios para esta escolha, sem que percamos de vista duas questões fundamentais: De que forma este conteúdo de ensino contribui para a formação do pensamento teórico dos estudantes? E de que forma podemos abordá-lo sem que ele perca sua especificidade enquanto forma de conhecimento e elaboração histórica da humanidade?

Referências bibliográficas

Baumgart, J. K. (1992). Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula. Álgebra. São Paulo: Atual.

Boyer, C. B. (1996). *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blucher Ltda.

Caraça. B.(1952). *Conceitos fundamentais da matemática*. Lisboa: Tipografia Matemática.

Chervel, A. (1990). História das disciplinas escolares. Reflexões sobre um campo de pesquisa. *Teoria e Educação*. Porto Alegre, n.2.

Davýdov, V. V.(1982). *Tipos de generalización en la ensenanza*. Havana: Pueblo y Educacion.

Eves, H. (1995). Introdução à História da matemática. Campinas: Ed.Unicamp.

Kopnin, P. V. (1978). *A dialética como lógica e teoria do conhecimento*. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira.

Puig, L.; Rojano, T. (2004). The History of algebra in mathematics education. In: Stacey, K; Chick, H.; Kendal, M. (org.) *The future of the teaching and learning of algebra*: the 12th ICMI Study. Kluwer Academic, pp.189-226.

São Paulo, Secretaria da Educação. (2008). *Proposta Curricular do Estado de São Paulo: Matemática*. São Paulo: SEE.

Viète, F.(2006). *The Analytic Art*. New York: Dover Publications.

RACIOCÍNIOS DESENVOLVIDOS NA VERIFICAÇÃO DAS SOLUÇÕES DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Paula Maria Barros

ESTiG – Instituto Politécnico de Bragança

pbarros@ipb.pt

José António Fernandes

CIEd – Universidade do Minho

jfernandes@ ie.uminho.pt

Cláudia Mendes Araújo

Centro de Matemática da Universidade do Minho

clmendes@math.uminho.pt

Resumo

Numa investigação sobre o ensino e aprendizagem de álgebra Linear, em que um dos objetivos era identificar os erros e dificuldades sentidos pelos estudantes, propuseram-se algumas questões sobre sistemas de equações lineares a estudantes de engenharia do ensino superior politécnico que frequentavam a unidade curricular álgebra linear e geometria analítica. Neste texto, faz-se uma breve exposição dos resultados obtidos numa das questões em que se pretendia a verificação da solução de um sistema de equações lineares. Concluiu-se que, embora o tema tenha sido estudado no ensino básico/secundário e superior, os estudantes demonstraram ainda dificuldades consideráveis na resolução da tarefa proposta, evidenciando-se, também, o facto de muitos dos que responderam corretamente terem necessidade de resolver o sistema para verificar a solução.

Palavras-chave: Sistemas de equações lineares, ensino superior, erros e dificuldades.

Introdução

Atualmente começa a surgir a preocupação por parte das instituições do ensino superior, e dos respetivos professores, em perceberem as razões do fracasso de muitos estudantes na área da matemática e em como melhorar o seu desempenho.

No que diz respeito à álgebra Linear, a importância de investigações sobre o seu ensino e aprendizagem centra-se no facto dela se encontrar subjacente a quase todos os domínios da matemática e até mesmo de outras áreas, como as ciências da computação, a engenharia e a física, entre outras. Consequentemente, torna-se imprescindível que aqueles que pretendam trabalhar com as ciências que utilizam a matemática, quer como objeto de estudo quer como instrumento, tenham o domínio dos seus principais conceitos (Coimbra, 2008; Machado, 2004).

Tendo como pano de fundo esta preocupação, partindo do pressuposto que conhecer os erros dos alunos pode ser um bom princípio para o professor conseguir programar um ensino mais eficaz e adequado às suas necessidades (Ferreira & Brumatti, 2009; Godino, Batanero & Font, 2003) e tendo em atenção que a reflexão e discussão sobre os erros pode ser um ponto de partida para os estudantes participarem ativamente na sua superação (Pochulu, 2004), realizou-se um estudo envolvendo estudantes do ensino superior politécnico, com o intuito de responder, entre outras, à seguinte questão: Quais os erros e dificuldades sentidas pelos estudantes na aprendizagem de conteúdos de álgebra linear?

Neste texto apresenta-se uma pequena parte dos resultados obtidos para o caso dos sistemas de equações lineares, que têm uma importância fundamental tanto dentro da própria disciplina de matemática como na aplicação a outras ciências, pois diversos problemas requerem a discussão e resolução de sistemas de equações lineares. Essa relevância é reafirmada pela sua presença nos programas oficiais de matemática a partir do terceiro ciclo do ensino básico (Ministério da Educação, 2007) e pelo aprofundamento do tema em diversos cursos de licenciatura do ensino superior, como é o caso dos cursos de engenharia.

Investigação sobre dificuldades na resolução de sistemas de equações lineares

Parece ser consensual que a álgebra linear é uma fonte de dificuldades para muitos alunos do ensino superior (Celestino, 2000; Coimbra, 2008; Dorier, 2000). Particularmente, a partir de diversos trabalhos de investigação, pode concluir-se que no caso dos sistemas de equações lineares existem várias dificuldades relacionadas com a sua aprendizagem nos diferentes níveis de ensino e que, inclusivamente, para muitos estudantes, a solução de um sistema de equações lineares não tem significado.

Pantoja (2008) refere a ausência de significado no estudo de sistemas de equações lineares através do processo de eliminação de Gauss, afirmando que os alunos não compreendem o significado das operações efetuadas com os coeficientes das linhas que compõem o sistema e acabam por operar com as mesmas de forma aleatória até conseguirem escalonar o sistema e encontrar a solução desejada.

Cury e Bisognin (2009) relatam num artigo parte de um teste aplicado a estudantes do 1.º ano que frequentavam disciplinas de matemática em oito instituições gaúchas de ensino superior. O projeto envolveu uma amostra intencional de 368 alunos de cursos de engenharia, arquitetura, ciência da computação, ciências contáveis e licenciatura em matemática. Apresenta-se, a seguir, uma questão do teste:

> O valor de dois carros, do mesmo preço, adicionado ao de uma moto, soma R$ 41.000,00. No entanto, o valor de duas dessas motos, adicionado ao de um carro do mesmo tipo, é de R$ 28.000,00. A diferença entre o valor do carro e o da moto, em reais, é: a) 5.000; b) 13.000; c) 18.000; d) 23.000; e) 41.000. (p. 4)

Esta questão foi escolhida para aprofundar a análise das resoluções escritas dos estudantes de um sistema de equações lineares. Depois de classificar as produções dos estudantes, foram utilizadas ideias sobre o sentido do símbolo e sentido da estrutura para discutir as dificuldades apresentadas.

Em termos quantitativos, esta questão foi a que obteve o maior número de respostas corretas, 63% dos estudantes assinalaram a alternativa correta, 24% indicaram uma opção incorreta e 13% não responderam. Para a análise qualitativa as autoras só consideraram as resoluções que mostravam o desenvolvimento da questão pelo aluno (138 respostas), nas quais os estudantes procuraram representar matematicamente a situação descrita no enunciado e solucioná-la. As autoras apresentaram quatro categorias de classificação das respostas, em que o estudante: A – identificou que o problema poderia ser modelado por um sistema de duas equações lineares com duas incógnitas, corretamente expressas, soube resolver o sistema e apresentou a resposta correta; B – identificou que o problema poderia ser modelado por um sistema de duas equações lineares com duas incógnitas, corretamente expressas, soube resolver o sistema, mas errou alguns detalhes e não apresentou a resposta correta; C – identificou que o problema poderia ser modelado por um sistema de duas equações lineares com duas incógnitas, corretamente expressas, mas não soube resolver o sistema; D – não foi capaz de modelar o problema.

Utilizando estas categorias, as autoras observaram existir 94 resoluções da categoria A, 9 da B, 25 da C e 10 da D. Constataram também que dos 103 estudantes cujas resoluções foram classificadas como A ou B, 67% deles empregaram o método de adição e 33% o método de substituição. Os estudantes cujas resoluções se enquadraram na categoria C parecem ter uma das componentes do sentido do símbolo, reconhecendo a forma apropriada de representar o problema, mas não têm o sentido da estrutura, pois não parecem reconhecer o método adequado de resolução nem as manipulações algébricas possíveis ou utilizáveis. Finalmente, as autoras consideraram evidências claras de falta de sentido da estrutura aquelas resoluções da classe D em que os estudantes tiveram dificuldades em utilizar o princípio multiplicativo para determinar equações equivalentes que adicionadas permitem eliminar termos semelhantes e isolar uma das incógnitas.

Integrado num estudo que se desenrolou em várias fases, Andreoli (2005) analisou as respostas dadas por 15 professores do ensino básico da Argentina a um problema que envolvia o conceito de dependência linear e que se traduzia pelo sistema:

$$\begin{cases} b+c=60 \\ 2b+6c=250 \\ c=2b \end{cases}, \text{ com } b \text{ e } c \text{ números naturais.}$$

No problema solicitava-se a determinação dos valores de b e c, e esperava-se que o professor, ao longo do processo de determinação, constatasse que o sistema não tem solução. Foi também solicitado aos professores que alterassem os valores do sistema de modo a torná-lo possível e determinado, e posteriormente pediram-se novas alterações de modo a torná-lo indeterminado.

O estudo mostrou que 7 professores não responderam à pergunta de tornar o sistema possível e indeterminado, possivelmente por não compreenderem a relação de dependência entre as equações e o número de soluções de um sistema linear. A autora concluiu, ainda, através de uma entrevista realizada aos professores, que apenas dois deles trabalhavam a situação de um sistema linear indeterminado com os seus alunos e apenas um as relações de dependência linear entre as equações na resolução de sistemas lineares.

Cutz (2005), num trabalho de investigação em que pretendia estudar a representação geométrica da solução ou soluções de um sistema de equações lineares com duas e três variáveis, assim como a conversão entre a representação geométrica e analítica dos sistemas de equações lineares, delineou uma série de tarefas que foram aplicadas através de uma entrevista a cinco estudantes que recentemente tinham frequentado uma disciplina de álgebra linear.

Na análise das entrevistas, a autora observou a associação de soluções de um sistema de três equações lineares com duas variáveis com o ponto de intersecção de pelo menos duas das retas que representam o sistema, de modo que um sistema de equações que é representado por três retas que se intersectam duas a duas terá três soluções. Os estudantes também consideraram um ponto representado a três dimensões como uma reta, pelo facto de estarem a ter em conta três dimensões; e que quando três planos se intersectam numa linha reta se tem uma solução para o sistema, pois tomam a reta como um objeto e não como um conjunto de pontos, o que indica uma interferência entre os modos de pensamento geométrico e analítico.

Por outro lado, a autora também constatou que existe uma tendência para considerar o conjunto de elementos (retas ou planos) sobrepostos como representando um sistema sem solução, já que os estudantes consideram a solução como o ponto (reta) de interseção dos elementos retas (planos), isto é, esperam ver o ponto (reta) de interseção para determinar o número de soluções do sistema.

Ainda de acordo com a opinião desta autora, fundamentada em trabalhos de investigação sobre sistemas de equações lineares, no ensino tradicional favorecem-se os métodos de resolução na sua forma puramente algorítmica, quer dizer, estes temas são tratados na escola (e nos livros de texto) por meio de regras ou métodos que permitem ao estudante encontrar a solução do sistema deixando de lado o seu significado. Mais ainda, favorece-se o ensino dos sistemas de equações que apresentam solução única em detrimento dos sistemas com infinitas soluções ou que não têm solução, que se abordam de forma superficial ou não se abordam mesmo.

Metodologia

O estudo dos raciocínios desenvolvidos na verificação das soluções de sistemas de equações lineares realizou-se a partir das respostas dadas pelos estudantes a um questionário escrito, assumindo-se como um estudo de natureza fundamentalmente quantitativa e descritiva.

A investigação realizou-se no ano letivo de 2011/2012 e envolveu 239 alunos do ensino superior politécnico inscritos em várias licenciaturas de engenharia e que se encontravam a frequentar a unidade curricular álgebra linear e geometria analítica. A unidade curricular foi lecionada por 3 professoras, uma das quais coautora deste estudo e responsável pela docência em alguns dos cursos, e a sua preparação foi efetuada em equipa, tendo assim todos os alunos tido acesso ao mesmo material de apoio às aulas (apontamentos teóricos e fichas de trabalho).

Nos cursos em causa, a unidade curricular integra o 1.º ano do plano de estudos e inclui o tema sistemas de equações lineares. Neste tema são desenvolvidos os tópicos: discussão e classificação de sistemas de equações lineares; e métodos de resolução de sistemas (método da matriz inversa, método de eliminação de Gauss, método de eliminação de Gauss-Jordan e regra de Cramer).

Em termos da avaliação das aprendizagens, por acordo entre os alunos e as docentes, foi decidido que ao longo do semestre se fariam pequenos trabalhos durante as aulas, consistindo na resolução de algumas questões sobre cada um dos temas lecionados, sendo os sistemas de equações lineares um dos temas em que isso aconteceu. Os alunos foram previamente avisados da realização do trabalho e, aquando da sua resolução, já tinham sido lecionados os conteúdos relativos ao tema.

As questões sobre os sistemas eram 3 e foram dados cerca de 30 minutos aos alunos para a sua resolução durante uma das aulas teóricas. Foram utilizadas quatro versões diferentes pelo facto dos alunos em algumas turmas serem em número considerável e ser importante garantir que a resolução fosse realizada individualmente, tendo cada aluno respondido apenas a uma versão. Neste texto tratam-se apenas as quatro versões de uma das questões do tipo verdadeiro-falso, com justificação da opção escolhida.

Em termos de tratamento e análise de dados, começou-se por classificar as respostas dos alunos com base no recurso a raciocínios válidos e não válidos e, de seguida, definiram-se categorias, estabelecidas *a posteriori*, em cada um desses tipos de raciocínios (Gall, Gall & Borg, 2003). Essas categorias são apresentadas na secção seguinte, aquando da apresentação dos resultados.

Análise das respostas e raciocínios dos alunos

As quatro versões, da questão, propostas aos alunos e analisadas neste texto, que incidem sobre a verificação das soluções de sistemas homogéneos de equações lineares, são apresentadas na Fig. 1.

Indique, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas:

Versão A (VA). Considere as matrizes reais $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$.

a) $(2,2,-2)$ é solução do sistema homogéneo $Ax = 0$.

Versão B (VB). Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

a) $(1,-3,4,2)$ é solução do sistema homogéneo $Ax = 0$.

Versão C (VC). Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

a) As soluções do sistema homogéneo $Ax = 0$ são os vetores da forma $(0,-x_1,x_1)$.

Versão D (VD). Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ \alpha \end{bmatrix}$.

a) $(-2,2)$ é solução do sistema homogéneo $Ax = 0$.

Fig. 1. As quatro versões da questão propostas aos alunos

Por motivos de simplificação na apresentação dos dados considerar-se-ão as formas abreviadas VA, VB, VC e VD para fazer referência às diferentes versões da tarefa proposta.

Na Tabela 1 apresenta-se a distribuição dos alunos (em frequência absoluta) segundo a classificação dos raciocínios subjacentes às respostas.

Tabela1. Raciocínios dos alunos nas questões correspondentes às quatro versões da tarefa

	Versão				
Raciocínios	VA	VB	VC	VD	Total
Válidos (respostas corretas)	18	16	5	27	66
Não válidos	28	28	43	28	127
Sem justificação ou não responde	13	14	11	8	46
Total	59	58	59	63	239

As respostas corretas baseadas em raciocínios válidos resultaram de três tipos de raciocínios: 1) Substituição das incógnitas pela solução proposta e verificação da obtenção ou não de proposições verdadeiras (35 alunos); 2) Resolução do sistema pelo método da substituição (17 alunos); 3) Resolução do sistema pelo método de eliminação de Gauss (14 alunos). Nestas respostas incluíram-se também os casos em que foram cometidos erros de cálculo pontuais (erros de adição, troca de sinais,...) que não afetaram a qualidade do raciocínio apresentado.

De notar que a substituição das incógnitas pela solução proposta não foi efetuada de forma correta por qualquer aluno que tenha respondido à VC e mesmo os alunos que responderam corretamente não indicaram o conjunto solução do sistema, limitando-se a resolvê-lo e a indicar que afirmação era falsa. Depreende-se, assim, que na VC as maiores dificuldades dos alunos foram influenciadas pelo facto de as possíveis soluções estarem descritas por uma expressão algébrica envolvendo variáveis.

É de realçar também o número significativo de alunos (31) que resolveu o sistema em vez de substituir diretamente a possível solução, o que denota uma compreensão pouco abrangente do conceito de solução.

Na categoria *sem justificação ou não responde* integraram-se os alunos que responderam apenas verdadeiro/falso sem indicar qualquer justificação ou apresentaram a matriz ampliada do sistema sem qualquer outra resolução ou conclusão.

Analisadas as 127 respostas que se basearam em raciocínios não válidos, estabeleceram-se várias categorias, sendo apresentadas na Tabela 2 as mais frequentes, com o propósito de caraterizar os principais erros cometidos.

Tabela 2. Categorização dos raciocínios não válidos

Raciocínios não válidos	VA	VB	VC	VD	Total
Incompreensão do significado de sistema homogéneo	4	10	6	11	31
Interpretação incorreta da resolução efetuada	4	1	11	2	18
Comparação do número de incógnitas com o número de equações	–	7	1	5	13
Solução dada como vetor dos termos independentes	9	–	4	–	13
Conceções que envolvem o conceito de determinante	2	2	5	2	11
Incorreções na resolução pelo método de eliminação de Gauss	4	–	3	–	7
Enunciado de conceitos ou procedimentos sem os aplicar à situação	–	–	4	2	6

No raciocínio *incompreensão do significado de sistema homogéneo*, alguns alunos substituíram as soluções no sistema $Ax = b$ (Fig. 2) ou resolveram este sistema em vez do sistema homogéneo $Ax = 0$. Nos casos em que não é concretizado no enunciado o vetor dos termos independentes, inventam um.

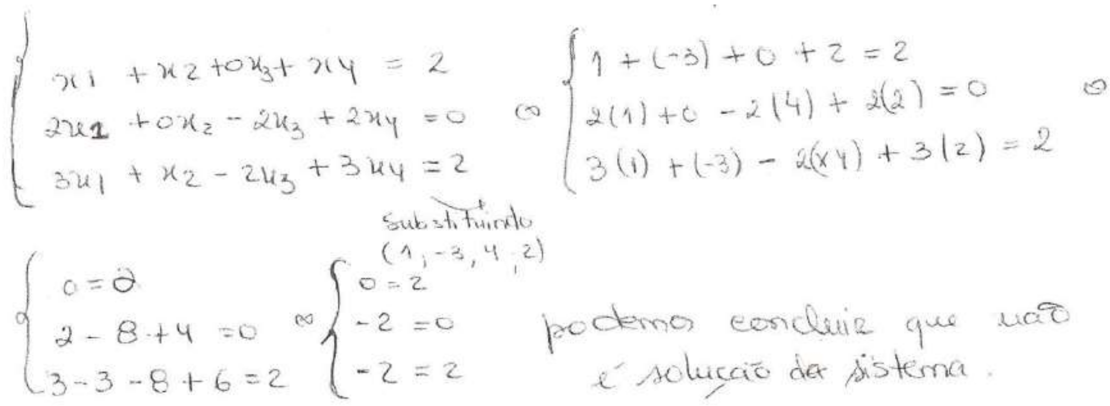


Fig. 2. Substituição em $Ax = b$ (VB)

Ainda neste raciocínio, para outros alunos, está implícita ou explícita a ideia de que o sistema só pode ter a solução nula ou alguma incompreensão do que significa solução nula. Obtiveram-se, por exemplo, respostas como: “Falso, um sistema do tipo $Ax = 0$ é um sistema homogéneo. Concluímos, assim, que a solução deste sistema vai dar soluções nulas se o resolvermos” (VA); “Falsa, pois sendo um sistema homogéneo tem pelo menos uma solução nula e $(1,-3,4,2)$ não tem nenhum elemento nulo” (VB); e

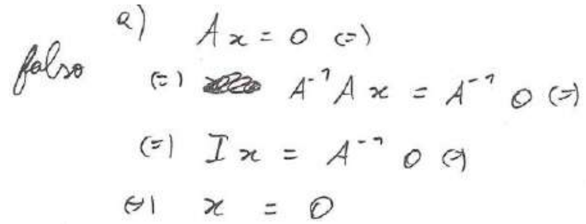


Fig. 3. Multiplicação pela matriz inversa (VC)

Nos primeiros exemplos é visível uma tendência para considerar cada coordenada como uma solução e no último caso (Fig. 3) generaliza-se uma resolução que apenas é válida se a matriz dos coeficientes for invertível.

No raciocínio *interpretação incorreta da resolução efetuada* incluíram-se os alunos que resolveram (na totalidade ou quase) de forma mais ou menos adequada o sistema pelo método de eliminação de Gauss (12 alunos, ver Fig. 4), pelo método da substituição (5 alunos, ver Fig. 5 e Fig. 6) ou substituíram as incógnitas pela solução proposta (1 aluno, ver Fig. 7), mas não interpretaram corretamente o resultado obtido ou não mencionaram qualquer resposta referente à veracidade da afirmação feita.

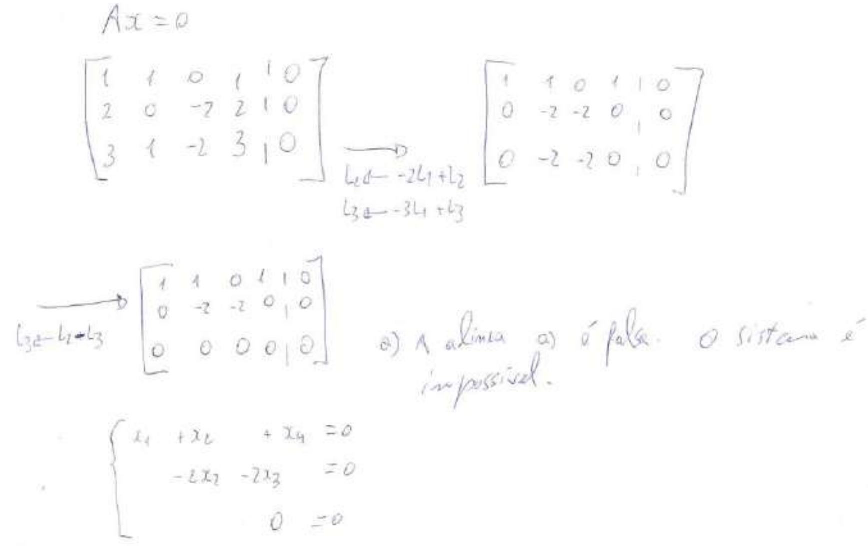


Fig. 4. Método de eliminação de Gauss (VB)

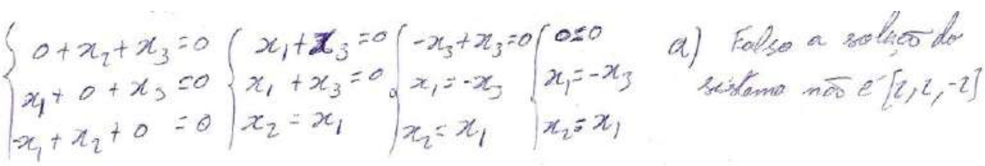


Fig. 5. Método da substituição (VA)

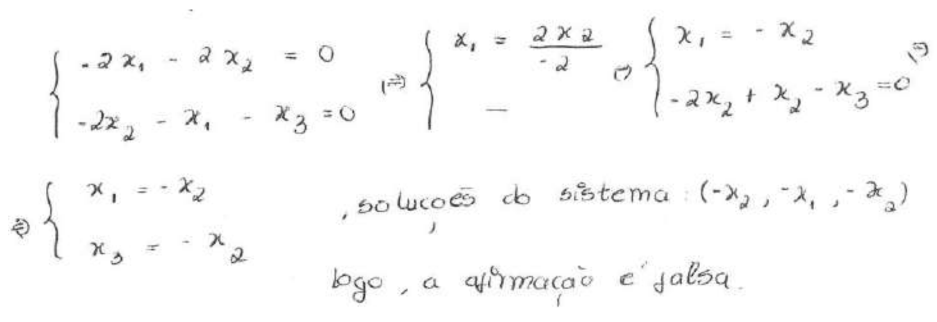


Fig. 6. Método da substituição (VC)

No caso da VA (Fig. 5), o aluno considera que $(2,2,-2)$ não é solução por não ser esse o resultado final que obtém diretamente; no caso da VC (Fig. 6), o aluno, para indicar a segunda coordenada, exprime x_2 em função de x_1.

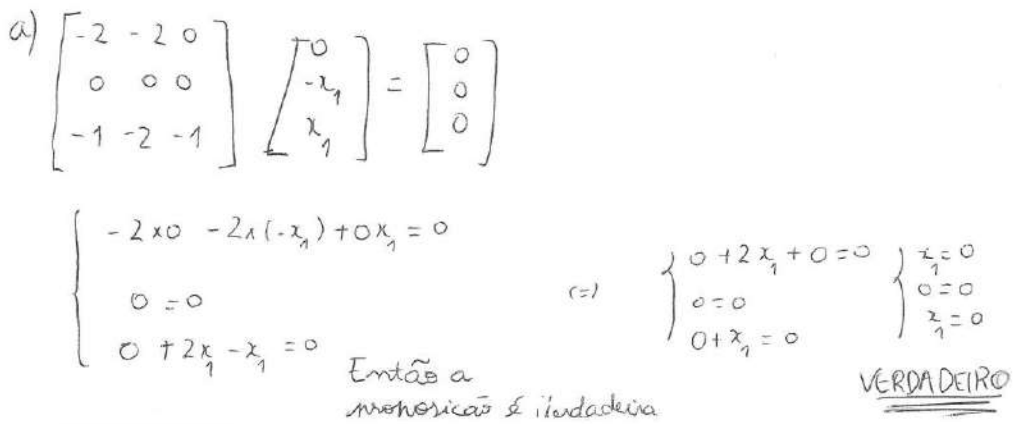


Fig. 7. Substituição das incógnitas pela solução (VC)

Neste raciocínio evidenciou-se existirem dificuldades na interpretação dos valores obtidos e não tanto nos procedimentos de cálculo.

No raciocínio *comparação do número de incógnitas com o número de equações*, os alunos consideram que para ser solução ou para poder resolver o sistema, o número de variáveis tem de ser igual ao número de equações. Assim, perante um sistema com três equações lineares, mencionaram que a solução do sistema tem de pertencer a P^3: "Como o sistema é composto por 3 equações só pode ter soluções do tipo (x, y, z), ou seja, com uma solução para cada equação. Como $(1,-3,4,2)$ é do tipo (x, y, z, w), tem quatro soluções, para 3 equações logo é falso" (VB); ou traduzem esse facto ao representar o vetor das incógnitas com dimensão 3×1, quando escrevem o sistema na forma matricial (ver Fig. 8).

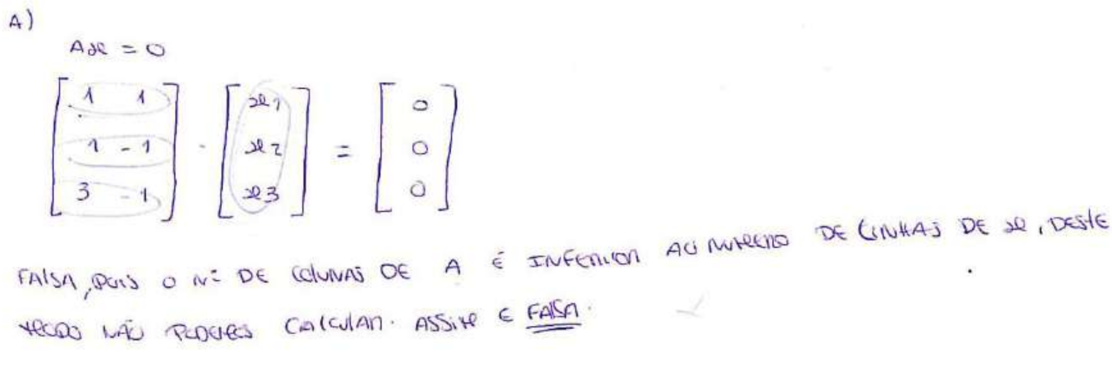


Fig. 8. Escrita do sistema na forma matricial (VD)

De notar que, no exemplo da VB, se evidencia novamente a conceção de que o valor de cada variável corresponde a uma solução do sistema.

No raciocínio *solução dada como vetor dos termos independentes,* os alunos resolvem o sistema $Ax = vetor\ solução$, demonstrando assim uma incompreensão do significado de solução (ver Fig. 9).

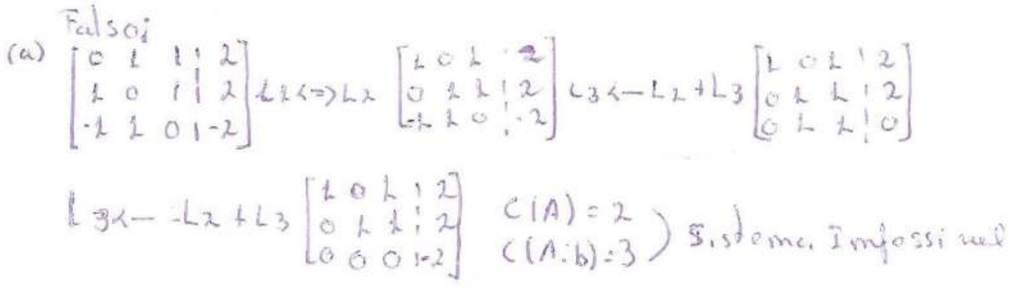


Fig. 9. Solução na coluna dos termos independentes (VA)

No raciocínio *conceções que envolvem o conceito de determinante*, os alunos interpretaram de forma incorreta o resultado do determinante que obtêm, nos casos em que é possível calculá-lo, considerando que o sistema é impossível nos casos em que o determinante é zero: “O determinante é zero, logo o sistema é impossível, ou seja, não tem solução. Logo é falso” (VA); “$\det(A) = 0$ [com base na existência de uma linha nula]. Logo não tem A^{-1}, logo é singular. Logo, o sistema é impossível, ou seja, não tem solução. A afirmação é falsa” (VC). Noutros casos inventam falsas fórmulas para calcular o determinante da matriz dos coeficientes quando esta não é uma matriz quadrada (ver Fig. 10).

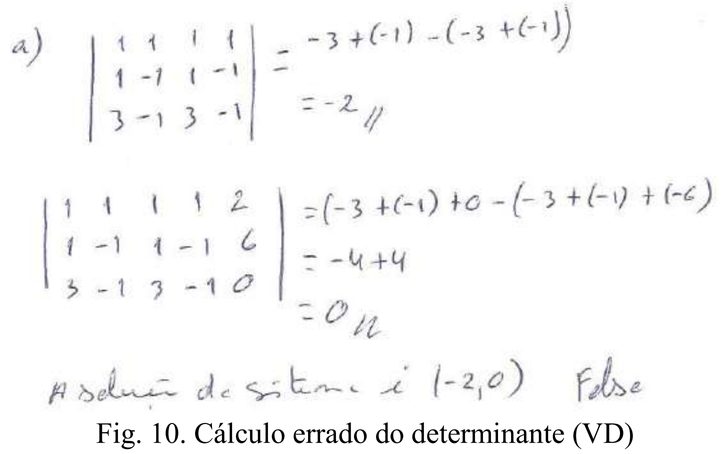


Fig. 10. Cálculo errado do determinante (VD)

Outros ainda fazem alguma referência à dependência das linhas da matriz ampliada do sistema, concluindo por esse facto que o sistema é impossível (ver Fig.11).

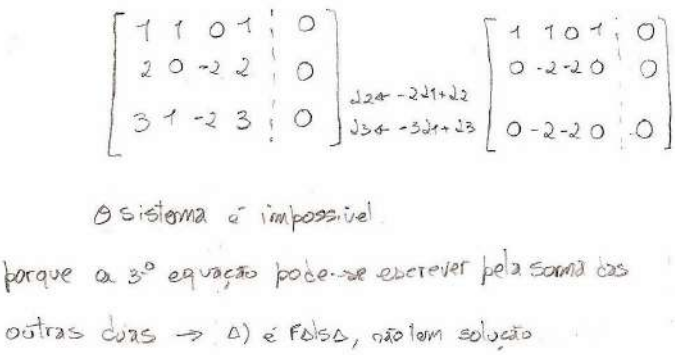


Fig. 11. Análise da dependência das linhas (VB)

No raciocínio *incorreções na resolução pelo método de eliminação de Gauss*, os alunos, ao resolver o sistema, consideram a matriz dos coeficientes em vez da matriz ampliada, não chegando a qualquer conclusão válida, ou aplicam as operações elementares sem critério ou de forma indevida (ver Fig. 12).

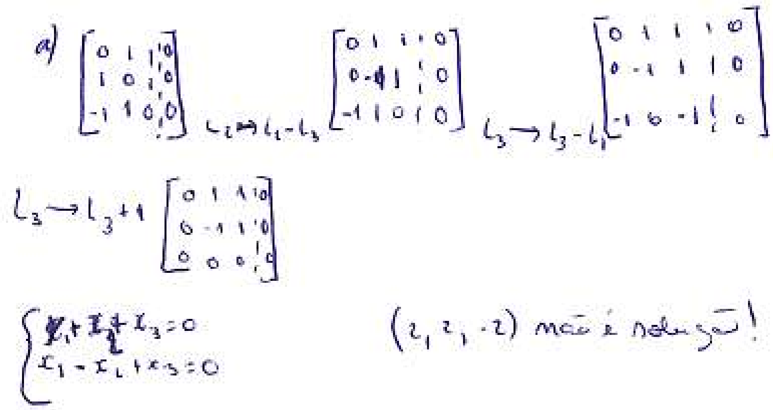


Fig.12. Operações elementares incorretas (VA)

No raciocínio *enunciado de conceitos/procedimentos sem os aplicar à situação*, os alunos recorrem a justificações mencionando eventuais resoluções ou conceitos teóricos sem no entanto apresentar qualquer resolução neles baseada. Por exemplo, "Utilizando o método de Gauss-Jordan e metendo as matrizes em escada é impossível ser $(-2,2)$ a solução" (VB) e "Um sistema homogéneo é sempre possível, logo pode ter duas classificações, sendo essas possível e determinado (uma única solução) e possível indeterminado (infinitas soluções), assim a afirmação é verdadeira" (VC).

Nos outros raciocínios, que não são discriminados neste texto, para além das justificações sem sentido aparente, incorreções de cálculo ou cálculos sem significado ou não concluídos, evidenciam-se ainda conceções erradas diversificadas, como por exemplo: considerar a caraterística de uma matriz como o número de linhas da matriz sem esta estar em escada por linhas; verificar a solução do sistema apenas com base numa das equações e efetuar o produto de matrizes de forma incorreta.

Conclusões

Perante a análise apresentada verifica-se que, mesmo tendo o tema já sido objeto de estudo no ensino superior, os alunos continuam a manifestar dificuldades consideráveis na verificação das soluções de sistemas de equações lineares.

As dificuldades evidenciadas pelos alunos centram-se mais nos aspetos ligados à interpretação do que na resolução do próprio sistema (Andreoli, 2005; Pantoja, 2008), salientando-se: (1) a necessidade de resolver o sistema para verificar se uma dada sequência é ou não uma sua solução; (2) a não compreensão do significado de solução, considerando, por exemplo, o valor de uma das incógnitas como solução do sistema; (3) o uso de conhecimentos teóricos gerais como justificação, sem os aplicar à situação em estudo; e (4) a invenção de falsas regras para poder determinar certos valores, como aconteceu no caso da determinação de determinantes de matrizes não quadradas.

Muitos estudantes parecem mecanizar os processos de resolução sem compreenderem o significado desses processos, o que pode dever-se a uma abordagem algorítmica sem contemplar a dimensão dos significados, como defende Cutz (2005).

Referências bibliográficas

Andreoli, D. I. (2005). *Construcción de los conceptos de dependencia e independencia lineal de vectores en alumnos de primer año de la universidad* (Tercera fase). Comunicações Científicas y Tecnológicas. Universidade Nacional del Nordeste.

Celestino, M. R. (2000). *Ensino-aprendizagem da álgebra linear: as pesquisas brasileiras na década de 90.* Dissertação de mestrado, Pontifícia Universidade Católica de S. Paulo, S. Paulo.

Coimbra, J. L. (2008). *Alguns aspectos problemáticos relacionados ao ensino-aprendizagem da álgebra linear.* Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Pará, Pará.

Cutz, B. M. (2005) *Un estudio acerca de las concepciones de estudiantes de licenciatura sobre los sistemas de ecuaciones y su solución*. Dissertação de Mestrado, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Cury, H. N., & Bisognin, E. (2009). Análise de soluções de um problema representado por um sistema de equações. *Bolema*, 33, 1-22.

Dorier, J.-L. (Ed.) (2000). *On the teaching of linear algebra*. Kluwer Academic Publishers.

Ferreira, D. H., & Brumatti, R. N. (2009). Dificuldades em matemática em um curso de engenharia elétrica. *Horizontes*, 27(1), 51-60.

Gall, M. D., Gall, J. P., & Borg, W. R. (2003). *Educational Research: An introduction*. Boston: Allyn and Bacon.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. Matemáticas y su Didáctica para Maestros — Manual para el Estudiante. Acedido em 29 de julho, 2011, em http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

Machado, S. D. (2004). Educação matemática no ensino superior. *Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática*, 34-46.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Autor.

Pantoja, L. F. (2008). *A conversão de registros de representações semióticas no estudo de sistemas de equações algébricas lineares*. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Pará, Pará.

Pochulu, M. D. (2004). Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matematica en alumnos que ingresan a la universidad. *Revista Iberoamericana de Educación*, 35(4).

A EXPLORAÇÃO DA VARIAÇÃO DE QUANTIDADES: UM ESTUDO COM ALUNOS DO 4.º ANO DE ESCOLARIDADE[25]

Célia Mestre

Agrupamento de Escolas Romeu Correia, Almada

Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

celiamestre@hotmail.com

Hélia Oliveira

Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

hmoliveira@i.e.ul.pt

Resumo

Nesta comunicação apresenta-se um estudo inserido numa investigação mais ampla de implementação de uma experiência de ensino em que se pretende desenvolver o pensamento algébrico de alunos de uma turma do 4.º ano de escolaridade. O objetivo particular desta comunicação é analisar a forma como os alunos reconhecem e representam quantidades variáveis e descrevem as relações entre elas. A recolha de dados incide sobre a realização de uma tarefa em aula, tendo sido usados para análise as fichas de trabalho dos alunos e os momentos de discussão coletiva. Conclui-se que os alunos conseguiram reconhecer e representar as quantidades variáveis e as relações entre elas usando a linguagem natural e outras representações como gráficos, tabelas e linguagem simbólica.

Palavras-chave: Pensamento algébrico, variação de quantidades, representação

Introdução

O Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) está em sintonia com as recentes tendências internacionais que defendem a introdução ao pensamento algébrico desde os primeiros anos de escolaridade, permitindo a construção de uma base sólida centrada, por exemplo, nos números e nas suas propriedades que cimente o trabalho posterior com os símbolos e expressões algébricas e também na experiência sistemática com padrões que poderá vir a desenvolver a compreensão da noção de função.

O trabalho de investigação em curso, no qual se integra esta comunicação, tem como objetivo geral compreender como se desenvolve o pensamento algébrico dos alunos de uma turma de 4.º ano de escolaridade. Em particular, esta comunicação tem como

[25] Trabalho realizado no âmbito do Projeto P3M - *Práticas Profissionais de Professores de Matemática*, apoiado pela FCT - Fundação para a Ciência e Tecnologia (contrato PTDC/CPE-CED/098931/2008).

objetivo analisar a forma como os alunos reconhecem e representam quantidades variáveis e as relações entre essas variáveis.

O desenvolvimento do pensamento algébrico

O pensamento algébrico pode ser encarado como "um processo em que os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de exemplos particulares, estabelecem essa generalização através do discurso da argumentação, e expressam-na gradualmente de uma forma simbólica apropriada à sua idade" (Blanton & Kaput, 2005, p. 413). Tendo em conta a definição de pensamento algébrico apresentada por Kaput (2008), Blanton (2008) salienta as duas vertentes que considera essenciais para uma compreensão mais abrangente desse conceito: a aritmética generalizada e o pensamento funcional. Enquanto a primeira se prende com a utilização da aritmética para desenvolver e expressar generalizações, a segunda consiste na identificação de padrões numéricos e geométricos para descrever relações funcionais.

Na perspetiva de Warren e Cooper (2005), o pensamento funcional pode ser entendido como o pensamento relacional que se foca nas relações entre duas ou mais quantidades que variam simultaneamente. Assim, as noções de relação e de transformação são fundamentais para o conceito de função. Neste sentido, o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) defende que a noção de variação deverá ser trabalhada desde muito cedo na escolaridade, sendo essencial para a construção da noção de função. Assim, os alunos podem começar por descrever a variação qualitativa – "Fiquei mais alto durante o verão", por exemplo – e mais tarde, a variação quantitativa – "Cresci 5 cm ao longo do ano passado".

Assentes no pressuposto de que o conceito de função necessita de um longo período para a sua compreensão, os estudos longitudinais realizados por Carraher, Martinez & Schliemann (2008), com alunos com idades compreendidas entre os 8 e os 11 anos, evidenciam como estes alunos são capazes de (a) representar e compreender o significado de variáveis; (b) evoluir de um pensamento sobre relações com números e medidas particulares para um pensamento sobre relações entre um conjunto de dados de números e medidas; (c) passar de respostas meramente de cálculo numérico para descrever e representar relações entre variáveis; (d) construir e interpretar gráficos de funções lineares e não lineares; (e) resolver problemas algébricos usando múltiplas representações como tabelas, gráficos e equações; (f) resolver equações com variáveis em ambos os lados da igualdade; (g) interrelacionar diferentes sistemas de representação de funções.

A tarefa que se apresenta nesta comunicação é adaptada de um estudo de Carraher, Schliemann e Brizuela (2000), realizado com alunos de nove anos de idade. Nesse estudo, os autores aplicaram um problema sobre diferenças de alturas entre três crianças, sem revelarem a altura de cada uma delas (Figura 1), com o objetivo de impelir os alunos a concentrarem-se nas relações aditivas.

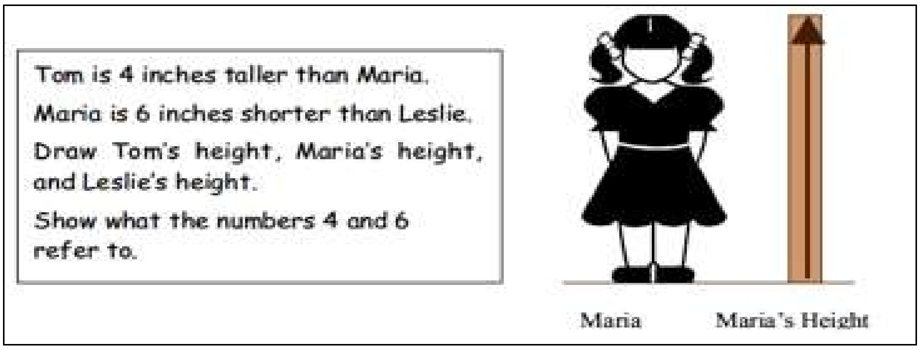


Figura 1 - Enunciado do problema do estudo de Carraher, Schliemann e Brizuela (2000).

Os resultados do estudo mostraram que, embora os autores considerassem o problema pela sua multiplicidade de soluções, inicialmente, os alunos procuraram encontrar uma solução única. Assim, alguns alunos interpretaram os números referidos no enunciado como sendo a altura das crianças e outros adicionaram os valores 4 e 6 para obterem a altura da terceira criança. Carraher, Schliemann e Brizuela (2001) consideraram esse facto compreensível, tendo em conta o hábito de os alunos resolverem problemas aplicando as operações e os cálculos sem prestarem atenção ao contexto ou às relações envolvidas. Na representação de cada uma das alturas através de um gráfico com barras, 12 alunos, num total de 18, apresentaram valores particulares. Em apenas 7 dessas 12 respostas os alunos respeitaram as diferenças de alturas referidas no enunciado do problema. E apenas 6 dos 18 alunos consideraram várias soluções possíveis para as alturas das crianças. A atribuição de valores particulares para as alturas de cada uma das crianças só foi esclarecida quando foi introduzida uma tabela na exploração da tarefa. Nessa altura, os alunos conseguiram aceitar com naturalidade a multiplicidade de soluções possíveis e reconhecer que todas elas respeitavam a diferença de alturas enunciada no problema. Desta forma, Carraher, Schliemann e Brizuela (2000) consideram que a tabela permitiu aos alunos o acesso à estrutura das relações matemáticas envolvidas no problema. Posteriormente, os alunos conseguiram representar simbolicamente as relações, considerando os autores que a notação algébrica permitiu tornar a generalização mais explicita. Em suma, os autores concluem que a exploração desta tarefa permitiu que os alunos atendessem às relações aditivas numa perspectiva mais algébrica, por envolver quantidades variáveis que dificultavam o recurso imediato ao cálculo.

De acordo com Kaput (2008) o pensamento algébrico "é composto por processos complexos de simbolização que servem o propósito da generalização e do raciocínio com generalizações" (p. 9). Desta forma, Kaput, Blanton e Moreno (2008) consideram a generalização e a simbolização como processos estritamente relacionados, referindo que a simbolização ao serviço da generalização permite uma expressão unificadora, ou seja, uma forma de unificar a multiplicidade.

Metodologia do estudo

Opções metodológicas

O design do estudo segue de perto o que Gravemeijer e Cobb (2006) denominam como "experiência de ensino em sala de aula", que agrega simultaneamente o desenvolvimento de processos de planeamento e ensino, assim como investigação sobre a aprendizagem e desenvolvimento dos alunos num contexto social, a sala de aula, deste modo, procura ser, simultameamente, educativa e científica (Kelly, 2003).

Uma característica distintiva deste tipo de abordagem é a rutura com a diferenciação entre professor e investigador (Molina, 2006), sendo que em muitos casos o investigador assume o papel de professor, tal como sucedeu no presente estudo. Refira-se que a investigadora é professora de 1.º Ciclo na mesma escola da turma onde se implementa a experiência de ensino e que, anteriormente a esta investigação, já mantinha um contacto direto com a professora titular da turma e os alunos, nomeadamente a partir da coordenação de projetos.

Esta comunicação foca-se numa tarefa, envolvendo a exploração de quantidades variáveis e interrelacionadas entre si. Para recolha dos dados, foi feita uma gravação em formato vídeo da aula e foram analisados os registos de trabalho de todos os pares de alunos e os momentos de discussão coletiva das diferentes partes da tarefa. Nesta comunicação são apresentados alguns registos dos trabalhos dos alunos e pequenos excertos das discussões coletivas. A aula foi dinamizada pela investigadora deste estudo (primeira autora deste artigo), tendo a professora titular de turma assumido um papel de coadjuvante, apoiando os alunos nos diferentes pares. Na análise dos dados procurou-se evidenciar a forma como os alunos reconheceram e representaram as quantidades variáveis e as relações entre elas.

A experiência de ensino

A experiência de ensino decorreu durante o ano letivo de 2010/11 e foram desenvolvidas quarenta e duas tarefas, organizadas em cinco sequências de acordo com os temas e tópicos matemáticos da planificação anual definida pela professora titular de turma, respeitando a perspetiva de conceber o pensamento algébrico como um *fio condutor curricular* (NCTM, 2000), numa lógica de integração curricular.

A turma onde decorreu a experiência de ensino era constituída por 19 alunos, 7 raparigas e 12 rapazes, com uma média de nove anos de idade. Embora a turma estivesse a trabalhar de acordo com o PMEB (ME, 2007) desde o 3.º ano de escolaridade, no início da experiência de ensino os alunos revelavam algumas dificuldades na exploração de questões que envolviam o sentido de número, privilegiando quase exclusivamente a utilização dos algoritmos na sua resolução.

As tarefas centraram-se na exploração de situações que envolviam o pensamento relacional e o pensamento funcional. A exploração destas tarefas tinha como objetivos a identificação de regularidades e expressão da generalização através da linguagem natural, e a iniciação de um percurso em direção à simbolização através da passagem da linguagem natural para a linguagem matemática. A linguagem simbólica foi introduzida a partir da décima tarefa da experiência de ensino com a utilização de símbolos não numéricos como forma de tradução da linguagem natural para a linguagem simbólica, representando "qualquer número" (Mestre & Oliveira, 2012).

A tarefa apresentada nesta comunicação foi a primeira tarefa da quarta sequência e a vigésima terceira da experiência de ensino. As duas tarefas anteriores foram as primeiras em que os alunos foram confrontados com a noção de quantidades variáveis, trabalhando a situação de dois números desconhecidos interrelacionados numa igualdade (Mestre & Oliveira, 2011). A tarefa que se apresenta, intitulada "Comparando alturas"[26], enquadrava-se no tema Medidas, e com a sua exploração pretendia-se que os alunos fossem capazes de: 1) reconhecer quantidades variáveis; 2) reconhecer a relação

[26] Tarefa adaptada de Carraher, Schliemann e Brizuela (2000).

entre as quantidades variáveis; 3) descrever e representar a relação entre as quantidades variáveis.

Apresentação dos resultados

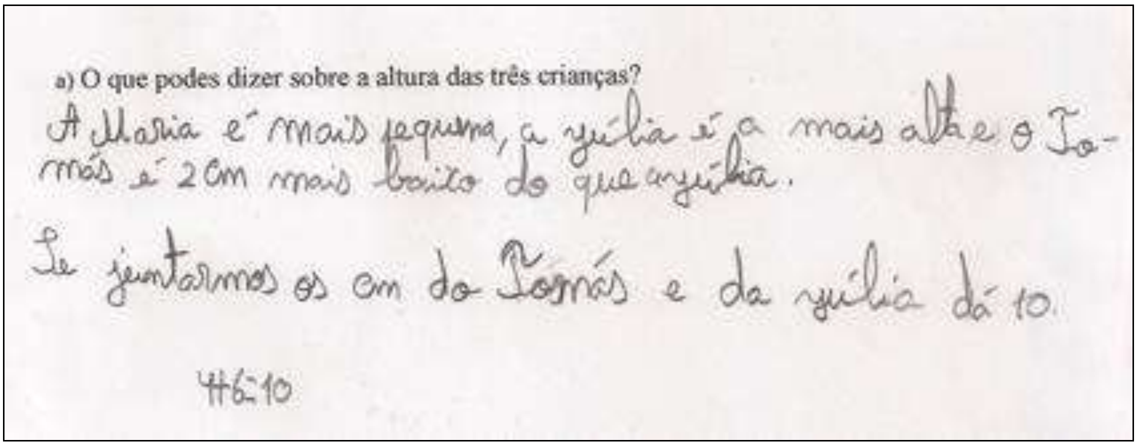
A aula começou com a interpretação coletiva do enunciado da tarefa (figura 2). Nesse momento, a investigadora procurou que os alunos compreendessem que não era possível saber a altura das crianças.

Figura 2 - Enunciado da tarefa, alínea a).

Após a leitura do enunciado, os alunos começaram a manifestar-se e Rita refere "Mas não sabemos quanto é que [a Maria] mede". Neste momento, a investigadora questiona os alunos sobre se sabem quanto mede cada uma das crianças e eles referem que não sabem. João questiona "Temos que adivinhar?" e a investigadora refere que embora não tenham que adivinhar, há coisas que já sabem sobre a altura das crianças. O excerto seguinte mostra alguns dos comentários produzidos pelos alunos:

> Investigadora - Mas ali alguma coisa que sabemos. O que é que sabemos?
>
> Fábio - A diferença de comprimentos.
>
> Rita - Que o Tomás é mais alto 4 cm do que a Maria.
>
> Investigadora - E sabemos mais o quê?
>
> Miguel - Que a Maria é 6 cm mais baixa do que a Júlia.
>
> Fábio - Mas não sabes a altura delas.

Em seguida, os alunos trabalharam a pares na primeira questão. Nenhum dos nove pares atribuiu valores particulares às alturas das crianças e todos estabeleceram a correta diferença entre as alturas. No entanto, um dos pares refere na sua resposta que "se juntarmos os cm do Tomás e da Júlia dá 10", apresentando ainda o cálculo "4+6=10".


a) O que podes dizer sobre a altura das três crianças?

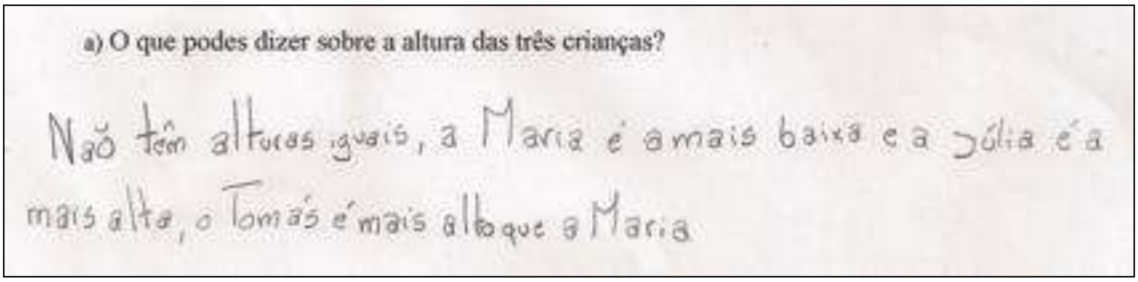
A Maria é mais pequena, a Júlia é a mais alta e o Tomás é 2cm mais baixo do que a Júlia.

Se juntarmos os cm do Tomás e da Júlia dá 10.

4+6=10

Figura 3 - Resposta à aliena a) feita pelo par Diogo e Daniel.

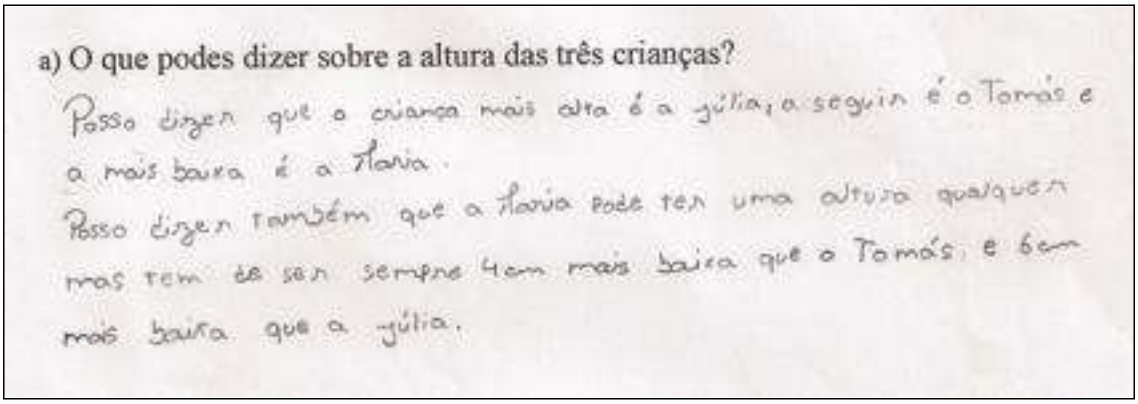
Todos os pares identificaram a criança mais alta, a mais baixa e a que tinha uma altura intermédia. A figura seguinte é exemplificativa das respostas mais comuns que surgiram nos pares.


a) O que podes dizer sobre a altura das três crianças?

Não têm alturas iguais, a Maria é a mais baixa e a Júlia é a mais alta, o Tomás é mais alto que a Maria

Figura 4 - Resposta à alínea a) feita pelo par Fábio e António.

Das respostas dos nove pares destaca-se uma que evidencia já uma tentativa de generalização da relação entre as alturas, expressa em linguagem natural. De facto, estes alunos referem-se à altura de uma das crianças como podendo ser "uma altura qualquer", desde que obedeça aos critérios definidos pela diferença das alturas das três crianças.


a) O que podes dizer sobre a altura das três crianças?

Posso dizer que o criança mais alta é a júlia, a seguir é o Tomás e a mais baixa é a Maria.

Posso dizer também que a Maria pode ter uma altura qualquer mas tem de ser sempre 4cm mais baixa que o Tomás e 6cm mais baixa que a júlia.

Figura 5 - Resposta à alínea a) feita pelo par Matilde e André.

Após o momento de resolução a pares, foi feita a discussão coletiva desta questão. Diferentes pares apresentaram as suas respostas e diversos alunos colocaram questões manifestando a sua opinião ou colocando dúvidas. Nessa altura, Matilde partilha o que tinha descoberto no par levando a que outra aluna também consiga expressar a relação entre as alturas de forma mais geral.

> Matilde - A Maria pode ter uma altura qualquer, mas tem de ter 4 cm a menos do que o Tomás. E a Maria tem de ter sempre 6 cm a menos do que a Júlia. Pode ter uma altura qualquer.
>
> Rita - Qualquer que seja o tamanho que o Tomás tenha, tem de ser sempre menos 2 do que a Júlia. Depois, tem de ter sempre mais 4 do que a Maria. E que o Tomás não é tão alto como a Júlia nem tão baixo como a Maria. Está entre os dois.

Em seguida, os pares resolveram a questão seguinte que propunha a representação das alturas das crianças através da construção de um gráfico de barras. Dos nove pares, quatro usaram valores particulares para cada uma das alturas. Apenas um desses pares não consegue respeitar a diferença nos valores que atribui às alturas das três crianças. Ainda nesse grupo de alunos, um dos pares torna explicito que se trata de um exemplo, mostrando que compreende como as alturas apresentadas podem não ser consideradas definitivas ou a "resposta certa".

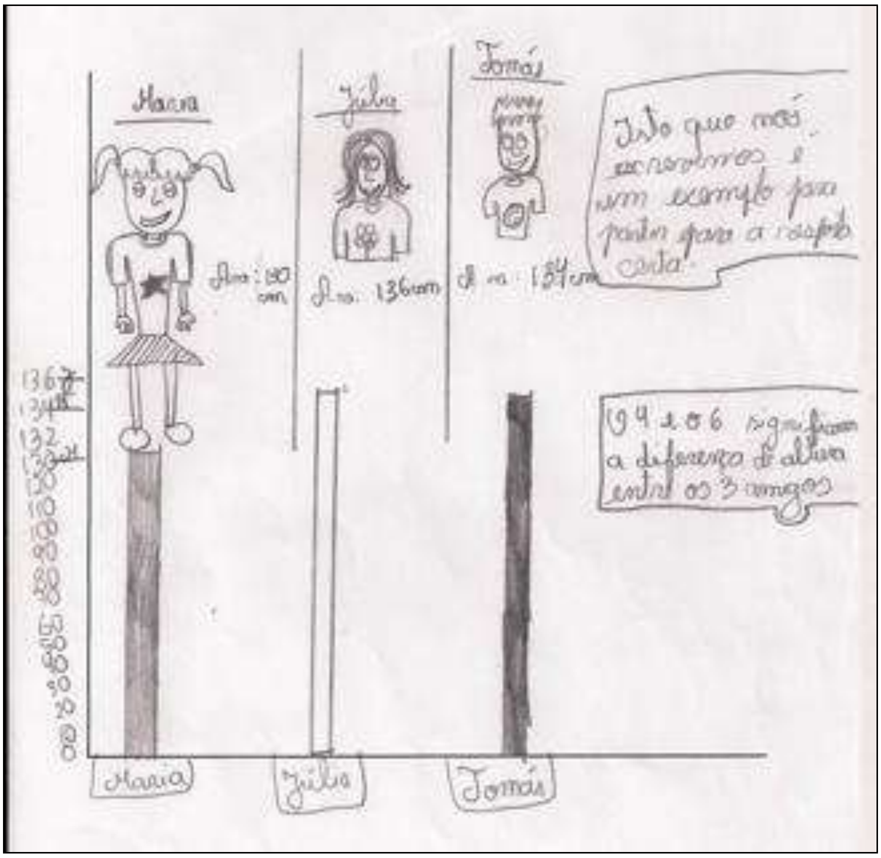


Figura 7 - Resposta à alínea b) feita pelo par João e Lawry.

Os restantes cinco pares não atribuem valores particulares para as alturas das crianças. A forma como representam o que significam os valores 4 e 6 foi distinta. Deste modo, coletivamente foram discutidas as formas de representação dos valores 4 e 6 que alguns desses pares apresentaram. Assim, o par Matilde e André foi o primeiro a apresentar a sua forma de resolução.

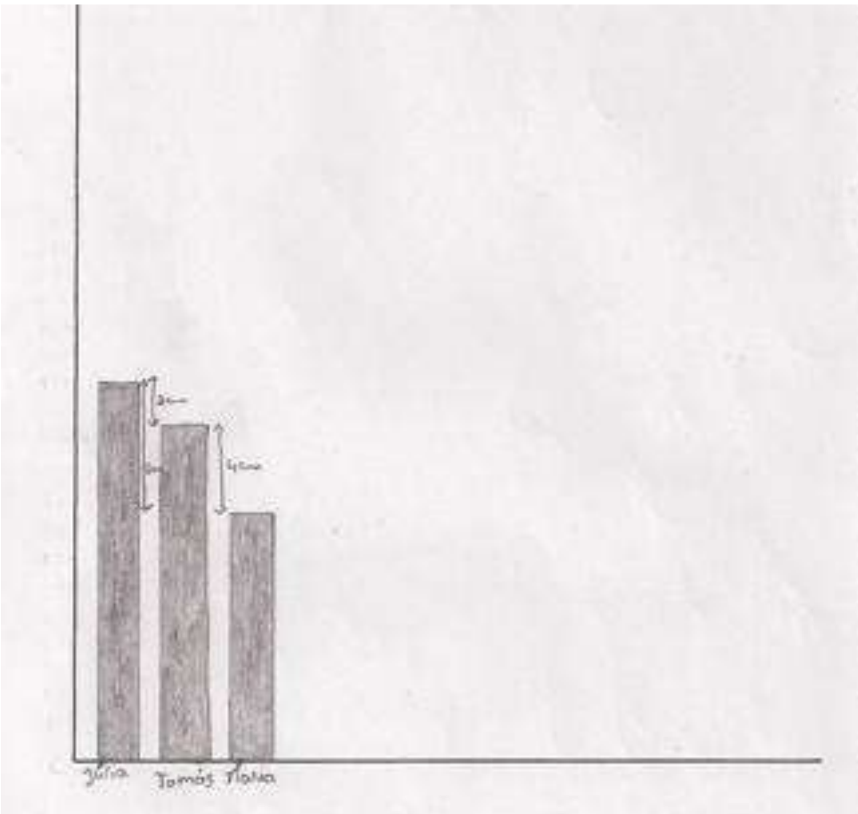


Figura 8 - Resposta à alínea b) feita pelo par Matilde e André.

A apresentação da resolução deste par impulsionou a discussão sobre a representação do significado dos valores 4 e 6. Outro par tenta completar a resolução dos colegas, acrescentando o que tinham colocado no eixo vertical do seu gráfico.

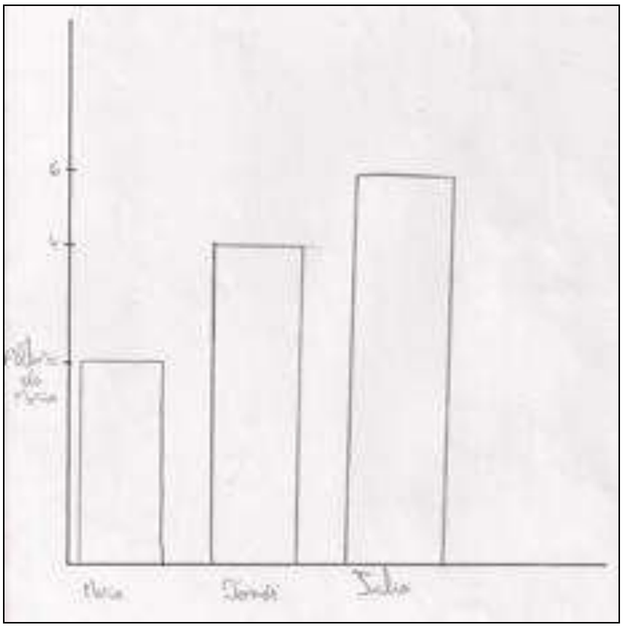


Figura 9 – Resposta à alínea b) feita pelo par Miguel e Elisabete.

A participação deste par conduz a turma a uma discussão sobre a forma correta de representar os valores 4 e 6. O excerto seguinte ilustra a primeira parte dessa discussão.

> Miguel - A altura da Maria não se sabe qual é, mas da altura da Maria para a altura do Tomás vai 4 cm e da altura da Maria para a altura da Júlia é de 6 cm.
>
> Matilde - Mas isso é um bocado estranho porque ali na Júlia parece que ela tem 6 cm. E o Tomás parece que tem 4 cm.
>
> Investigadora - Então, o que é que podemos fazer?
>
> Caleça - Mais.
>
> Investigadora - Mais o quê?
>
> Caleça - A altura da Maria mais os 4 cm dá a altura do Tomás.
>
> Investigadora - Então, ali, em vez de pormos só 4 cm...
>
> Caleça - Pomos mais 4 cm.
>
> Investigadora - E assim faz mais sentido, Matilde?
>
> Matilde - Sim.

Tendo em conta a contribuição dos diferentes alunos, o gráfico é completado, acrescentado o sinal de adição antes dos valores 4 e 6. Em seguida, os alunos referem que os valores "+ 4 cm" e "+ 6 cm" estão relacionados com a altura da Maria. Isto produz mais uma modificação no gráfico, resultando o produto final mostrado na figura seguinte.

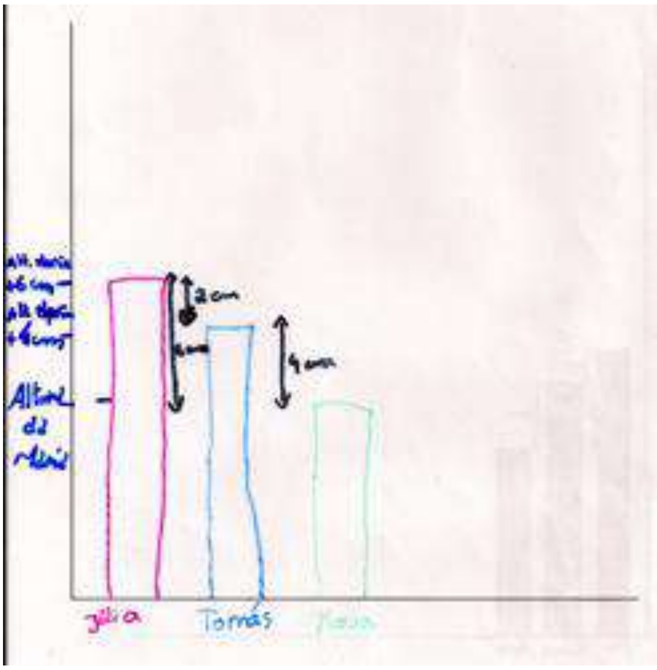
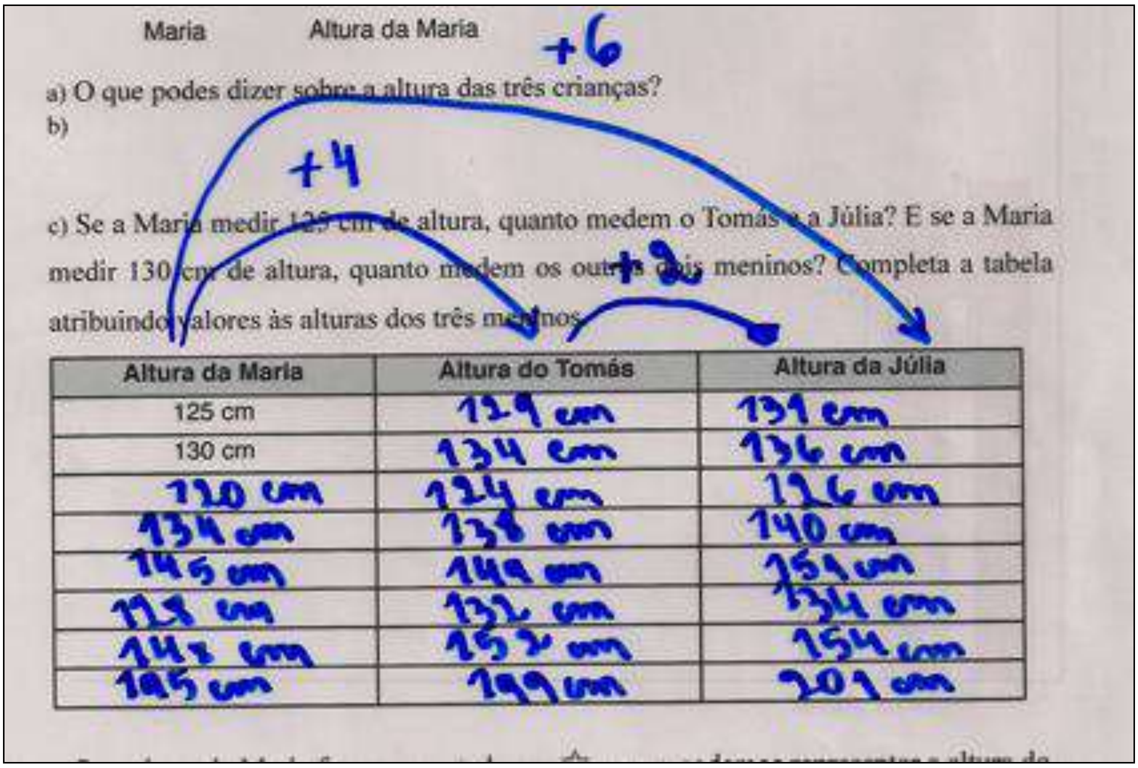


Figura 10 - Construção final do gráfico.

Finalmente, os alunos concluem que, nessa representação, não seriam necessárias as setas colocadas inicialmente. Na representação construída coletivamente, os alunos mostram a representação das quantidades variáveis (alturas das três crianças) e ainda a relação entre as alturas do Tomás e da Júlia com a altura da Maria.

Na questão seguinte era solicitado aos alunos que completassem uma tabela colocando valores nas alturas de cada uma das crianças. Depois de completaram a tabela a pares, foi feita a discussão coletiva que permitiu a apresentação das relações entre as diferentes alturas através de um diagrama de setas.


Maria Altura da Maria

a) O que podes dizer sobre a altura das três crianças?

b)

c) Se a Maria medir 125 cm de altura, quanto medem o Tomás e a Júlia? E se a Maria medir 130 cm de altura, quanto medem os outros dois meninos? Completa a tabela atribuindo valores às alturas dos três meninos.

+6

+4

+2

Altura da Maria	Altura do Tomás	Altura da Júlia
125 cm	129 cm	131 cm
130 cm	134 cm	136 cm
120 cm	124 cm	126 cm
134 cm	138 cm	140 cm
145 cm	149 cm	151 cm
128 cm	132 cm	134 cm
148 cm	152 cm	154 cm
195 cm	199 cm	201 cm

Figura 11 - Tabela completada coletivamente.

Na última questão da tarefa era solicitado aos alunos que traduzissem em linguagem simbólica a generalização das alturas do Tomás e da Júlia em relação com a altura da Maria. Para tal propunha-se que representassem a altura da Maria com uma estrela e definissem a altura das outras duas crianças.

d) Se a altura da Maria for representada por ☆, como podemos representar a altura do Tomás? E a altura da Júlia?

Figura 12 - Enunciado da tarefa, alínea d).

Tendo em conta a fase do percurso, ainda inicial, em que os alunos se encontram relativamente à linguagem simbólica, esta questão revestia-se de particular dificuldade. Assim, apenas quatro dos nove pares apresentaram a representação simbólica correta. Um dos pares foi apresentar à turma a forma como resolveu.

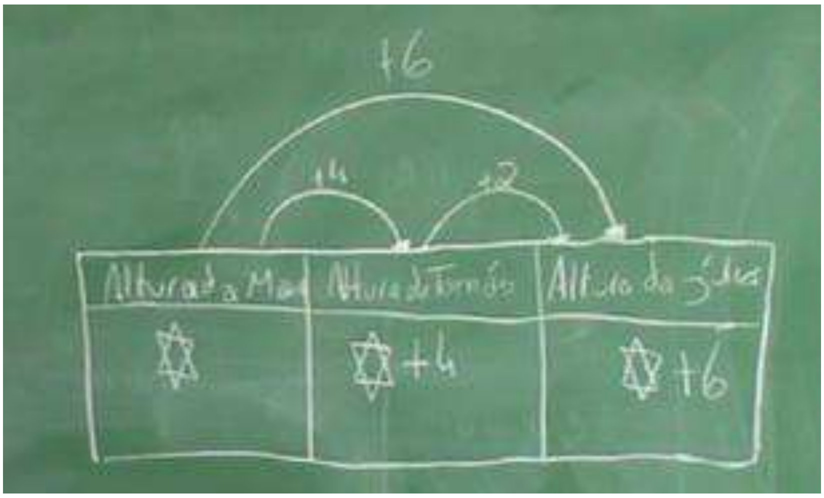


Figura 13 - Resolução da alínea d) feita pelo par Fábio e António.

A partir da utilização da tabela e recorrendo a exemplos particulares, os alunos discutiram esta forma de representação e as outras que tinham sido apresentadas por outros pares. Assim, puderam confirmar qual a forma de representação correta. O excerto seguinte mostra as conclusões que alguns alunos chegaram a partir desta exploração coletiva.

> Caleça - Então, se a altura da Maria for representada por uma estrela, a altura do Tomás vai ser representada por uma estrela mais quatro e a altura da Júlia vai ser uma estrela mais seis.
>
> Investigadora - Exatamente. Porque é que eu uso uma estrela?
>
> Fábio - Porque não sabemos a altura.
>
> Caleça - Porque é uma altura qualquer.
>
> Investigadora - Porque é que nós usamos a estrela? Para representar o quê?
>
> Fábio - Um número qualquer.
>
> Caleça - O ponto de interrogação ou uma estrela ou um símbolo qualquer é um número qualquer.
>
> Matilde - Nós não sabemos esse número.

Considerações finais e conclusões

Tendo em conta a importância da noção de variação de quantidades para o desenvolvimento do pensamento algébrico, a tarefa apresentada caracteriza-se pelas suas potencialidades por impelir os alunos a concentrarem-se nas relações aditivas. Embora o conceito de variação de quantidades já tenha sido explorado nas duas tarefas anteriores da experiência de ensino (Mestre & Oliveira, 2011), o contexto desta tarefa foi diferente por permitir aos alunos explorarem a variação de alturas e das relações entre elas, permitindo inclusivamente outras formas de representação como a introdução de um gráfico com barras. Por outro lado, o conceito de variação necessita de um longo percurso para a sua maturação (Carraher, Martinez & Schliemann, 2008; NCTM, 2000).

Analisando a forma como, inicialmente, os alunos reconheceram as quantidades variáveis envolvidas no problema apresentado, pode considerar-se que, de forma geral, estes aceitaram com relativa facilidade o facto de não ser possível determinar concretamente a altura das três crianças do problema. No entanto, e tal como aconteceu no estudo de Carraher, Schliemann e Brizuela (2000) um par de alunos tentou efetuar cálculos com os valores referidos no enunciado do problema, embora essa situação tenha ocorrido em número significativamente inferior ao referido nesse estudo. Nessa primeira questão, apenas um dos pares de alunos conseguiu expressar as relações envolvidas de forma geral. Posteriormente, na discussão coletiva, essa generalização tornou-se acessível a um maior número de alunos.

No que concerne à representação em gráfico, um maior número de alunos revelou dificuldades. De facto, essa questão revestia-se de maior complexidade por ser a primeira vez que os alunos se confrontavam com essa forma de representação. Assim, e embora não o tenham feito na questão anterior, quatro dos nove pares atribuíram valores específicos para as alturas. No entanto, e a partir da resolução dos pares que representaram corretamente, foi possível a construção coletiva de um gráfico num processo de negociação de significados.

Ainda relativamente às formas de representação usadas, a introdução da tabela permitiu uma maior visibilidade da multiplicidade de valores possíveis e a confirmação das relações encontradas através de exemplos particulares. A tabela parece ter facilitado também a expressão da generalização em linguagem simbólica. Esse facto parece explícito na utilização de uma tabela e na repetição do esquema de setas que o par apresentou à turma. Também os comentários no final da discussão coletiva mostram como os alunos se encontram num processo de atribuição de sentido à linguagem simbólica.

Embora estes alunos se encontrem ainda num processo inicial de desenvolvimento do pensamento algébrico, os resultados aqui apresentados estão de acordo com os do estudo de Carraher, Martinez & Schliemann (2008). Assim, estes alunos foram capazes de reconhecer e representar quantidades variáveis e as relações entre elas usando a linguagem natural e outras representações como gráficos, tabelas e linguagem simbólica. Saliente-se ainda que, para além das potencialidades da tarefa aqui descrita, deve ser considerada também a forma como foi feita a sua exploração na aula.

Referências bibliográficas

Blanton, M. L. (2008). *Algebra and the elementary classroom. Transforming thinking, transforming practice*. Heinemann: Portsmouth, NH.

Blanton, M. L. & Kaput, J. J. (2005). Helping elementary teachers build mathematical generality into curriculum and instruction. *ZDM Mathematics Education 37*(1), 34-42.

Kelly, A. E. (2003). Research as design. *Educational Researcher, 32*(1), 3-4.

Carraher, D., Brizuela, B. M., & Earnest, D. (2001). The reification of additive differences In early algebra. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.) *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference* (vol. 1). The University of Melbourne, Australia.

Carraher, D., Schliemann, A.D., & Brizuela, B. (2000). Early algebra, early arithmetic: Treating operations as functions. Plenary address. *XXII Meeting of the Psychology of Mathematics Education*, North American Chapter, Tucson, AZ. Available in CD.b

Carraher, D. W., Martinez, M. V. & Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education*, 40, 3-22.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades*. (pp. 5-17). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. J., Blanton, M. L. & Moreno, L. (2008). Algebra from a symbolization point of view. In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.). *Algebra in the early grades*. (pp. 19-55). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Mestre, C. & Oliveira, H. (2011). Compensação e variação: um estudo sobre o pensamento relacional de alunos do 4.º ano de escolaridade. In M. H. Martinho, R. A. T. Ferreira, I. Vale, & J. P. Ponte, (Eds.), *Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 195-218). Póvoa do Varzim, Portugal: EIEM.

Mestre, C. 6 Oliveira, H. (2012). A mobilização da capacidade de generalização através da exploração de estratégias de cálculo: um estudo com alunos do 4.º ano. *Interações 20*, 9-36.

Ministério da Educação. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa. Acedido em 12 de janeiro, 2008 em http://sitio.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo de igual en alumnos de tercero de educación primaria* (Tese de doutoramento). Universidade de Granada.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspetive. In J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney, & N. Nieveen (Eds.), *Educational Design Research* (pp. 45-85). London: Routledge.

Warren, E. & Cooper, T. (2005). Young children's ability to use the balance strategy to solve for unknowns. *Mathematics education research journal*, 17 (1), 58-72.

O RECURSO A DIFERENTES REPRESENTAÇÕES NO ENSINO DAS FUNÇÕES COM O APOIO DA TECNOLOGIA

Helena Rocha

Bolseira da FCT – MEC, UIDEF – IEUL

hcrocha@ie.ul.pt

Resumo

A tecnologia é geralmente apontada como uma via para o fácil acesso a diferentes representações, potenciando a sua articulação e integração. Neste artigo apresento alguns resultados de um estudo sobre a integração da calculadora gráfica no ensino das funções, focando especificamente a integração das diferentes representações disponibilizadas pela máquina. Neste sentido procuro caraterizar o equilíbrio que duas professoras do ensino secundário estabelecem entre as diferentes representações, a articulação que fazem destas e o aproveitamento que fazem das potencialidades da tecnologia a este nível. As conclusões alcançadas apontam para uma tendência destas professoras para privilegiar as representações algébrica e gráfica; para uma articulação mais rígida entre as diferentes representações, no caso de uma das professoras, e mais flexível e dinâmica, no caso da outra professora; e para uma aparente relação do adiamento do trabalho em torno da representação tabular com as caraterísticas da tecnologia.

Palavras-chave: diferentes representações, calculadora gráfica, ensino das funções.

As diferentes representações das funções na calculadora gráfica

Uma das caraterísticas da calculadora gráfica é permitir aceder a múltiplas representações (Heid, 1995; Kaput, 1992), o que torna possível estabelecer ou reforçar ligações de uma forma que não seria possível sem o apoio da tecnologia (Cavanagh & Mitchelmore, 2003), articulando as representações numérica ou tabular, simbólica ou algébrica e gráfica (Goos & Benninson, 2008) e potenciando o desenvolvimento de uma melhor compreensão das funções, da noção de variável e da capacidade de resolver problemas (Bardini, Pierce, & Stacey, 2004; Burril, 2008). Como refere Kaput (1989), a conexão entre diferentes representações cria uma visão global, que é mais do que a junção do conhecimento relativo a cada uma das representações e a tecnologia propícia uma exploração plena das abordagens numérica e gráfica de uma forma que até então não era possível, favorecendo assim uma abordagem integrada das diferentes representações e consequentemente o desenvolvimento de uma compreensão mais profunda. O recurso a múltiplas representações tem assim o potencial de tornar a aprendizagem significativa e efetiva (Ford, 2008).

As três representações disponibilizadas pela calculadora e usualmente utilizadas no estudo das funções têm no entanto caraterísticas e potencialidades diferentes, como referem Friedlander e Tabach (2001). Segundo estes autores, a representação numérica permite aos alunos o recurso a objectos familiares para demonstrar relações e analisar casos específicos. Trata-se, no entanto, de uma representação que carece de generalidade, o que pode levar a que determinados aspetos importantes não sejam detetados ou resultar num foco excessivo em casos concretos. Como tal, a sua utilidade é, por vezes, bastante limitada.

Por seu turno, a representação gráfica proporciona uma representação visual, apresentando um conjunto de casos específicos mais vasto e carateriza-se por permitir uma utilização que transcende os conhecimentos algébricos dos alunos, uma vez que a abordagem gráfica é mais universal que a algébrica, tornando possível encontrar soluções quando não se conhece uma abordagem analítica ou mesmo quando esta não existe (Friedlander & Tabach, 2001) (por exemplo, encontrar os zeros duma função polinomial independentemente do grau do respetivo polinómio). Sendo os gráficos uma representação mais intuitiva, as soluções obtidas por esta via podem, contudo, carecer de exatidão e sofrer a influência de fatores externos como os efeitos da escala utilizada sobre a interpretação que é feita (que podem mesmo ocultar, por exemplo, a existência de um zero). À semelhança do que sucede com a representação numérica também na representação gráfica apenas uma parte do domínio está visível (embora uma parte tendencialmente mais ampla), pelo que a utilidade desta representação depende também muito das circunstâncias.

Já a representação algébrica é concisa, geral e efetiva na apresentação de regularidades e modelos, sendo frequentemente a manipulação algébrica o caminho mais eficaz para formular generalizações e resultados (Friedlander & Tabach, 2001). Ainda assim, o recurso exclusivo a esta representação pode dificultar a compreensão das noções matemáticas e causar dificuldades nas interpretações dos alunos. Esta dificuldade é, aliás, apontada por Quesada e Dunlap (2008), que sugerem o recurso às capacidades numéricas e gráficas das calculadoras como forma de, tirando partido das diferentes representações, conseguir uma introdução dos conceitos mais próxima daquela como foram desenvolvidos, o que consequentemente poderá facilitar a sua compreensão por parte dos alunos. É também nesta perspetiva que Coulombe e Berenson (2001) referem o contributo que a fluência com múltiplas representações de relações matemáticas pode dar ao desenvolvimento do pensamento algébrico. Com efeito, não só é frequente que as ideias matemáticas complexas (como é o caso da noção de função) não possam ser expressas recorrendo exclusivamente a uma representação, como é ainda mais comum que não seja fácil compreendê-las dessa forma (Asp, Dowsey, & Stacey, 1993). O recurso a diferentes representações permite ao aluno compreender numa outra forma aquilo que não era possível compreender na representação inicial ou, como diz Kaput (1992), é fundamental para a compreensão do conceito. E Ford (2008) realça que é essa a importância de trabalhar com múltiplas representações. Não se trata de recorrer a elas simplesmente porque a tecnologia facilita o acesso, mas sim de o fazer porque é necessário para a compreensão dos alunos.

Apesar da importância de trabalhar com diferentes representações e desse trabalho ser muito facilitado pela utilização da calculadora gráfica, os alunos têm dificuldade em fazê-lo (Billings & Klanderman, 2000; Kieran, 2007; Ramos & Raposo, 2008; Semião, 2007; Silva, 2009) e os professores não têm dedicado a necessária atenção à flexibilidade necessária para passar de uma representação para outra e para articular a informação veiculada por estas (Even, 1998). Com efeito, embora exista alguma preocupação, por parte dos professores, em articular e equilibrar o recurso a diferentes representações, Molenje e Doerr (2006) constataram que o recurso às representações algébricas e gráficas são dominantes relativamente à representação numérica. Além disso, quando os professores efetivamente recorrem às três representações tende a existir um padrão na forma como o fazem. Assim, alguns dos professores envolvidos no estudo tendem a recorrer primeiro à representação algébrica, passando depois para a gráfica e, por fim, para a numérica, enquanto outros tendem a passar da representação algébrica para a numérica e só depois para a gráfica. Esta sequência rígida adotada pelo professor tende a ser copiada pelos alunos (Barling, 1994; Rocha, 2000) que, consequentemente, veem dificultado o desenvolvimento da desejada fluência entre as diferentes representações.

A importância da fluência representacional, segundo Zbiek et al. (2007), reside na sua aptidão para proporcionar o desenvolvimento da compreensão matemática, razão pela qual esta não se restringe à capacidade de passar de uma representação a outra, transportando o conhecimento de uma entidade para a outra e articulando-o com o novo conhecimento disponibilizado pela nova representação. A fluência representacional envolve também o conhecimento de qual a representação mais adequada para em determinadas circunstâncias ilustrar determinado conceito ou explicar determinada noção e de como as interligar de formas relevantes para fundamentar determinada afirmação. Trata-se assim de um conhecimento fundamental para o professor, mas trata-se também de um conhecimento com implicações sobre as aprendizagens dos alunos, em particular, quando a fluência entre as diferentes representações é alvo de alguns condicionalismos ou restrições. Como referem Almeida e Oliveira (2009), o trabalho em torno das diferentes representações com uma forte ênfase na conversão entre estas é fundamental para a compreensão do tema pelos alunos e para evitar a compartimentação do conhecimento. É assim importante, como reconhecem Molenje e Doerr (2006), que o professor tenha consciência das opções que faz a este nível.

Objetivo e questões do artigo

O estudo que aqui se apresenta faz parte de uma investigação mais abrangente centrada na integração que o professor faz da calculadora gráfica na sua prática letiva. Neste artigo foco-me nas diferentes representações disponibilizadas pela calculadora gráfica, procurando caraterizar a forma como o professor as explora e integra ao longo do processo de ensino-aprendizagem das funções ao nível do ensino secundário. Mais concretamente, procuro compreender:

- que equilíbrio é estabelecido no recurso a cada uma das diferentes representações,

- como são articuladas as diferentes representações,

- como é aproveitada a facilidade de acesso a diferentes representações potenciada pela tecnologia.

Metodologia

Esta investigação adota uma abordagem de natureza qualitativa, envolvendo a realização de dois estudos de caso. Carolina e Teresa foram as duas professoras envolvidas e detinham uma longa experiência profissional que divergia significativamente quanto à experiência de utilização da calculadora e à formação realizada em torno desta tecnologia, aspetos que autores como Dunham (2000), Hoben (2002) e Power e Blubaugh (2005) consideram particularmente influentes sobre a integração da tecnologia.

A recolha de dados envolveu o acompanhamento do trabalho das professoras durante o ensino das funções com uma das suas turmas ao longo do 10.º e do 11.º ano. Neste sentido foram realizadas entrevistas semiestruturadas; observadas, para cada professora, 14 aulas no 10.º ano e 3 no 11.º ano e recolhidos diversos documentos. As entrevistas foram de diversos tipos, sendo relevantes para a parte do estudo que aqui se apresenta as que foram realizadas antes e depois de cada aula observada. Tanto as entrevistas como as aulas foram áudiogravadas. Foi ainda elaborado um diário de bordo das aulas observadas e recolhidos os enunciados de testes, as fichas de trabalho e outros materiais disponibilizados pelas professoras aos alunos. A análise de dados revestiu-se essencialmente dum caráter descritivo e interpretativo, tendo por base a análise dos elementos recolhidos. As tarefas propostas pelas professoras foram encaradas como a unidade estruturante à luz dos elementos sugeridos pelo quadro teórico.

As diferentes representações no ensino das funções

Carolina

Carolina conhece bem as três representações disponibilizadas pela calculadora (que apresentou aos alunos na aula do 10.º ano em que introduziu a máquina), utilizando frequentemente nas aulas a representação algébrica e a gráfica. Por regra, a utilização da calculadora que propõe parte de uma representação algébrica (com a introdução da expressão da função) e pretende uma representação gráfica. A partir daqui as explorações podem variar um pouco, mas não incluem o recurso à representação tabular.

Nas tarefas em que é proposto o estudo de uma família de funções, como as que colocou em torno da função afim, da função quadrática e da função módulo, o objetivo é mesmo o gráfico. Os alunos registam a expressão da função e o gráfico obtido, procurando depois elaborar uma conclusão que relacione o aspeto do gráfico com o parâmetro considerado em cada família de funções.

Noutras tarefas, como aquelas em que se pretende explorar uma situação da realidade modelada por uma função ou como na resolução de inequações, pretende-se obter diferentes informações sobre a função envolvida e é pedido à calculadora que efectue alguns cálculos, usualmente dos zeros ou extremos relativos da função ou do valor de x a que corresponde determinada imagem. Estes cálculos são efetuados com base no menu *calc*, eventualmente recorrendo primeiro a uma função constante, e são procedimentos realizados de forma relativamente automática pela máquina. Está assim presente uma representação algébrica e a passagem desta a uma representação gráfica.

O recurso ao menu *calc*, embora originando uma passagem para o lado numérico da função não consiste verdadeiramente numa passagem a outra representação, sendo mais uma leitura do gráfico efetuada pela calculadora.

Quando nalgum dos casos anteriores surgem eventuais dificuldades em compreender o que está a ser apresentado pela máquina, Carolina valoriza um recurso ao conhecimento matemático dos alunos e a outras representações, mas estas são geralmente consideradas à revelia da tecnologia, ou seja, sem qualquer recurso à máquina. Foi o que sucedeu durante o estudo do efeito da variação de parâmetros da função quadrática sobre o aspeto do gráfico. Os alunos traçam simultaneamente na máquina os gráficos de diversas funções, variando o valor do parâmetro em estudo, e perante os vários gráficos não sabem qual representa que função e, consequentemente, não conseguem perceber a relação entre o parâmetro e o aspeto do gráfico. Carolina sugere então aos alunos que calculem com papel e lápis as coordenadas de um ponto de cada função para identificar qual a expressão de que função quadrática corresponde a que parábola. Os alunos têm, no entanto, dificuldade em articular a informação disponibilizada pelas diferentes representações.

> A - Oh stora, já está. E agora?
>
> P - Então agora? Tens as coordenadas de um ponto da parábola, então qual dessas parábolas corresponde a esta expressão?
>
> A - A… qual corresponde?
>
> P - Sim, qual destas parábolas passa por esse ponto?
>
> A - Qual é que passa?... Mas é isso que eu não sei. (aula)

E estas dificuldades permanecem, como a própria professora reconhece, mesmo quando procura simplificar a questão levando os alunos a determinar a imagem de 1 e a considerar as funções definidas por x^2 e $2x^2$:

> Quer dizer, pensando eu que eles ali viam, pronto, uma imagem, então no caso do 1, era o dobro da outra. Portanto, se para o mesmo objeto uma imagem era o dobro da outra, o y=2x2 tinha que ser a que tinha uma abertura mais pequena. Eles ficam-me parados e eu não sei. Quer dizer, eu às tantas digo assim: "Meu Deus, mas o que é que se está a passar?" (entrevista pós-aula)

É igualmente uma estratégia semelhante a esta que é adotada ao estudar as famílias de funções envolvendo módulos, com a professora a incentivar os alunos a pensarem no declive das semiretas que constituem o gráfico das funções para as traçarem adequadamente no papel. Em qualquer destes casos, Carolina parte de uma representação algébrica para a gráfica, recorre a uma representação independente da calculadora para tentar compreender melhor a situação e regressa a uma representação gráfica.

Embora este seja o estilo de articulações entre as diferentes representações que usualmente é feito na aula, não é o único. Também ocorrem situações em que Carolina parte de uma representação algébrica, passa para uma gráfica e usa esta última representação para passar para uma outra representação algébrica. É o que sucede ao ponderar qual a melhor abordagem para escrever a expressão $|x^2 – 4|$ sem recorrer ao símbolo de módulo. Carolina decide optar por se apoiar numa abordagem gráfica, articulando as representações gráfica e analítica. Começa assim por pedir uma representação gráfica da função definida por $x^2 – 4$, a partir da qual pede domínio, contradomínio, zeros e vértice da parábola. Socorrendo-se da noção de módulo (o que é negativo passa a positivo) traça/justifica o gráfico de $|x^2 – 4|$. A partir daqui a expressão pretendida é escrita por observação do gráfico: $x^2 – 4$ até ao primeiro dos zeros, pois aqui a função módulo continua a ser idêntica à função quadrática; $-x^2 + 4$ entre os zeros porque a função tomava valores negativos e passou a tomar valores positivos, portanto a expressão terá que ser o simétrico da original (ou porque aqui a parábola sofreu uma inversão o que significa que a sua expressão é simétrica da inicial); e $x^2 – 4$ depois do segundo zero porque aqui a função módulo coincide mais uma vez com a função quadrática. Trata-se assim de uma abordagem que não só articula diferentes representações, como parece afastar-se de uma eventual mecanização de trabalho em torno de expressões algébricas, apoiando-se em conhecimentos previamente adquiridos pelos alunos.

Carolina indicia assim valorizar a articulação entre diferentes representações que a tecnologia vem tornar mais simples, mas privilegia o recurso às representações algébricas e gráfica, mostrando uma preferência por começar por uma representação algébrica e desta passar para a gráfica.

Teresa

A utilização da calculadora que Teresa propõe aos alunos envolve diferentes representações, mas privilegia as representações gráfica e algébrica. Algumas vezes o recurso à tecnologia parte de uma expressão algébrica, proveniente do enunciado ou de trabalho prévio realizado pelos alunos, e pretende o gráfico ou alguma informação que possa posteriormente ser obtida a partir deste. É o caso duma tarefa em que os alunos dispõem da expressão da função relativa ao voo dum avião, a partir da qual traçam o gráfico e recolhem ou solicitam a informação de que necessitam. É também o caso de um problema, em que a análise da situação permite construir a expressão da função que corresponde ao volume duma caixa, a partir da qual é possível elaborar o gráfico correspondente e solicitar o cálculo do valor para o qual a função tem um máximo.

Noutros casos, a articulação entre as representações gráfica e algébrica é mais interativa, requerendo sucessivas alternâncias entre uma representação e outra. É o caso da generalidade das investigações realizadas como, por exemplo, a que decorreu em torno da função quadrática. Aí, os alunos alternam sucessivamente entre as duas representações, introduzindo continuamente novas expressões algébricas e observando o gráfico correspondente, em busca de uma relação entre as duas que lhes permita, conhecida a expressão algébrica, antecipar o aspeto do gráfico.

Noutros casos ainda, o recurso à tecnologia parte de uma representação gráfica para a qual os alunos têm que encontrar a correspondente representação algébrica. É o caso duma tarefa onde os alunos têm que conseguir encontrar a expressão algébrica que origina o gráfico dado.

A representação tabular é conscientemente deixada para mais tarde, pois Teresa considera que é necessário ir introduzindo a calculadora progressivamente, não se devendo pretender utilizar logo tudo o que esta disponibiliza. Considera assim adequado introduzir a tabela apenas próximo do final do estudo do tema, uma vez que até aí esta não é verdadeiramente necessária, mas dentro em breve, quando for iniciado o estudo da estatística, passará a sê-lo:

> Não se pode querer fazer tudo ao mesmo tempo. A máquina traz muita coisa nova e temos que ir gerindo. Eles podem ter os valores da função com o *trace* e, portanto, a tabela não faz falta. Eu só vejo a tabela no fim, que depois começamos a estatística e, aí sim, precisamos da tabela. (entrevista pós-aula)

É o que sucede numa tarefa onde parte da representação tabular, depois dos alunos efectuarem uma recolha de dados, passa para a gráfica e, a partir daí, busca a representação algébrica correspondente.

Pode-se assim dizer que a articulação entre as diferentes representações é bastante valorizada, assim como a diversidade de formas como essa articulação ocorre. A representação tabular é, no entanto, menos utilizada, o que se deve à intenção de fasear o contato dos alunos com os diferentes comandos da máquina e à convicção de que a informação veiculada pela tabela pode ser facilmente obtida por outra via, nomeadamente o *trace*.

Conclusão

Qualquer das professoras envolvidas neste estudo parece privilegiar o recurso às representações algébrica e gráfica em detrimento da representação tabular. A forma como articulam as diferentes representações é no entanto distinta. Carolina parte usualmente de uma representação algébrica para passar para a gráfica, podendo depois recorrer a outra representação, para tentar ultrapassar eventuais dificuldades. Já Teresa tanto pode partir da representação gráfica e passar para a algébrica, como partir da algébrica e passar para a gráfica, evidenciando nesta articulação uma abordagem tendencialmente interativa, com alternâncias e contributos frequentes das duas representações. Carolina parece mostrar assim alguma preferência por determinado tipo de articulação entre as diferentes representações (passagem da representação algébrica para a gráfica), em sintonia com as conclusões alcançadas por Molenje e Doerr (2006), algo que já não parece caraterizar a prática de Teresa. Comum às duas professoras é o reduzido (ou mesmo nulo) aproveitamento da representação tabular disponibilizada pela calculadora, um aspeto a que Molenje e Doerr (2006) também fazem referência. Teresa justifica esta circunstância com a necessidade de fasear a aprendizagem dos alunos relativamente à máquina e com o facto de ser possível aceder a valores numéricos por vias distintas da tabela. E este é um aspeto interessante, que torna inevitável questionar até que ponto a facilidade de acesso a diferentes representações proporcionada pela tecnologia acaba por se traduzir na prática num adiamento do recurso à representação tabular. Neste estudo parece ser esse o caso. As representações algébrica e gráfica são intensamente utilizadas, por vezes de formas que dificilmente seriam possíveis em contextos sem tecnologia, e a intensidade dessa utilização parece de algum modo implicar uma desvalorização da importância do recurso à representação tabular. Mas a questão é talvez um pouco mais complexa. Enquanto autores como Goos e Benninson (2008) e Lesser (2001) se referem à representação numérica e à representação tabular como duas designações de uma mesma representação, Cuoco (2001) fala nas representações numérica, visual, tabular e algébrica, sugerindo não três mas quatro representações diferentes. Até que ponto uma leitura do gráfico, apoiada na função *trace* da calculadora, tem semelhanças ou diferenças, de um ponto de vista de compreensão matemática das funções, relativamente à leitura de uma tabela, é uma questão que o trabalho em torno de diferentes representações com o apoio da tecnologia parece fazer surgir e que este estudo sugere carecer de aprofundamento futuro.

Referências bibliográficas

Almeida, A., & Oliveira, H. (2009). O processo de génese instrumental e a calculadora gráfica na aprendizagem de funções no 11.º ano. *Quadrante*, XVIII (1/2), 87-118.

Asp, G., Dowsey, J., & Stacey, K. (1993). Linear and quadratic graphs with the aid of technology. In B. Atweth, C. Kanes, M. Carss & G. Booker (Eds.), *Contexts in mathematics education* (pp. 51-66). Brisbane, Australia: MERGA.

Bardini, C., Pierce, R., & Stacey, K. (2004). Teaching linear functions in context with graphic calculators: students' responses and the impact of the approach on their use of algebraic symbols. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 2 (3), 353-376.

Barling, C. (1994). Graphical calculators: potential vs practice. In T. Andrews & B. Kissane (Eds.), *Graphics calculators in the classroom* (pp. 123-126). Adelaide: AAMT.

Billings, E., & Klanderman, D. (2000). Graphical representations of speed: obstacles preservice K-8 teachers experience. *School Science and Mathematics*, 100 (8), 440-450.

Burril, G. (2008). The role of handheld technology in teaching and learning secondary school mathematics. In *Proceedings of ICME 11*. Monterrey, México: ICME. Acedido em 3 de Dezembro, 2008, em http://www.icme11.org/tsg/show/23.

Cavanagh, M., & Mitchelmore, M. (2003). Graphics calculators in the learning of mathematics: teacher understandings and classroom practices. *Mathematics Teacher Education and Development*, 5, 3-18.

Coulombe, W., & Berenson, S. (2001). Representations of patterns and functions: tools for learning. In A. Cuoco & F. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 166-172). Reston: NCTM.

Cuoco, A. (2001). Preface. In A. Cuoco & F. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. ix-xiii). Reston: NCTM.

Dunham, P. (2000). Hand-held calculators in mathematics education: a research perspective. In E. Laughbaum (Ed.), *Hand-held technology in mathematics and science education: a collection of papers* (pp. 39-47). Columbus, OH: The Ohio State University.

Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *Journal of Mathematical Behaviour*, 17 (1), 105-121.

Ford, S. (2008). *The effect of graphing calculators and a three-core representation curriculum on college students' learning of exponential and logarithmic functions*. Tese de doutoramento, North Carolina State University.

Friedlander, A., & Tabach, M. (2001). Promoting multiple representations in algebra. In A. Cuoco & F. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 173-185). Reston: NCTM.

Goos, M., & Bennison, A. (2008). Surveying the technology landscape: teachers' use of technology in secondary mathematics classrooms. *Mathematics Education Research Journal*, 20 (3), 102-130.

Heid, M. (1995). *Algebra in a technological world*. Reston: NCTM.

Hoban, G. (2002). *Teacher learning for educational change*. Buckingham: Open University Press.

Kaput, J. (1989). Linking representations in the symbol systems of algebra. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), Research issues in the learning and teaching of algebra (pp. 167-194). Reston, Va: NCTM.

Kaput, J. (1992). Technology and mathematics education. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 515-556). New York: Macmillan.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Mathematics Teaching and Learning* (pp. 707-762). Greenwich, CT: IAP.

Lesser, L. (2001). Representations of reversal: an exploration of Simpson's paradox. In A. Cuoco & F. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 129-145). Reston: NCTM.

Molenje, L., & Doerr, H. (2006). High school mathematics teachers' use of multiple representations when teaching functions in graphing calculator environments. In S. Alatorre, J. Cortina, M. Sáiz & A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.

Powers, R., & Blubaugh, W. (2005). Technology in mathematics education: preparing teachers for the future. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, 5 (3/4), 254-270.

Ramos, C., & Raposo, L. (2008). A calculadora gráfica e as representações matemáticas: uma experiência. In A. Canavarro, D. Moreira & M. Rocha (Eds.), *Tecnologias e Educação Matemática* (pp. 196-209). Lisboa: SEM-SPCE.

Rocha, H. (2000). *A utilização da calculadora gráfica por alunos do ensino secundário*. Tese de mestrado. Lisboa: APM.

Semião, M. (2007). *A utilização da calculadora gráfica na aula de Matemática: um estudo com alunos do 12.º ano no âmbito das Funções*. Tese de mestrado, Universidade de Évora.

Silva, C. (2009). *Funções quadráticas no 10.º ano, usando a calculadora gráfica*. Tese de mestrado, Universidade de Lisboa.

Zbiek, R., Heid, M., Blume, G., & Dick, T. (2007). Research on technology in mathematics education. In F. Lester Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 1169-1207). Charlotte: NCTM.

Agradecimentos

Um agradecimento à Fundação para a Ciência e a Tecnologia, que apoiou financeiramente este trabalho, e ao Ministério da Educação e Ciência, que concedeu a dispensa de serviço necessária à sua concretização.

A APRENDIZAGEM DE MÉTODOS FORMAIS NA RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES - O CASO DE ANA

Sandra Nobre
Escola Básica 2,3 Professor Paula Nogueira
Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
Bolseira da FCT
sandraggnobre@gmail.com

Nélia Amado
FCT - Universidade do Algarve
Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
namado@ualg.pt

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ul.pt

Resumo

Neste artigo abordamos a aprendizagem de métodos formais algébricos na resolução de sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas. Este estudo está integrado numa experiência de ensino mais ampla com alunos do 9.º ano em tópicos de Álgebra. A metodologia é qualitativa de carater interpretativo com recurso a estudos de caso. Nesta comunicação debruçamo-nos sobre o caso de Ana, procurando compreender como desenvolveu o seu pensamento algébrico durante o estudo deste tópico, dando especial atenção ao modo como progrediu na aprendizagem de métodos formais algébricos e em que situações recorre a este tipo de procedimento. Verificamos que Ana desenvolveu o seu pensamento algébrico de uma forma gradual. Inicialmente as suas produções eram baseadas essencialmente em métodos informais, sustentadas por estratégias aritméticas, que progrediram progressivamente para métodos mais formais apoiados pela linguagem algébrica. No final do estudo do tópico, para a resolução das situações propostas, a aluna recorre a métodos formais – principalmente ao método de substituição – usando menos outros métodos também trabalhados na experiência de ensino.

Palavras-chave: Álgebra, sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas, pensamento algébrico, métodos formais, folha de cálculo.

Introdução

Por vezes, a Álgebra é ensinada como um conjunto de procedimentos desligados do conhecimento matemático e sem relação com o quotidiano dos alunos. Raramente é-lhes dada oportunidade de refletir sobre as suas próprias experiências ou de articular o conhecimento adquirido com esse novo conhecimento. Pelo contrário, são frequentemente incentivados a memorizar procedimentos que apenas ficam a conhecer como regras e a resolver problemas que não têm significado em função da sua experiência e sem compreender os conceitos e as formas de raciocínio envolvidos. Por consequência, os alunos também não reconhecem a utilidade deste conhecimento para a vida (Kaput, 1999).

Neste artigo analisamos o contributo da realização de uma experiência de ensino, no estudo do tópico sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas, no desenvolvimento do pensamento algébrico de uma aluna. Em particular, pretendemos perceber como é que esta progrediu na aprendizagem de métodos formais e em que situações recorre a este tipo de procedimento.

O desenvolvimento do pensamento algébrico

Para Zazkis e Liljedahl (2002) o termo Álgebra engloba dois aspetos distintos: pensamento algébrico e simbolismo. O simbolismo algébrico é uma das grandes potencialidades da Álgebra por permitir expressar ideias matemáticas de forma rigorosa e condensada. Para os autores, o uso de simbolismo algébrico deve ser tido como um indicador de pensamento algébrico mas o facto de não ser usado não deve ser considerado como incapacidade de pensar algebricamente.

Pensar algebricamente, envolve não só conhecer várias formas de representação, nomeadamente as simbólicas, mas também ter flexibilidade na mudança entre modos de representação e capacidade de operar com símbolos, em contexto e quando adequado (Schoenfeld, 2008). Este modo de pensamento contempla também o trabalho com estruturas matemáticas e o uso de símbolos na resolução de problemas, incluindo o sentido do símbolo (Arcavi, 2006).

O desenvolvimento do pensamento algébrico está estreitamente relacionado com a experiência matemática dos alunos. Kieran (2007) refere que, num nível mais avançado, este pensamento manifesta-se através do uso de expressões simbólicas e de equações em vez de números e operações. No entanto, para os alunos que ainda não aprenderam as notações algébricas, as formas de pensamento mais gerais sobre números, operações e notações, como o sinal de igual, podem ser consideradas algébricas. Neste estudo, assumimos esta perspetiva mais abrangente de pensamento algébrico, considerando que este se manifesta não só pelo uso do simbolismo algébrico, mas também através de outras representações que envolvem palavras e relações gerais entre números.

A aprendizagem de métodos formais algébricos

Os métodos formais são eficazes para resolver numerosos problemas, levando os alunos rapidamente à solução e libertando-os de procurar estratégias alternativas. No entanto, a passagem do informal ao formal não é fácil para a maioria dos alunos. O pouco tempo despendido na fase informal e a rápida formalização é responsável por estas dificuldades. Uma vez adquiridos os procedimentos algébricos e os métodos tornados rotineiros, os alunos manifestam uma grande tendência para cometerem erros que não são capazes de identificar nem corrigir (Wagner, 1983).

Acresce ainda que os alunos que habitualmente apresentam um elevado desempenho na aplicação de procedimentos formais, revelam uma compreensão limitada do seu significado e não sabem lidar com situações problemáticas não habituais. Estes alunos revelam reduzida flexibilidade matemática para adaptar procedimentos de resolução de problemas a situações novas, a menos que sejam capazes de relacioná-las com procedimentos informais (Küchemann, 1981). Verifica-se, portanto, que a aprendizagem da Álgebra provoca muitas tensões entre os modos de pensamento informal e a formal, uma vez que o desenvolvimento de procedimentos formais, apesar de ser uma ferramenta bastante útil, pela sua eficiência acarreta muitos riscos para a aprendizagem.

Relativamente aos métodos formais na resolução de problemas em situações que envolvem duas equações do 1.º grau com duas incógnitas, Filloy, Rojano & Solares (2004) mostram que certos alunos não conseguem resolver problemas com duas incógnitas. Por exemplo, perante duas equações do tipo: $4x-3=y$ e $6x+7=y$, não conseguem obter $4x-3=6x+7$. Isto pode dever-se a dificuldades na aplicação da “transitividade do sinal de igual” ou ainda ao facto de considerarem os *yy* como sendo diferentes.

A experiência de ensino no estudo do tópico

Na planificação do tópico foi delineado um conjunto de tarefas (tabela 1), onde a resolução de problemas assumiu o papel principal. A ficha de diagnóstico teve como principal objetivo a obtenção de elementos acerca dos conhecimentos dos alunos necessários para a abordagem do tópico em causa. Para cada uma destas tarefas foram promovidos momentos de discussão e de síntese, procurando estabelecer uma ponte entre o trabalho realizado na folha de cálculo e o trabalho com papel e lápis, recorrendo ao simbolismo algébrico, sempre que possível a partir das ideias apresentadas pelos próprios alunos. No final do estudo deste tópico pretende-se que os alunos sejam capazes de resolver sistemas pelo método de substituição e pelo método gráfico, podendo ainda recorrer ao método de adição ordenada.

Tabela 1: Tarefas e recursos

Tarefas	A-1 Diagnóstico	B-1	C-1	D-1	E-1	F-1	G-1
Recursos	Lápis e papel	Folha de cálculo	Folha de cálculo	Lápis e papel	Folha de cálculo	Folha de cálculo	Lápis e papel

Metodologia de investigação

O objetivo deste estudo é perceber como é que uma aluna progrediu na aprendizagem de métodos formais e em que situações recorre a este tipo de procedimento. Tendo em conta este objetivo optámos por uma metodologia qualitativa de cunho interpretativo uma vez que pretendemos estudar o fenómeno em toda a sua complexidade e no seu contexto natural (Bogdan & Biklen, 1994). Esta investigação segue um *design* de experiência de ensino com recurso a estudos de caso, onde a primeira autora assume também o papel de professora da turma. Analisamos o caso de Ana, uma aluna de 14 anos, interessada nas aulas e que, habitualmente, não manifesta dificuldades em Matemática.

Na sala de aula procedemos à recolha das produções dos alunos, à captura dos ecrãs dos computadores, à gravação áudio e à observação participante traduzida em notas de campo. Foi ainda realizada uma entrevista à aluna no final do estudo do tópico. A análise de dados envolveu essencialmente análise de conteúdo (Bardin, 1977). Depois de feitas as transcrições procedemos à sua análise usando o *software* NVivo 9.

O desenvolvimento do pensamento algébrico de Ana

Apresentamos alguns exemplos de produções de Ana, por tarefa, que ilustram o desenvolvimento do seu pensamento algébrico e que, ao mesmo tempo, são reveladoras de marcos na progressão da aprendizagem de métodos formais algébricos.

Tarefa A-1. No trabalho com simbologia algébrica, a aluna revela saber escrever e simplificar expressões algébricas. Resolveu algumas equações do 1.º grau, confessando na entrevista que já não se recordava das outras (com parêntesis e denominadores) e nem sempre fez corretamente a escrita algébrica da relação entre duas variáveis.

Tarefa B-1. Apresentamos o seu enunciado na figura 1..

A Sofia gosta muito de colocar desafios aos colegas. Logo na primeira aula de Matemática, apresentou a seguinte proposta:

- Para descobrires o meu dia de aniversário basta multiplicares o dia do meu nascimento por 12 e o mês por 30 e adicionares os dois valores obtidos. Se o resultado for 582 é esse o dia e o mês do meu aniversário!

Consegues descobrir o dia do aniversário da Sofia?

Figura 1: Enunciado do problema "Adivinhar o dia de aniversário"

Ana, na folha de cálculo, começou por selecionar as variáveis independentes, estabeleceu depois as respetivas relações para cada mês tendo em conta as condições estabelecidas no enunciado, como se apresenta na figura 2.

C	D	E	F	G	H	I	J	K
dia do nascimento		mês do meu nascimento/Janeiro		Soma		Fevereiro		Soma
1	12	1	30	42		2	60	72
2	24	1	30	54		2	60	84
3	36	1	30	66		2	60	96
4	48	1	30	78		2	60	108
5	60	1	30	90		2	60	120

C	D	E	F	G	H	I	J	K
dia do nascimento		mês do meu nascimento/Janeiro		Soma		Fevereiro		Soma
1	=1*12	1	=1*30	=D3+F3		2	60	=60+D3
2	=2*12	1	=1*30	=F4+D4		2	60	=J4+D4
3	=3*12	1	=1*30	=F5+D5		2	60	=J5+D5
4	=4*12	1	=1*30	=F6+D6		2	60	=60+D6
5	=5*12	1	=1*30	=F7+D7		2	60	=60+D7

Figura 2: Excerto da produção de Ana

Na discussão, os alunos concluíram que existiam três datas possíveis para o aniversário de Ana mas não conseguiam determinar o dia certo. Como síntese, os alunos escreveram a relação entre o dia e o mês algebricamente, $12d + 30m = 582$, tendo feito a verificação das soluções encontradas.

Na aprendizagem de métodos formais, esta tarefa destacou-se por ter proporcionado a resolução de um problema que envolve relações entre duas quantidades. Estas relações foram estabelecidas na folha de cálculo e, posteriormente, em linguagem algébrica. Abordámos assim o significado das letras numa equação literal e o fato destas equações poderem ter várias soluções, dependendo do contexto.

Tarefa C-1. Na figura 3, apresentamos o enunciado.

O Sr. José tem três filhas muito gulosas: a Alice, a Beta e a Célia. Com a chegada do verão, elas ficaram muito preocupadas com a sua elegância, por causa da praia. Decidiram as três fazer uma dieta e pesar-se regularmente numa balança que o pai tinha no armazém. Quando começaram a dieta, as irmãs pesaram-se, duas a duas, na balança.

A Alice e a Beta pesavam juntas 132 Kg.

A Beta e a Célia pesavam juntas 151 Kg.

A Célia e a Alice pesavam juntas 137 kg.

Qual é o peso de cada uma das filhas do Sr. José?

Figura 3: Enunciado do problema "O peso das 3 irmãs"

Alice	Beta	Célia	Célia e Alice
1	131	20	21
2	130	21	23
3	129	22	25
4	128	23	27
5	127	24	29
6	126	25	31
7	125	26	33
8	124	27	35
57	75	76	133
58	74	77	135
59	73	78	137
60	72	79	139
61	71	80	141

Alice	Beta	Célia	Célia e Alice
1	=132-D9	=151-E9	=F9+D9
2	=132-D10	=151-E10	=F10+D10
3	=132-D11	=151-E11	=F11+D11
4	=132-D12	=151-E12	=F12+D12
5	=132-D13	=151-E13	=F13+D13
6	=132-D14	=151-E14	=F14+D14
7	=132-D15	=151-E15	=F15+D15
8	=132-D16	=151-E16	=F16+D16
57	=132-D65	=151-E65	=F65+D65
58	=132-D66	=151-E66	=F66+D66
59	=132-D67	=151-E67	=F67+D67
60	=132-D68	=151-E68	=F68+D68
61	=132-D69	=151-E69	=F69+D69

Figura 4: Excerto da produção de Ana

Ana (figura 4) seleciona o peso da Alice como variável independente e recorre a fórmulas para escrever as relações entre os pesos das irmãs. Utiliza o peso conjunto das irmãs Célia e Alice como dispositivo de regulação para encontrar a solução.

Na discussão a professora apelou à escrita simbólica das relações presentes no problema, escrevendo-as no quadro e à medida que os alunos as foram dizendo (figura 5).

Figura 5: Escrita das relações no quadro

Esta discussão serviu para a professora incentivar os alunos à escrita de três equações com recurso à linguagem algébrica e permitiu a formalização pela professora do termo "sistema de equações":

> O que está escrito no quadro são três condições que têm de ser cumpridas neste problema… E têm de ser cumpridas em simultâneo. A este conjunto de equações nós chamamos um sistema de equações. Neste caso temos um sistema de 3 equações com três incógnitas.

Quando questionada acerca das aprendizagens realizadas com a folha de cálculo nestes dois problemas Ana responde: "… aprendi a usar melhor o Excel, aprendi formas mais claras de mostrar o raciocínio …". Nesta afirmação de Ana transparece a ajuda que a folha de cálculo lhe deu na expressão do seu raciocínio.

Tarefa D-1. É constituída por 4 situações do tipo apresentado na figura 6. Em todas as situações, Ana escreveu equações que representam as relações apresentadas mas não as usou. Na situação 2 (figura 6), traçou uma linha a delimitar um grupo de animais. Neste procedimento utiliza a informação de uma das imagens e forma com ela dois conjuntos, o que lhe permite descobrir o valor das incógnitas. Este processo revela a ideia de substituição, fundamental no método de substituição.

Na última situação apresentada na tarefa, Ana recorre à tentativa e erro por não ser tão evidente o estabelecimento de relações entre as informações presentes nas imagens: "… mas nestas aqui conhecíamos a relação, só tínhamos um animal e nas outras dá para fazer conjuntos e obter o mesmo valor que estes… e no 4 já não dá porque como temos 3 macacos e 1 gato e aqui só tenho um gato e não tenho 3 macacos e estão ao contrário... isto aqui dá para fazer com… aquela soma 4 macacos e 4 gatos é igual a…26 mais 22 que dá 48, depois dividia… um gato e um macaco, dá 48 a dividir por 4 e depois o valor que me dava era de 1 gato e de 1 macaco…". Esta última situação da tarefa levou à formalização do método da adição ordenada na resolução de sistemas de equações.

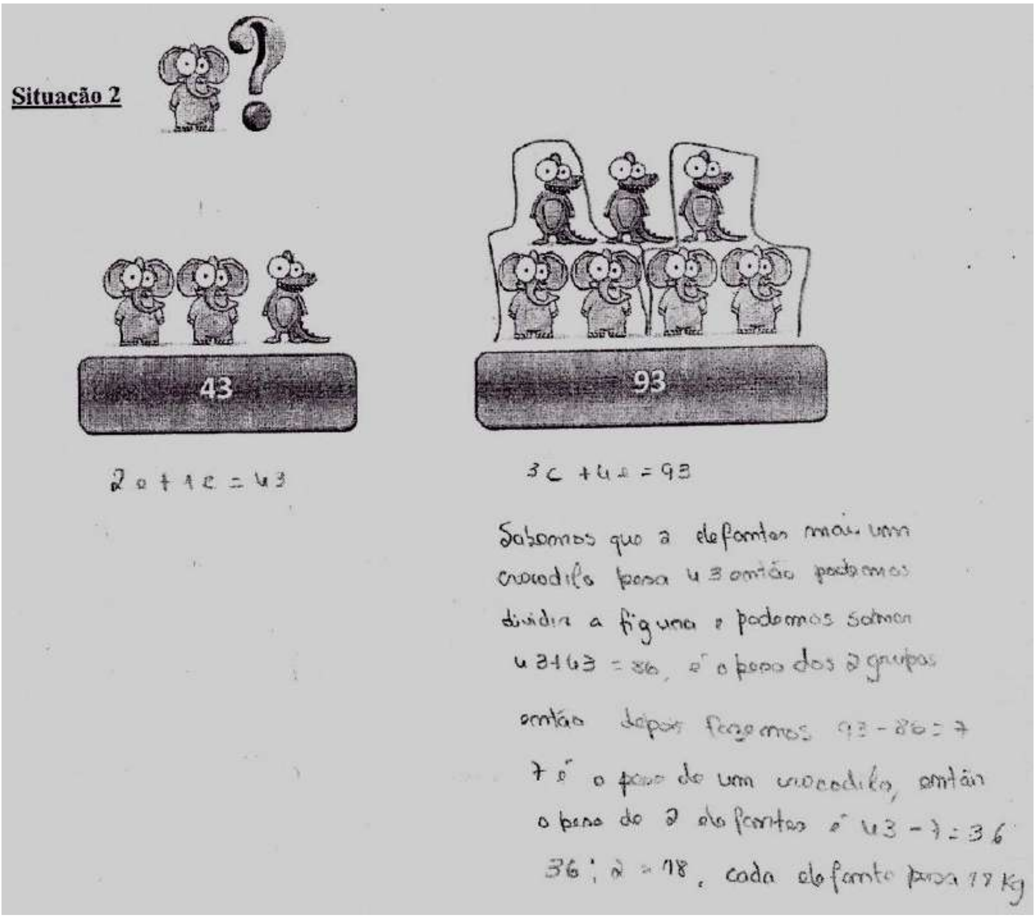


Figura 6: Produção de Ana

Questionada acerca das aprendizagens realizadas com a tarefa D-1, Ana refere que "A partir daí aprendi sistemas de equações que foi… que vão ser importantes na resolução de exercícios… porque eu com a forma como fiz é uma forma mais antiga de resolução…".

Este excerto evidencia a importância que a tarefa teve para esta aluna na aprendizagem da resolução de sistemas de equações pelos métodos formais. Como Ana refere: "A partir daí aprendi sistemas de equações" não propriamente pela sua resolução, por ser "uma forma mais antiga de resolução", um método informal, mas também certamente pela discussão que foi promovida e pelas ideias que foram partilhadas por outros colegas de turma.

Tarefa E-1. É composta por três variantes, sendo a primeira apresentada na figura 7.

O Russo e o Relinchão são dois cavalos que participam numa corrida de 2400 metros. O Russo teve um bónus de 140 metros e partiu com esse avanço em relação ao relinchão. O Russo correu a uma velocidade de 11m/s e o Relinchão a 14m/s.

Qual dos dois cavalos ganhou a corrida?

Figura 7: Enunciado da tarefa E-1

Ana selecionou o tempo como variável independente e a distância percorrida por cada um dos cavalos como variáveis dependentes. A aluna não recorreu à escrita de fórmulas para estabelecer as relações na folha de cálculo, tendo optado por gerar sequências numéricas, com incremento fixo (figura 8).

tempo (s)	Relinchão	Russo
0	0	140
1	14	151
2	28	162
3	42	173
4	56	184
5	70	195
6	84	206
168	2352	1988
169	2366	1999
170	2380	2010
171	2394	2021
172	2408	2032
173	2422	2043
174	2436	2054
175	2450	2065

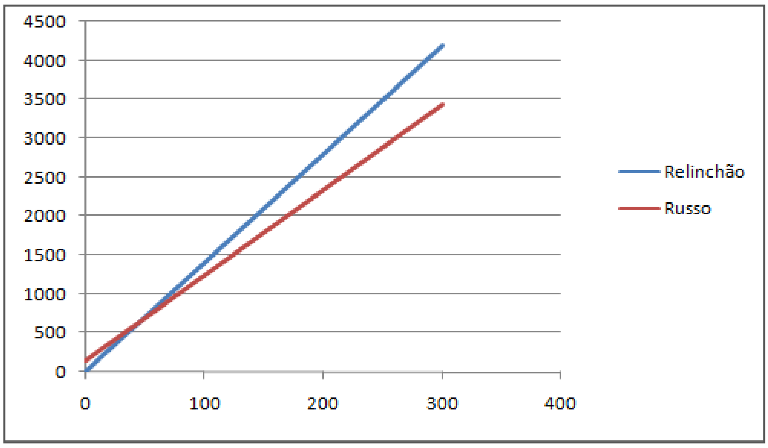


Figura 8: Excerto da produção de Ana

Tal como solicitado noutra questão, Ana fez a representação gráfica com a relação entre o tempo e a distância percorrida por cada um dos cavalos no mesmo referencial. Seguiu o mesmo processo nas duas variantes seguintes, uma em que os cavalos correm à mesma velocidade, numa delas continuando o Russo com um avanço e, por fim outra, sem qualquer avanço, como se pode observar nas figuras 9 e 10, respetivamente.

tempo	Relinchão	Russo
0	14	140
1	28	154
2	42	168
3	56	182
4	70	196
5	84	210
6	98	224
7	112	238
8	126	252
9	140	266
10	154	280

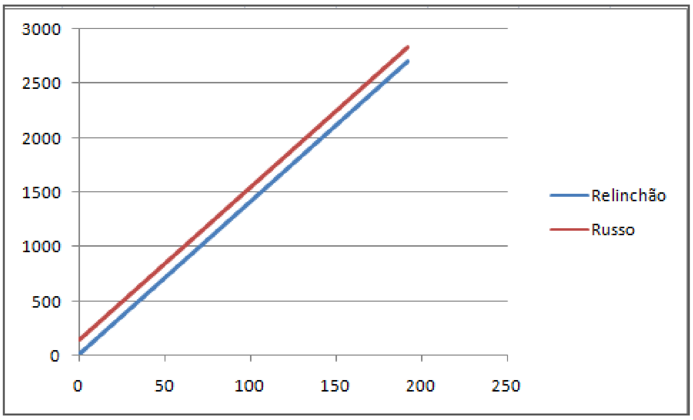


Figura 9: Excerto da produção de Ana

tempo	Relinchão	Russo
0	0	0
1	14	14
2	28	28
3	42	42
4	56	56
5	70	70
6	84	84
7	98	98
8	112	112
9	126	126
10	140	140

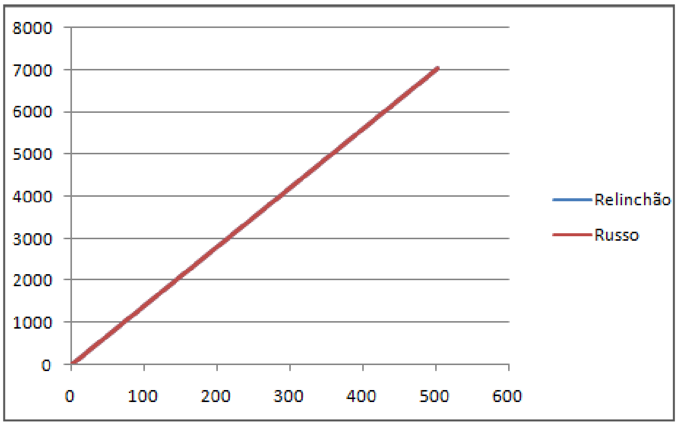


Figura 10: Excerto da produção de Ana

Após a apresentação e discussão foi pedido aos alunos para escreverem a equação que representa a distância percorrida por cada um dos cavalos tendo sido apresentada a classificação do sistema correspondente a cada situação.

Na entrevista, Ana reconhece a importância desta tarefa para a aprendizagem da resolução de sistemas pelo método gráfico "… foi daí que obtivemos os gráficos para aprender a resolver sistemas graficamente".

Tarefa F-1. Apresentamos o enunciado na figura 11.

Numa quinta há galinhas e coelhos. Ao todo existem 212 cabeças e 700 patas. Quantas galinhas e quantos coelhos existem na quinta?

Traduz algebricamente o trabalho que realizaste no Excel.

Figura 11: Enunciado do problema "Galinhas e coelhos"

Ana começou por escolher a variável independente e estabeleceu as relações entre essa variável e as restantes. A variável dependente "Soma das patas" serviu como dispositivo de regulação para a aluna encontrar a solução, como mostra na figura 12.

Coelhos	Galinhas	Soma das Cabeças	Coelhos	Galinhas	Soma das patas
1	211	212	4	422	426
2	210	212	8	420	428
3	209	212	12	418	430
4	208	212	16	416	432
5	207	212	20	414	434
6	206	212	24	412	436
136	76	212	544	152	696
137	75	212	548	150	698
138	74	212	552	148	700
139	73	212	556	146	702
140	72	212	560	144	704

Coelhos	Galinhas	Soma das Cabeças	Coelhos	Galinhas	Soma das patas
1	211	212	=F4*4	=G4*2	=L4+K4
2	210	212	=F5*4	=G5*2	=L5+K5
3	209	212	=F6*4	=G6*2	=L6+K6
4	208	212	=F7*4	=G7*2	=L7+K7
5	207	212	=F8*4	=G8*2	=L8+K8
6	206	212	=F9*4	=G9*2	=L9+K9
136	76	212	=F139*4	=G139*2	=L139+K139
137	75	212	=F140*4	=G140*2	=L140+K140
138	74	212	=F141*4	=G141*2	=L141+K141
139	73	212	=F142*4	=G142*2	=L142+K142
140	72	212	=F143*4	=G143*2	=L143+K143

Figura 12: Excerto da produção de Ana

A tradução algébrica foi feita com a ajuda da professora, através do questionamento aos alunos. O objetivo nesta fase foi estabelecer a relação entre o trabalho realizado na folha de cálculo e o método de substituição (ver a figura 13).

F	G	I	J	K	L	N
Coelhos	Galinhas	Soma das Cabeças		Coelhos	Galinhas	Soma das patas
1	211	212		=F4*4	=G4*2	=L4+K4
2	210	212		=F5*4	=G5*2	=L5+K5
3	209	212		=F6*4	=G6*2	=L6+K6
4	208	212		=F7*4	=G7*2	=L7+K7

136	76	212	544	152	696
137	75	212	548	150	698
138	74	212	552	148	700
139	73	212	556	146	702
140	72	212	560	144	704

$$\begin{cases} \boxed{g = 212 - c} \\ \boxed{4c + 2g = 700} \end{cases} \qquad \begin{cases} \\ 4c + 2\boxed{(212 - c)} = 700 \end{cases} \qquad \begin{cases} g = 212 - 138 \\ c = 138 \end{cases} \qquad \begin{cases} \boxed{g = 74} \\ c = 138 \end{cases}$$

Figura 13: Tradução algébrica

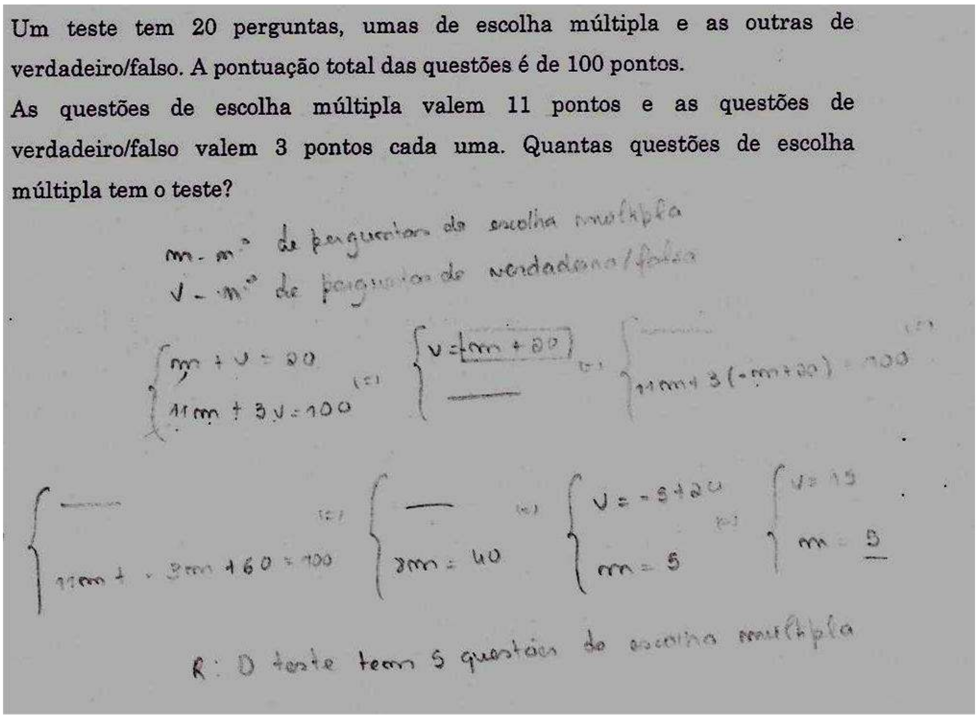
Este trabalho foi fundamental para que os alunos percebessem a correspondência que existe entre os procedimentos já habituais na folha de cálculo e o método de substituição na resolução de sistemas de equações.

Tarefa G-1. Incluiu propostas diversificadas como resolução de problemas, resolução de sistemas pelo método gráfico e pelo método de substituição, escrita de sistemas na forma canónica, verificação se um par ordenado é ou não solução de um sistema, classificação de sistemas sem efetuar cálculos e através da representação gráfica e, por fim, a escrita do enunciado de um problema.

Como refere Ana, esta tarefa "foi muito importante professora porque quando eu comecei a resolver esta ficha eu não conseguia resolver sistemas com fluência…".

Questionada acerca do que significa resolver com fluência, explica: "é saber resolver, sabe assim rápido sem pensar e demorar muito tempo". Verificamos que quando são apresentados sistemas sem ser solicitado um método específico de resolução, Ana usa o método de substituição. Consegue classificar sistemas tanto a partir da sua escrita na forma de duas equações como a partir da sua representação gráfica.

Na entrevista foram propostas tarefas diversificadas. A figura 14 mostra como Ana traduz um problema através de um sistema de duas equações que resolve pelo método de substituição.


Um teste tem 20 perguntas, umas de escolha múltipla e as outras de verdadeiro/falso. A pontuação total das questões é de 100 pontos.
As questões de escolha múltipla valem 11 pontos e as questões de verdadeiro/falso valem 3 pontos cada uma. Quantas questões de escolha múltipla tem o teste?

m - nº de perguntas de escolha múltipla
v - nº de perguntas de verdadeiro/falso

$\begin{cases} m + v = 20 \\ 11m + 3v = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \boxed{-m + 20} \\ \text{——} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{——} \\ 11m + 3(-m + 20) = 100 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{——} \\ 11m - 3m + 60 = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{——} \\ 8m = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = -5 + 20 \\ m = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 15 \\ m = 5 \end{cases}$

R: O teste tem 5 questões de escolha múltipla

Figura 14: Produção de Ana

Questionada acerca das razões que a levaram a recorrer a um sistema de equações, Ana esclarece: "…quando eu li o enunciado achei que como tínhamos duas incógnitas e como elas se relacionavam entre si de duas formas podia obter duas equações e a partir daí fazer um sistema…"

No problema seguinte, apresentado na figura 15, Ana entusiasmou-se desde logo com o tema – um cruzeiro para finalistas do 9.º ano, exclamando: "Isso é que era mesmo bom!" A propósito do método, refere "… aqui eles já me dão a equação e aqui: será que existe algum local comum às rotas dos dois cruzeiros? Em caso afirmativo indica as coordenadas… quando eu li isto… algum local comum, eu pensei logo num gráfico… comum… sistema possível determinado e como já tinha as equações e quando eu li coordenadas, coordenadas, associei a um mapa e então fui tentar fazer um gráfico…”. Ana optou pelo método gráfico de resolução de sistemas.

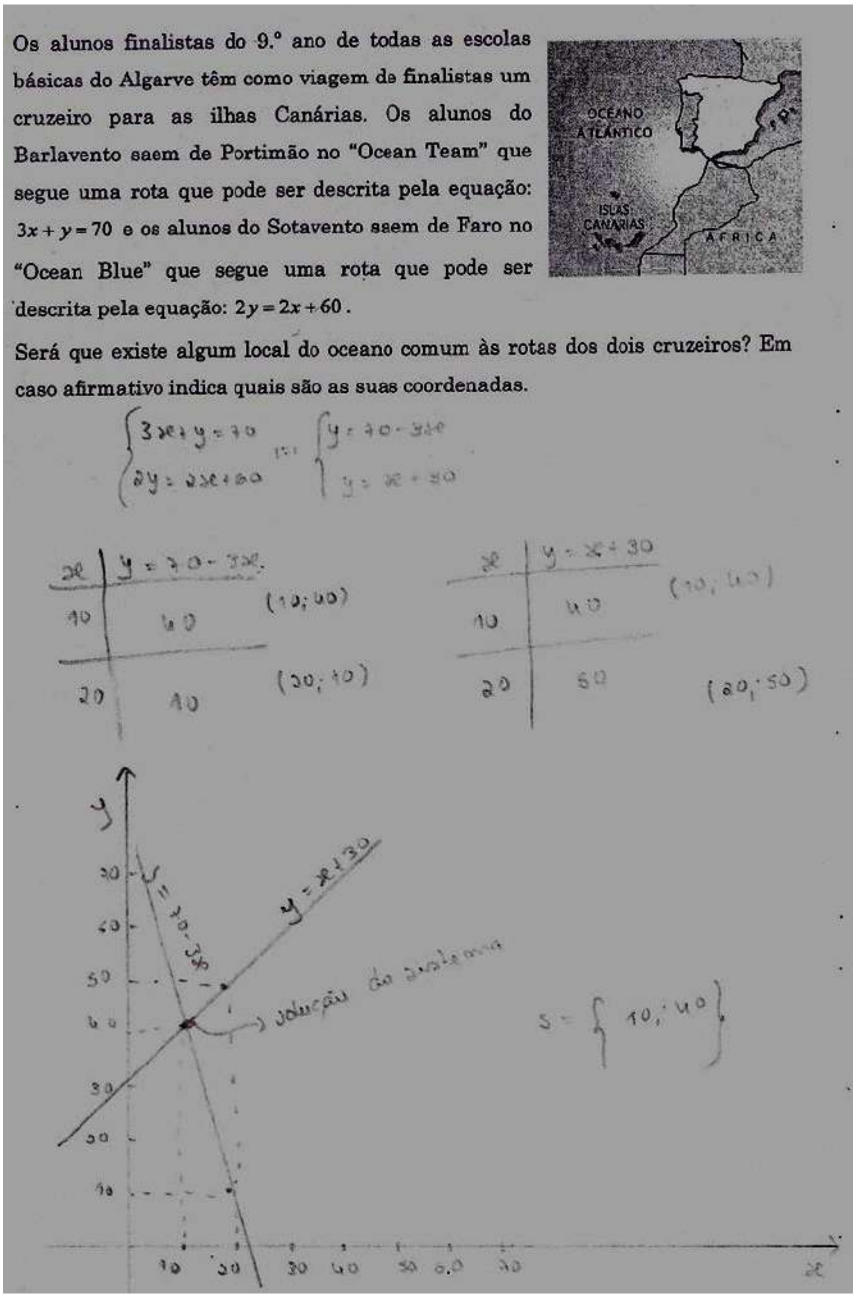


Figura 15: Produção de Ana

No final da entrevista, questionada acerca da utilidade do estudo de sistemas de equações, Ana hesita e responde: “… para que é que isto serve… para quando temos… eu acho que isto na vida não me é muito útil… eu não percebo a utilidade no dia-a-dia mas, por exemplo, para resolver problemas de Matemática, quando temos duas igualdades com duas incógnitas e precisamos de saber o valor das incógnitas talvez os sistemas sejam interessantes para ajudar a resolver. Os gráficos, por exemplo, com os sistemas aprendemos, sem resolver, quando é que há solução, sabermos identificá-los como possível, impossível… mas para o dia-a-dia não vejo onde podemos utilizar". Apesar de não compreender a utilidade deste tópico para o seu quotidiano, Ana dá evidências de que perante situações em determinadas condições é possível recorrer a um sistema de equações para resolvê-las.

Conclusão

As tarefas propostas permitiram que Ana fizesse uma transição progressiva para a aprendizagem de métodos formais a partir de experiências informais. Apesar de, por vezes, não utilizar a linguagem algébrica formal não ficou inibida de desenvolver o seu pensamento algébrico (Kieran, 2007; Zazkis & Liljedahl, 2002). Verificamos, tal como Haspekian (2005) indica, que a folha de cálculo pode sustentar a passagem da Aritmética para a Álgebra. Para além de se revelar uma ferramenta muito útil na resolução de problemas, proporcionou um ambiente sem o constrangimento da utilização do simbolismo algébrico.

Para o método de substituição, Ana começou por desenvolver a compreensão da escrita de relações, recorrendo primeiro a uma linguagem essencialmente aritmética, depois ao ambiente híbrido da folha de cálculo e, por fim, à linguagem algébrica chegando, com a intervenção da professora, à noção de sistema de equações. Posteriormente, a ideia de substituição surgiu naturalmente por parte da aluna, tendo sido formalizada na articulação entre o trabalho na folha de cálculo e com papel e lápis. No método gráfico de resolução de sistemas destacamos o trabalho na folha de cálculo para uma rápida representação gráfica que possibilita a comparação entre diferentes situações. O método da adição ordenada foi o menos trabalhado ao longo da experiência de ensino, mas na entrevista a aluna dá evidências de o compreender.

Os momentos de discussão e síntese revelaram-se cruciais pois serviram também de suporte para que Ana desenvolvesse uma perspetiva algébrica dos métodos de resolução através da reflexão acerca das suas estratégias e de diferentes formas de abordar os problemas propostos. Assim, trabalhou aspetos essenciais dos métodos formais, nomeadamente a ideia de substituição em que os alunos manifestam dificuldades (Filloy, Rojano & Solares, 2004), a representação gráfica e a adição ordenada, todas elas geradoras de sentido para os métodos formais.

Consideramos que o tempo despendido numa fase informal de aprendizagem dos métodos formais foi suficiente para Ana desenvolver a sua compreensão e evitar cometer determinados erros, como refere Wagner (1983). Por outro lado tentámos sempre que fosse estabelecida a relação entre os métodos informais e os métodos formais, proporcionando flexibilidade matemática na resolução de situações novas, como defende Küchemann (1981). Para além de dar evidências de ter aprendido os métodos formais de resolução de sistemas de equações, Ana consegue identificar situações problemáticas em que pode recorrer a eles. Este aspeto é fundamental, existindo evidências de que a aluna desenvolveu o sentido dos métodos e o pensamento algébrico ao longo da experiência de ensino. No final, passou a recorrer essencialmente a métodos formais para resolver as situações propostas, mostrando preferência pelo método de substituição, embora usando em determinadas situações o método gráfico.

Agradecimentos

Este artigo faz parte do Projeto Mat@Web (Resolução de Problemas de Matemática: Perspetivas sobre uma competição interativa na Web) – Projeto financiado pela Fundação para a Ciência e Tecnologia (PTDC/CPE-CED/101635/2008).

Referências

Arcavi, A. (2006). El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. In I. Vale et. al. (Orgs.). *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores*. (pp.29-48). Lisboa: SEM-SPCE.

Bardin, L. (1977). *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Filloy, E., Rojano, T. & Solares, A. (2004). Arithmetic/algebraic problem solving and the representation of two unknown quantities. In M. Johnsen Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th PME Conference* (Vol. 2, pp. 391–398). Bergen University College.

Haspekian, M. (2005). An 'instrumental approach' to study the integration of a computer tool into mathematics teaching: The case of spreadsheets. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 10(2), 109-141.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra with understanding. In E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Kieran, C. (2007). Developing Algebraic reasoning: the role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels. *Quadrante*, *16*(1), 5-26.

Küchemann, D. (1981). Algebra. In K.M. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics:11-16* (pp. 102-119). London: Murray.

Schoenfeld, A. (2008). Early algebra as mathematical sense making. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 479 – 510). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Wagner, S. (1983). What are these things called variables? *Mathematics Teacher*, 76, 474- 479.

Zazkis, R., & Liljedhal, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, *49*, 379-402.

SIMPÓSIO 4

PROBABILIDADES E RACIOCÍNIO ESTATÍSTICO

PROBABILIDADE E RACIOCÍNIO ESTATÍSTICO

Ana Henriques
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
achenriques@ie.ul.pt

Susana Colaço
Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Santarém e
Centro de Investigação Operacional
susana.colaco@ese.ipsantarem.pt

O desafio de ensinar e aprender Estatística

O ensino e a aprendizagem da Estatística têm adquirido, nas últimas décadas, uma grande importância devido ao seu reconhecido papel na educação de qualquer cidadão (NCTM, 2007). Nas sociedades atuais, onde grandes quantidades de dados fazem parte da realidade quotidiana, ter conhecimentos de Estatística tornou-se essencial para ter uma atitude crítica em relação à informação disponível, para compreender e comunicar com base nessa informação mas, também, para tomar decisões informadas, atendendo a que, uma grande parte da organização dessas mesmas sociedades, é feita com base nesses conhecimentos (Carvalho, 2006; Shaughnessy, 2007). Não é, portanto, surpreendente que a educação estatística tenha começado a fazer parte das orientações curriculares em Matemática, um pouco por todo mundo (GAISE, 2005; ME, 2007; NCTM, 2007).

Em Portugal, o atual Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) atribui uma grande ênfase à Estatística (sob a designação de Organização e Tratamento de Dados - OTD), logo desde os primeiros anos, tendo em vista desenvolver a literacia estatística dos alunos, isto é, a sua capacidade de interpretar, avaliar criticamente e comunicar acerca de informação estatística (Gal, 2002). Conceptualizado desta forma, este objetivo destaca a importância de desenvolver o raciocínio estatístico, em todos os níveis de ensino e a forma mais adequada para o concretizar é através de um trabalho exploratório e investigativo, orientado para os dados, onde os alunos devem: Planear investigações; formular questões de investigação, recolher dados usando observações, inquérito e experiências; descrever, representar e comparar conjuntos de dados; e propor e justificar conclusões e previsões baseadas nos dados (GAISE, 2005; ME, 2007; NCTM, 2007). Quando os alunos se envolvem em todas as fases de uma investigação estatística e compreendem como a recolha, a organização e a interpretação dos dados acontecem, desenvolvem capacidades de argumentar, criticar, refletir e usar significativamente os conhecimentos e os procedimentos ligados aos próprios conceitos estatísticos.

Neste contexto, é fundamental que os alunos aprendam uma das fases cruciais da investigação estatística (Martins & Ponte, 2010) - a organização dos dados. Esta fase, segundo Wild & Pfannkuch (1999), envolve 'limpar os dados', preparar tabelas, construir representações gráficas e fazer redução de dados. Os gráficos estatísticos são ferramentas metodológicas importantes em muitas áreas, permitindo uma visualização global de um fenómeno (Curcio, 1987), pelo que a sua compreensão é uma parte vital da literacia estatística (Gal, 2002). E se as orientações do Nacional Council of Teachers of Mathematics (NCTM) salientam a importância da formulação de questões pertinentes de modo a poderem ser resolvidas com uma recolha e organização adequada de dados, consideram igualmente pertinente a exploração de algumas medidas estatísticas como as de localização e as de dispersão, e a forma como estes conceitos se relacionam com os dados numéricos e não numéricos (NCTM, 2007). De facto, as medidas de localização e dispersão permitem a caracterização da distribuição estatística e a sua compreensão é, também, uma componente importante da literacia estatística (Groth, 2006). Claro que, o ensino da Estatística está associado também ao ensino das Probabilidades (Batanero, 2001) e a aprendizagem de conceitos relacionados com a incerteza deve ser introduzida logo nos primeiros anos de ensino, com a exploração de situações aleatórias simples, que envolvem o conceito de acaso e a utilização do vocabulário próprio para as descrever (Falk, Falk & Levin, 1980; ME, 2007).

No ensino da Estatística é, ainda, fundamental integrar a tecnologia com vista à promoção da aprendizagem, especialmente à medida que se lida com conjuntos de dados reais e, por isso, cada vez maiores e mais complexos.

Apesar do reforço no ensino da Estatística presente no Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), historicamente a Estatística tem sido vista por muitos alunos como um tópico difícil e, ao qual, alguns professores parecem não dar a devida importância (Ponte & Fonseca, 2001). A investigação realizada nas últimas décadas, indica que a maioria dos alunos e adultos não pensa estatisticamente sobre assuntos importantes que afetam as suas vidas e tem documentado os muitos e consistentes erros que os alunos cometem quando tentam raciocinar sobre dados e acaso em problemas contextualizados no mundo real (Garfield & Ben-Zvi, 2007).

Atualmente, os investigadores e educadores estatísticos tentam compreender os desafios e as dificuldades que os alunos enfrentam no ensino e aprendizagem deste tema, de modo a contribuírem com propostas pedagógicas inovadoras e com a elaboração de recursos educativos e de instrumentos de avaliação diversificados que permitam acompanhar o progresso dos alunos e ultrapassar os obstáculos cognitivos identificados (Ben-Zvi, 2000). No entanto, ainda têm que ser feitos grandes esforços para promover nos alunos o desenvolvimento da literacia estatística. Por exemplo, eles são capazes de ler e compreender tabelas e gráficos, calcular a média e a mediana de um conjunto de dados mas, revelam dificuldades com os conceitos e falta de capacidade para retirar conclusões (Shaughnessy, 2007).

Nos últimos anos tem sido dedicada especial atenção ao conhecimento e práticas dos professores e ao modo como influenciam a qualidade do processo de ensino e aprendizagem. Existe evidência empírica que o conhecimento dos professores influencia fortemente a aprendizagem dos alunos (Groth, 2007; Hill & Ball, 2004) e prevalece a ideia que muitos professores não tiveram a preparação suficiente e adequada para ensinarem esta temática (Shaughnessy, 2007). Esta visão é também suportada pela investigação que revela as dificuldades dos professores na compreensão de conceitos fundamentais de Estatística como a média ou variabilidade (Batanero, Burrill, & Reading, 2011). Consequentemente, é necessário reforçar o investimento na investigação nesta área e na formação dos professores.

Contributos da investigação sobre o ensino e a aprendizagem da Estatística

O Simpósio "Probabilidade e raciocínio estatístico" reúne um conjunto de trabalhos de autores nacionais e estrangeiros, desenvolvidos no âmbito de projetos de investigação ou de teses de mestrado e doutoramento, cuja diversidade reflete as temáticas que têm tido, de forma recorrente, a atenção da comunidade de investigação em Educação Matemática. As nove comunicações orais e os dois *posters* que o integram centram-se, essencialmente, no ensino e na aprendizagem da Estatística em vários níveis de ensino, desde o 1.º ciclo ao ensino superior (com ênfase na formação inicial de professores). Há apenas uma comunicação que aborda o tema da Probabilidade, uma outra que faz uma análise de manuais e um *poster* focado na formação contínua de professores.

O desenvolvimento da literacia estatística (Gal, 2002; Martins & Ponte, 2010) é a ideia subjacente às comunicações que se focam no trabalho realizado com os alunos, numa diversidade de situações didáticas criadas para lhes propiciarem aprendizagens significativas.

O projeto "*Desenvolver a literacia estatística (DSL): aprendizagem do aluno e formação do professor*", coordenado por Hélia Oliveira e do qual fazem parte algumas das comunicações deste Simpósio, é apresentado numa comunicação em *poster*, com o mesmo título e pretende caracterizar aspetos essenciais da literacia estatística dos alunos, nomeadamente no que diz respeito à capacidade de formular questões, recolher dados e de representá-los para responder a essa questões, desde os níveis mais elementares até ao ensino secundário. Além disso, o projeto desenvolve uma outra vertente investigativa focada no desenvolvimento do conhecimento didático e estatístico do professor, para ensinar este tema, em contextos de formação inicial e contínua. De facto, o professor é um elemento central do ensino, pois é ele que tem que pôr em prática as orientações curriculares relativas ao ensino da Estatística. Além disso, são recorrentes as referências à necessidade de fazer uma aposta forte na formação dos professores no âmbito desta temática, quer no domínio do conhecimento estatístico quer no domínio didático.

A necessidade dos alunos se envolverem ativamente em todas as etapas de uma investigação estatística, desde a formulação de questões à análise de dados recolhidos a partir de experiências realizadas pelos alunos, como enfatizado nas orientações curriculares do NCTM, justifica a pertinência do trabalho "*Planeamento estatístico e análise de dados no 3.º ciclo do ensino básico*", de coautoria de Cristina Roque e João Pedro da Ponte, que visa identificar os contributos de uma experiência de ensino para o desenvolvimento da capacidade de planeamento estatístico e de análise de dados de alunos do 8.º ano.

As duas comunicações, "*O desenvolvimento da literacia estatística no 5.º ano: uma experiência de ensino*", da autoria de Cátia Freitas e "*Erros e dificuldades de alunos do 1.º ciclo na representação de dados através de gráficos estatísticos*", de coautoria de Ana Michele Cruz e Ana Henriques, centram-se na problemática da construção, interpretação e leitura de tabelas e gráficos estatísticos e estudam a aprendizagem dos alunos do 5.º e do 3.º ano de escolaridade, respetivamente, no quadro de experiências de ensino relativas ao tema da OTD. Em particular, descrevem e analisam as dificuldades manifestadas pelos alunos no trabalho com os gráficos estatísticos e, deste modo, também disponibilizam informações essenciais à melhoria do ensino do tema, no futuro.

A preocupação com a aprendizagem de conceitos estatísticos, nomeadamente os de tendência central, de dispersão e de associação, está refletida em quatro outras comunicações que mostram como o tema pode ser trabalhado em contextos muito variados. O objetivo da comunicação "*O estudo da média, da mediana e da moda por meio de um jogo e da resolução de problemas*", de coautoria de José Marcos Lopes, Renato Corral e Jéssica Resende, é apresentar os resultados da aplicação de uma proposta didático-pedagógica no 3.º ano do ensino médio brasileiro, que utiliza um jogo associado à resolução de problemas para o estudo dos conceitos de média, mediana e moda, visando o reforço da aprendizagem desses conceitos. Na comunicação "*Uma corrida de robots numa prática matemática escolar*", de autoria de Paula Cristina Lopes, é estudado, de forma explícita, o uso das tecnologias e o seu contributo para que os alunos do 8.º ano atribuam significado e incrementem a aprendizagem de conceitos estatísticos, como as medidas de tendência central e de dispersão e desenvolvam as três capacidades transversais propostas no Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007): comunicação matemática, raciocínio matemático e a capacidade de resolução de problemas. Na formação inicial de professores, a comunicação de coautoria de Raquel Santos e João Pedro da Ponte, intitulada "*A interpretação de medidas de tendência central de futuros professores e educadores na realização de uma investigação estatística*" também visa compreender que significados os futuros professores e educadores atribuem às medidas de tendência central quando trabalham estes conceitos numa ótica de descoberta, através da realização de uma investigação estatística. Considerando, ainda, a formação inicial de professores, o trabalho "*Avaliação da associação estatística num diagrama de dispersão por estudantes universitários*" de coautoria de Delson Mugabe, José António Fernandes e Paulo Ferreira Correia apresenta um estudo sobre as estratégias usadas pelos alunos na avaliação da associação e predição estatística entre duas variáveis representadas num diagrama de dispersão, antes e depois do ensino da correlação e regressão lineares.

Também no âmbito da Probabilidade, o conhecimento das conceções e formas de raciocínio dos alunos é um ponto-chave para assegurar o êxito das novas propostas curriculares. Tendo por propósito avaliar as possibilidades de ampliar o estudo do tema de Probabilidades no ensino básico, a comunicação de coautoria de Paulo Ferreira Correia e José António Fernandes, intitulada "*Comparação de probabilidades condicionadas no contexto de extração de bolas de um saco*", estuda as intuições de alunos do 9.º ano sobre probabilidade condicionada e independência no contexto de seleção ordenada com e sem reposição.

Para ultrapassar as dificuldades associadas à compreensão de conceitos fundamentais da Estatística, como os já referidos nos trabalhos anteriores, é fundamental analisar os vários fatores que podem influenciar a aprendizagem dos alunos, sendo de grande interesse dar atenção aos manuais, dada a sua relevância e o papel que ocupa no processo de ensino e aprendizagem (Azcárate & Serradó, 2006). É neste contexto que se insere a comunicação "*El lenguaje sobre la correlación y regresión: Un estudio de dos libros de texto*" de coautoria de Magdalena Gea, Miguel Contreras, Pedro Arteaga e Gustavo Cañadas, cujo objetivo é analisar a linguagem matemática utilizada durante a introdução e desenvolvimento dos conceitos de correlação e regressão nos manuais escolares espanhóis ao nível do bacharelato e refletir sobre os possíveis conflitos cognitivos que os mesmos podem induzir nos alunos.

Por fim, e dado que nos últimos anos também sido dedicada especial atenção ao conhecimento e práticas dos professores e ao modo como influenciam a qualidade do processo de ensino e aprendizagem, no *poster* intitulado "*Conhecimento e práticas em educação estatística de professores do 1.º ciclo num contexto de trabalho colaborativo*", de autoria de Ana Caseiro, é apresentado um trabalho em progresso que visa contribuir para o desenvolvimento do conhecimento especializado, quer para o ensino, quer para as práticas letivas de professores do 1.º ciclo em Educação Estatística, quando estes se encontram inseridos num contexto de trabalho colaborativo.

Esperamos que os trabalhos apresentados sejam do interesse dos participantes neste Simpósio e procuraremos criar momentos ricos de discussão e aprofundamento das principais questões deles decorrentes, contribuindo para a identificação de problemas novos e relevantes para a continuidade/desenvolvimento da investigação em educação matemática.

Referências

Azcárate, P. & Serradó, A. (2006). Tendencias didácticas en los libros de texto de matemáticas para la Eso. *Revista de Educación*, *340*, 341-378.

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Granada: Universidad de Granada.

Batanero, C., Burrill, G., & Reading, C. (2011). *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education. A Joint ICMI/IASE Study*. ICMI Study, volume 14. New York, NY: Springer.

Ben-Zvi, D. (2000). Toward Understanding the Role of Technological Tools in Statistical Learning. *Mathematical Thinking and Learning, 2*(1&2), 127–155.

Carvalho, C. (2006). Olhares sobre a Educação Estatística em Portugal. In *Anais do SIPEMAT*. Recife: Programa de Pós-Graduação em Educação-Centro de Educação – Universidade Federal de Pernambuco.

Curcio, F. R. (1987). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. *Journal for Research in Mathematics Education, 18*(5), 382-393.

Falk, R., Falk, R. & Levin, I. (1980). A potential for learning probability in young children. *Educational Studies in Mathematics, 11*, 181-204.

GAISE Report (2005). *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education*. Retirado de http://www.amstat.org/education/gaise/GAISEPreK-12_Full.pdf em 20 de Julho de 2010.

Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review, 70*(1), 1-25.

Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2007). *Developing Students' Statistical Reasoning: Connecting Research and Teaching Practice*. Emeryville, CA: Key College Publishing.

Groth, R. E. (2006). An exploration of students' statistical thinking. *Teaching Statistics, 28*(1), 17-21.

Hill, H. C., & Ball, D. L. (2004). Learning mathematics for teaching: Results from California's Mathematics Professional Development Institutes. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(5), 330–351.

Martins, M. E. G., & Ponte, J. P. (2010). *Organização e tratamento de dados*. Lisboa: DGIDC

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa: DGIDC.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE.

Ponte, J. P., & Fonseca, H. (2001). Orientações curriculares para o ensino da estatística: Análise comparativa de três países. *Quadrante, 10(1),* 93-115.

Scheaffer, R. (2000). Statistics for a New Century. In M. J. Burke & F. R. Curcio (Eds.), Learning Mathematics for a New Century (pp. 158-173). Reston: NCTM

Shaughnessy, J. M. (2007). Research on Statistics Learning and Reasoning. In F. Lester (Eds.) *Second Hanbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 957-1009). Greenwich, CT: Information Age Publishing and NCTM.

Wild, C. J., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review, 67*(3), 223-265.

AVALIAÇÃO DA ASSOCIAÇÃO ESTATÍSTICA NUM DIAGRAMA DE DISPERSÃO POR ESTUDANTES UNIVERSITÁRIOS

Delson Alexandre Mugabe
Universidade Pedagógica de Moçambique
delsonmugabe@yahoo.com.br

José António Fernandes
Universidade do Minho
jfernandes@ie.uminho.pt

Paulo Ferreira Correia
Escola Secundária/3 de Barcelos
ferreiracorreiapaulo@gmail.com

Resumo

Neste texto relata-se um estudo sobre a avaliação da associação e predição estatística por estudantes universitários, antes e depois de abordarem essa temática no ensino formal. No estudo participaram 57 estudantes moçambicanos, que frequentavam no ano letivo de 2011/2012 o 2.º ano de um curso de formação de professores de matemática do enino secundário. Os estudantes foram inquiridos através de um questionário, sendo aqui explorada apenas uma das seis questões nele incluídas e em que é representada uma distribuição bidimensional através de um diagrama de dispersão. Globalmente, os estudantes revelaram dificuldades em obter as respostas corretas, exibiram conceções limitadas e não adequadas de avaliação da associação estatística e o ensino teve um impacto limitado na melhoria das respostas dos estudantes.

Palavras-chave: diagrama de dispersão; associação estatística; estratégias de avaliação; estudantes universitários.

Introdução

O estudo da correlação e de relações estatísticas entre variáveis constituem ferramentas com ampla aplicação em outros métodos estatísticos e na resolução de problemas dos mais variados domínios científicos. No caso das relações estatísticas, elas permitem estabelecer outro tipo de relações, distintas das relações funcionais, ampliando-se, assim, o leque de relações passíveis de serem estudadas.

As relações estatísticas são adequadas para o estudo de situações que envolvem incerteza, enquanto as relações funcionais são de natureza determinista. No caso de conhecermos a área de um quadrado, podemos determinar rigorosamente o seu lado recorrendo à respetiva fórmula, que constitui uma relação funcional. Já no caso das idades dos cônjuges à data do seu casamento não podemos predizer rigorosamente a idade da mulher a partir do conhecimento da idade do homem. Nesta situação apenas podemos dizer que, em geral, à medida que a idade do homem aumenta, a idade da mulher também aumenta.

Ora, esta temática, para além do ensino superior, onde vem sendo estudada há muito tempo nos mais variados cursos, também mais recentemente tem sido incluída nos programas escolares de matemática do ensino secundário (Ministério da Educação, 2001a, 2001b, 2001c), atribuindo-lhe um lugar mais compatível com a importância que lhe é conferida atualmente.

Nesta comunicação apresentam-se as estratégias usadas por estudantes universitários para avaliar a associação e predição estatística entre duas variáveis representadas num diagrama de dispersão, antes e depois do ensino da correlação e regressão lineares.

Estratégias intuitivas de avaliação da associação estatística

Estepa e Batanero (1996) classificaram os argumentos avançados por estudantes do final do ensino secundário, quando efetuavam julgamentos de associação estatística em situações representadas por diagramas de dispersão, em estratégias intuitivas corretas, parcialmente corretas e incorretas, enquanto indicadores de conceções corretas, parcialmente corretas e incorretas de associação estatística. No caso das estratégias intuitivas corretas e parcialmente corretas, salientam-se: 1) o uso do crescimento, decrescimento ou da forma constante do diagrama de dispersão para justificar o tipo de dependência; e 2) a comparação do diagrama de dispersão com o gráfico de uma função conhecida — por exemplo, uma linha reta — para justificar a associação entre as variáveis.

No caso das estratégias intuitivas incorretas, referem-se: 1) a conceção determinista, quando o estudante não admite exceções à relação entre as variáveis. Nesta conceção é esperado que a correspondência atribua apenas um valor à variável dependente para cada valor da variável independente; caso tal não se verifique, os estudantes consideram que não existe dependência entre as variáveis; 2) a conceção local, quando os estudantes baseiam os seus julgamentos em apenas parte dos dados fornecidos. Se esta parte dos dados serve para confirmar um dado tipo de correlação, então os estudantes afirmam-na na sua resposta; e 3) a conceção causal, quando os estudantes identificam correlação com causalidade. Ainda nesta categoria de estratégias, Estepa e Batanero (1995) acrescenta a conceção unidirecional, quando os estudantes admitem apenas a associação direta, considerando a associação inversa como independência.

O raciocínio causal é distinto do pensamento estocástico pois o primeiro é univocamente determinado, enquanto o segundo envolve incerteza. Segundo Tversky e Kahneman (1982), a influência da "causalidade" na avaliação de probabilidades manifesta-se por intermédio de "assimetrias inferenciais", em que as pessoas inferem com maior confiança efeitos das causas do que causas dos efeitos, e da "significação causal e diagnóstica da evidência", em que as pessoas tendem a realçar o impacto causal dos dados para o futuro e a negligenciar as suas implicações diagnósticas acerca do passado. É um exemplo paradigmático desta última situação o chamado "fenómeno Falk" (Falk, 1986), em que as pessoas rejeitam a possibilidade da probabilidade de um acontecimento realizado antes poder ser afetado por um acontecimento realizado depois ou consideram tal sequenciação destituída de sentido.

Chapman e Chapman (1982) mostraram que as pessoas recorrem às suas expectativas e crenças sobre possíveis relações entre variáveis. Nesse processo, a covariação entre as variáveis baseia-se mais em teorias ou preconceções semanticamente estabelecidas do que em dados empíricos. Este fenómeno, conhecido por "correlação ilusória", refere-se à "tendência para ver duas coisas como ocorrendo conjuntamente mais frequentemente do que de facto ocorrem" (Chapman & Chapman, 1982, p. 241). Estas teorias informais têm origem na experiência e no contexto do sujeito e são usadas na interpretação de dados e factos que o rodeiam.

Método

O estudo realizou-se no ano letivo de 2011/2012 e envolveu uma amostra de 57 estudantes ($E_i, i = 1, 2, ..., 57$) que frequentavam o 2º ano do curso universitário de formação de professores de matemática. Estes estudantes pertenciam a duas delegações da Universidade Pedagógica de Moçambique, especificamente a delegação de Nampula (30 estudantes) e a delegação de Maputo (27 estudantes). Com a inclusão dos estudantes das duas delegações no estudo pretendeu-se obter um maior número de participantes e, consequentemente, obter-se uma maior diversificação de estratégias na resolução das tarefas.

Dos estudantes que participaram no estudo, 5 (8,8%) eram do sexo feminino e 52 (91,2%) do sexo masculino, sendo a média das suas classificações na disciplina de matemática à entrada na universidade de 10,4 valores, numa escala de 0 a 20 valores.

Quanto à aprendizagem de Estatística em anos anteriores, a maior parte dos participantes 44 (77,2%) afirmou ter tido aulas de Estatística e 13 (22,8%) declararam não ter aprendido quaisquer noções de estatística na escola. Dos estudantes que aprenderam noções de estatística, não incluindo quaisquer conteúdos de correlação e regressão lineares, 15 (26,3%) referiram que tal aconteceu no ensino básico e 29 (50,9%) no ensino secundário.

Relativamente ao interesse pela Estatística, quase todos os estudantes, 53 (93,0%), afirmaram ter muito interesse, 3 (5,3%) referiram ter algum interesse e apenas 1 (1,8%) afirmou não ter nenhum interesse.

A recolha de dados no estudo foi efetuada através da aplicação de um questionário, aplicado imediatamente antes e depois do ensino da correlação e regressão lineares. Deste modo, com a primeira aplicação do questionário pretendeu-se determinar as estratégias intuitivas dos estudantes na resolução de tarefas sobre associação estatística, enquanto com a segunda aplicação do questionário se pretendeu avaliar o impacto do ensino na evolução dessas estratégias.

O questionário era constituído por seis questões, sendo em todas elas inquiridos os estudantes sobre a associação estatística entre duas variáveis e pedida uma justificação para a sua resposta. Dessas questões, no presente texto aborda-se apenas uma, que se refere à avaliação da associação e predição estatística num diagrama de dispersão, que é apresentada na secção seguinte e foi adaptada de Landewehr e Watkins (1986).

O ensino realizou-se na disciplina de Estatística Descritiva, que é lecionada em todos os cursos de matemática das 11 delegações da Universidade Pedagógica, incluindo a de Nampula e Maputo. A esta disciplina são atribuídas 4 horas semanais, num total de 48 horas semestrais, e o processo de ensino em todas as delegações tem por base um único programa de ensino, incluindo os conteúdos: conceitos básicos; distribuições de frequências; medidas de localização, dispersão, assimetria e achatamento; correlação e regressão linear simples; e números índices.

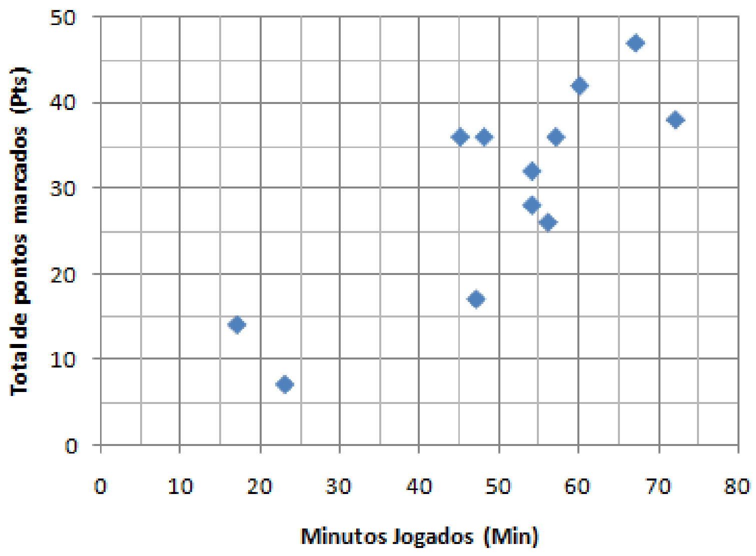
No estudo da correlação e regressão linear simples foram dedicadas 8 horas e abordaram-se os seguintes conteúdos: conceito de correlação; tipos de correlação; diagrama de dispersão; medidas de correlação; coeficiente de determinação; propriedades do coeficiente de correlação; ajustamento linear; reta de regressão linear; e coeficiente de regressão. As aulas organizaram-se em teóricas e práticas, sendo as teóricas mais centradas no professor e no tratamento dos principais conceitos do tema, enquanto as práticas foram orientadas basicamente para a resolução e discussão de exercícios. Na lecionação deste tema, os dois professores não fizeram uso de meios tecnológicos.

Em termos de tratamento e análise de dados classificaram-se as respostas dos estudantes em corretas, parcialmente corretas e incorretas e, em cada um destes tipos de resposta, agruparam-se as suas justificações em diferentes categorias, sendo determinadas frequências absolutas e percentagens dos vários tipos de respostas e categorias.

Avaliação da associação estatística num diagrama de dispersão

Foi proposta aos estudantes a questão seguinte, representando graficamente a variação conjunta de duas variáveis.

No gráfico seguinte estão representados os pontos obtidos por cada jogador da seleção de basquetebol dos Estados Unidos da América nos Jogos Olímpicos de Inverno de 1992 e o seu tempo de jogo em minutos, no conjunto dos três jogos finais.



a) Assinala no gráfico o ponto que representa o jogador que marcou mais pontos. Achas que esse jogador também jogou durante mais tempo?

b) Achas que existe uma relação entre o tempo de jogo (em minutos) do jogador e o total de pontos marcados? Explica a tua resposta.

c) Se um jogador joga durante 50 minutos, quantos pontos é de esperar que ele marque?

Figura 1. Tarefa proposta aos estudantes

Nesta questão averigua-se a capacidade dos estudantes em fazerem a leitura do gráfico de dispersão (alínea a), avaliarem a associação entre duas variáveis quantitativas apresentadas no gráfico de dispersão (alínea b) e estimarem o valor de uma das variáveis a partir do conhecimento do valor da outra variável. Seguidamente apresenta-se a análise efetuada às respostas dos estudantes em cada uma das alíneas da questão.

a) Assinala no gráfico o ponto que representa o jogador que marcou mais pontos. Achas que esse jogador também jogou durante mais tempo?

Os resultados obtidos tanto no pré como no pós-ensino foram satisfatórios, na medida em que mais de 90 por cento dos estudantes (96% no pré-ensino e 98,2% no pós-ensino) conseguiram identificar o jogador que marcou mais pontos. Também na sua grande maioria (93% no pré-ensino e 98,2% no pós-ensino), os estudantes reconheceram também que este jogador, apesar de ter marcado mais pontos, não foi o jogador com mais tempo em campo.

Curcio (1989) definiu três níveis, de complexidade crescente, na leitura e interpretação de gráficos: *ler os dados*, que requer a leitura literal do gráfico e realiza-se através da leitura dos factos que nele estão representados; *ler entre os dados*, que requer combinar e integrar a informação e identificar relações matemáticas através de algum conhecimento prévio sobre o assunto tratado no gráfico; e *ler além dos dados*, pressupõe a capacidade de efetuar previsões a partir da informação do gráfico e um conhecimento prévio aprofundado sobre o assunto referente aos dados do gráfico. Ora, o facto de as perguntas colocadas aos estudantes se situarem no nível *ler os dados*, uma vez que a resposta pode ser obtida diretamente a partir da informação explícita no gráfico de dispersão, poderá explicar as elevadas percentagens de respostas corretas obtidas. Também Estepa (2008) verificou que estudantes do último ano do ensino secundário, que tinham abordado a correlação e regressão lineares de forma intuitiva, não tiveram dificuldades em ler pontos do diagrama de dispersão.

b) Achas que existe uma relação entre o tempo de jogo (em minutos) do jogador e o total de pontos marcados? Explica a tua resposta.

Os resultados obtidos nesta questão demonstram uma variedade de respostas dos estudantes na identificação e justificação da associação entre as duas variáveis: o tempo de jogo (em minutos) e o número de pontos marcados. Na Tabela 1 apresentam-se as frequências (percentagens) obtidas nas diferentes estratégias segundo o tipo de resposta (correta, parcialmente correta e incorreta), antes e depois do ensino.

Tabela 1. Frequência absoluta (%) de estudantes nas diferentes estratégias

Estratégias	Frequências (%)	
	Pré-ensino	Pós-ensino
Corretas		
1: padrão global de variação da nuvem de pontos	18 (31,6)	11 (19,3)
2: ajustamento de uma reta à nuvem de pontos	0 (0,0)	10 (17,5)
Parcialmente corretas		
3: avaliação global da dispersão da nuvem de pontos	0 (0,0)	23 (40,4)
Incorretas		
4: utilização de pontos isolados	26 (45,6)	6 (10,5)
5: teorias prévias	13 (22,8)	7 (12,3)

No conjunto das distintas estratégias apresentadas, constatamos que as duas seguintes conduziram à resposta correta: 1: padrão global de variação da nuvem de pontos (variação no mesmo sentido, variação em sentido contrário e ausência de variação); e 2: ajustamento de uma reta à nuvem de pontos.

Em relação à estratégia 1, alguns estudantes julgaram existir associação entre as duas variáveis através do reconhecimento da tendência de variação no mesmo sentido dessas variáveis, tal como mostra a resposta do estudante E_2 no pré-ensino: “Sim, depende porque, de uma forma geral, o jogador com mais pontos marcados tende a ser aquele que jogou durante mais tempo”. Esta resposta baseia-se numa conceção correta de associação, e verificou-se um abandono desta estratégia por parte de 7 estudantes, do pré-ensino para o pós-ensino.

Na estratégia 2, para justificar a associação entre as variáveis, os estudantes avaliaram o ajustamento de uma reta à nuvem de pontos. Por exemplo, o estudante E_{29}, no pós-ensino, respondeu o seguinte: “Sim porque a maneira como os dados se apresentam no gráfico mostram no fundo a ideia de existência de uma linha reta crescente”. Esta estratégia foi adotada por 10 (17,5%) estudantes, apenas no pós-ensino.

Quanto à estratégia 3, os estudantes partiram do pressuposto de que a maior ou a menor dispersão dos pontos implica uma fraca ou forte associação entre as variáveis, respetivamente. A resposta do estudante E_8, no pós-ensino, exemplifica o que acabamos de referir: “Existe uma relação porque os pontos apresentam uma menor dispersão”. Esta justificação, adotada por 23 (40,4%) estudantes, apenas no pós-ensino, corresponde a uma resposta parcialmente correta uma vez que aludiram apenas a dispersão, sem um referente (uma curva) dessa dispersão.

Por fim, as estratégias 4 e 5 produziram respostas incorretas na medida em que os estudantes se basearam em parte dos dados para justificar a associação ou nas suas crenças subjetivas acerca da relação entre as variáveis em detrimento dos dados do problema. A estratégia 4 consistiu em deduzir a associação a partir de pontos isolados. Por exemplo, o estudante E_3, no pré-ensino, considerou não existir associação entre o número de pontos marcados e o tempo de jogo pelo facto de se observar em alguns jogadores discrepâncias entre essas duas variáveis, ou seja, marcaram muitos pontos tendo jogado poucos minutos e vice-versa.

> Não porque existem jogadores que jogaram muito mais tempo e marcaram poucos pontos e outros que jogaram poucos minutos e marcaram muitos pontos. Por exemplo, o jogador que jogou apenas 60 minutos marcou 43 pontos e o jogador que fez 70 minutos marcou aproximadamente 38 pontos.

Nesta resposta, o estudante mostra possuir também uma conceção determinista de associação, que provavelmente o terá conduzido a uma resposta incorreta de associação, neste caso de independência. Esta estratégia foi a mais utilizada no pré-ensino, com 26 (45,6%) estudantes a adotá-la para responderem à questão b). Do pré-ensino para o pós-ensino registou-se uma diminuição assinalável do número de estudantes que adotaram esta estratégia, exatamente 20 estudantes, o que corresponde a uma diminuição de 35,1%.

Na estratégia 5: teorias prévias, os estudantes basearam as suas respostas nas suas crenças prévias acerca da relação entre o número de pontos marcados e o tempo de jogo, ao invés de analisar as evidências dos dados disponíveis no problema. A resposta do estudante E_9, no pós-ensino, é reveladora disso mesmo: "É claro que sim, porque se um jogador permanecer muito tempo no campo irá marcar muitos pontos em relação ao jogador que permanece pouco tempo no campo".

Ainda nesta estratégia, verificou-se que a atribuição da associação a outras variáveis distintas das explicitadas no problema teve como base pressupostos causais, na medida em que os estudantes afirmaram não existir associação entre as variáveis porque a variável independente não influencia diretamente a variável dependente, ou seja, admitiram a existência de outras variáveis que podiam influenciar a variável dependente, tal como mostra a resposta do estudante E_{22}, no pré-ensino: "Não há relação entre o tempo de jogo e o total de pontos marcados, isto porque a marcação de pontos depende da flexibilidade do jogador e da sua estratégia dentro do campo".

O recurso a ideias prévias para justificar a associação observou-se em apenas 4 (7,0%) estudantes no pré-ensino e 3 (5,3%) no pós-ensino. Chapman e Chapman (1982) designam este tipo de raciocínio de “correlação ilusória” porque as pessoas afirmam as suas crenças ao invés de ter em consideração a evidência dos dados.

c) Se um jogador joga durante 50 minutos, quantos pontos é de esperar que ele marque?

Na alínea c) pretende-se prever o valor de uma variável a partir do conhecimento do valor da outra variável. No caso concreto, pretende-se estimar o número de pontos marcados a partir do conhecimento do tempo de jogo. Para o efeito, o estudante podia recorrer à reta de regressão e utilizar retas paralelas aos eixos coordenados para estimar os pontos correspondentes a 50 minutos.

Constatámos que as respostas à alínea c), particularmente no pré-ensino, foram maioritariamente dadas na forma pontual (36 no pré-ensino e 21 no pós-ensino) ou intervalar (4 no pré-ensino e 6 no pós-ensino), ou seja, estimaram para o número de pontos marcados pelo jogador que tinha jogado à volta de 50 minutos um único valor ou um conjunto de valores.

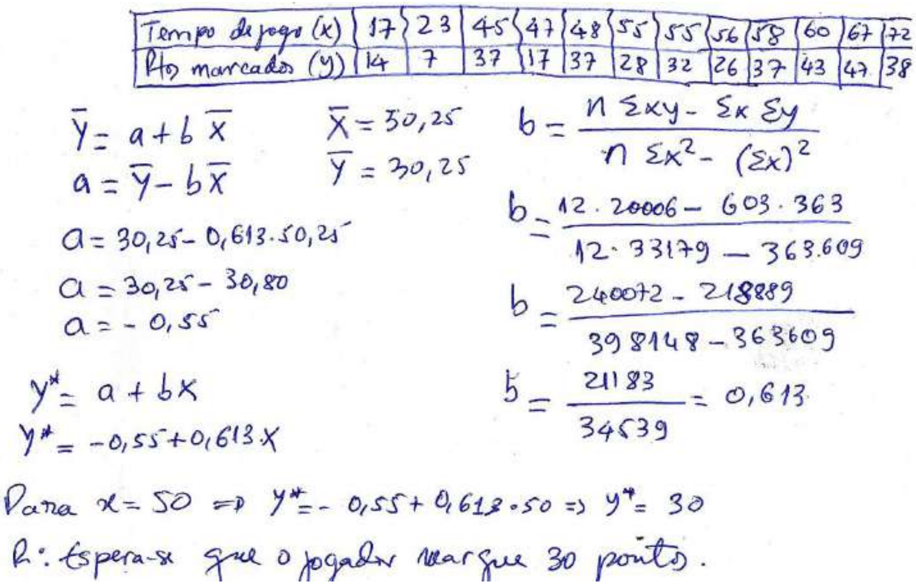
Seguidamente, as respostas dos estudantes foram agrupadas em três intervalos: i) 10–19 pontos; ii) 20–29 pontos e iii) 30–40 pontos, como se apresenta na Tabela 2.

Tabela 2. Frequência absoluta (%) de estudantes nos diferentes intervalos

Intervalos	Frequências (%)	
	Pré-ensino	Pós-ensino
10–19 pontos	12 (21,1%)	1 (1,8%)
20–29pontos	22 (38,6)	17 (29,8%)
30–40 pontos	6 (10,5%)	9 (15,8%)

Tanto no pré-ensino como no pós-ensino, constata-se que o intervalo 20–29 pontos inclui a maior percentagem de respostas dos estudantes. O facto de nesta região passar a reta de ajustamento à nuvem de pontos pode indiciar que os estudantes, apesar de não terem dado uma resposta precisa, tiveram a capacidade de estimar uma região onde se encontrava o valor da previsão pedida. O recurso intuitivo ao conceito de monotonia de uma função afim revela também que os estudantes ao estimarem a região tiveram em conta a tendência de variação das variáveis, ou seja, se elas variavam no mesmo sentido, em sentidos contrários ou a ausência de um padrão de variação.

Em relação ao pós-ensino, contrariamente às nossas espectativas, constatou-se que apenas 14 (24,6%) estudantes responderam corretamente à questão. Estes estudantes, por observação do diagrama de dispersão, estimaram os valores das variáveis e obtiveram, de seguida, a equação da reta de regressão para estimar o número de pontos marcados pelo jogador, sendo conhecido o seu tempo de jogo. O exemplo a seguir elucida o que acabamos de referir.



Tempo de jogo (x)	17	23	45	47	48	55	55	56	58	60	67	72
Pts marcados (y)	14	7	37	17	37	28	32	26	37	43	47	38

$\bar{Y} = a + b\bar{X}$

$a = \bar{Y} - b\bar{X}$

$\bar{X} = 50,25$

$\bar{Y} = 30,25$

$b = \dfrac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}$

$a = 30,25 - 0,613 \cdot 50,25$

$a = 30,25 - 30,80$

$a = -0,55$

$b = \dfrac{12 \cdot 20006 - 603 \cdot 363}{12 \cdot 33179 - 363.609}$

$b = \dfrac{240072 - 218889}{398148 - 363609}$

$b = \dfrac{21183}{34539} = 0,613$

$y^* = a + bx$

$y^* = -0,55 + 0,613x$

Para $x = 50 \Rightarrow y^* = -0,55 + 0,613 \cdot 50 \Rightarrow y^* = 30$

R: Espera-se que o jogador marque 30 pontos.

Figura 2. Resolução da questão c) pelo estudante E16 no pós-ensino.

Os restantes estudantes, 17 (29,8%) no pré-ensino e 16 (28,1%) no pós-ensino, não apresentaram qualquer valor, argumentando que era difícil determinar o valor pretendido porque as variáveis não estavam relacionadas linearmente, tal como mostra a resposta do estudante E_{55} no pós-ensino: "Não havendo relação linear entre o tempo de jogo e o número de pontos marcados, não se pode estimar o número de pontos que um jogador que teve 50 minutos em campo pode marcar". Para além da adesão à conceção determinista, presume-se que as respostas dadas por estes estudantes foram muito condicionadas pela resposta dada pelos mesmos na alínea b), pois a maior parte dos estudantes que deram esta resposta afirmaram na alínea b) que não existia relação entre as variáveis pelo facto de existirem outros fatores diferentes do tempo que podem influenciar a variável dependente (número de pontos marcados).

Do pré-ensino para o pós-ensino, as alterações das respostas dos estudantes residiram apenas na resposta correta, que foi obtida apenas no pós-ensino.

Conclusão

Esta questão aqui apresentada diz respeito à associação estatística e correlação linear de variáveis quantitativas representadas num diagrama de dispersão. Nesta situação, o estudo das estratégias dos estudantes permitiu-nos relacioná-las com o tipo de respostas (respostas corretas, parcialmente corretas e incorretas) e constituíram-se como indicadores das conceções subjacentes às avaliações de associação estatística. De entre essas estratégias, porque conduziram a respostas corretas e parcialmente corretas, há que destacar a tendência de variação dos pontos do gráfico de dispersão, a avaliação global da dispersão da nuvem de pontos e o ajustamento de uma reta à nuvem de pontos.

Já no caso das estratégias e argumentos incorretos, tais como a utilização de pontos isolados do gráfico de dispersão, a atribuição da associação a outras variáveis distintas das explicitadas no problema e o recurso a teorias prévias, elas foram usadas para justificar a independência. Essas estratégias permitiram identificar conceções erradas de associação estatística dos estudantes, designadamente: conceção determinística; conceção local; conceção causal e correlação ilusória (Chapman & Chapman, 1982; Estepa & Batanero, 1996).

Os resultados apresentados, à semelhança do que se verificou nas outras questões do estudo, permitem concluir que, apesar de os estudantes terem passado pelo ensino formal de conteúdos sobre associação estatística e regressão linear, a maior parte deles manteve as suas estratégias e conceções, baseadas fundamentalmente na leitura dos pontos do diagrama de dispersão e na identificação da relação de linearidade entre as variáveis ou da sua não existência. Do pré-ensino para o pós-ensino, a maior alteração nas respostas dos estudantes verificou-se no recurso à reta de regressão para estimar um valor pretendido, com a consequente diminuição do recurso à estimação do valor através de intervalos.

O reduzido impacto do ensino nas conceções de associação estatística confirma a resistência dessas conceções à mudança, as quais pela sua natureza tácita se tornam muito difíceis de alterar numa curta intervenção e na ausência de uma clara intencionalidade (Thompson, 1992). Resultados semelhantes foram também obtidos por Fernandes (1990), agora no âmbito de conceções erradas em probabilidades.

Referências bibliográficas

Chapman, L. J. & Chapman, J. P. (1982). Test results are what you think they are. In D. Kahneman, P. Slovic & A.Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty: heuristics and biases* (pp. 239-248). Cambridge: Cambridge University Press.

Curcio, F. R. (1989). *Developing graph comprehension: elementary and middle school activities*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Estepa, A. & Batanero, C. (1996). Judgments of correlation in scatter plots: Students' intuitive strategies and preconceptions. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 4, 25-41.

Estepa, A. & Batanero, C. (1995). Conceptiones iniciales sobre la asociación estadística. *Enseñanza de las Ciencias*, 26(2), 257–270.

Estepa, A. (2008). Interpretación de los diagramas de dispersión por estudiantes de bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias*, 13(2), 155-170.

Falk, R. (1986). Conditional probabilities: insights and difficulties. In R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of Second International Conference on Teaching Statistic* (pp. 292-297). Victoria, BC: University of Victoria.

Fernandes, J. A. (1990). *Concepções erradas na aprendizagem de conceitos probabilísticos*. Dissertação de mestrado, Universidade do Minho, Braga, Portugal.

Landewehr, J. & Watkins, A. E. (1986). *Exploring data*. Palo Alto, CA: Dale Seymour.

Ministério da Educação (2001a). *Programa de Matemática A (10º ano)*. Lisboa: Autor.

Ministério da Educação (2001b). *Programa de Matemática B (10º ou 11º anos)*. Lisboa: Autor.

Ministério da Educação (2001c). *Programa de Matemática Aplicada às Ciências Sociais*. Lisboa: Autor.

Thompson, A. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. In: Grouw, D. A. (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 127-146). New York: Macmillan.

Tversky, A. & Kahneman, D. (1982). Causal schemas in judgment under uncertainty. In D. Kahneman, P. Slovic & A.Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty: heuristics and biases* (pp. 117-128). Cambridge: Cambridge University Press.

EL LENGUAJE SOBRE LA CORRELACIÓN Y REGRESIÓN: UN ESTUDIO DE DOS LIBROS DE TEXTO

M. Magdalena Gea, J. Miguel Contreras, Pedro Arteaga y Gustavo R. Cañadas
Universidad de Granada
mmgea@ugr.es

Resumen

Este trabajo presenta un análisis del lenguaje matemático utilizado en el tema de correlación y regresión en dos libros de texto españoles de Bachillerato. Se analizan los términos verbales, símbolos y expresiones algebraicas, representaciones tabulares y gráficas. Se concluye la complejidad del lenguaje matemático y su diferencia entre los textos y se observan imprecisiones que pueden inducir conflictos semióticos en los estudiantes.

Palabras-clave: correlación y regresión, análisis de textos, lenguaje matemático

Introducción

La correlación y regresión son conceptos fundamentales, pues extienden la idea de dependencia funcional a variables estadísticas. Sin embargo, la investigación previa ha descrito sesgos de razonamiento y dificultades asociadas a su comprensión (ver, por ejemplo, Sánchez Cobo, Estepa y Batanero (2000); Estepa (2008) y Zieffler y Garfield, (2009).

La enseñanza de estas nociones, en España, aparece en el Bachillerato, en las asignaturas *Matemáticas I* y *Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales I,* de las modalidades de *Ciencias y Tecnología* y *Humanidades y Ciencias Sociales*, respectivamente (MEC, 2007). Los contenidos para ambas asignaturas son similares, en esta última, se especifica (en el bloque 3: "Probabilidad y estadística"): "Distribuciones bidimensionales. Interpretación de fenómenos sociales y económicos en los que intervienen dos variables a partir de la representación gráfica de una nube de puntos. Grado de relación entre dos variables estadísticas. Regresión lineal. Extrapolación de resultados" (MEC, 2007, p. 45475).

En este trabajo nos hemos interesado por el lenguaje con que los libros de texto presentan las nociones de correlación y regresión en dicho nivel educativo. El profesor facilita el aprendizaje con diversos recursos, y destacamos el libro de texto, dada su relevancia en la exposición y desarrollo de las nociones matemáticas, y el rol que ocupa en el proceso de enseñanza y aprendizaje (Ortiz, 1999; Azcárate y Serradó, 2006). Como señalan Caserio, Guzmán y Vozzi (2011), es necesario analizar los elementos que pueden incidir en la actitud de los estudiantes en cuanto al estudio de las matemáticas, siendo de gran interés prestar atención al uso que se realiza del libro de texto así como a las condiciones y situaciones didácticas que se les ofrecen.

Los objetivos que nos planteamos son (a) Mostrar el lenguaje matemático con que se desarrollan las nociones de correlación y regresión en los libros seleccionados, que repercute en la riqueza conceptual y la complejidad de los significados de los conceptos matemáticos subyacentes; (b) Mostrar cómo dos textos pensados para el mismo nivel educativo presentan el mismo tema y (c) Ofrecer una reflexión en cuanto a los posibles conflictos cognitivos que en la presentación en los textos pueda inducir a los estudiantes que usen estos recursos.

Fundamentos y método

La presente investigación se apoya en el marco teórico desarrollado por Godino y cols. (Godino y Batanero, 1994; Godino, Contreras y Font, 2006; y desarrollos posteriores). Partiendo de la siguiente teorización ontológica de la ciencia matemática:

> "actividad de resolución de problemas socialmente compartida, bajo un lenguaje simbólico y sistema conceptual lógicamente organizado." (Godino, Batanero y Font, 2007, p. 129).

el Enfoque Onto-semiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS) considera, que un objeto matemático emerge de los sistemas de prácticas operativas y discursivas que desarrolla un sujeto (persona o institución) en la actividad de resolución de problemas, mediada por el lenguaje en una determinada institución (socialmente compartida). El sentido que el EOS dota al término objeto matemático no es nada simplista, abarcando los elementos presentes en la situación-problema así como a los propios medios expresivos y argumentativos utilizados en su resolución. En cuanto al análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de un objeto matemático, se ofrece una primera clasificación de elementos básicos de significado inherentes a su tratamiento como son la propia situación-problema, el lenguaje, los conceptos o definiciones, las proposiciones, los procedimientos y los argumentos. En la presente investigación nos centramos en uno de estos elementos como es el lenguaje, interesados por el tratamiento que a dicho elemento se ofrece en dos libros de texto.

Destacamos la importancia del análisis de los libros de texto porque nos permite observar algunos resultados de la *transposición didáctica* (Chevallard, 1991), esto es, los cambios que experimenta el conocimiento matemático cuando es adaptado para pasar a ser objeto de enseñanza. Cuando se construye el saber matemático, este se encuentra personalizado y contextualizado por las situaciones y problemas que han dado su origen (de la vida real o del propio saber matemático). Sin embargo, el productor del saber, cuando lo comunica, lo despersonaliza y lo descontextualiza, quedando oculto este proceso de generación. Éste se comunica de manera limpia, secuenciada y a veces, las transformaciones y aplicaciones que sufre, pueden hacer que pierda su identidad, implicando, en ciertos casos, la creación de diversos objetos a exigencia de este proceso (Chevallard, 1991).

Los estudios sobre la presentación de la correlación y regresión en los textos son muy escasos. El principal de ellos es debido a Sánchez Cobo (1998) quien analiza los libros de texto de tercer curso de Bachillerato, nivel en que se introducían estas nociones (sistema educativo español hasta la LOGSE, 1990). En cuanto al lenguaje, los resultados de su investigación muestran una tendencia formalista en la presentación del tema, utilizándose mayoritariamente ejemplos basados en representaciones gráficas en su desarrollo. Se destaca además, un fuerte sesgo en las nubes de puntos presentadas (dos tercios ejemplifican casos de asociación directa, siendo poco significativo los dedicados a la asociación inversa o independencia). En cuanto a los objetos matemáticos implicados en la presentación del tema, cabe destacar la poca presencia de objetos como el coeficiente de determinación, valores atípicos, ó el valor predictivo de la regresión.

Como complemento a esta investigación, Lavalle, Micheli y Rubio (2006) realizan un análisis de la enseñanza de la correlación y regresión mediante la revisión de libros de texto en un nivel similar al que tratamos en la presente investigación. Cabe destacar el enfoque con que se presentan las nociones tratadas, siguiendo un enfoque más socioconstructivista o conductista, con un nivel de profundidad, en general, adecuado, donde se sigue proponiendo una mayor cantidad de actividades bajo una asociación directa que inversa.

Los estudios precedentes analizan el contenido matemático de los libros de texto en cuanto al tratamiento de las nociones de correlación y regresión sin acercarse al lenguaje matemático utilizado en los textos, que fue estudiado por Ortiz (1999) y Ortiz, Batanero y Serrano (2001) para el caso de la probabilidad. Ofrecen resultados a grandes rasgos en cuanto a las representaciones tabular o gráfica utilizadas, a los objetos matemáticos presentes en el tema así como al enfoque de su presentación. En lo que sigue presentamos el método, resultados y conclusiones de nuestro estudio.

Método

Se trata de una investigación cualitativa, pues en ella se incluyen:

> "la inducción analítica, el análisis de contenido, la semiótica y ciertas manipulaciones de archivos, informáticas y estadísticas" (Kirk y Miller, 1986, p. 10).

Se mantiene una concepción global fenomenológica, que trata de identificar la naturaleza profunda de las realidades (en este caso el libro de texto) (Cook y Reichardt, 2000). Es una investigación aplicada ya que está encaminada a obtener criterios para el desarrollo curricular, y descriptiva puesto que no se manipula ninguna variable, sino que se limita a observar y describir los fenómenos.

La muestra utilizada (Anexo) es intencional, por tanto no se aspira a generalizar sino que se busca la comparabilidad y traducibilidad (Goetz y Lecompte, 1998), con lo que la responsabilidad de la generalización no está en el investigador, sino en el lector del informe resultante. Los criterios de selección fueron: que incluyesen la correlación y regresión lineal en el tratamiento del estudio de la variable estadística bidimensional, el nivel educativo y un uso diferenciado en el lenguaje utilizado en la presentación del tema. De dichos textos se realizó un análisis de contenido temático (Ghiglione y Matalón, 1989), donde se recurre a la lógica y al conocimiento del investigador sobre el tema, para resumir el contenido del texto, definir categorías y verificar su validez. Determinando, para cada uno de los textos, los términos básicos cuyo dominio cabe esperar en el estudiante, los términos específicos para los que se suele precisar definición, así como la notación simbólica o las representaciones tabulares o gráficas utilizadas en el desarrollo del tema. En las siguientes secciones se presentan los resultados obtenidos.

Términos y expresiones verbales

Encontramos una variedad de términos, que hemos dividido en dos grupos; por un lado los términos básicos que debe conocer el estudiante al iniciar el tema y por otro, los términos específicos asociados al tratamiento de la correlación y regresión. Además, hemos clasificado los términos coloquiales utilizados en los textos analizados, con significados específicos.

Entre los *términos básicos* hemos encontrado los siguientes: amplitud de intervalo; ángulo entre dos rectas; área de un rectángulo; área de un punto; bisectriz de dos rectas; coordenadas de un punto; datos agrupados o no agrupados; desviación típica; distancia; distribución; ecuación; ejes cartesianos; estimación; fiabilidad; frecuencia absoluta;

individuo; intervalo de clase; marca de clase; máximo ó mínimo; media aritmética; método de reducción al absurdo; muestra; ordenada de un punto; parámetro; pendiente de una recta; población; prisma; probabilidad; proporcionalidad; recta; rectas coincidentes ó perpendiculares; subíndice; sumatorio; tabla de datos (frecuencias); tendencia; valor absoluto; valor de la variable; variable estadística unidimensional, cualitativa, cuantitativa, continua, discreta; varianza; volumen.

Por otro lado se incluyen los siguientes t*érminos específicos:* centro de gravedad/punto medio de la distribución bidimensional; coeficiente de correlación lineal de Pearson; coeficiente de regresión; correlación; correlación espuria; correlación curvilínea ó lineal; correlación fuerte, débil o nula; correlación perfecta; correlación positiva o negativa (directa o inversa); covarianza; diagrama de dispersión; diagrama de barras tridimensional; distribución bidimensional; distribución marginal; frecuencia marginal; histograma tridimensional; incorrelada; independencia; método de mínimos cuadrados; nube de puntos; pictograma tridimensional; recta de regresión; recta de regresión de *Y* sobre *X*; recta de regresión de *X* sobre *Y*; regresión; regresión lineal; relación/dependencia estadística; relación/dependencia funcional; tabla de doble entrada; valor esperado/predicción; variación conjunta; variable bidimensional.

Por último, en la Tabla 1 se presentan los *términos coloquiales con significado matemático* utilizados en los textos. Aunque en la mayoría de los casos se trata sólo de utilizar "sinónimos" que disminuyan la formalidad del enunciado matemático, en ocasiones estos términos pueden llevar a la imprecisión o provocar incluso conflictos semióticos.

Tabla 1. Términos coloquiales con significado matemático en los textos

Término coloquial	Término matemático al que alude
Estatura normalita ([T1], p.225)	Estatura media
Grosso modo ([T1], p. 226 y p. 231)	Relación estadística y correlación
Según lo apretados que estén los puntos ([T1], p. 227) Grado de "apretura" ([T1], p. 228)	Dispersión
A ojo ([T1], p. 230, p. 232, p. 238)	Por aproximación o ajuste
Rectas que "se acoplan bien" a la nube de punto ([T1], p. 230)	Ajuste lineal a la nube de puntos casi perfecto
La recta de regresión se amolda a la nube de puntos ([T1], p. 231)	Ajuste lineal a la nube de puntos
"Buenas" estimaciones ([T1], p. 231)	Estimaciones fiables
Hinchar los puntos proporcionalmente a su frecuencia ([T1], p. 233)	Representar circunferencias con diámetro proporcional a la frecuencia
Los puntos de la nube (…), están completamente en desorden. ([T2], p.222)	Están muy dispersos

Notación simbólica y expresiones algebraicas

Las notaciones simbólicas se utilizan para referirse a conceptos o propiedades. Su relevancia en la matemática es debida a que el simbolismo permite una comunicación comprimida entre individuos, pudiendo trabajar a un alto nivel de complejidad, (ver Tabla 2). Al igual que Ortiz (1999), hemos encontrado notación funcional y el uso de subíndices y superíndices, que con frecuencia son variables.

En los textos analizados se incluyen numerosas expresiones algebraicas, es decir, combinaciones de letras, números y signos de operaciones que permiten traducir al lenguaje matemático expresiones del lenguaje habitual, como, por ejemplo, $\frac{\sum x_i y_i}{n} - \bar{x}\cdot\bar{y} = \frac{\sum x_i y_i f_i}{\sum f_i} - \bar{x}\cdot\bar{y}$. Las letras suelen representar cantidades desconocidas, que pueden ser variables o incógnitas. Son frecuentes para dar la fórmula de la covarianza, los coeficientes de correlación y regresión o la expresión de la recta de regresión.

Tabla 2. Notación simbólica presente en los textos analizados

Notación	Concepto representado	T1	T2
$\sum$	Sumatorio	x	
$\sum_{i=1}^{n}$ $\sum_{i=1}^{n}$ $\sum_{j=1}^{m}$	Sumatorio o doble sumatorio con subíndices		x
x_i	Valor de la variable X en la modalidad i	x	x
n_i ó f_i	Frecuencia absoluta del valor x_i de la variable aleatoria X	x	x
N	Total de datos de una distribución	x	x
x_{ij}	Valor de una variable bidimensional X en su fila i columna j		x
(X, Y)	Variable bidimensional		x
$x_{máx}$ ó $x_{mín}$	Valor máximo ó mínimo de la variable aleatoria X		x
n_{ij}	Frecuencia absoluta del valor (x_i, y_i)		x

Notación	Concepto representado	T1	T2
(x_i, y_i)	Valor de la variable bidimensional	x	
(x_i, y_j)	Valor de la variable bidimensional en la modalidad i, j		x
$\bar{x}$	Media de una variable aleatoria X	x	x
$(\bar{x}, \bar{y})$	Centro de gravedad	x	x
x_i^2	Valor de la variable X en la modalidad i, al cuadrado	x	x
σ_x	Desviación típica de una variable aleatoria X	x	x
σ_x^2	Varianza de la variable aleatoria X	x	x
σ_{xy}	Covarianza de las variables X e Y	x	x

Notación	Concepto representado	T1	T2
r	Coeficiente de correlación lineal/Coeficiente de Pearson	x	x
$\lvert\cdot\rvert$	Función valor absoluto	x	
m_{yx}	Pendiente de la recta de regresión de Y sobre X	x	
d_i d_i'	Distancia entre las ordenadas o las abcisas de un punto y una recta	x	

Notación	Concepto representado	T1	T2
$\hat{x}(y_0)$	Valor estimado de x correspondiente a y_0	x	
$\hat{y}(x_0)$ ó $\hat{y}_{x_0}$	Valor estimado de y correspondiente a x_0	x	x
$\approx$	Aproximadamente igual a…		x

Representación tabular y gráfica

Un primer paso en el estudio de la relación entre variables sería construir una representación en la que se organicen los datos recogidos. En la Tabla 3 se presentan las encontradas en los libros analizados.

De acuerdo a Ortiz (1999), las tablas estadísticas son un soporte usado con frecuencia para presentar a los estudiantes datos empíricos. Ofrecen una estructuración particular del espacio, presentando una parrilla no de números en sí mismos, sino de las relaciones entre las diferentes entradas en la tabla. En los libros analizados la representación tabular más utilizada es aquella en la que cada fila/columna de la tabla representa los datos relativos a las variables de estudio observadas en cada uno de los individuos de la muestra. Además es común, avanzado el tema, que se vayan añadiendo columnas según la necesidad de los cálculos (cálculo de la covarianza, correlación lineal, etc.).

Tabla 3. Representaciones en los textos analizados

Conceptos	T1	T2
Listado de datos		En ejemplos y ejercicios
Tabla de doble entrada	Presencia anecdótica; uso preferente tabla simple de columnas /filas adosadas	Desarrollo del tema basado en tablas de doble entrada
Diagrama barras tridimensional	Definición imprecisa	Define correctamente
Pictograma tridimensional		Define correctamente
Histograma tridimensional	Definición imprecisa	Define correctamente
Diagrama de dispersión	A través de ejemplos; diferencia tipo, sentido e intensidad	Definición apropiada; diferencia tipo, sentido e intensidad
Diagrama de burbujas	No diferencia del diagrama de dispersión	No diferencia del diagrama de dispersión

Los textos analizados reconocen la relevancia de esta representación, aunque el tratamiento varía en cada uno de ellos. El texto [T2] comienza describiendo los pasos para construir una tabla de doble entrada, tanto para datos discretos como continuos (Figura 1) desarrollando el tema con un uso generalizado de la misma. Incluso presenta el procedimiento para agrupar los datos de la distribución en intervalos de clase.

Tablas de doble entrada para datos no agrupados

Los datos obtenidos al estudiar las variables X = *número de goles marcados* e Y = *número de goles recibidos*, en 40 partidos jugados por el equipo campeón de la liga de fútbol sala, son:

(5, 4), (4, 2), (6, 3), (4, 4), (3, 2), (6, 4), (3, 1), (4, 2), (4, 2), (6, 4), (4, 2), (5, 3), (3, 1), (2, 2), (4, 3), (3, 1), (4, 2), (5, 3), (5, 3), (4, 2), (3, 3), (1, 1), (4, 2), (5, 3), (3, 2), (5, 3), (6, 4), (4, 2), (5, 3), (2, 1), (3, 2), (6, 4), (5, 3), (4, 2), (4, 2), (3, 3), (3, 1), (2, 2), (6, 4), (5, 3)

Elaboramos la tabla de doble entrada (tabla 2) siguiendo estos pasos:

— Construimos una tabla con tantas columnas como valores tome X y con tantas filas como valores tome Y en la distribución.

Si observamos los datos, X toma los valores 1, 2, 3, 4, 5 y 6, e Y toma los valores 1, 2, 3 y 4. En este caso, la tabla constará de 6 columnas y 4 filas.

— Hallamos la frecuencia absoluta de cada par de valores de la variable (X, Y). Para ello contamos el número de veces que se repite ese par de valores en la distribución y lo anotamos en la casilla correspondiente.

Así, por ejemplo, observa que el par (5, 4) aparece una sola vez; el (4, 2), diez veces; y el (6, 1), ninguna.

KARL PEARSON

Matemático británico (1857-1936).

Fue profesor de la Universidad de Londres, donde dirigió el Francis Galton Laboratory.

Desarrolló una intensa investigación sobre la aplicación de los métodos estadísticos en la biología.

Fundó en 1902 la revista *Biometrika*, desde entonces una de las más importantes en el campo de la estadística.

Y \ X	1	2	3	4	5	6	Total
1	1	1	4	0	0	0	6
2	0	2	3	10	0	0	15
3	0	0	2	1	8	1	12
4	0	0	0	1	1	5	7
Total	1	3	9	12	9	6	40

Tabla 2.

Y \ X	[0, 2) 1	[2, 4) 3	[4, 6) 5	[6, 8) 7	[8, 10) 9	Total
[0, 2) 1	2	0	0	0	0	2
[2, 4) 3	1	3	1	0	0	5
[4, 6) 5	0	1	3	3	1	8
[6, 8) 7	0	1	1	3	0	5
[8, 10) 9	0	0	0	2	3	5
Total	3	5	5	8	4	25

Tabla 3.

Elaboramos a continuación la tabla de doble entrada (tabla 3) siguiendo estos pasos:

— Construimos una tabla con tantas columnas como intervalos de clase hayamos tomado para X, y tantas filas como intervalos de clase hayamos tomado para Y. En este caso, la tabla constará de 5 filas y 5 columnas.

A continuación, anotamos, debajo de cada intervalo, su marca de clase.

— Contamos los datos de la distribución cuyos valores de X e Y pertenezcan, respectivamente, a cada intervalo considerado (**frecuencia absoluta**) y anotamos el número obtenido en la casilla correspondiente.

Figura 1. Proceso de construcción de una tabla de doble entrada (datos agrupados y no agrupados) ([T2], pp. 217-218).

Por el contrario, el texto [T1] plantea la enseñanza con tablas en que las variables se apilan en filas/columnas y se limita a describir la tabla de doble entrada al final del tema, añadiendo un ejercicio resuelto en que se debe calcular el coeficiente de correlación lineal a partir de los datos representados en una tabla y planteando dos ejercicios en la sección de profundización en el tema (apartado final del texto en que se invita al estudiante a profundizar en el estudio de los temas tratados)..

La representación gráfica alcanza un estatus privilegiado en el tema, tanto que el modo habitual de definir la correlación es mostrarla mediante un diagrama de dispersión y a partir de él exhibir sus propiedades (intensidad y signo) y el modo habitual de tratar la regresión es mostrarla mediante el trazado de la recta que mejor se ajuste a dicha nube de puntos. En cuanto a su elaboración, el texto [T1] tan sólo describe brevemente cómo se construye el diagrama de dispersión para una tabla de filas/columnas apiladas, indicando que cada dato se corresponde con las coordenadas de un punto en el eje cartesiano, y alude, al final del tema, al modo de representar un diagrama de dispersión para una tabla de doble entrada. Presentamos a continuación (Figuras 2 y 3) los procedimientos que el texto [T2] señala para las gráficas que muestra.

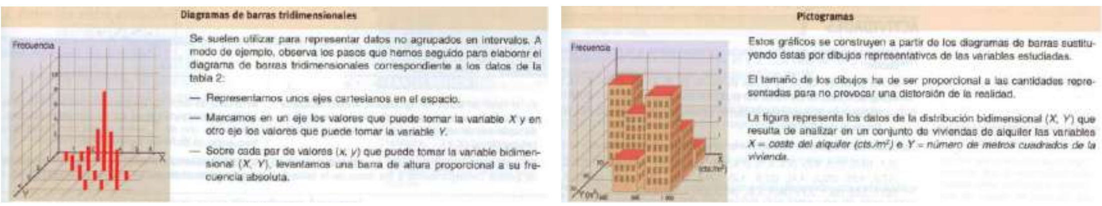


Figura 2. Diagrama de barras tridimensional y pictograma ([T2], p.219)

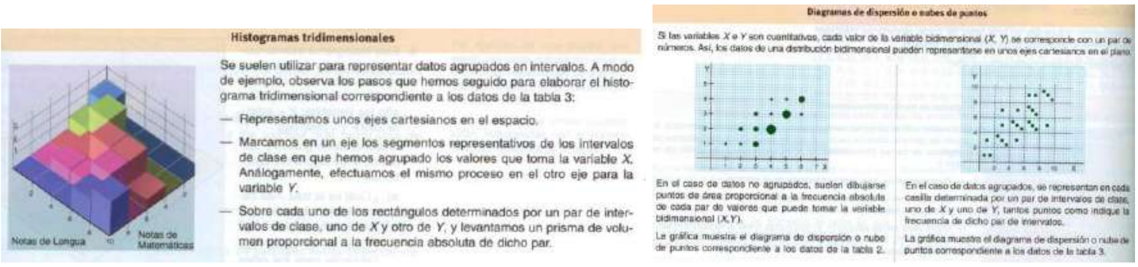


Figura 3. Histograma tridimensional, diagrama de burbujas y dispersión ([T2], pp. 219- 220)

Diagramas de dispersión o nube de puntos. Es la representación gráfica más utilizada en los textos analizados, pues es la representación en coordenadas cartesianas de una variable estadística bidimensional (Sánchez Cobo, 1998). Permite ver la intensidad de la relación (mayor o menor dispersión de la nube de puntos), si la relación es o no lineal (por medio de su tendencia) así como el signo de la correlación, en caso de relación lineal (Figura 4). El texto [T1] la introduce con ejemplos, presentando una definición más completa cuando se describe la tabla de doble entrada. Así sugiere que la representación de cada dato debe "hincharse" proporcionalmente a su frecuencia absoluta (ver Figura 4). La definición que ofrece el texto [T2] es más apropiada ya que parte del tratamiento de una tabla de doble entrada. Cabe señalar que en los textos analizados no se hace mención a los diagramas de burbuja, y son considerados como una extensión de los diagramas de dispersión ([T1]) o bien como un diagrama de dispersión propiamente dicho ([T2]). En general, los diagramas de dispersión que se presentan vienen acompañados de la recta de regresión, reflejando la tendencia de variación conjunta de las variables que conforman la distribución bidimensional

Diagrama de barras tridimensional. El texto [T1] realiza una aproximación imprecisa a este gráfico, pues no lo diferencia del histograma, por el contrario, el texto [T2] lo define apropiadamente como un gráfico tridimensional utilizado para representar datos bidimensionales no agrupados en intervalos, donde para cada dato se levanta una barra de altura proporcional a su frecuencia absoluta (ver Figura 3). Sánchez Cobo no hace referencia a este diagrama.

Pictograma tridimensional. Sólo el texto [T2] define este gráfico, que no aparece en el estudio de Sánchez Cobo (1998) y es tratado como una variante del diagrama de barras donde cada barra es sustituida por dibujos (ver Figura 2).

Histograma tridimensional. Con esta noción ocurre algo parecido que con el diagrama de barras tridimensional, tampoco descrito por Sánchez Cobo. El texto [T1] realiza una aproximación imprecisa a esta noción, que es correcta en el texto [T2], donde se define como un gráfico tridimensional utilizado para representar datos bidimensionales agrupados en intervalos y donde para cada par de intervalos de clase se levanta un prisma de volumen proporcional a su frecuencia absoluta (ver Figura 3).

Conflictos semióticos

En los libros hemos encontrado asignaciones imprecisas de significado, susceptibles de provocar en el estudiante un conflicto semiótico si el profesor no está atento al uso que de ellas pueda llevarse a cabo. A continuación presentamos algunos de ellos.

Confusión de un concepto con su representación tabular y/o gráfica. En el texto [T1], se define una *distribución bidimensional,* en dos momentos. En primer lugar se le atribuye el significado a través de una representación gráfica y tabular, por lo que el estudiante podría confundir su representación (gráfica o tabla) con el objeto (distribución). Avanzado el tema, se ofrece una definición verbal. Desde nuestro punto de vista, hubiese sido preferible completar el ejemplo en el mismo punto del texto. Algo parecido ocurre con el uso de la noción de *distribución marginal* de X e Y, donde se utiliza dicha noción como simple etiquetado de una tabla de frecuencias y a diferencia del caso anterior ni se define dicha noción ([T1], p.237),a pesar de su importancia.

*Aplicar inapropiadamente las diferentes representaciones gráfica*s. *Histogramas y diagramas de barras tridimensionales.* Cuando en el texto [T1] se explica cómo representar gráficamente los datos de una tabla de doble entrada, no se identifica cada una de estas representaciones (Figura 4), lo que puede propiciar en el estudiante una confusión en el tratamiento del histograma y el diagrama de barras tridimensional o entre el diagrama de dispersión y el gráfico de burbujas. Y más aún en los primeros ya que la representación que se realiza es un histograma debiéndose haber representado un diagrama de barras dado que la variable es cuantitativa discreta. Aunque la somera explicación de su construcción sea correcta, se debieran precisar los nombres de los gráficos representados.

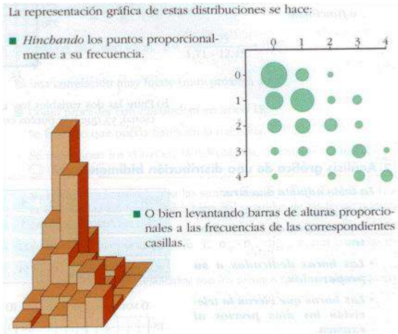


Figura 4. Representación gráfica de una distribución bidimensional ([T1], p. 233).

Lenguaje algebraico confuso. Cuando se introduce la covarianza de modo formal, es recomendable utilizar una formulación clara, que venga acompañada de todas las expresiones equivalentes que se pretendan utilizar a lo largo del tema. El texto [T2] utiliza la siguiente formulación:

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum_{i,j}\left(x_i - \bar{x}\right)\cdot\left(y_j - \bar{y}\right)\cdot n_{ij}}{N} = \frac{\sum_{i,j} x_i \cdot y_j \cdot n_{ij}}{N} - \bar{x}\cdot\bar{y}$$

acompañada, de unas anotaciones para hacerla más entendible (Figura 5). Además, se incluyen algunas anotaciones en una sección denominada “Preparación de la unidad” relativas al manejo del sumatorio. El problema radica en el texto [T1] que al rehusar del formalismo del sumatorio, potencia un conflicto en el tratamiento de un problema resuelto (Figura 6). Creemos que es debido al escaso uso que se hace de la tabla de doble entrada, porque al utilizar principalmente datos bidimensionales con frecuencia uno, la notación en las fórmulas puede simplificarse.

FÍJATE

Para simplificar la notación de sumatorios se suele utilizar:

$$\sum_{i=1}^{n} = \sum_{i} \qquad \sum_{j=1}^{m} = \sum_{j} \qquad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} = \sum_{i,j}$$

— x_i e y_j *son los valores que toman X e Y, en el caso de datos no agrupados, y las marcas de clase de los intervalos en que se agrupan los datos, en el caso de datos agrupados en intervalos.*

— n_{ij} *es la frecuencia absoluta de cada par de valores* (x_i, y_j).

— **N** *es el total de datos de la distribución.*

Figura 5. Aclaraciones a la fórmula de la covarianza ([T2], p. 224)

$y_i \backslash x_i$	0	1	2	3	4
0	24	6	1	0	0
1	11	19	2	3	0
2	7	8	6	2	0
3	2	3	3	7	1
4	1	0	2	4	5

COVARIANZA

Observamos en la tabla inicial los productos $x_i y_i$ y sus frecuencias:

$$\Sigma x_i y_i f_i = 1\cdot 1\cdot 19 + 1\cdot 2\cdot 2 + 1\cdot 3\cdot 3 + 2\cdot 1\cdot 8 + 2\cdot 2\cdot 6 + 2\cdot 3\cdot 2 + 3\cdot 1\cdot 3 + 3\cdot 2\cdot 3 + 3\cdot 3\cdot 7 + 3\cdot 4\cdot 1 + 4\cdot 2\cdot 2 + 4\cdot 3\cdot 4 + 4\cdot 4\cdot 5 = 330$$

$$\sigma_{xy} = \frac{\Sigma x_i y_i f_i}{\Sigma f_i} - \bar{x}\,\bar{y} = \frac{330}{117} - 1{,}16\cdot 1{,}5 = 1{,}08$$

COEFICIENTE DE CORRELACIÓN

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{1{,}08}{1{,}22\cdot 1{,}3} = 0{,}68$$

Figura 6. Cálculo del coeficiente de correlación lineal ([T1], p. 237)

Conclusiones

El análisis llevado a cabo del lenguaje utilizado en la presentación de la correlación y regresión en dos libros de texto, ofrece una información detallada de los términos, notación y representaciones empleadas en su desarrollo. En cuanto al uso de las diferentes representaciones de la correlación se advierte un enfoque mayoritariamente gráfico, donde generalmente se pide al estudiante pasar de un listado de datos a un gráfico, haciendo pocas actividades de traducción de otras representaciones consideradas por Sánchez Cobo (1998) o Lavalle, Micheli y Rubio (2006), esto es, entre las representaciones verbales, listado de datos o el coeficiente de correlación.

En los textos analizados, los diagramas de dispersión presentan varios tipos de correlación, no sólo la correlación directa e intensa, sino que los ejemplos y ejercicios suelen tratar el sentido y la intensidad de la correlación de modo equilibrado.

En cuanto a los posibles conflictos semióticos que se pueden presentar en el uso de los textos analizados, cabe señalar la imprecisión con que algunas representaciones son tratadas, tales como confundir un objeto con su representación gráfica, el diagrama de barras con el histograma tridimensional, ó el diagrama de dispersión con el gráfico de burbujas.

Advertimos en consecuencia, del riesgo de utilizar los textos analizados u otros en que se presenten problemas similares sin una consecuente reflexión, en primer lugar sobre los resultados presentados en este artículo, por ejemplo, el uso sesgado de la tabla de doble entrada podría repercutir en la formulación de la covarianza y coeficiente de correlación y convertirse en un obstáculo didáctico en el estudio de la variable bidimensional. Y en segundo lugar, porque existen sesgos o errores, dificultades y concepciones erróneas de los estudiantes descritos por la investigación sobre la correlación y regresión que pueden ser potenciados si no les prestamos atención. Por ejemplo, la dificultad con que los estudiantes ofrecen una definición apropiada a una distribución bidimensional, ya que Estepa (2007) señala que poco más de la mitad de estudiantes dan un significado adecuado a la misma. Otros ejemplos son los posibles errores que pueden presentar los estudiantes en el manejo de la fórmula de la covarianza cuando el lenguaje simbólico utilizado es impreciso; la presencia sesgada de ejercicios de traducción de la correlación de unas representaciones a otras; o las concepciones erróneas de unidireccionalidad (considerar sólo la existencia de correlación directa) y de causalidad (cuando sólo se considera dependencia entre variables si es atribuible una relación causal entre las mismas). Una discusión más extensa de estas y otras concepciones se encuentra en Estepa y Batanero (1995).

Creemos, que el profesorado, debería ser consciente de las limitaciones que presentan los libros de texto en cuanto al lenguaje en el tratamiento de la correlación y regresión, para poder ofrecer una enseñanza más significativa, adecuada al nivel curricular establecido, que soporte la construcción de nociones más avanzadas.

Referencias bibliográficas

Azcárate, P. & Serradó, A. (2006). Tendencias didácticas en los libros de texto de matemáticas para la Eso. *Revista de Educación*, *340*, 341-378.

Caserio, M., Guzmán, M. & Vozzi, A. M. (2011). Importancia del libro de texto en la producción de conocimientos. *Epsilon 28* (3), 27-45.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.

Cook, T. D. & Reichardt, C. S. (2000). *Métodos cualitativos y cuantitativos en investigación evaluativa.* Paideia.

Estepa, A. (2007). Caracterización del significado de la correlación y regresión de estudiantes de Educación Secundaria. *Zetetiké, 15* (28), 119 - 151.

Estepa, A. (2008). Interpretación de los diagramas de dispersión por estudiantes de Bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias 26* (2), 257-270.

Estepa, A. & Batanero, C. (1995). Concepciones iniciales sobre la asociación estadística. *Enseñanza de las Ciencias 13* (2), 155-170.

Ghiglione, R. & Matalón, B. (1989). *Las encuestas sociológicas*. México: Trillas.

Godino, J. D. & Batanero, C (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14* (3), 325-355.

Godino, J. D., Contreras, A. & Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, *26* (1), 39-88.

Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39* (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. & Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, *XXVII* (2), 221–252.

Goetz, J. P. & Lecompte, M. D. (1998). *Etnografía y diseño cualitativo en educación*. Morata: Madrid.

Kirk, J. & Miller, M. L. (1986). *Reliability and validity in cualitative research*. Newbury Park, CA: Sage University Paper.

Lavalle, A. L., Micheli, E. B. & Rubio, N. (2006). Análisis didáctico de regresión y correlación para la enseñanza media. *RELIME*, *9* (3), 383-406.

M.E.C. (2007). *Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura de bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas*. Madrid: Autor.

Ortiz, J. J. (1999). *Significado de los conceptos probabilísticos elementales en los textos de Bachillerato*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Ortiz, J. J., Batanero, C. & Serrano, L. (2001). El lenguaje probabilístico en los libros de texto. *Suma, 38*, 5-14.

Sánchez Cobo, F. T. (1998). *Significado de la correlación y regresión para los estudiantes universitarios*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Granada.

Sánchez Cobo, F. T., Estepa, A. & Batanero, C. (2000). Un estudio experimental de la estimación de la correlación a partir de diferentes representaciones. *Enseñanza de las Ciencias, 18* (2), 297-310.

Zieffler, A, & Garfield, J. (2009). Modeling the growth of students' covariational reasoning during an introductory statistics course. Statistics Education Research Journal, *8* (1), 7-31.

Anexo: Textos utilizados en el análisis

[T1]. Colera, J., Oliveira, M.J., García, R. & Santaella, E. (2008). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I*. Madrid: Grupo Anaya.

[T2]. Anguera, J., Biosca, A., Espinet, M.J., Fandos, M.J., Gimeno, M. & Rey, J. (2008). *Matemáticas I aplicadas a las Ciencias Sociales*. Barcelona: Guadiel.

COMPARAÇÃO DE PROBABILIDADES CONDICIONADAS NO CONTEXTO DE EXTRAÇÃO DE BOLAS DE UM SACO

Paulo Ferreira Correia
Escola Secundária/3 de Barcelos
ferreiracorreiapaulo@gmail.com

José António Fernandes
Universidade do Minho
jfernandes@ie.uminho.pt

Resumo

Neste texto apresentam-se alguns resultados de um estudo centrado nas ideias intuitivas de probabilidade condicionada e independência de alunos do 9º ano de escolaridade. Participaram no estudo 310 alunos do 9º ano de escolaridade, a quem foi aplicado um questionário com várias tarefas sobre probabilidade condicionada e independência, sendo aqui apenas explorada aquela que envolve a comparação de probabilidades na extração sucessiva, com e sem reposição, de duas bolas de dois sacos com quantidades proporcionais de bolas brancas e pretas. Em termos de resultados, salienta-se que as resoluções dos alunos revelam que estes possuem ideias intuitivas sobre os conceitos de probabilidade condicionada e independência no contexto estudado.

Palavras-chave: probabilidade condicionada; independência; alunos do 9º ano.

Abstract

This paper aims at describing some results of a study about intuitive ideas of conditional probability and independence of pupils attending the 9th grade. In the study participated 310 pupils of the 9th grade, who answered a questionnaire with several tasks on conditional probability and independence. In this paper we explore just one task that involves probability comparisons at drawing two balls, one after other, with and without replacement, from two bags with proportional amounts of white and black balls. In general, the results show that students have intuitive ideas about the concepts of conditional probability and independence in the context studied.

Keywords: conditional probability, independence, 9th grade pupils.

Introdução

As Probabilidades, para além de instrumento para a compreensão e uso de dados, também constituem um tema importante por direito próprio. Borovcnik e Kapadia (2010) destacam a importância das probabilidades em situações variadas: na tomada de decisões das pessoas em situações importantes, como testes médicos, veredictos de júris, investimentos, etc.; na compreensão de qualquer procedimento inferencial de

Estatística; como ferramenta para modelar realidades, tal como acontece na Física; e porque é um assunto interessante por si mesmo e merecedor de estudo.

A aprendizagem de conceitos relacionados com a incerteza deve ser introduzida logo nos primeiros graus de ensino (Falk, Falk & Levin, 1980). Em Portugal, com a introdução do novo Programa de Matemática do Ensino Básico (Ministério da Educação, 2007), o seu estudo passou a iniciar-se nos dois últimos anos do 1º ciclo, com a exploração de situações aleatórias que envolvem o conceito de acaso e a utilização do vocabulário próprio para as descrever.

Já no que respeita ao ensino formal de probabilidade condicionada, o NCTM (2003) restringe-o a alunos dos anos 9-12 e os programas de matemática portugueses preveem o ensino dos tópicos de probabilidade condicionada e independência apenas no ensino secundário.

Contudo, são vários os estudos (e.g., Jones, Langrall, Thornton & Mogill, 1999; Tarr & Lannin, 2005; Tarr, 1997; Watson, 1995) que referem que os tópicos de probabilidade condicionada e independência são de facto apropriados para o currículo de matemática do 3º ciclo do ensino básico. Também no estudo desenvolvido por Correia, Fernandes e Contreras (2011), os alunos do 9º ano que participaram no estudo revelaram possuir ideias intuitivas corretas sobre o conceito de probabilidade condicionada, quando os dados são apresentados na forma de tabela.

No mesmo sentido, tendo por propósito avaliar as possibilidades de ampliar o estudo do tema de Probabilidades no ensino básico, na presente investigação estudam-se as ideias intuitivas de alunos do 9º ano sobre probabilidade condicionada e independência no contexto de seleção ordenada com e sem reposição.

Investigação prévia

A conexão óbvia de probabilidades numéricas com frações e o raciocínio proporcional, leva os investigadores a imaginarem questões que comparem vários cenários, nos quais se altera tanto o número total de casos possíveis como a proporção de resultados favoráveis (Watson, 2005).

Segundo Spinillo (2002), o raciocínio proporcional envolve basicamente dois tipos de relações: relações de primeira ordem e relações de segunda ordem. Suponhamos que pedimos a uma criança que decida em qual de dois sacos A e B, ambos com fichas de duas cores (respetivamente, 3 azuis e 5 amarelas e 3 azuis e 3 amarelas), há maior proporção de fichas azuis. Nesta tarefa, as relações de primeira ordem (em cada saco) podiam ser estabelecidas de duas maneiras: (i) entre o número de fichas azuis e o número total de fichas (relação parte-todo); e (ii) entre o número de fichas azuis e o número de fichas amarelas (relação parte-parte). Estabelecidas as relações de primeira ordem, a criança precisa de as comparar para decidir em qual dos sacos há uma maior proporção de fichas azuis. Esta comparação entre as relações de primeira ordem constitui a relação de segunda ordem.

Green (1983) colocou a mesma questão a alunos do 7º ao 10º ano, mas agora alterando não só o número total de objetos mas também as proporções dos objetos de cada cor: um saco com 12 fichas pretas e 4 brancas e outro com 20 fichas pretas e 20 brancas. As estratégias utilizadas pelos estudantes para responderem (correta ou incorretamente) à questão "De que saco é mais provável extrair uma ficha preta?" foram: (i) escolha do recipiente com mais fichas; (ii) escolha do recipiente com maior número de fichas pretas; (iii) escolha do recipiente em que é maior a diferença entre o número de fichas pretas e o número de fichas brancas; (iv) escolha do recipiente com a maior razão entre o número de fichas pretas e o número de fichas brancas. No presente estudo, relativamente à estratégia (i), introduzimos a expressão "todo-todo" para designar as comparações estabelecidas entre o número total de elementos de dois conjuntos.

Num estudo com 26 alunos do 5º ano, Tarr (1997) observou que, na falta de uma forma standard para representar a probabilidade de um acontecimento, os estudantes são capazes de usar formas inventadas para representações probabilísticas em tarefas de probabilidade condicionada. Três dessas formas foram exibidas antes da instrução e uma durante a instrução, nomeadamente: (i) a descrição da probabilidade de um acontecimento usando o termo *chance* como a unidade de medida da probabilidade, centrando-se na comparação parte-parte, em particular no número de objetos do acontecimento e do seu complementar; (ii) a utilização de frequências relativas, razões ou alguma forma de *vantagens* para descrever a probabilidade de um acontecimento. Essencialmente, estes estudantes fazem comparações parte-parte para determinar se a probabilidade de um acontecimento foi ou não alterada; (iii) a comparação do número de ocorrências do acontecimento pretendido com o número total de resultados possíveis (mas não de uma forma convencional, referindo-se por exemplo a uma de dez hipóteses); e (iv) uma forma "híbrida" de probabilidade numérica, que combina percentagens e razões (observada na avaliação pós-instrução).

Quanto às dificuldades reveladas pelos alunos em situações de probabilidade condicionada destacam-se a predição do acontecimento mais frequentemente observado, sem atender à proporção da população (Shaughnessy, 1992) e o enviesamento de equiprobabilidade, mais especificamente, admitir que acontecimentos com caráter aleatório são por natureza equiprováveis (Lecoutre & Durand, 1988).

Método

No presente estudo pretendeu-se, fundamentalmente, avaliar as ideias intuitivas de alunos do 9º ano de escolaridade acerca da probabilidade condicionada e independência no contexto de extração de bolas de sacos.

Participaram no estudo 310 alunos do 9º ano de escolaridade, pertencentes a quatro escolas do Litoral Norte de Portugal, duas inseridas no meio urbano e duas em meio rural. As idades dos alunos variavam entre os 13 e os 17 anos, com 14 anos de média de idades (que é a idade normal de frequência do 9º ano); 51% dos alunos eram do sexo feminino e 49% do sexo masculino; as suas classificações na disciplina de Matemática, no final do 1º período do 9º ano, numa escala de 1 a 5, variavam entre 2 e 5, com uma média de 2,8; e 78,7% dos alunos não tinham qualquer repetência.

Foi aplicado aos alunos um questionário que, para além de algumas questões centradas na aquisição de informação pessoal, incluía várias tarefas sobre probabilidades, das quais trataremos neste texto apenas aquela que envolve a comparação de probabilidades na extração sucessiva, com e sem reposição, de duas bolas de dois sacos com quantidades proporcionais de bolas brancas e pretas.

O questionário foi aplicado em aulas dos alunos, de 90 minutos, no início do 2º período escolar de 2011/2012. Entretanto, os alunos tinham estudado os conteúdos de Probabilidades, previstos no programa da disciplina de Matemática do 9º ano no início do ano letivo (aspetos de linguagem e definições clássica e frequencista de probabilidade), que não faz referência à probabilidade condicionada e à independência.

Comparação de probabilidades condicionadas

Envolvendo a tarefa a comparação de probabilidades condicionadas, na análise das produções dos alunos considerámos os acontecimentos: A_1: "a primeira bola retirada do saco A é branca"; A_2: "a segunda bola retirada do saco A é branca"; B_1: "a primeira bola retirada do saco B é branca"; e B_2: "a segunda bola retirada do saco B é branca".

Tarefa. Considera dois sacos A e B com bolas brancas e bolas pretas. O saco A tem 10 bolas brancas e 20 bolas pretas. O saco B tem 100 bolas brancas e 200 bolas pretas. **1.** Retira-se, ao acaso, uma bola do saco **A** e uma bola do saco **B** e verifica-se que são ambas brancas. Depois de se **colocar** de novo estas bolas nos respetivos sacos, retira-se novamente uma bola de cada um dos sacos. Algum dos seguintes resultados é mais provável? **a)** Obter uma bola branca do saco **A**. **b)** Obter uma bola branca do saco **B**. **c)** É igualmente provável obter uma bola branca do saco **A** e do saco **B.** Justifica a tua resposta. **2.** Retira-se, ao acaso, uma bola do saco **A** e uma bola do saco **B** e verifica--se que são ambas brancas. **Sem colocar** de novo estas bolas nos respetivos sacos, retira-se novamente uma bola de cada um dos sacos. Algum dos seguintes resultados é mais provável? **a)** Obter uma bola branca do saco **A**. **b)** Obter uma bola branca do saco **B**. **c)** É igualmente provável obter uma bola branca do saco **A** e do saco **B**. Justifica a tua resposta.

Assim, na análise efetuada consideram-se as probabilidades condicionadas $P(A_2 \mid A_1)$ e $P(B_2 \mid B_1)$ como sendo as probabilidades dos acontecimentos A_2 e B_2 avaliadas num novo espaço amostral, que resulta do condicionamento da ocorrência dos acontecimentos A_1 e B_1 respetivamente (Hogg & Tanis, 1997).

Considera-se que dois acontecimentos são independentes se a ocorrência de um deles não altera a probabilidade de ocorrência do outro, ou seja, $P(A_2 \mid A_1) = P(A_2)$ e $P(B_2 \mid B_1) = P(B_2)$. Nesta perspetiva, consideramos a independência como um caso especial de probabilidade condicionada.

Na questão 1, por se tratar de extrações sucessivas com reposição, os acontecimentos associados à primeira e segunda extrações são independentes e na segunda extração os sacos A e B continuam a ter quantidades proporcionais de bolas brancas e pretas. Na questão 2, por se tratar de extrações sucessivas sem reposição, os acontecimentos associados à primeira e segunda extrações são dependentes e na segunda extração os sacos A e B deixam de ter quantidades proporcionais de bolas brancas e pretas.

Da Tabela 1 destaca-se a razoável percentagem de alunos que responderam corretamente à questão 1, a diminuição acentuada da percentagem de respostas corretas à questão 2, essencialmente em detrimento da resposta c), e o ligeiro aumento na percentagem de não respostas da questão1 para a questão 2.

Tabela 1 – Distribuição dos alunos (em %) segundo as opções de resposta na tarefa ($n = 310$)

Respostas	Percentagem	
	Questão 1	Questão 2
a) Obter uma bola branca do saco A.	5,8	7,4
b) Obter uma bola branca do saco B.	26,4	48,1*
c) É igualmente provável obter uma bola branca do saco A e do saco B.	66,5*	40,0
Não responde	1,3	4,5
Total	100	100

* Percentagem de respostas corretas.

Da observação da Tabela 2 conclui-se que da questão 1 para a questão 2 há um aumento para mais do dobro no número de alunos (de 21 para 49) que não justificam a opção escolhida.

Tabela 2 – Justificações apresentadas pelos alunos na tarefa

Justificações	Questão 1		Questão 2	
	Frequência	Percentagem	Frequência	Percentagem
Resposta a) ($n_1 = 18$ e $n_2 = 23$)				
1. O saco A tem menos bolas do que o saco B	5	27,8	2	8,7
2. O saco A tem menos bolas pretas do que o saco B	3	16,7	1	4,3
3. A diferença entre o número de bolas pretas e o número de bolas brancas é menor no saco A	3	16,7	3	13,1
4. É mais provável tirar uma bola branca do saco A	2	11,1	—	—
5. Razões de probabilidade ou inverso de razões de probabilidade	—	—	9	39,1
6.Outra justificação	3	16,6	3	13,1
Não justifica	2	11,1	5	21,7

Resposta b) ($n_1 = 82$ e $n_2 = 149$)				
7. O saco B tem mais bolas brancas do que o saco A	61	74,4	68	45,6
8. O saco B tem mais bolas do que o saco A	9	11,0	14	9,4
9. Razões de probabilidade ou inverso de razões de probabilidade	3	3,6	36	24,2
10. É mais provável tirar uma bola branca do saco B	2	2,4	5	3,3
11. Razão bolas brancas (pretas) / bolas pretas (brancas)	—	—	7	4,7
12. Outra justificação	4	4,9	4	2,7
Não justifica	3	3,7	15	10,1
Resposta c) ($n_1 = 206$ e $n_2 = 124$)				
13. Os sacos têm quantidades proporcionais de bolas	14	6,8	37	29,8
14. Razões de probabilidade ou inverso de razões de probabilidade	64	31,1	15	12,1
15. Há bolas brancas no saco A e no saco B	29	14,1	17	13,7
16. A probabilidade é igual nos dois sacos A e B	24	11,6	12	9,7
17. Razão bolas brancas (pretas) / bolas pretas (brancas)	51	24,7	9	7,3
18. Outra justificação	8	3,9	5	4,0
Não justifica	16	7,8	29	23,4

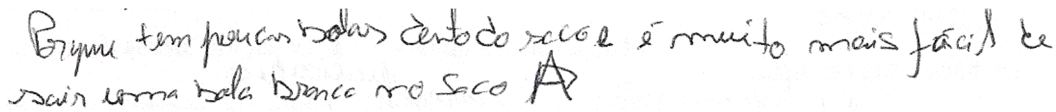
Nota. n_1 = Número de alunos que selecionaram cada resposta da questão 1.
n_2 = Número de alunos que selecionaram cada resposta da questão 2.

Em 78% das 532 justificações apresentadas pelos alunos nas questões 1 e 2, são estabelecidas relações em termos de: (i) *todo-todo* (7,2%; justificações: 1 e 8), sendo efetuada uma comparação entre o número total de bolas existentes em cada um dos sacos; (ii) *parte-parte* (62,1%; justificações; 2, 3, 7, 11, 13 e 17), em que é efetuada uma comparação entre o número de bolas brancas (pretas) e o número de bolas pretas (brancas) existentes no respetivo saco (17,6%) ou compara-se o número de bolas da mesma cor existentes nos dois sacos (44,5%); e (iii) *parte-todo* (30,7%; justificações: 5, 9 e 14), em que a comparação ocorre entre o número de bolas de uma cor e o número total de bolas existentes no respetivo saco.

Para a análise das estratégias dos alunos, inseridas nas três grandes categorias anteriormente definidas, consideram-se os dois conjuntos S_1 e S_2, em que S_1 é a união de dois subconjuntos disjuntos P_1 e B_1 contendo respetivamente elementos do tipo p e elementos do tipo b e S_2 é a união de dois subconjuntos disjuntos P_2 e B_2 contendo respetivamente elementos do tipo p e elementos do tipo b.

Relativamente às relações *todo-todo*, estas ocorrem associadas essencialmente a duas estratégias:

1. *É mais provável extrair um elemento do tipo* b *do conjunto* (S_1 *ou* S_2) *com menor cardinal* (ver Figura 1). Esta estratégia foi utilizada para justificar a opção pela resposta a) e ocorreu na questão 1 (5 alunos) e na questão 2 (2 alunos).

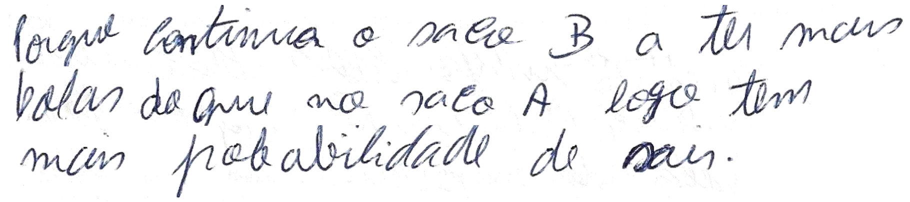


Porque tem poucas bolas dentro do saco e é muito mais fácil de sair uma bola branca no Saco A

Figura 1. Justificação do aluno A_{75} na questão 1

2. *É mais provável extrair um elemento do tipo* b *do conjunto* (S_1 *ou* S_2) *com maior cardinal* (ver Figura 2). Esta estratégia foi utilizada para justificar a opção pela resposta b) e ocorreu na questão 1 (9 alunos) e na questão 2 (14 alunos).

Em ambas as estratégias os alunos referem-se exclusivamente ao número de casos possíveis associados a cada um dos conjuntos S_1 ou S_2.



Porque continua o saco B a ter mais bolas do que no saco A logo tem mais pobabilidade de sair.

Figura 2. Justificação do aluno A_{298} na questão 2

Relativamente às relações *parte-parte* estabelecidas pelos alunos, elas ocorreram associadas essencialmente a três estratégias:

1. *É mais provável extrair um elemento do tipo* b *do conjunto* (S_1 *ou* S_2) *em que é menor a diferença* $\#P_i - \#B_i$, *com* $1 \leq i \leq 2$ (ver Figura 3). Esta estratégia teve uma ocorrência residual (em 6 justificações na tarefa) e só foi utilizada para justificar a opção pela resposta a).

É mais provavel obten uma bola branca no saco A, pois no saco A a diferença entre o numero de bolas pretas e de brancas é de 10 (20 pretas - 10 brancas) e no saco B a diferença é de 100 (200 pretas - 100 brancas). A diferença de bolas pretas e brancas no saco A é menor do que no saco B, logo é mais provável tirar uma bola branca do saco A.

Figura 3. Justificação do aluno A_{84} na questão 1

2. *As justificações são construídas recorrendo a uma espécie de vantagens, isto é, os alunos procuram estabelecer uma comparação entre a vantagem das bolas brancas (casos favoráveis) em relação às bolas pretas (casos desfavoráveis) nos sacos A e B.*

Dependendo da alternativa escolhida, apresentam-se dois cenários distintos.

É mais provável extrair um elemento do tipo b *do conjunto (*S_1 *ou* S_2*) em que é maior a razão* $\#B_i/\#P_i$, *com* $1 \leq i \leq 2$. Esta estratégia foi utilizada por 7 alunos que optaram pela resposta b) na questão 2 (ver Figura 4).

Saco A $= \frac{9}{20} = 0{,}45 = 45\%$

Saco B $= \frac{99}{200} = 0{,}495 = 49\%$

→ É mais provável sair um bola branca no saco B.

Figura 4. Justificação do aluno A_{31} na questão 2

É igualmente provável extrair um elemento do tipo b *de ambos os conjuntos (*S_1 *ou* S_2*) se* $\#B_1/\#P_1 = \#B_2/\#P_2$. Esta estratégia foi utilizada por 51 alunos que optaram pela resposta c) na questão 1 (ver Figura 5) e por 9 alunos na questão 2.

Saco A $= \frac{10}{20} = 0{,}5 = 50\%$

Saco B $= \frac{100}{200} = 0{,}5 = 50\%$

→ mesmos resultados o que significa que a probabilidade é a mesma.

Figura 5. Justificação do aluno A_{31} na questão 1

3. *As justificações envolvem a comparação entre o número de elementos do mesmo tipo que compõem os conjuntos* S_1 *e* S_2. Assim, dependendo dos elementos comparados são desenhados três cenários diferentes.

É mais provável extrair um elemento do tipo b *do conjunto* S_1 *porque* $\#P_1 < \#P_2$. Esta estratégia foi utilizada por 3 alunos na questão 1 e por 1 aluno na questão 2, para justificarem a opção pela resposta a). Os alunos recorrem à comparação entre o número de casos desfavoráveis (número de bolas pretas) ao acontecimento desejado (sair bola branca) (ver Figura 6).

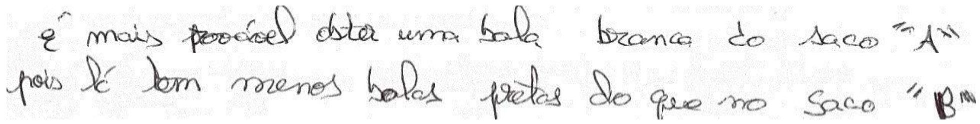

ê mais provável obter uma bola branca do saco "A" pois lá tem menos bolas pretas do que no saco "B"

Figura 6. Justificação do aluno A_{64} na questão 1

É mais provável extrair um elemento do tipo b *do conjunto* S_2 *porque* $\# B_2 > \# B_1$. Esta estratégia foi utilizada por 61 alunos na questão 1 e por 68 alunos na questão 2, para justificarem a opção pela resposta b).

Neste cenário, os alunos recorrem à comparação entre o número de casos favoráveis (número de bolas brancas) ao acontecimento desejado (sair bola branca) (ver Figura 7).

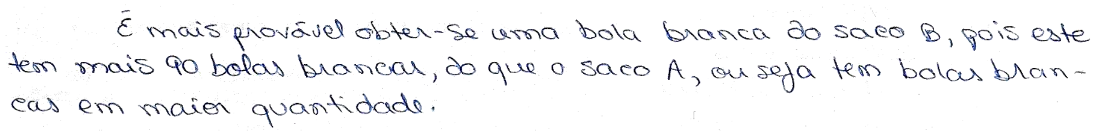

É mais provável obter-se uma bola branca do saco B, pois este tem mais 90 bolas brancas, do que o saco A, ou seja tem bolas bran-cas em maior quantidade.

Figura 7. Justificação do aluno A_{50} na questão 1

É igualmente provável extrair um elemento do tipo b *dos conjuntos* S_1 *e* S_2 *porque os dois conjuntos têm quantidades proporcionais de elementos do tipo* b *e do tipo* p (ver Figuras 8 e 9). Esta estratégia foi utilizada por 14 alunos na questão 1 e por 37 alunos na questão 2, para justificarem a opção pela resposta c).

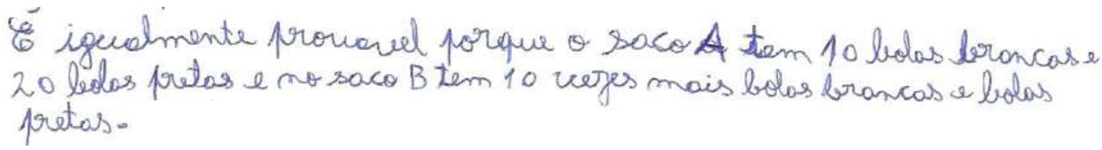

É igualmente provavel porque o saco A tem 10 bolas brancas e 20 bolas pretas e no saco B tem 10 vezes mais bolas brancas e bolas pretas.

Figura 8. Justificação do aluno A_{245} na questão 1

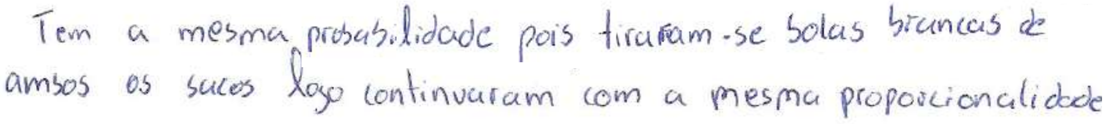
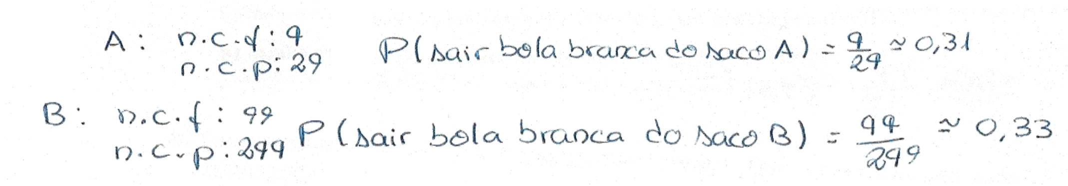

Tem a mesma probabilidade pois tiraram-se bolas brancas de ambos os sacos logo continuaram com a mesma proporcionalidade

Figura 9. Justificação do aluno A_{167} na questão 2

Quanto às relações *parte-todo* estabelecidas pelos alunos, elas ocorreram associadas à determinação de razões de probabilidade, com recurso ao conceito clássico de probabilidade ou ao inverso de razões de probabilidade, e envolvem quatro cenários distintos: resposta correta e probabilidades corretas; resposta correta e probabilidades incorretas; resposta incorreta e probabilidades corretas; e resposta incorreta e probabilidades incorretas (incluindo o inverso de probabilidades).

Resposta correta e probabilidades corretas (ver Figura 10). Este cenário verificou-se em 73,2% dos casos, sendo que 64 casos ocorreram na questão 1 e 29 casos na questão 2. Os alunos justificam a sua opção com os valores corretos das probabilidades e concluem corretamente que $P(A_2 \mid A_1) = P(B_2 \mid B_1)$ na questão 1 e que $P(A_2 \mid A_1) < P(B_2 \mid B_1)$ na questão 2.

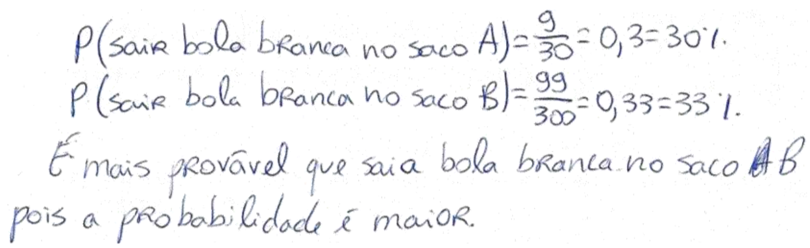


A: n.c.f: 9
n.c.p: 29
P(sair bola branca do saco A) = $\frac{9}{29} \simeq 0{,}31$

B: n.c.f: 99
n.c.p: 299
P(sair bola branca do saco B) = $\frac{99}{299} \simeq 0{,}33$

Figura 10. Justificação do aluno A_2 na questão 2

Resposta correta e probabilidades incorretas (ver Figura 11). Este cenário verificou-se em 5,5% dos casos e restringe-se à questão 2. Os alunos justificam a sua opção através de valores incorretos das probabilidades que permitem concluir que $P(A_2 \mid A_1) < P(B_2 \mid B_1)$.



P(sair bola branca no saco A) = $\frac{9}{30}$ = 0,3 = 30%
P(sair bola branca no saco B) = $\frac{99}{300}$ = 0,33 = 33%
É mais provável que saia bola branca no saco ~~A~~ B
pois a probabilidade é maior.

Figura 11. Justificação do aluno A_{96} na questão 2

Resposta incorreta e probabilidades corretas (ver Figura 12). Este cenário verificou-se em 8,7% dos casos, predominando na questão 2. Os alunos justificam as suas opções incorretas recorrendo a valores corretos das probabilidades $P(A_2 \mid A_1) = \frac{1}{3}$ e $P(B_2 \mid B_1) = \frac{1}{3}$ na questão 1 e $P(A_2 \mid A_1) = \frac{9}{29}$ e $P(B_2 \mid B_1) = \frac{99}{299}$ na questão 2. Na questão 1 um aluno assume que $\frac{100}{300} > \frac{10}{30}$ e na questão 2 a opção errada de 10 alunos resulta de considerarem valores arredondados às décimas para as probabilidades pedidas.

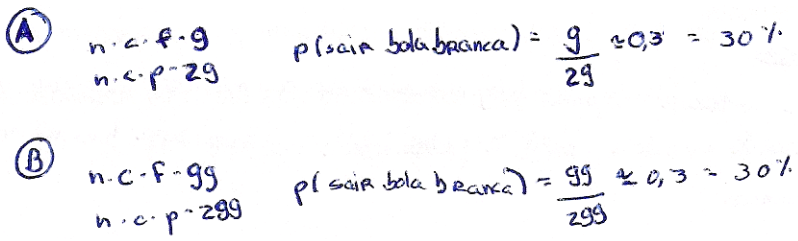


Figura 12. Justificação do aluno A_{17} na questão 2

Resposta incorreta e probabilidades incorretas (incluindo o inverso de probabilidades). Este cenário verificou-se em 12,6% dos casos e ocorreu essencialmente na questão 2. Neste cenário, os alunos optam por uma resposta errada e apresentam razões de probabilidade erradas (75% dos casos) ou o inverso de razões de probabilidade (25% dos casos, ver Figura 13). As probabilidades erradas ocorreram porque os alunos não consideraram a reposição das bolas nos sacos (2 alunos na questão 1), reduziram uma unidade apenas ao número de casos favoráveis mantendo o número de casos possíveis (6 alunos na questão 2), consideraram um número errado de casos favoráveis e de casos possíveis (4 alunos na questão 2) ou consideraram o inverso de uma razão de probabilidade (4 alunos na questão 2).

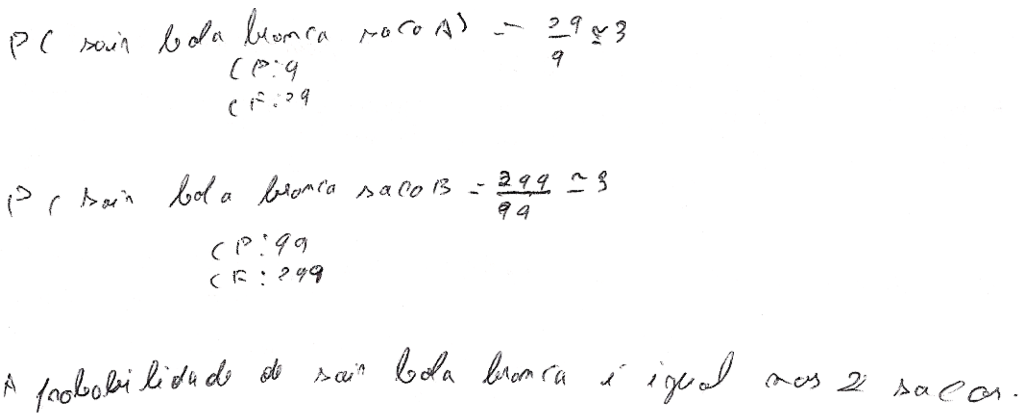


Figura 13. Justificação do aluno A_{111} na questão 2

As restantes 22% das 532 justificações apresentadas pelos alunos nas questões 1 e 2 distribuem-se da seguinte forma: 39,0% revertem para a estratégia de enviesamento de equiprobabilidade — "se é possível, então é equiprovável" — para justificarem a opção pela resposta c) nas duas questões, com afirmações como as dos alunos A_{157}: "É igualmente provável devido a haver bolas brancas nos dois sacos", A_{170}: "É igual porque pode calhar qualquer coisa" e A_{294}: "Nós não vimos as bolas, tirámos à sorte"; 38,1% são de natureza tautológica; e 22,9% integram a categoria *Outras justificações* por serem desprovidas de sentido na situação apresentada.

Conclusão

De uma maneira geral, os alunos revelaram possuir ideias intuitivas corretas sobre os conceitos de probabilidade condicionada e independência, em contexto de extração de bolas com e sem reposição.

Embora estes alunos já tivessem aprendido a definição clássica de probabilidade, eles aderiram predominantemente a outras estratégias para comparar as duas probabilidades ao estabelecerem sobretudo relações em termos de *todo-todo* e *parte-parte*. Este aspeto enfatiza a persistência das suas ideias para além do ensino (Fernandes, 1990) e a necessidade de as explorar durante a instrução tendo em vista corrigi-las e aumentar a sua eficácia.

A redução acentuada da percentagem de respostas corretas da situação de independência para a situação de dependência deveu-se, essencialmente, a um reconhecimento de proporcionalidade quando tal não acontecia, à utilização de estratégias que não atendem à proporção da população e ao enviesamento de equiprobabilidade. Em situações de comparação de probabilidades em dois sacos com bolas, Fernandes (1999) verificou que o ensino regular não favoreceu a adesão dos alunos ao raciocínio proporcional, consolidando-se claramente o cálculo de probabilidades pela regra de Laplace.

Não obstante, em geral, os alunos controlaram a composição do espaço amostral associado às situações de extração com e sem reposição, o que constitui uma base sólida para a aprendizagem das probabilidades condicionadas (Tarr, 1997).

Globalmente, os resultados do estudo são encorajadores quanto à possibilidade de introduzir estes tópicos no 9.º ano, e em particular o conceito de independência através da definição de probabilidade condicionada. Por outro lado, o estudo das probabilidades na escola deve ser iniciado mais cedo (NCTM, 2003; Shaughnessy, 1992), pois dessa forma poder-se-á obstar à formação de muitas ideias intuitivas incorretas.

Referências bibliográficas

Borovcnik, M. G. & Kapadia, R. (2010). Research and developments in probability education internationally. In M. Joubert & P. Andrews (Eds.), Proceedings of the British Congress for Mathematics Education (pp. 41-48). On line: www.bsrlm.org.uk/IPs/ip30-1/BSRLM-IP-30-1-06.pdf4

Correia, P. F., Fernandes, J. A. & Contreras (2011). Intuições de alunos do 9º ano de escolaridade sobre probabilidade condicionada. In C. Nunes, A. Henriques, A. Caseiro, A. Silvestre, H. Pinto, H. Jacinto & J. Ponte (Orgs.), *Actas do XXII Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Lisboa: APM.

Falk, R., Falk, R. & Levin, I. (1980). A potential for learning probability in young children. *Educational Studies in Mathematics, 11*, 181-204.

Fernandes, J. A. (1990). *Concepções erradas na aprendizagem de conceitos probabilísticos*. Dissertação de mestrado, Universidade do Minho, Braga, Portugal.

Fernandes, J. A. (1999). *Intuições e aprendizagem de probabilidades: uma proposta de ensino de probabilidades no 9.º ano de escolaridade*. Tese de doutoramento, Universidade do Minho, Braga, Portugal.

Green., D. R. (1983). A survey of probability concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. In D. R. Grey, P. Holmes, V. Barnett & G. M. Constable (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (Vol. 2, pp. 766-783). Sheffield, UK: Teaching Statistics Trust.

Hogg, R. V. & Tanis, E. A. (1997). *Probability and statistical inference* (5th ed.). New Jersey: Prentice-Hall.

Jones, G. A., Langrall, C. W., Thornton, C. A. & Mogill, A. T. (1999). Students' probabilistic thinking in instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*(5), 487-519.

Lecoutre, M. & Durand, J. (1988). Jugements probabilistes et modeles cognitifs: etude d'une situation aleatoire. *Educational Studies in Mathematics, 19*(3), 357-368.

Ministério da Educação (2007). *Programa ajustado de Matemática do ensino básico*. Lisboa: Autor.

NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 465-494). New York: Macmillan.

Spinillo, A. G. (2002). O papel de intervenções específicas na compreensão da criança sobre proporção. *Psicologia: Reflexão e Crítica, 15*(3), 475-487.

Tarr, J. E., & Lannin, J. K. (2005). How can teachers build notions of conditional probability and independence? In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 215-238). New York, NY: Springer.

Tarr, J. E. (1997). Using middle school students' thinking in conditional probability and independence to inform instruction. (Doctoral dissertation, Illinois State University, 1997). *Dissertation Abstracts International, 49,Z*5055.

Watson, J. (2005). The probabilistic reasoning of middle school students. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 145-169). New York, NY: Springer.

Watson, J. M. (1995). Conditional probability: Its place in the mathematics curriculum. *Mathematics Teacher*, 88, 12-17.

O ESTUDO DA MÉDIA, DA MEDIANA E DA MODA POR MEIO DE UM JOGO E DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

José Marcos Lopes, Renato Sagiorato Corral, Jéssica Scavazini Resende

Universidade Estadual Paulista ¨Júlio de Mesquita Filho" – FEIS/UNESP, Brasil

jmlopes@mat.feis.unesp.br, renato_curral@hotmail.com,

jessicascavazini@hotmail.com

Resumo

O objetivo deste artigo é apresentar os resultados de uma pesquisa que procurou avaliar os resultados da aplicação de uma proposta didático-pedagógica que utiliza um jogo associado à resolução de problemas para o estudo dos conceitos de média, mediana e moda da Estatística Descritiva. Elaboramos um jogo (original) e formulamos alguns problemas envolvendo situações de jogo que auxiliam os alunos no reforço da aprendizagem desses conceitos. A proposta de ensino foi aplicada em uma sala do terceiro ano do Ensino Médio de uma escola estadual de uma cidade do interior do estado de São Paulo. Os resultados desta investigação indicam que o uso do jogo associado à resolução de problemas pode contribuir com a aprendizagem dos alunos e também o desenvolvimento de seus próprios conhecimentos.

Palavras-chave: ensino de estatística descritiva; jogos; resolução de problemas.

Introdução

A sociedade contemporânea requer do cidadão habilidades que lhes permitem uma leitura ampla da realidade que vive e capacidade de intervenção nas ações sociais. O ensino da Estatística pode contribuir para isso, promovendo o desenvolvimento da capacidade crítica e da autonomia, assim como outros conceitos matemáticos tradicionalmente trabalhados na escola (Lopes, 2008).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (Brasil, 1998) sugerem algumas formas para o estudo dos processos estatísticos. Uma primeira forma seria explorar as informações que aparecem em jornais e revistas. Deve-se priorizar assuntos que fazem parte do contexto social dos alunos, como questões relacionadas a esportes, política, saúde, alimentação e pesquisas de opinião, entre outras. Outra forma de explorar os conteúdos do Tratamento da Informação é por meio da realização de pesquisas estatísticas que tenham interesse para os alunos, como o desenvolvimento físico, considerando-se as variáveis: peso, altura e idade, entre outras.

Além dos recursos visuais que permitem a apresentação global da informação, a leitura rápida e o destaque dos aspectos relevantes dos resultados de uma pesquisa estatística, é fundamental a utilização e a correta interpretação das medidas de tendência central: média, moda e mediana. É importante saber qual dessas medidas é a mais adequada para a variável considerada.

Neste contexto, apresentamos neste trabalho os resultados da aplicação de uma proposta didático-pedagógica que utiliza um jogo e também a resolução de situações problemas, para o estudo das medidas de tendência central da Estatística Descritiva.

Algumas considerações sobre o ensino de Estatística no Ensino Médio

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio estabelecem que "problemas estatísticos realísticos usualmente começam com uma questão e culminam com uma apresentação de resultados que se apóiam em inferências tomadas em uma população amostral", e que os alunos devem exercitar a crítica na apresentação de resultados de investigações estatísticas, ou seja, "é também com a aquisição de conhecimento em estatística que os alunos se capacitam para questionar a validade das interpretações de dados e das representações gráficas, ou para questionar as generalizações feitas com base em um único estudo ou em uma pequena amostra" (Brasil, 2006, p. 78-79)

Um recurso recomendado pelos PCN (Brasil, 1998) para o ensino de Estatística é a resolução de problemas. Na resolução de situações-problema, envolvendo conceitos de Estatística,

> os alunos podem dedicar mais tempo à construção de estratégias e se sentirem estimulados a testar suas hipóteses e interpretar resultados de resolução se dispuserem de calculadoras eletrônicas para efetuar os cálculos, geralmente muito trabalhosos. Para isso também há softwares interessantes, como os de planilhas eletrônicas, os que permitem construir diferentes tipos de gráficos (Brasil, 1998, p. 85).

Acreditamos que mais importante do que saber calcular as medidas de posição da Estatística Descritiva é saber "compreender e avaliar de forma crítica as principais características dessas medidas, tendo como objetivo a escolha criteriosa da mais conveniente para representar determinada situação ou resolver determinada situação-problema" (São Paulo, 2008, p. 40). Por isso, o uso de ferramentas tecnológicas como máquinas de calcular e computadores deve ser incentivado e utilizado pelos professores.

É essencial à formação de nossos alunos o desenvolvimento de atividades estatísticas que partam sempre de uma problematização, pois assim como os conceitos matemáticos, os estatísticos também devem estar inseridos em situação e vinculadas ao cotidiano deles (Lopes, 2008).

Um outro recurso recomendado pelos PCN para o ensino de Matemática é a utilização de jogos para o ensino e aprendizagem de um conteúdo. De um modo geral, “um aspecto relevante nos jogos é o desafio genuíno que eles provocam no aluno, que gera interesse e prazer. Por isso, é importante que os jogos façam parte da cultura escolar, cabendo ao professor analisar e avaliar a potencialidade educativa dos diferentes jogos e o aspecto curricular que se deseja desenvolver” (Brasil, 1997, p. 48-49).

Macedo, Petty e Passos (2000, p. 21-22) defendem a utilização de jogos associada ao trabalho com situações-problema. Afirmam que “é fundamental considerar que desenvolvimento e aprendizagem não estão nos jogos em si, mas no que é desencadeado a partir das intervenções e dos desafios propostos aos alunos”. As situações-problema devem ser elaboradas a partir de momentos significativos do próprio jogo, devem representar alguma situação de impasse ou decisão sobre qual a melhor ação a ser realizada e devem também favorecer o domínio e a estrutura do jogo. A nosso ver, devemos acrescentar também que as situações-problema devem contemplar os aspectos matemáticos que se deseja sistematizar.

O Jogo dos 3Ms

Este jogo, de treinamento, foi elaborado com o propósito específico de trabalhar com os alunos o estudo das principais medidas de tendência central da Estatística Descritiva, a saber: a média, a mediana e a moda. Entendemos que se trata também de um jogo de estratégia. Como utilizamos cartas de um baralho, então o fator sorte não pode ser totalmente desprezado, mas o jogador deve estabelecer uma estratégia no sentido de procurar obter a melhor pontuação possível em sua jogada. Cada jogada será provavelmente diferente da anterior e o jogo nunca perde o sentido como jogo.

Denominamos nosso jogo de “*O Jogo dos 3Ms*”, por considerar as três principais medidas de tendência central da Estatística Descritiva. Este jogo, com suas regras, foi inicialmente apresentado em Lopes, Corral e Resende (2011). Agora, no presente artigo consideramos os resultados de sua efetiva aplicação em uma sala de aula do Ensino Medio.

Apresentamos na sequência a descrição do Jogo dos 3Ms.

1 - Material

O jogo utiliza 36 cartas de um baralho comum numeradas de 2 a 10, com 4 cartas de cada número e uma folha de papel para anotações das jogadas. Para este jogo utilizamos apenas o número da carta e não o naipe. Assim, dentre as 36 cartas poderemos ter dois 6 de copas ou três 9 de páus e etc; ou seja; o que vale é o número da carta e não o seu naipe.

2 - Objetivo

Obter o maior número de pontos. As pontuações serão obtidas em função dos maiores valores de uma das medidas de posição, dentre a média, a mediana ou a moda. Em cada rodada um dos jogadores escolhe qual dessas medidas de posição será utilizada.

3 - Regras

3.1 - pode ser jogado por dois, três ou quatro jogadores. Cada partida consiste de três rodadas. Para cada rodada serão distribuídas no sentido anti-horário 5 (cinco) cartas para cada jogador. A partir dessas cartas cada jogador irá calcular a média, a mediana e a moda referente aos números das cinco cartas. Os valores da média, da mediana e da moda correspondem às pontuações do jogador naquela rodada. Após a finalização da rodada todas as 36 cartas são novamente embaralhadas para o início da nova rodada;

3.2 - a rodada se inicia com o primeiro jogador que recebeu as cartas. Em cada rodada o jogador tem a opção de comprar até duas cartas, uma de cada vez, do maço ou dentre aquelas já descartadas sobre a mesa, porém terá que descartar uma carta para cada carta comprada;

3.3 - depois de realizada a operação de compra e descarte de cartas, cada jogador retira uma carta do maço, aquele que retirou a maior carta escolhe a medida de posição para a pontuação daquela rodada. Caso ocorram empates a operação é repetida dentre aqueles que empataram até que se defina quem vai escolher a medida de posição;

3.4 - para finalizar a rodada todos expõem as 5 cartas sobre a mesa com os valores já calculados e anotados em uma folha de papel para as três medidas de posição: média, mediana e moda. Quando as cinco cartas são diferentes, então a moda não existe; ou seja; o conjunto é *amodal*, e neste caso, a pontuação do jogador para a medida moda será convencionada como sendo igual a zero, nesta rodada. Será desclassificado da rodada o jogador que calculou de maneira incorreta o valor de alguma das medidas de posição;

3.5 - após a realização de cada rodada os jogadores serão classificados em primeiro, segundo, terceiro e quarto lugar, dependendo da pontuação obtida. O jogador que obteve o maior valor para a medida de posição é classificado em primeiro lugar e recebe 3 pontos, o segundo colocado recebe 2 pontos, o terceiro colocado recebe 1 ponto e o último colocado não recebe pontuação naquela rodada. Caso ocorram empates, cada jogador receberá a pontuação correspondente à sua classificação. Após a realização da terceira rodada, os pontos obtidos em cada rodada serão somados, e vence o jogo aquele jogador que obteve o maior valor.

Para uma melhor compreensão, apresentamos a seguir uma simulação de partida do Jogo dos 3Ms entre dois jogadores.

(i) distribuição de cartas e cálculo das medidas de posição

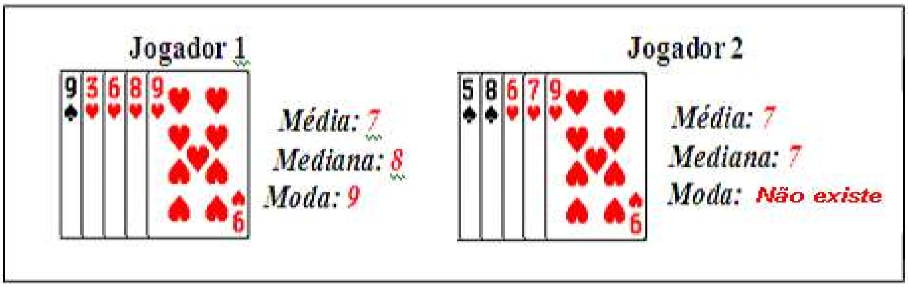
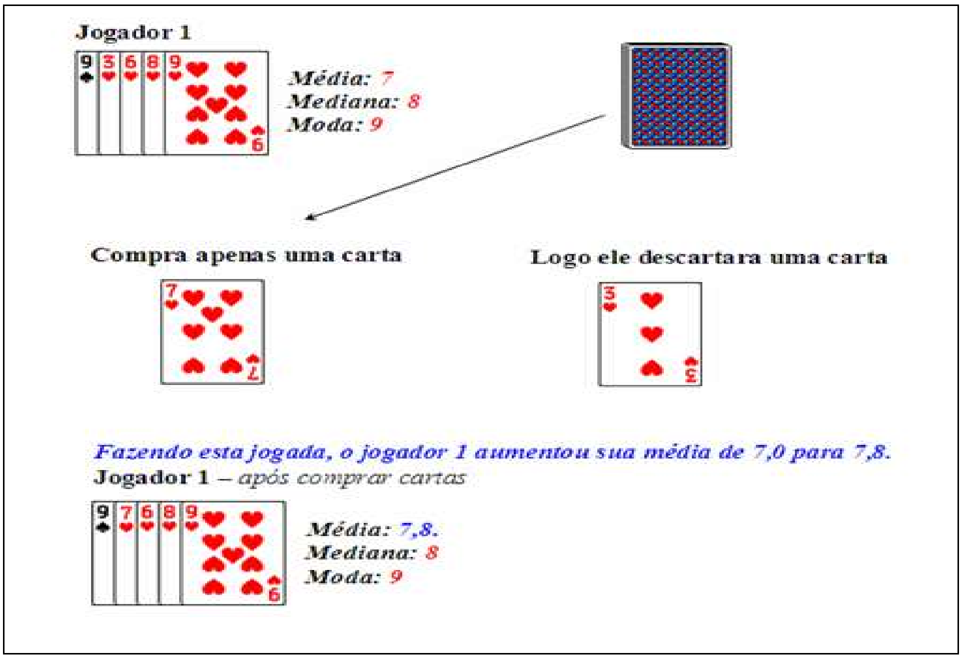


Figura 1: Cálculo da média, da mediana e da moda

Cada jogador recebe 5 cartas das quais deve calcular a média, a mediana e a moda dos números das cartas em mãos (Figura 1).

(ii) comprando cartas

Cada jogador tem a opção de comprar uma ou duas cartas do maço ou da mesa, porém, para cada carta que ele comprar descarta uma (Figura 2).



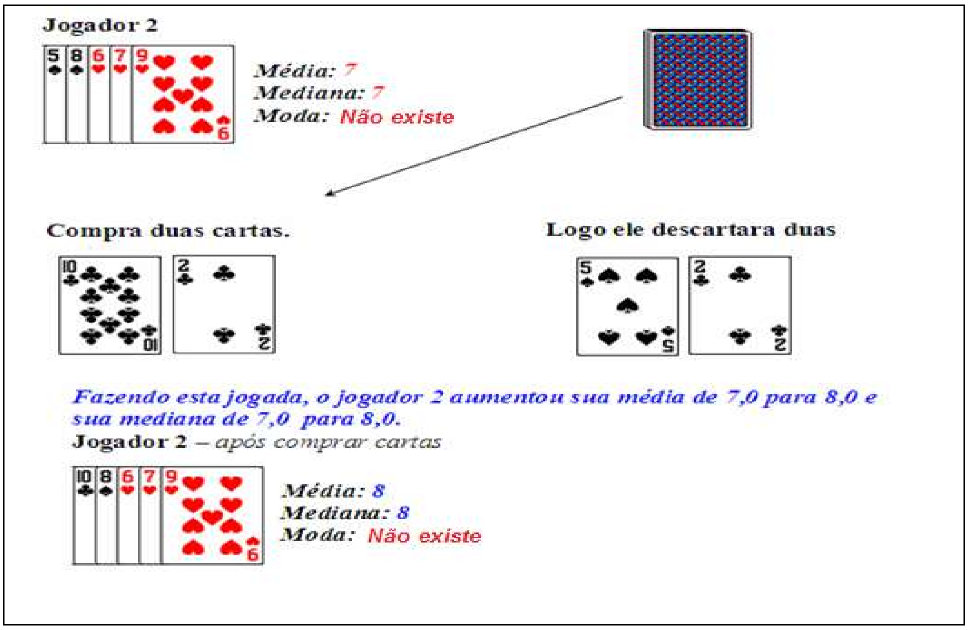


Figura 2**:** Comprando cartas

(iii) escolha da medida de posição

Cada jogador tira uma carta do maço (Figura 3), quem tirar a maior carta irá escolher a medida de posição que será utilizada naquela rodada.

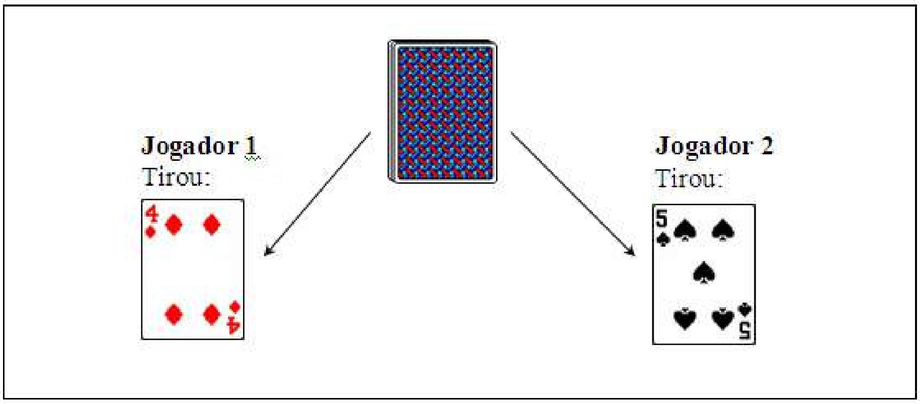


Figura 3: Definição da escolha da medida de posição.

(iv) finalização da rodada

Como o Jogador 2 obteve a maior carta é ele que vai escolher com qual medida de posição será realizada a disputa dentre as medidas de tendência central: média, mediana ou moda.

Caso o Jogador 2 escolha média, ele vence o Jogador 1, pois o valor de sua média é 8 e a de seu adversário é 7,8. Assim, o Jogador 2 recebe 3 pontos e o Jogador 1 recebe 2 pontos, nesta rodada. Se o Jogador 2 escolher mediana, ele empata com o Jogador 1 e ambos recebem, neste rodada, três pontos. Por razões óbvias, o Jogador 2 não deve escolher a medida de posição moda, nesta rodada.

Metodologia

Os sujeitos desta pesquisa foram 30 alunos do terceiro ano (3º A - matutino) do Ensino Médio de uma escola estadual de uma cidade do noroeste paulista.

Para analisar a adequação e a viabilidade desta proposta de ensino, elaboramos um questionário com dez questões de múltipla escolha. Nas duas primeiras questões estávamos interessados no sentimento dos alunos sobre a Matemática e seu estudo. Neste nível de escolaridade os conteúdos de Estatística Descritiva são considerados como sendo um capítulo da disciplina Matemática. As outras oito questões envolveram conceitos matemáticos presentes nas medidas: média, mediana e moda, procurando sempre, além do cálculo dessas medidas, comparar e comprovar a eficácia de cada uma delas (Anexo - Questionário).

Todo o trabalho em sala de aula foi desenvolvido pela professora responsável pela turma. Trata-se de uma professora efetiva da rede estadual de ensino, com mais de vinte anos de experiência de docência no Ensino Médio. Essa professora já havia trabalhado com jogos e resolução de problemas para o ensino de conteúdos matemáticos. Realizamos alguns encontros com a professora para discutir e preparar o material que seria utilizado na sala de aula.

Inicialmente, os conteúdos de Estatística Descritiva foram trabalhados pela professora da maneira tradicional, utilizando-se o chamado "*caderninho*" – material elaborado pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo (São Paulo, 2009).

Antes do trabalho com o Jogo dos 3Ms, a professora aplicou o questionário que havíamos preparado (pré-teste). Foi explicado aos alunos que se tratava de um projeto de pesquisa e seria importante que respondessem com atenção.

Posteriormente, ocorreu o trabalho com o jogo e com as situações-problema. Elaboramos em conjunto com a professora, 11 situações-problema envolvendo questões relacionadas ao Jogo dos 3Ms e os conceitos matemáticos presentes nas medidas média, mediana e moda. Duas dessas situações-problema foram: "No Jogo dos 3Ms poderão ocorrer valores iguais para a mediana e a moda? Justificar sua resposta."; " Em quais casos do Jogo dos 3Ms o Jogador poderá obter a moda igual a 10? Justificar sua resposta.". Por uma questão de espaço todas as 11 situações-problema não serão aqui apresentadas.

A professora utilizou em torno de dez horas-aula para o desenvolvimento dessa proposta de ensino.

Durante as aulas foi solicitado aos alunos que relatassem suas impressões sobre o trabalho com o jogo para o estudo de conceitos da Estatística Descritiva. A professora estimulava os alunos com a discussão de algum aspecto sobre a utilização de jogos em sala de aula e posteriormente, solicitava que cada aluno relatasse, em uma folha de papel, sua opinião por escrito. A professora recolheu esses relatos os quais foram utilizados na análise qualitativa da seção "Análise dos dados".

Após o término da aplicação da proposta, a professora reaplicou o mesmo questionário (pós-teste).

Aplicação da proposta em sala de aula

No primeiro semestre de 2011, antes da aplicação de nossa proposta em sala de aula, realizamos vários encontros com as três professoras de nossa escola parceira, para discutir e preparar adequadamente o material a ser utilizado. Embora sempre participando dos encontros, duas dessas professoras não aplicaram a proposta por não estarem ministrando aulas no terceiro ano do Ensino Médio naquele momento. A proposta foi efetivamente aplicada por uma única professora, no quarto bimestre de 2011, numa sala do terceiro ano do Ensino Médio.

Para o trabalho com o jogo, a professora o apresentou na forma escrita e fez uma breve exposição sobre suas regras. Também simulou algumas situações de jogo calculando a média, a mediana e a moda para algumas disposições das cinco cartas.

Em seguida, formou os grupos e solicitou aos alunos que jogassem algumas partidas sem a preocupação de disputa; ou seja; sem a anotação de pontos. O objetivo desta primeira ação é fazer com que os alunos compreendam e dominem as regras do jogo. Depois de compreendidas as regras, a professora solicitou que jogassem três partidas anotando as pontuações correspondentes em uma tabela. Essa tabela pode ser elaborada pelos próprios alunos ou pelo professor. Se a tabela for elaborada pelos próprios alunos isso já pode ser considerado um princípio de sistematização dos conceitos a serem estudados. Os resultados registrados de cada jogada irão facilitar no processo de resolução das situações-problema.

Após a realização das partidas, a professora trabalhou com as 11 situações-problema que havíamos preparado e discutido anteriormente.

Análise dos dados

Apresentamos inicialmente uma análise quantitativa da aplicação de nossa proposta em sala de aula. Utilizamos para essa análise 30 alunos do terceiro ano do Ensino Médio que responderam o pré-teste e o pós-teste. A Figura 4 apresenta em porcentagens as respostas referentes às questões 1 e 2 do questionário. A questão 1 possui 4 alternativas, a saber: (a), (b), (c) e (d). Como para essa questão nenhum aluno respondeu que considera o estudo de Matemática muito fácil; ou seja; a alternativa (a), então os dois primeiros gráficos possuem apenas três barras. Tanto no pré-teste como no pós-teste, a maioria dos alunos respondeu que considera o estudo de Matemática difícil. As porcentagens de respostas para a alternativa (c) foram de 58,06% no pré-teste e de 64,52% no pós-teste.

Para a questão 2, consideramos cinco alternativas, a alternativa (c) “gosto de Matemática, mas sinto dificuldades em entender seus conceitos”, foi a que recebeu o maior número de respostas, sendo 48,39% no pré-teste e 45,16% no pós-teste.

Das respostas apresentadas inferimos que o estudo de Matemática é considerado difícil pela maioria dos alunos. Não é nosso objetivo e nem temos a pretensão de discutir as causas dessas dificuldades no estudo da Matemática. Entretanto, acreditamos que a natureza dessa ciência e também a forma de considerar o seu ensino, desde as séries inicias, podem resultar neste quadro.

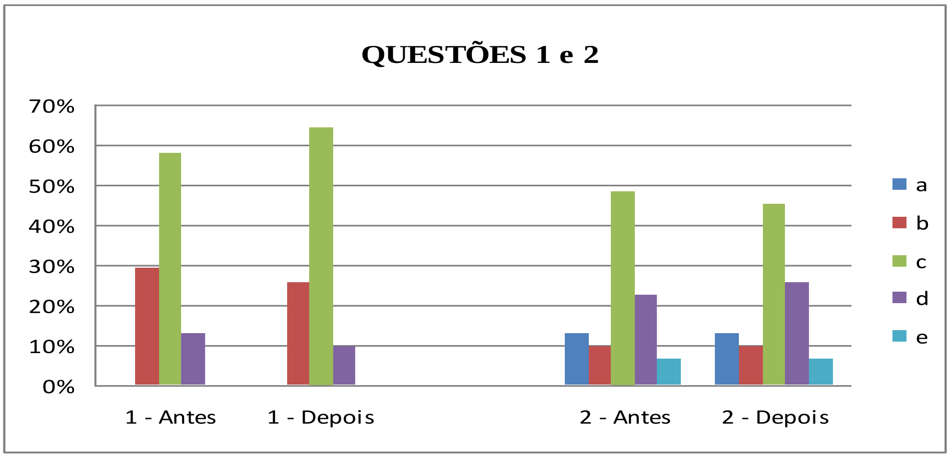


Figura 4: Porcentagens da respostas para as questões 1 e 2 (antes - pré-teste), (depois - pós-teste).

A Figura 5 apresenta o número de acertos para cada aluno, para as questões de número três a dez do questionário. Dos 30 alunos, 18 melhoram, 5 pioraram e 7 mantiveram seu desempenho no pré-teste e no pós-teste. O melhor desempenho foi obtido pelo aluno de número 22 que acertou as oito questões tanto no pré-teste como no pós-teste. O pior desempenho foi obtido pelos alunos de número 20 e 24, ambos acertaram duas questões no pré-teste e apenas uma no pós-teste. No pós-teste cinco alunos acertaram 100% das questões.

A Figura 6 apresenta as porcentagens de acertos por questão. Para todas as questões o índice de acertos foi maior no pós-teste. Como já era esperado, a questão número dez foi a que apresentou o menor número de acertos, sendo 22,58% e 25,81% no pré-teste e no pós-teste, respectivamente. Nessa questão o aluno deveria saber interpretar os aspectos matemáticos envolvidos na média, na mediana e na moda.

As questões número três, quatro, cinco, seis e oito tiveram mais de 80% de acertos no pós-teste. A questão número oito foi a que obteve o maior índice de acertos no pré-teste

(67,74%) e no pós-teste a questão número três foi a que obteve o maior índice de acertos (90,32%). O índice médio de acertos por questão foi de 54,03% e 74,19%, respectivamente, no pré-teste e no pós-teste.

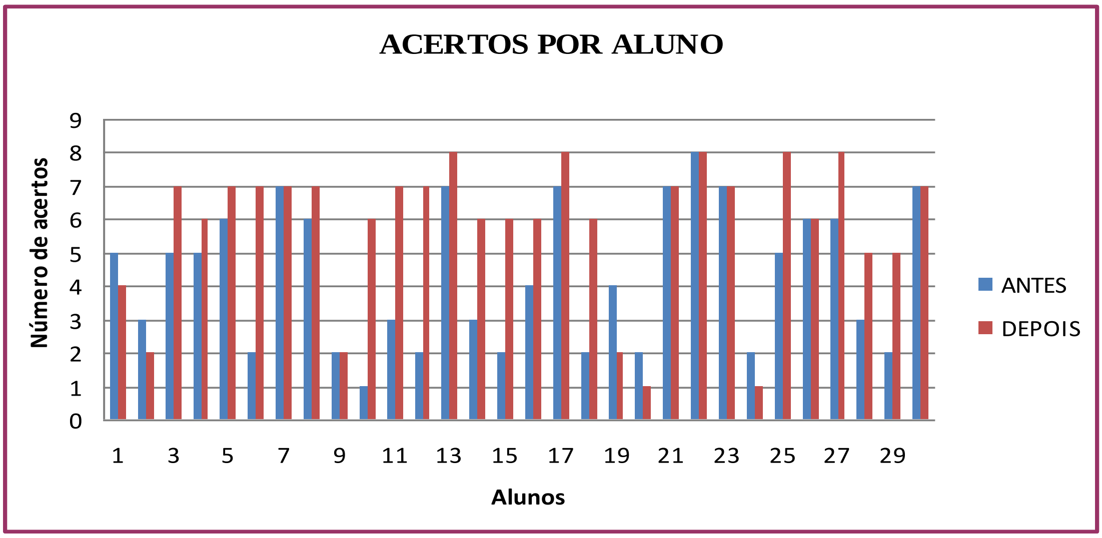


Figura 5: Número de acertos no pré-teste e no pós-teste para as questões de número 3 a 10.

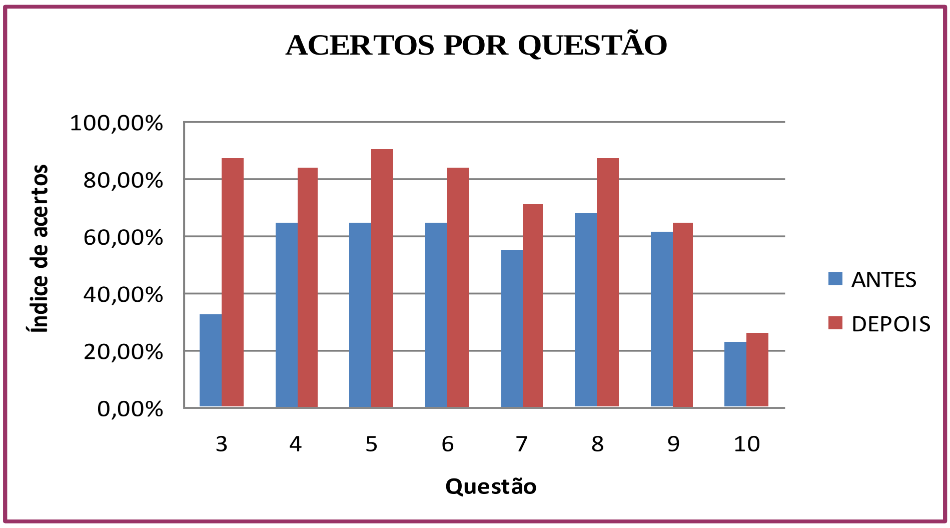


Figura 6: Porcentagens de acertos por questão.

Considerando a variável número de acertos no pré-teste e no pós-teste para cada um dos 30 alunos, realizamos o teste *t* de *Student* para dados emparelhados para comparar o antes e o depois do trabalho com o jogo e com as situações-problema, para a diferença de médias $\mu_1 - \mu_2 = \mu_d$. Testamos a hipótese nula $H_0 : \mu_d = 0$ contra a hipótese alternativa $H_1 : \mu_d < 0$, onde $d_i = x_i - y_i$, sendo x_i e y_i o número de acertos do aluno i (i = 1, 2, 3, ... , 30), respectivamente, no pré-teste e no pós-teste. Como o valor tabelado

$t_{29,1\%} = 2{,}46$ e obtivemos $t_{calculado} = -3{,}89$, rejeitamos H_0 ao nível de 1% de significância. Assim, concluímos, a esse nível, que o uso da proposta didático-pedagógica contribuiu para o aumento do número de acertos das questões.

Consideramos agora uma análise qualitativa da aplicação desta proposta de ensino mediante recortes dos registros escritos pelos alunos. Os alunos serão identificados por A1, A2, ... , A30. O aluno A1 é aquele que aparece na primeira coluna da Figura 5, esse aluno acertou cinco questões no pré-teste e quatro no pós-teste.

Geralmente, os alunos gostam de participar de atividades que envolvem jogos. Desta vez não foi diferente. A maioria dos alunos gostou do jogo e alguns destacaram a simplicidade de suas regras. O aluno A5 destacou: "este jogo é fácil de jogar e divertido". O aluno A7 mencionou: "O jogo é de fácil compreensão, além de auxiliar os alunos a trabalhar com as medidas: moda, média e mediana". Disse o aluno A17: "Gostei muito de participar deste jogo, pois assim consegui ampliar meus conhecimentos em relação as medidas".

Para Borin (2004) um dos fatores positivos do trabalho com jogos por meio da resolução de problemas em sala de aula é o desenvolvimento do raciocínio dos alunos. Para o aluno A10: "Além de contar com a sorte o interessante do jogo é contar com a inteligência e o raciocínio". O aluno A13 destacou que: "neste jogo é preciso muita atenção , raciocínio rápido e isso faz com que o jogador passe a ter mais eficiência nos resultados". Para o aluno A14 este trabalho: "ajudou também no raciocínio lógico no modo de pensar sem fazer contas na hora do jogo". Já o aluno A15 destacou que: "com as questões feitas em sala de aula consegui interpretar melhor ainda o jogo" e para o aluno A18: "ele [o jogo] faz você raciocinar mais rápido".

Macedo, Petty e Passos (2000, p. 27) defendem "a ideia de que jogar favorece e enriquece o processo de aprendizagem, na medida em que o sujeito é levado a refletir, fazer previsões e inter-relacionar objetos e eventos". A utilização do Jogo dos 3Ms, além de ser divertida, contribuiu com o aprendizado das medidas de posição conforme relato de alguns alunos. Para o aluno A11: "O jogo é uma maneira rápida e prática para o aprendizado da matéria vista até o momento". O aluno A16 escreveu: "Com o Jogo dos 3Ms os alunos tiveram mais facilidade de aprender, utilizando o baralho foi uma forma divertida e rápida de aprendizagem". O aluno A10 destacou, também, a importância dos problemas: "Os problemas dados foram bons, pois serviu para facilitar o jogo, e consegui entender direito. Achei esse jogo muito legal, pois essa é uma maneira divertida para aprender a Matemática".

Para Macedo, Petty e Passos (2000, p. 23) "jogar favorece a aquisição de conhecimento, pois o sujeito aprende sobre si próprio, sobre o próprio jogo, sobre as relações sociais relativas ao jogar e também sobre conteúdos". Um dos alunos destacou a importância da utilização de jogos nas aulas de Matemática como forma de propiciar aos alunos a construção de seus próprios conhecimentos.

"Trazer jogos para a sala de aula torna o conteúdo menos cansativo saindo dos padrões massificados utilizados no ensino de Matemática, onde o aluno não tem a oportunidade de construir seu conhecimento" (Aluno A21).

Finalizamos esta seção com os depoimentos de dois alunos. O aluno A16 relatou: "Eu não sabia calcular a média, a mediana e a moda antes do jogo, mas agora aprendi e até ganhei o jogo, foi muito legal" e para o aluno A15: "com o jogo conclui que a Matemática não é tão difícil como eu achava que era".

Considerações finais

A proposta didático-pedagógica aqui apresentada é original e os problemas foram escritos com os objetivos de fortalecer e/ou reconstruir o conhecimento dos alunos sobre o estudo das principais medidas de tendência central da Estatística Descritiva. Esta proposta pode também contribuir com a prática de professores que ensinam esses conteúdos. Da análise quantitativa e das respostas oferecidas pelos próprios alunos, consideramos como positivo os resultados da aplicação de nossa proposta de ensino para esta sala do terceiro ano do Ensino Médio.

Segundo Macedo, Petty e Passos (2000, p. 18), "pode-se trabalhar com uma ampla variedade de jogos, desde que não sejam utilizados somente como fins em si mesmos, mas transformados em material de estudo e ensino (na perspectiva do profissional), bem como em aprendizagem e produção de conhecimento (na perspectiva do aluno)".

Não temos dúvidas sobre o papel fundamental que a Estatística, juntamente com a Probabilidade, exercem na formação plena do cidadão em função das inúmeras situações envolvendo fenômenos aleatórios que permeiam nosso cotidiano. A utilização de um jogo em nossa proposta pedagógica teve como objetivo, em especial, tornar as aulas mais atraentes e motivadoras para os alunos.

Referências bibliográficas

Borin, J. (2004). *Jogos e resolução de problemas*: *uma estratégia para as aulas de matemática*. 5. ed. São Paulo: IME-USP. 100 p.

Brasil. (1997). Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais: matemática: ensino de primeira à quarta série*. Brasília: MEC. 142 p.

Brasil. (1998). Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais: matemática: ensino de quinta à oitava séries*. Brasília: MEC. 148 p.

Brasil. (2006). Secretaria de Educação Básica. *Orientações curriculares para o ensino médio*. Brasília: MEC. v. 2, 135 p.

Lopes, C. E. (2008). *O ensino de probabilidade e estatística na escola básica nas dimensões do currículo e da prática pedagógica*. Disponível em: <www.iberomat.uji.es/carpeta/posters/148_celi_espasandin_lopes.doc> . Acesso em: 11 jun. 2008.

Lopes, J. M., Corral, R. S., & Resende, J. S. (2011). O ensino dos conceitos de média, mediana e moda através de um jogo de cartas. In: PROFMAT2011 – Encontro Anual de Professores de Matemática, 2011, Lisboa. *Anais*... Lisboa: APM, 2011. Disponível em: <http://www.apm.pt/files/_SC31_4e71e4f71e6f7.pdf>. Acesso em: 11 jul. 2012.

Macedo, L., Petty, A. L. S., & Passos, N. C. (2000). *Aprender com jogos e situações-problema*. Porto Alegre: Artmed. 116 p.

São Paulo (Estado). (2008). Secretaria de Educação. *Caderno do professor*: *matemática*. São Paulo: SEE. v. 4. (Ensino Fundamental - 5ª série).

São Paulo (Estado). (2009). Secretaria de Educação. *Caderno do professor*: *matemática*. São Paulo: SEE. v. 4. 2009. (Ensino Médio - 3ª série).

Anexo - Questionário

NOME: ____________________________ Idade : ____ Turma: ____ Data: _________

1 – Considero o estudo de Matemática:

(a) muito fácil; (b) fácil; (c) difícil; (d) muito difícil.

2 – Em qual das alternativas abaixo você se sente mais identificado(a):
(a) gosto de Matemática;
(b) gosto de Matemática e tenho facilidade em entender seus conceitos;
(c) gosto de Matemática, mas sinto dificuldades em entender seus conceitos;
(d) não gosto de Matemática;
(e) detesto Matemática.

As questões a seguir referem-se aos conteúdos de Estatística Descritiva que vocês acabaram de estudar. Para suas anotações utilize os espaços entre as questões. Se necessário use também o verso da folha indicando o número da questão.

3 – Considerando-se as três medidas de posição: média, mediana e moda é correto afirmar que:

(a) a média é sempre maior do que a mediana.

(b) a média é sempre maior do que a moda.

(c) a moda é sempre diferente da mediana.

(d) as três medidas de posição: média, mediana e moda podem ser iguais.

(e) não sei.

Os dados a seguir referem-se às idades em anos de sete alunos da quinta série da Escola Cantinho do Céu: 11, 10, 12, 11, 11, 12 e 17. Usando estes dados responda as questões 4, 5, 6 e 7.

4 – A idade média dos alunos da quinta série da Escola Cantinho do Céu é:

(a) 10 (b) 11 (c) 12 (d) 13 (e) não sei

5 – A mediana das idades dos alunos da quinta série da Escola Cantinho do Céu é:

(a) 10 (b) 11 (c) 12 (d) 13 (e) não sei

6 – A moda das idades dos alunos da quinta série da Escola Cantinho do Céu é:

(a) 10 (b) 11 (c) 12 (d) 13 (e) não sei

7 – Daqui a três anos a idade média dos sete alunos da quinta série da Escola Cantinho do Céu será:

(a) 13 (b) 14 (c) 15 (d) 16 (e) não sei

A fábrica de biscoitos *DD – Doce Delícia* possui 8 funcionários cujos salários são:

R$ 500,00; R$ 500,00; R$ 560,00; R$ 600,00; R$ 620,00; R$ 620,00; R$ 700,00 e R$ 4.700,00.

8 – Considerando-se os salários dos funcionários da fábrica DD é correto afirmar que:

(a) a moda é igual a R$ 4.700,00.
(b) a moda é igual a R$ 550,00.

(c) temos duas modas: uma igual a R$ 500,00 e outra igual a R$ 620,00.

(d) a moda é maior do que a média.
(e) não sei.

9 – Considerando-se os salários dos funcionários da fábrica DD é correto afirmar que:

(a) a mediana é maior do que a média.
(b) a mediana é menor do que a média.

(c) a mediana é igual a média.
(d) a mediana é igual a moda.

(e) não sei.

10 - Considerando-se os salários dos funcionários da fábrica DD é correto afirmar que:

(a) o valor da média é um indicador representativo da tendência dos salários dos funcionários.

(b) o valor da média é pouco afetado pelo valor extremo R$ 4.700,00.

(c) o valor da mediana não é um bom representante para o conjunto de todos os salários.

(d) o valor da moda é um indicador representativo da tendência dos salários dos funcionários.

(e) não sei.

UMA CORRIDA DE ROBOTS NUMA PRÁTICA MATEMÁTICA ESCOLAR

Paula Cristina Lopes
Escola Básica dos 2.º e 3.º Ciclos dos Louros
Projeto CEM (Construindo o Êxito em Matemática)
Universidade da Madeira
crislopes@netmadeira.com

Resumo

Este artigo relata parte de um estudo que está a ser realizado no âmbito das atividades do projeto DROIDE II[27] *- Os Robots na Educação Matemática e Informática e do doutoramento da autora do artigo.*

Neste artigo pretendemos caraterizar a prática (Wenger, 1998) matemática escolar, de uma turma de 8.º ano de escolaridade, de uma escola dos 2.º e 3.º Ciclos do Ensino Básico, da Região Autónoma da Madeira, quando os alunos aprendem Estatística (e não só) com Robots.

Palavras-chave: Aprendizagem, Prática Matemática Escolar, Robots.

Introdução

Vivemos atualmente num mundo em que a tecnologia assume um papel central no desempenho das funções mais básicas e está cada vez mais enraizada no quotidiano de cada um. Também se assiste a um número crescente de cenários de aprendizagem escolares onde têm sido introduzidas tecnologias.

Existem vários exemplos de como a estatística é concebida no currículo escolar de matemática e como, a nível internacional, os professores abordam esta temática (Batanero, Burril & Reading, 2011). No entanto, os robots são ainda uma tecnologia pouco usada nos cenários criados e implementados nas salas de aula, daí a necessidade de analisar práticas em que os alunos aprendem estatística (e não só) com estes artefactos.

Este artigo refere-se a uma pequena parte de um estudo mais lato cujo objetivo é compreender de que forma o uso de tecnologias, com especial enfoque nos robots, contribuem para que os alunos desenvolvam a comunicação matemática, o raciocínio matemático e a sua capacidade de resolução de problemas, produzindo significado e

[27] Este projeto é subsidiado pela Fundação para a Ciência e Tecnologia segundo o contrato PTDC/CPE-CED/099850/2008.

incrementando a aprendizagem de tópicos e conceitos matemáticos específicos do 8.º ano de escolaridade.

Neste artigo pretende-se analisar e caracterizar a prática matemática escolar que ocorre quando os alunos utilizam robots.

Fundamentação Teórica

O suporte teórico tem por base a teoria da aprendizagem situada, com ênfase nos estudos de Lave (1988), Lave e Wenger (1991), Wenger (1998) e Wenger, McDermott e Snyder (2002).

A aprendizagem é um fenómeno emergente das práticas em que os alunos são imersos e em que participam. Isto decorre da ideia de que as aprendizagens são elementos integrantes das práticas sociais (Lave & Wenger, 1991).

Para clarificar a ideia de aprendizagem como um processo que emerge da prática é necessário analisar este conceito e algumas das ideias que estão associadas a esta abordagem.

A aprendizagem é um processo sociocultural, onde é pertinente "mudar o foco analítico do indivíduo como alguém que aprende para uma ideia de aprendizagem como participação no mundo social e do conceito de processo cognitivo para uma visão mais alargada de prática social" (Lave & Wenger, 1991, p.43).

Considerando a aprendizagem como um aspeto da prática social, esta envolve a pessoa no seu todo. Inclui não só uma relação com atividades específicas, mas uma relação com outros, implicando ao indivíduo tornar-se um participante pleno, "capaz de se envolver em novas atividades, para realizar novas tarefas e funções, para dominar novos entendimentos" (p.53).

Aprender é um processo que tem lugar numa estrutura participativa e não numa mente individual. Isto significa, entre outras coisas, que a aprendizagem é mediada pelas diferentes perspetivas que existem entre os participantes e é uma característica da prática.

A prática não existe no abstrato, existe porque existem pessoas que participam em ações cujo significado é negociado mutuamente. Não reside na estrutura que a precede, reside nas pessoas e nas relações de mútuo engajamento pelas quais elas podem fazer o que fazem (Wenger, 1998).

O conceito de prática refere-se a “um conjunto de abordagens comuns e maneiras partilhadas de fazer as coisas que criam uma base para comunicação, ação, resolução de problemas, desempenho e responsabilidade” (Wenger et al., 2002, p.38).

A prática tende a evoluir como um produto coletivo integrado no trabalho dos participantes, organizando o conhecimento em formas que o tornam útil para eles próprios, na medida em que reflete a sua perspetiva. Inclui um conjunto de ideias, ferramentas, informação, estilos, linguagem, histórias e documentos partilhados. Inclui também relações implícitas, convenções tácitas, perceções específicas, visões partilhadas sobre o mundo, um conjunto de modos de fazer as coisas socialmente definido num domínio específico, uma determinada maneira de se comportar, uma perspetiva sobre os problemas e ideias, um estilo de pensamento (Wenger, 1998).

Procuramos, de seguida, clarificar as três dimensões da prática, avançadas por Wenger (1998).

O engajamento dos participantes numa dada prática não é apenas uma questão de atividade. Depende da capacidade de interagir com as competências dos vários participantes. Não decorre forçosamente de uma forma pacífica ou harmoniosa, existem conflitos, tensões, confiança mas também desconfiança.

O acesso ao que é considerado importante por determinado grupo de pessoas decorre da preocupação que existe (tanto no coletivo como em cada indivíduo) com a sustentação do engajamento dos diversos participantes.

O empreendimento conjunto é o resultado de um processo conjunto de negociação que reflete toda a complexidade do engajamento mútuo; está definido pelos participantes no processo que empreendem; não é uma simples meta estabelecida, mas cria entre os participantes relações de responsabilidade mútua que se convertem numa parte integral da prática.

Afirmar que um grupo de indivíduos partilha um empreendimento, não equivale simplesmente a dizer que partilha condições de trabalho, que tem dilemas em comum ou que cria respostas similares. As circunstâncias e respostas individuais variam de indivíduo para indivíduo e de dia para dia, no entanto, as suas respostas às condições, similares, ou não, estão interconectadas uma vez que as pessoas estão engajadas com um empreendimento conjunto.

Os indivíduos devem encontrar formas que facilitem a negociação conjunta, vivendo e respeitando as suas diferenças e coordenando as suas aspirações individuais ao longo de todo o processo. A compreensão que os indivíduos têm do seu empreendimento e dos efeitos do mesmo nas suas vidas não precisa ser uniforme para que seja um produto coletivo.

O reportório partilhado da prática reflete a história do engajamento mútuo. Inclui rotinas, palavras, ferramentas, modos de fazer as coisas, histórias, gestos, símbolos, ações ou conceitos que a comunidade produziu ou adotou no curso da sua existência, e que se tornaram parte da sua prática. Combina aspetos reificativos e participativos.

Ao envolverem-se conjuntamente na construção do empreendimento, os indivíduos vão ajustando diferentes interpretações das suas ações, assim como das condições e constrangimentos que enfrentam e até das relações. Nesse processo, quotidiano e dinâmico, os participantes desenvolvem significados que, não sendo idênticos entre eles, se interrelacionam e acabam por se conjugar e ganhar coerência relativamente à prática que os une.

A realização de uma corrida de Robots

Foi com este projeto que os alunos tiveram a sua primeira experiência com o robot da LEGO MINDSTORMS NXT 2.0. e com o seu ambiente de programação. Nove destes alunos já tinham trabalhado, no ano letivo anterior, aquando do estudo das funções (Fernandes, 2012), com o robot RCX (um modelo anterior da LEGO) e um ambiente de programação diferente.

Durante todas as aulas, os alunos trabalharam em grupo. Numa primeira fase procurou-se familiarizar os alunos com os sensores, os motores e o cérebro do NXT. Foram fornecidas instruções para a estrutura base do carro e para o local de colocação do sensor de luz, mas o seu aspeto final ficou a cargo de cada grupo. À medida que os grupos foram terminando a montagem do seu robot iniciaram a sua programação.

Numa fase seguinte, tiveram que programar o robot para correr à volta de quatro mesas dispostas duas a duas (formando um retângulo). Realizaram corridas, em linha reta, de um lado ao outro da sala, mas sem que o robot tocasse na parede oposta (uso do sensor ultrassónico).

Posteriormente criaram, com peças fornecidas, um protótipo de um troço de corridas justo para dois robots correrem ao mesmo tempo, isto é, um troço em que os dois robots tivessem a mesma probabilidade de ganhar a corrida. Informou-se nessa altura que o troço de corridas tinha que caber na sala de aula e que cada peça do protótipo era 15 vezes mais pequena do que a peça em tamanho real.

Após os grupos terem criado o seu protótipo nas condições estabelecidas, apresentaram-no à turma e escolheram o troço em que queriam realizar as corridas. Depois disto, programaram o carro tendo em atenção que o robot teria que: i) iniciar a corrida assim que fosse dado o sinal de partida (uso do sensor de som); ii) percorrer o troço de forma que não chocasse com o outro (uso do sensor de luz); iii) parar 15cm antes do fim do troço (uso do sensor ultrassónico).

Após programarem e testarem o seu robot, montaram o troço de corridas na sala de aula e realizaram as corridas. Nessa aula, realizaram 6 corridas, 'encontraram' um vencedor e a classificação dos vários robots, sem recorrer a medidas estatísticas. Não ficaram satisfeitos com os resultados visto que consideraram injusto que, perante certas ocorrências, um determinado robot fosse o vencedor.

Na aula seguinte realizaram corridas novamente. Decidiram que cada carro teria de correr duas vezes contra cada adversário e uma vez em cada faixa do troço, para que todos os robots corressem nas mesmas condições.

Cada um dos grupos registou os dados que considerou importantes para a definição do vencedor. Registaram a posição em que cada robot terminou cada uma das corridas e os tempos gastos em cada corrida.

Após a realização das corridas os alunos tiveram que encontrar argumentos para um robot ser o vencedor, definir critérios de classificação para os vários robots e apresentá-los à turma justificando quem tinha sido o vencedor de acordo com os critérios estabelecidos.

Com os dados recolhidos durante as corridas e com recurso à folha de cálculo Excel, cada grupo elaborou um estudo estatístico sobre vários aspetos das corridas.

Os grupos tiveram que elaborar um relatório sobre todo o trabalho realizado e apresentar à turma os aspetos que consideraram importantes nesta corrida de robots para a aprendizagem da Estatística.

Metodologia

Este artigo foca-se na prática matemática escolar, de uma turma de 8.º ano de uma escola localizada na periferia do Funchal, quando os alunos aprendem Estatística (e não só) com robots.

Tendo em conta o problema em estudo, a metodologia de investigação adotada é de caráter qualitativo de cunho interpretativo. O objeto em estudo abarca preferencialmente uma natureza descritiva e interpretativa. Ao optar por esta abordagem, está a ser dada maior relevância ao processo do que ao produto, tendo a preocupação de retratar a perspetiva dos participantes (Bogdan & Biklen, 1994). O ambiente de sala de aula constituiu a fonte direta dos dados.

Antes de iniciar a recolha de dados foi criado um cenário de aprendizagem (Wollenberg, Edmunds & Buck, 2000) que privilegiou o trabalho de projeto no sentido de Greeno e Middle School Mathematics through Applications Project (1998).

A investigadora apresentou à professora da turma uma estrutura base para o cenário a implementar e essa proposta foi discutida e alterada de acordo com os temas matemáticos que a professora queria abordar – Tratamento de Dados e Planeamento Estatístico.

A construção e implementação do cenário foi um processo conjunto entre a investigadora e a professora da turma. Estas trabalharam em conjunto na criação das tarefas realizadas, tendo a primeira conduzido as discussões com os alunos.

O cenário foi implementado, nos meses de abril e maio do corrente ano, durante 9 aulas de 90 minutos cada, numa turma constituída por 14 alunos, sendo 4 raparigas. À turma ainda não tinha sido lecionado Estatística no 3.º ciclo.

Os dados foram recolhidos através de gravações vídeo e áudio, privilegiando-se o registo das interações entre os alunos. Foi utilizada a observação participante, o que permitiu um contacto mais estreito e pessoal com o fenómeno observado. Após todas as aulas, quer a professora quer a investigadora, fizeram reflexões escritas sobre as mesmas.

Aprender Estatística com Robots

O motor impulsionador desta prática matemática escolar foi realizar e vencer as corridas com os robots. Mas para o conseguirem, os alunos envolveram-se na realização de diferentes tarefas. Isto é, para realizarem as corridas tiveram que construir o seu robot, programá-lo, construir o troço de corridas, escolher o troço para realizar as corridas e só então as realizaram. Foi a grande vontade de realizar e vencer as corridas que manteve os alunos envolvidos nesta prática. Este foi, portanto, o empreendimento conjunto dos alunos (Wenger, 1998). Este empreendimento, que manteve unida a turma, não foi uma simples meta estabelecida, mas criou, entre os alunos, relações de responsabilidade que se converteram numa parte integral da prática. Tudo o que criaram (robots, pista, programação, critérios de vencedor) foi da responsabilidade dos grupos de trabalho e passou também a ser responsabilidade de toda a turma. O empreendimento foi o resultado de um processo conjunto de negociação que refletiu toda a complexidade do engajamento mútuo (Wenger, 1998) que se estabeleceu entre os alunos no próprio grupo de trabalho e entre os alunos na turma.

Falar em empreendimento conjunto não significa falar de concordância num sentido simples pois, todos queriam realizar as corridas, mas também todos queriam ganhá-las; todos queriam ter um troço de corridas justo, mas também queriam que o seu fosse o escolhido. Este desacordo proporcionou a argumentação, a criação de estratégias, a justificação de procedimentos e é entendido como uma parte produtiva do empreendimento. Assim, falar em empreendimento conjunto, não significa que todos acreditem no mesmo ou que estejam de acordo em todos os aspetos, significa que a negociação foi feita conjuntamente (Wenger, 1998).

Existiram negociações que apenas ocorreram no pequeno grupo como, por exemplo, o aspeto do robot, a criação, justiça e tamanho do troço de corridas, a programação do robot, a definição e o estabelecimento dos critérios de classificação dos vários robots. Existiram outros aspetos que foram negociados por toda a turma, nomeadamente, a escolha do troço de corridas e qual o robot vencedor. Este processo conjunto de negociação refletiu toda a complexidade do engajamento mútuo (Wenger, 1998).

Quando a investigadora pediu para construírem um troço de corridas justo, foi evidente que fazia parte do reportório partilhado (Wenger, 1998) da turma que "para o troço ser justo o comprimento das duas faixas de rodagem tinha que ser igual", mas nem todos sabiam as condições necessárias para que isso acontecesse. Foi através do engajamento mútuo que, em grupo, construíram um troço de corridas justo. Durante esse processo, negociaram o que torna um troço de corridas justo para os dois robots que vão realizar a corrida.

No caso da transcrição seguinte, o aluno C está a explicar a outro elemento do seu grupo como construir um troço de corridas justo.

> Ao cortar uma curva por dentro ganha-se tempo e ao cortar por fora, perdemos tempo, por isso, para o troço ser justo tem de ter tantas curvas, e do mesmo tamanho, para dentro como para fora, porque na curva que eu estou a dar por dentro ganho, e depois tu tens de ter uma curva por dentro, do mesmo tamanho que a minha, para me ganhares.

O facto de o aluno C ter partilhado a sua visão (do que torna justo um troço de corridas) e ter apresentado a sua perspetiva individual, sobre o problema que estava a dificultar a tarefa do grupo, contribuiu para o conhecimento de todos sobre o que é um troço justo. Este aspeto passou a fazer parte do reportório partilhado (Wenger, 1998) destes alunos e possibilitou a criação de um troço de corridas nas condições estabelecidas.

Após os alunos construírem e apresentarem à turma os seus protótipos de troços de corrida, houve um momento de negociação conjunta. Os alunos apresentaram estratégias para escolher o troço de corrida e a turma optou escolher por votação o troço de corrida a adotar. Assim, emergiu a oportunidade de realizar o primeiro estudo estatístico e explorar alguns conceitos da Estatística. Quando acabou a contagem de votos (5 para a pista 1, 8 para a pista 2 e 1 para a pista 3), surgiu o seguinte diálogo entre a investigadora (Inv) e os alunos (M e P):

> Inv: E agora, como fazemos?
>
> M: Já temos a pista escolhida, é a pista 2 que ganhou com 8 votos.
>
> Inv: Como assim?
>
> P: A moda é a pista 2, por isso essa ganhou.
>
> Inv: Moda?
>
> P: Sim, a 2 é a que tem mais votos, diz-se moda.
>
> Inv: Mas essa escolha assim é justa?
>
> A: Sim, perguntámos a todos e todos votaram, por isso é justo. Não perguntámos só a alguns.

O momento foi aproveitado para diferenciar população de amostra, discutir acerca da importância da escolha de uma amostra e dos cuidados que são necessários ter no momento da sua escolha. Em conjunto, foi feito uma síntese dos aspetos a considerar aquando da escolha de uma amostra. Além disso, foi questionado se naquele estudo - escolha do troço de corrida - tinha sido utilizado uma população ou uma amostra, se tinha sido feito um senso ou uma sondagem e como tinha sido feita a recolha dos dados. Classificaram também a variável como sendo uma variável qualitativa. Todos os conceitos estatísticos emergiram da prática dos alunos. Os conceitos emergiram porque os alunos participaram em ações cujo significado foi negociado, não obstante havia intencionalidade da professora e da investigadora em os abordar.

Ao estabelecer critérios para um robot ser vencedor, os alunos apresentaram e argumentaram as suas perspetivas sobre a situação o que fez emergir estratégias variadas e originais.

O grupo que tinha o robot Vinagre organizou as vitórias, empates e derrotas e atribuiu a classificação dos robots por pontuação, como se mostra na tabela seguinte.

	Vitórias	Empates	Derrotas	Pontuação
X–5	0	0	6	0
DNR	3	1	2	10
Jagunço	4	1	1	13
Vinagre	3	2	1	11

Tabela 1: Pontuação atribuída aos robots, pelo grupo do Vinagre.

Quando a investigadora pediu que explicassem o critério estabelecido para classificação dos robots os alunos (C e G) explicaram:

> C: Atribuímos pontos como no futebol, 3 às vitórias, 1 aos empates e 0 às derrotas. O Jagunço ganha com 13 pontos.
>
> G: Também fizemos de outra maneira, somámos todos os tempos das corridas de cada robot, mas a classificação não se alterou.

O aluno mostrou os dados organizados como se mostra na Tabela 2.

	X–5	DNR	Jagunço	Vinagre
Soma dos tempos em segundos	180,56	166,86	164,14	166,2
Classificação	4.º	3.º	1.º	2.º

Tabela 2: Soma dos tempos das corridas e classificação atribuída.

> Inv: O que significam esses valores?
>
> G: É o tempo que cada robot gastou nas corridas.
>
> Inv: Se quisessem fazer publicidade dos robots, acham que esses números… são sugestivos?
>
> C: Poderíamos dividir os valores por 6. Fizeram 6 corridas.
>
> Inv: O que significa…?

A discussão seguiu de modo a fazer emergir e clarificar a noção de média e a sua utilidade em termos estatísticos. O conceito surgiu por intencionalidade da investigadora mas também porque os alunos estavam engajados na prática em curso.

Durante a apresentação dos critérios estabelecidos para um robot ser vencedor, ocorreu argumentação dos alunos para defender a sua opinião. Esses argumentos foram aproveitados pela professora e pela investigadora para fazer emergir outros conceitos estatísticos. Vejamos seguidamente um desses momentos.

O grupo que tinha o robot DNR estabeleceu o tempo mínimo de cada robot como critério para definir o vencedor e em caso de empate considerou que ganhava aquele que tivesse menor tempo máximo. Apesar da aparente justiça do critério, não podemos descurar o facto de esse tempo pertencer ao robot do grupo que o estabeleceu e que apresentou os resultados que se mostram na tabela seguinte.

	Tempo em segundos		Classificação
	Mínimo	Máximo	
DNR	26,54	29,75	1.º
Jagunço	27,05	27,57	2.º
Vinagre	27,05	30,44	3.º
X–5	28,32	33,52	4.º

Tabela 3: Critério apresentado pelo grupo do DNR.

Este critério, estabelecido para desempatar os robots, fez emergir os conceitos de extremos, de amplitude da amostra e gerou negociação do significado destes conceitos. O grupo do Vinagre não considerou o critério justo. A argumentação foi que o grupo estava a usar duas medidas estatísticas apenas para o desempate e, de acordo com este grupo, justo seria utilizar a amplitude da amostra para estabelecer a classificação dos robots. Os outros grupos evidenciaram o seu contentamento por existir um critério que destituía o Jagunço de vencedor.

Aproveitou-se este momento para discutir a ideia de que não existe o critério certo ou errado e que o importante é a coerência da argumentação sobre o que é apresentado. Este facto agradou aos alunos pois, deste modo, com exceção do X-5, cada grupo conseguiu encontrar um critério que colocava o seu robot a vencer.

Conclusões

Uma das funções essenciais do professor de matemática é educar matematicamente os seus alunos (Ponte, Serrazina, Guimarães, Brenda, Guimarães, Sousa, Menezes, Martins & Oliveira, 2007). Com este propósito foi criado e implementado o cenário de aprendizagem que anteriormente se apresentou. A implementação desse cenário originou uma prática matemática escolar com características diferentes das práticas escolares com índole mais tradicional.

Os alunos estiveram engajados na prática (Wenger, 1998) e trabalharam com um propósito comum - realizar e vencer as corridas com os robots. Este empreendimento conjunto manteve unido o grupo turma e criou, entre os alunos, relações de responsabilidade que se converteram numa parte integral da sua prática.

Uma parte produtiva do empreendimento (Wenger, 1998) foi o desacordo (que surgiu tanto no pequeno como no grande grupo) que proporcionou a argumentação, a criação de estratégias, a justificação de procedimentos e fez emergir os conceitos matemáticos.

Nesta prática existiram relações de responsabilidade mútua. Tudo o que fizeram foi negociado (desde a criação do robot até à definição do robot vencedor) e definido pelos alunos na prática que empreenderam. Nesse processo de negociação existiram conflitos, tensões, confiança e também desconfiança. Mas os alunos encontraram formas que facilitaram esse processo, respeitando as diferenças e coordenando as aspirações individuais e do próprio grupo ao longo de todo o percurso. A negociação, a partilha de histórias, o conhecimento que trouxeram de outras práticas não escolares e o engajamento dos alunos foram importantes e cruciais para a argumentação, a criação de estratégias e para a justificação de procedimentos. Durante a negociação, os alunos desenvolveram significados que se relacionaram e acabaram por se conjugar e ganhar coerência relativamente à prática que os uniu e nela geraram e apropriaram-se de um reportório partilhado (Wenger, 1998).

A aprendizagem da estatística ocorreu na medida em que os alunos se engajaram na prática e nela participaram e porque quiseram saber mais sobre os vários assuntos que foram surgindo.

Referências bibliográficas

Batanero, C., Burrill, G., & Reading, C. (2011). *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education. A Joint ICMI/IASE Study*. ICMI Study volume 14. New York: Springer.

Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação. Uma Introdução à Teoria e aos Métodos*. Coleção Ciências da Educação. Porto: Porto Editora.

Fernandes, E. (2012). 'Robots can't be at two places at the same time': material Agency in mathematics class. In Tso, T. Y. (Ed). *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 227-234). Taipei, Taiwan: PME.

Greeno, J. G. & Middle School Mathematics through Applications Project. (1998). The Situativity of Knowing, Learning, and Research. *American Psychologist*, 53(1), 5-26.

Lave, J. (1988). *Cognition in Practice: Mind, mathematics and culture in everyday life*. Cambridge USA: Cambridge University Press.

Lave, J. & Wenger, E. (1991). *Situated Learning: Legitimate Peripheral Participation.* New York: Cambridge University Press.

Ponte, J., Serrazina, L., Guimarães, H., Brenda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Ministério da Educação: DGIDC.

Wenger, E. (1998). *Communities of Practice: Learning, Meaning and Identity*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Wenger, E., McDermott, R. & Snyder, W. M. (2002). *Cultivating communities of practice.* Boston, Massachusetts, USA: Harvard Business School Press.

Wollenberg, E., Edmunds, D. & Buck, L. (2000). *Anticipating Change: Scenarios As a Tool For Adaptive Forestmanagement. A Guide*. Indonesia: SMT Grafika Desa Putera.

A INTERPRETAÇÃO DE MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL DE FUTUROS PROFESSORES E EDUCADORES NA REALIZAÇÃO DE UMA INVESTIGAÇÃO ESTATÍSTICA

Raquel Santos

Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

raquelfms@gmail.com

João Pedro da Ponte

Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

jpponte@ie.ul.pt

Resumo

Com a inclusão do ensino da Estatística nos primeiros anos da educação básica torna-se necessário fazer uma aposta ainda mais forte na formação inicial de professores e educadores neste tema. Consequentemente, é importante compreender os conhecimentos que os futuros professores e educadores de infância possuem tanto em Estatística como na sua didática. Com esse objetivo, analisamos os relatórios que elaboraram no âmbito de uma investigação estatística, procurando compreender que significados os futuros professores e educadores atribuem às medidas de tendência central. Referimos, ainda, implicações dos resultados do estudo para a formação inicial de professores.

Palavras-chave: Estatística, Média, Mediana, Moda, Investigação estatística, Formação inicial.

Introdução

Nas *Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar* (ME, 1997) e no *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007), é dada ênfase à Estatística desde os primeiros anos. No ensino deste tema assume um lugar central o desenvolvimento da literacia estatística, isto é, a capacidade de interpretar, avaliar criticamente e comunicar acerca de informação e mensagens estatísticas (Gal, 2002), vertente fundamental na educação de todo o cidadão e, ainda mais, na educação do futuro professor. Neste quadro, será importante saber de que modo os futuros professores e educadores de infância interpretam e comunicam os resultados estatísticos. Esta comunicação relata parte de uma investigação que procura compreender o conhecimento de Estatística e da sua Didática de futuros professores e educadores de infância quando terminam a sua licenciatura em Educação Básica. Debruçamo-nos sobre os relatórios de investigações estatísticas, analisando o modo como os futuros professores e educadores interpretam as três medidas de tendência central.

Enquadramento teórico

A realização de investigações estatísticas permite aos alunos tornarem-se ativos na aprendizagem da Estatística. Nestes projetos, os alunos escolhem um tema do seu interesse, definem objetivos, escolhem instrumentos de recolha, selecionam amostras, recolhem, codificam, analisam e interpretam dados para responder às questões propostas (Batanero & Godino, 2005). Durante uma investigação percorrem todos os passos do ciclo PPDAC (Problema, Plano, Dados, Análise e Conclusões) de Wild e Pfannkuch (1999), num ambiente propiciador de uma aprendizagem significativa (Ponte, 2007), podendo apreciar a importância e a dificuldade do trabalho estatístico e o interesse da Estatística na abordagem de problemas da vida real (Bataneto & Godino, 2005). Além disso, o trabalho com investigações estatísticas permite conhecer os pontos fracos do conhecimento matemático dos alunos e, por vezes, até conceitos e ideias que pareciam bem consolidados (Ponte, 2007).

O professor é um elemento central do ensino, tendo de saber muito bem a matéria para a poder ensinar (Ma, 1999). Além disso, o professor tem também de possuir um conhecimento didático da Matemática (o *pedagogical content knowledge* de Shulman, 1986). Para Mulekar (2007), os futuros professores necessitam de uma compreensão aprofundada de conceitos estatísticos de modo a darem um significado coerente aos resultados. As medidas de tendência central (moda, média e mediana) têm uma relevância particular por se encontrarem frequentemente no dia-a-dia (Groth, 2006). Para Groth (2006), a compreensão destas medidas é uma componente importante da literacia estatística. No entanto, segundo Jacobbe (2008), mesmo professores do 1.º ciclo exemplares não possuem conhecimento conceptual de dois conceitos básicos da Estatística – moda e média.

Em Portugal, a moda aparece no novo programa de Matemática nos 3.º e 4.º anos (ME, 2007) e os professores tendem a considerar que se trata de um conceito de fácil compreensão. No entanto, alguns estudos sugerem o contrário. Assim, Fernandes (2009), num levantamento de dificuldades e erros em Estatística de alunos dos 7.º e 12.º anos e de futuros professores dos 1.º e 2.º ciclos, refere falhas na compreensão deste conceito, quando selecionam a maior frequência em vez do valor da variável correspondente. Num estudo com 40 futuros professores na licenciatura em Educação Básica foram frequentes as respostas do tipo “a moda é 9, pois existe maior número de alunos que vê televisão” (Martins, Pires & Barros, 2009, p. 7). Na interpretação deste conceito é frequente associar a moda “ao maior número que incide numa tabela de resultados”, à maior frequência absoluta, ao “valor que aparece mais vezes” e à “categoria ou classe de maior frequência” (Martins, Pires & Barros, 2009, p. 11). Algumas destas interpretações demonstram um conhecimento confuso, dado que o valor que aparece mais vezes pode ser visto como o número na coluna das frequências absolutas que se repete e não o valor da variável que se repete mais vezes.

O conceito de média é introduzido no 2.º ciclo (ME, 2007). A investigação sobre este conceito é bastante vasta, dado ser muito utilizado em estudos estatísticos. Leavy e Loughlin (2006) indicam que existem dois tipos de compreensão – conceptual e processual. Processualmente, a média aritmética é o valor no qual a soma dos desvios em relação à média numa direção é igual à soma dos desvios na outra direção. Conceptualmente, a média pode ser vista como ponto de equilíbrio ou centro de gravidade, representando o conjunto de dados. Para os autores, interpretações da média como distribuição equitativa dos dados (ou seja, o valor que representa o conjunto de dados como se todos eles fossem iguais), ou como valor de equilíbrio, onde os valores mais altos compensam os valores mais baixos, demonstram compreensão conceptual do conceito. No cálculo da média, um erro frequente é determinar a média das frequências absolutas de variáveis qualitativas (Martins, Pires & Barros, 2009). Os alunos evidenciam diversas interpretações do conceito de média, nomeadamente a atribuição de significado com base no algoritmo de cálculo (Chatzivasileiou, Michalis & Tsaliki, 2010; Fernandes & Barros, 2005), com respostas do tipo “soma de todos os resultados divididos pelos valores existentes”, ou “soma dos números” (Martins, Pires & Barros, 2009). Outros associam a média à “noção de equilíbrio”, ao “valor médio”, ao “valor que equilibra os valores mais altos e mais baixos” (Martins, Pires & Barros, 2009), ao valor baseado na distribuição equitativa dos dados (“*fair share*”), ao valor que se deve ter se todos os dados fossem iguais, ao valor típico esperado ou à medida de localização (valor próximo mas não exato) (Chatzivasileiou, Michalis & Tsaliki, 2010). Como interpretações incorretas temos respostas baseadas no valor máximo, no valor mínimo, num dado específico, na mediana e na moda (Chatzivasileiou, Michalis & Tsaliki, 2010; Leavy & Loughlin, 2006). Nestes últimos casos, os alunos falham no reconhecimento do conjunto de dados como um todo e tendem a focar-se em valores individuais (Chatzivasileiou, Michalis & Tsaliki, 2010).

Relativamente à mediana, conceito do 3.º ciclo (ME, 2007), o panorama também é problemático. Foram detetadas dificuldades na compreensão e interpretação deste conceito tanto em alunos do 12.º ano (Fernandes, 2009), como em futuros professores dos 1.º e 2.º ciclos (Fernandes & Barros, 2005). No seu cálculo, muitos futuros professores indicam o valor central das frequências absolutas, outros confundem este conceito com a moda, e o erro mais frequente é determinar o valor central sem ordenar os dados (Martins, Pires & Barros, 2009). Mesmo professores do 1.º ciclo com muita experiência calculam a média quando lhes é pedida a mediana (Jacobbe, 2008). Na interpretação deste conceito, há associações ao valor central (mas nem sempre da forma mais correta) bem como ao "valor que está no meio", ao valor que "divide ao meio", ao valor "intermédio", ao valor "que está mais ou menos no meio", ao "quartil 2" sem mais explicações, ao valor que "divide a amostra ao meio e equilibra os grandes valores com os pequenos", ao "número médio de todos os resultados" e ao "valor médio" (Martins, Pires & Barros, 2009). As três últimas interpretações mostram alguma confusão entre os conceitos de mediana e média.

Metodologia

Os participantes deste estudo são futuros professores e educadores de infância da Licenciatura em Educação Básica de uma Escola Superior de Educação que frequentaram a unidade curricular Tópicos de Matemática Discreta, Estatística e Probabilidades no 2.º semestre do 2.º ano, em 2010/11. Nesta unidade curricular, a única da licenciatura dedicada ao desenvolvimento do conhecimento estatístico, trabalharam os conceitos estatísticas numa ótica de descoberta, tendo sido dada grande ênfase à sua interpretação em contexto real através de exercícios e problemas. Foi-lhes também proposta a realização de uma investigação estatística, em grupo, de um tema por eles escolhido, mas com possível utilização com futuros alunos. Durante a realização da investigação, foi-lhes pedido o registo de todo o processo num relatório redigido também em grupo e apresentado à turma no final do semestre, incluindo uma análise e interpretação de dados, uma conclusão sobre o tema e uma reflexão sobre o trabalho realizado. Esta comunicação analisa estes relatórios escritos de 36 futuros professores que frequentaram a unidade curricular no regime de avaliação contínua (18 em regime diurno e 18 em regime pós-laboral), tendo em vista perceber o seu conhecimento sobre medidas de tendência central. Uma vez que os participantes recorrem ao programa Excel para calcular as medidas, a ênfase é colocada na interpretação dessas medidas no contexto de cada questão. Nesta parte do estudo foi adotada uma metodologia quantitativa com a elaboração de grupos com as diferentes interpretações observadas nos relatórios. Por limitações de espaço, discutimos apenas resultados que consideramos mais pertinentes, com destaque para resultados que não foram observados em estudos anteriores.

Os futuros professores organizaram-se em dezasseis grupos e escolheram temas variados, como por exemplo reciclagem, desporto, alimentação, consumo de água e rotinas diárias elaborando questionários com um mínimo de 11 questões e um máximo de 25. No total foram feitas 273 questões, das quais 81 relativas a variáveis quantitativas e as restantes 192 referentes a variáveis qualitativas. No tratamento dos dados todos os grupos utilizaram o programa Excel, recorrendo às respetivas funções para calcular a média e a mediana. Para o cálculo da moda perceberam ser mais conveniente não recorrer à função “moda” do Excel, uma vez que esta não funciona para variáveis qualitativas nem para o caso de uma variável ter mais do que uma moda.

Resultados

Moda

Surgem muitas interpretações do conceito de moda nos relatórios das investigações estatísticas (Tabela 1). Assim, cinco dos grupos associam a moda a algo que acontece “mais vezes”, como no exemplo da análise da questão “Qual a sua profissão?” onde o grupo refere “a moda do grupo de profissões é “profissões intelectuais e científicas”, pois é o grupo de profissões que se repete mais vezes na amostra” (RG4D, p. 11). Também associadas a uma resposta que aparece muitas vezes, mas desta vez aludindo à “frequência”, ou palavras da família, foram as interpretações feitas por onze grupos. O exemplo “a moda (...) é casa, pois é o valor do gráfico e da tabela mais elevado” na análise da questão “Onde toma o pequeno-almoço?” (RG1PL, p. 29) só não criou confusão por se tratar de uma variável qualitativa.

Três dos grupos utilizaram interpretações que se referiam a algo que predomina como na questão “Quantas pessoas tomam banho diariamente em sua casa?” que suscitou a seguinte análise “é possível constatar que o número predominante é de 3 banhos com cerca de 42%" (RG5D, p. 14). Praticamente todos os grupos usaram expressões como "a maior parte" ou expressões semelhantes que traduzem uma ideia correta: "a maior parte dos meninos vai para o ATL" depois da escola (RG6D, p. 23).

Interpretações da moda como a seguinte, feitas por oito grupos, são muito ligadas ao contexto, fazendo uso da expressão "mais" ou "maior": "o transporte mais utilizado (...) é o carro" (RG6PL, p. 9). Um grupo mencionou ainda a moda como sendo algo comum na amostra: "o jogo mais comum entre estes alunos é o futebol" (RG2PL, p. 15). Esta expressão mostra que o grupo olha para a moda como sendo o valor típico expectável, interpretação muitas vezes associada à média (Chatzivasileiou, Michalis & Tsaliki, 2010).

Tabela 1 – Interpretações adequadas da moda

Interpretações adequadas	# grupos
Valor/modalidade referido(a)/repetido(a)/verificado(a)/ escolhido(a)/que surge mais vezes	5
Valor/modalidade associado(a) à maior frequência	11
Grande parte da amostra...	2
Maior parte da amostra.../a (grande) maioria da amostra.../...maioritariamente...	14
Valor/modalidade associado(a) a mais ou a um maior número de inquiridos	5
Outra interpretação usando "mais" ou "maior" em contexto	8
Valor/modalidade predominante/valor/modalidade que mais predomina/...predominantemente...	3
Valor/modalidade com mais relevância	1
Valor/modalidade mais comum	1
Valor/modalidade satisfatório(a)	1
Valor/modalidade preferido(a)	2

Entre os problemas de interpretação (Tabela 2), na análise da questão "Desde quando tem o hábito de reciclar?" (RG2D, p. 9), um grupo usou a expressão "notámos que 36% das pessoas começaram a reciclar entre 2006 e 2008, em que, sendo esta a classe modal, concluímos que grande parte da amostra começou a reciclar nesta altura". Esta resposta é problemática porque o facto de acontecer algo numa grande parte da amostra, não significa que essa "parte" seja a maior e, por conseguinte, referente à moda.

Adicionalmente, três grupos fizeram afirmações gerais o que também é problemático, uma vez que a moda não é o que acontece a todos os inquiridos, mas a uma maioria. É ainda de referir um grupo que fez a seguinte afirmação: "as idades a que realizamos mais inquéritos foi a jovens com 19 anos" (RG1D, p. 8). Nota-se alguma confusão, não sabemos se a nível de compreensão da moda, se a nível de construção frásica e português. Esta frase transmite a ideia de que se realizaram inquéritos a idades e não a pessoas, o que pode ser confuso para quem lê os relatórios.

Tabela 2 – Problemas de interpretação da moda

Problemas de interpretação	# grupos
Grande parte da amostra...	1
Generalização	3
Confusão	1
Sem interpretação (variáveis quantitativas)	13
Sem interpretação (variáveis qualitativas)	15

De destacar que, no caso das variáveis qualitativas, quinze grupos não fizeram qualquer referência, nem mesmo implícita, ao conceito de moda e ao que esta medida representa e significa. O mesmo aconteceu com treze grupos para as variáveis quantitativas. Isto mostra que, principalmente em variáveis onde a moda é a única medida estatística que se pode determinar, os participantes limitam-se a uma leitura dos gráficos e tabelas.

Média

Em termos de interpretações adequadas do conceito de média (Tabela 3), um grupo referiu a seguinte expressão: "a média das idades é de 3,4, que nos representa o equilíbrio das idades" (RG1PL, p. 11). A resposta demonstra que o grupo percebe que a média pode ser vista como um ponto de equilíbrio, mas não deixa transparecer de que modo compreende realmente o significado desta medida. Apesar de esta interpretação poder demonstrar uma compreensão conceptual, não é evidente o que os participantes compreendem deste conceito. Houve ainda um grupo que considerou a média como o valor "normal", ou seja, o que é normal acontecer. Esta interpretação vai ao encontro da interpretação de valor típico esperado, considerada correta mas, mais uma vez, não demonstra compreensão do conceito.

Tabela 3 – Interpretações adequadas da média

Interpretações adequadas	Número total de grupos
Valor que representa o equilíbrio	1
Valor "normal"	1
Distribuição equitativa	2

Também no caso da média foram observadas interpretações pouco adequadas que sobretudo revelam falhas na distinção entre a média e outra medida estatística (Tabela 4). Um grupo fez confusão entre a média e as medidas de dispersão, usando a média para indicar se os dados estão ou não dispersos: "os valores da média é 7,6 (...), logo podemos concluir que os valores não são muito dispersos" (RG6D, p. 28). De realçar que nenhum dos grupos, em algumas das variáveis quantitativas, interpretou a média. Nestes casos estão incluídas as afirmações do tipo "a média é..." ou "a amostra, em média..." por considerarmos que estas frases não acrescentam qualquer sentido ao valor da média.

Tabela 4 – Problemas de interpretações da média

Problemas de interpretação	# grupos
Confusão entre média e outras medidas de tendência central	1
Confusão entre média e medidas de dispersão	1
Sem interpretação	16

Mediana

No que respeita a interpretações corretas do conceito de mediana (Tabela 5), há a registar a seguinte interpretação de um dos grupos: "até à mediana estão 50% da amostra e para lá da mediana também estão" (RG5D, p. 13), o que demonstra que estes participantes compreendem que a mediana divide a amostra ao meio, 50% para cada lado da mediana, podendo no entanto ser problemático a não inclusão do valor da mediana na segunda metade da amostra ("para lá da mediana").

Tabela 5 – Interpretações adequadas da mediana

Interpretações adequadas	# grupos
Valor que divide os dados ordenados	2
Até esse valor estão 50% da amostra	1
50% dos inquiridos... ou menos...	3
50% dos inquiridos... no máximo...	1

De realçar outras interpretações adequadas que revelam compreensão deste conceito no contexto dos dados analisados usadas por quatro grupos, do tipo: "50% das pessoas pretende regressar à feira, no mesmo ano, no máximo 2 vezes" (RG3D, p. 31). Este tipo de interpretação mostra uma compreensão profunda do que significa a mediana no contexto da variável em estudo, recorrendo a expressões que na realidade fazem sentido na interpretação dos dados e que vão para além do abstrato.

No entanto, nem tudo foram interpretações adequadas (Tabela 6). Quatro grupos atribuíram significados que revelam compreensão que a mediana é um valor central e que divide os dados em 50% para cada lado, mas que não mostram grande compreensão do conceito, evidenciando alguma confusão: "o quartil 2 é 50% dos dados" (RG4PL, p. 11). Nesta interpretação escrita o grupo confunde-se e refere que a mediana é o valor que tem 50% dos dados, o que não é correto.

Tabela 6 – Problemas de interpretação da mediana

Problemas de interpretação	# grupos
Valor que está no centro	1
Valor equivalente a 50%	1
Valor que é 50% dos dados	1
Valor para um máximo de 50% dos inquiridos	1
Confusão entre mediana e moda	1
Confusão entre mediana e medidas de dispersão	1
Sem interpretação	15

O seguinte exemplo mostra que o grupo tentou fazer uma formulação do tipo realçado nas interpretações adequadas, mas fez confusão, talvez por não compreender bem o conceito: "50% das pessoas no máximo vêm ao festival com 3 acompanhantes" (RG3D, p. 23). Outras interpretações inadequadas mostram uma certa confusão entre a mediana e outras medidas estatísticas. De salientar o caso em que o grupo usa a mediana para concluir sobre a dispersão dos dados: "mediana é 8, logo podemos concluir que os valores não são muito dispersos" (RG6D, p. 28). É de realçar ainda que só um grupo fez a interpretação do conceito de mediana para todas as variáveis quantitativas que estudou.

Conclusões e implicações

A análise dos relatórios dos 16 grupos evidencia falhas na compreensão das medidas de tendência central dos futuros professores e educadores. Mesmo quando analisam estes conceitos no contexto dos dados recolhidos, atribuem significados às medidas que mostram alguma confusão relativamente ao seu significado, por vezes não fazendo distinção entre diferentes medidas estatísticas. Adicionalmente, talvez por terem de realizar um relatório escrito com a análise de diversas variáveis e por não quererem repetir sempre a mesma expressão, utilizaram interpretações não mencionadas por outros investigadores como referir a moda como algo que acontece "a grande parte", "à maior parte" e "a um grande número" de inquiridos (interpretações adequadas) ou como valor relevante ou satisfatório e as generalizações (interpretações não adequadas). Alguns grupos atribuíram significados apropriados, como a média sendo o ponto de equilíbrio (Leavy & Loughlin, 2006), mas sem deixar transparecer o modo como compreendem realmente o significado das medidas. Relativamente à mediana observou-se a interpretação concreta e contextual que 50% da amostra está associada a este valor ou menos. Assim, as interpretações inseridas no contexto dos dados a tratar são as que demonstram maior compreensão dos conceitos. Para além disso, uma interpretação pode ser considerada adequada ou não, dependendo tanto do tipo de variável (quantitativa ou qualitativa) como da informação associada (por exemplo se refere a frequência no caso de mencionar "grande parte"). De realçar também o facto de grande parte dos grupos não interpretar as medidas de tendência central quando analisa os dados, ficando-se pela leitura de tabelas e gráficos.

Estes resultados são importantes porque mostram que há uma grande variedade de interpretações destas medidas, umas adequadas e outras não, maior ainda do que o indicado em investigações anteriores (e.g., Fernandes & Barros, 2005; Martins et al., 2009). Os futuros professores devem contactar e discutir todas elas, de modo a perceberem quais transmitem melhor a informação sobre os dados. É também importante levá-los a comparar e contrastar as três medidas de tendência central de modo a perceber as respetivas diferenças. Por último, este estudo mostra a importância de realçar as interpretações concretas e contextualizadas nos dados para consolidar a compreensão das medidas, aprender a distingui-las e a perceber a sua utilidade.

Agradecimento

Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projeto *Desenvolver a literacia estatística: Aprendizagem do aluno e formação do professor* (contrato PTDC/CPE-CED/117933/2010).

Referências

Batanero, C., & Godino, J. D. (2005). Perspectivas de la educación estadística como área de investigación. In R. Luengo (Ed.). *Líneas de investigación en Didáctica de las Matemáticas* (pp. 203-226). Badajoz: Universidad de Extremadura.

Chatzivasileiou, E., Michalis, J., & Tsaliki, C. (2010). Elementary school students' understanding of concept of arithmetic mean. In C. Reading (Ed.), *Actas da 8th International Conference on Teaching Statistics*. Ljubljana, Eslovénia.

Fernandes, J.A. (2009). Ensino e aprendizagem da Estatística: Realidades e desafios. *Actas do XIX EIEM: Números e Estatística.* Vila Real.

Fernandes, J. A., & Barros, P. M. (2005). Dificuldades em estocástica de uma futura professora do 1º e 2º ciclos do ensino básico. *Revista Portuguesa de Educação, 18*(1), 117-150.

Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: Meanings, components, responsabilities. *International Statistical Review, 70*(1), 1-25.

Groth, R. E. (2006). An exploration of students' statistical thinking. *Teaching Statistics, 28*(1), 17-21.

Jacobbe, T. (2008). Elementary school teachers' understanding of the mean and median. In C. Batanero, G. Burrill, C. Reading & A. Rossman (Eds.), *Actas do ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conf.* Monterrey, México.

Leavy, A., & O'Loughlin, N. (2006). Preservice teacher understanding of the mean: Moving beyond the arithmetic average. *Journal of Mathematics Teacher Education, 9*(1), 53-90.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Martins, C., Pires, M. V., & Barros, P. M. (2009). Conhecimento estatístico: Um estudo com futuros professores. *Actas do EIEM: Números e Estatística*. Vila Real.

ME (1997). *Orientações curriculares para a educação pré-escolar*. Lisboa: DEB.

ME (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa: DGIDC.

Mulekar, M. (2007). Preparing teachers of statistics in the United States. *Atas 56th Session of International Statistical Institute*. Lisboa.

Pimentel, T., Vale, I., Freire, F., Alvarenga, D., & Fão, A. (2010). *Matemática nos primeiros anos: Tarefas e desafios para a sala de aula*. Lisboa: Texto.

Ponte, J. P. (2007). Investigations and explorations in the mathematics classroom. *ZDM, 39*, 419-430.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Research*, *15*(2), 4-14.

Wild, C. J., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review, 67*(3), 223-265.

ERROS E DIFICULDADES DE ALUNOS DO 1.º CICLO NA REPRESENTAÇÃO DE DADOS ATRAVÉS DE GRÁFICOS ESTATÍSTICOS[28]

Ana Michele Cruz
Agrupamento de Escolas D. João II
anamichelecruz@live.com.pt

Ana Henriques
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
achenriques@ie.ul.pt

Resumo

A literatura tem evidenciado as dificuldades reveladas pelos alunos de diferentes níveis de ensino na compreensão de conceitos e procedimentos de estatística. Nesta comunicação descrevemos e analisamos os principais erros e dificuldades evidenciadas por alunos do 1.º ciclo na representação de dados através de gráficos estatísticos, ao longo de uma unidade de ensino. Os resultados do estudo indicam que, apesar dos erros e das dificuldades iniciais na construção de gráficos estatísticos, nomeadamente em relação aos seus elementos essenciais, ao longo da unidade de ensino os alunos evoluem na compreensão desses elementos e passam a construir gráficos mais completos. Deste modo, desenvolvem, também, a sua literacia estatística.

Palavras-chave: Gráficos estatísticos; Unidade de ensino; Dificuldades dos alunos, Organização e tratamento dados.

Introdução

O ensino e a aprendizagem da Estatística têm adquirido, nos últimos anos, uma grande importância devido ao seu reconhecido papel na educação dos cidadãos (NCTM, 2007). Em Portugal, esta importância reflete-se no currículo de Matemática, onde se inclui, cada vez com maior ênfase e profundidade, o tema da “Organização e tratamento de dados (OTD)” (ME, 2007). Para o 1.º ciclo do ensino básico, o aspeto central das orientações curriculares é o desenvolvimento da capacidade de recolher e organizar dados relativos a uma situação ou a um fenómeno familiar dos alunos e de os representar de modo adequado, nomeadamente através de tabelas e gráficos (ME, 2007). As normas do NCTM (2007) também recomendam que do 3.º ao 5.º ano os alunos

[28] Estudo realizado no âmbito do Projecto DSL – *Developing statistical literacy: Student learning and teacher education*, apoiado pela FCT-Fundação para a Ciência e a Tecnologia (contrato PTDC/CPE-CED/117933/2010).

devem começar a representar os dados em tabelas, gráficos de barras e cartesianos, desenvolvendo a compreensão das diferentes formas de representação e preparando-se para compararem dois ou mais conjuntos de dados.

Este crescente foco no ensino da Estatística e a sua implementação generalizada, conduziu a um desenvolvimento da investigação didática, embora o número de investigações sobre esta temática ainda seja reduzido, sobretudo no que diz respeito às dificuldades reveladas pelos alunos dos primeiros anos de escolaridade na compreensão de gráficos estatísticos e ao tipo de ensino que lhes permite uma melhor aprendizagem. Neste contexto, torna-se pertinente realizar um estudo com o objetivo de descrever e analisar os principais erros e dificuldades evidenciadas por alunos do 1.º ciclo na representação de dados através de gráficos estatísticos, ao longo de uma experiência de ensino.

Erros e dificuldades na representação gráfica de dados estatísticos

Friel, Curcio e Bright (2001) argumentam que a compreensão dos gráficos é fundamental para se retirar a máxima informação a partir deles. Neste sentido, Ponte (1994) entende que a compreensão dos gráficos envolve o desenvolvimento de três competências: a sua leitura, interpretação e construção. A competência relacionada com a leitura de gráficos deve ser desenvolvida de modo a que os alunos sejam capazes de extrair dados do gráfico e produzir informação a partir deles (Wu, 2004). A interpretação de gráficos diz respeito à capacidade dos alunos formularem opiniões sobre a informação nele representada e a sua construção está associada à capacidade de saber representar ou editar dados graficamente. Wu (2004) acrescenta uma quarta competência, relacionada com a compreensão dos gráficos, que denomina por avaliação, defendendo que os alunos devem saber avaliar a precisão e eficácia de um gráfico.

As representações gráficas (gráficos, tabelas e diagramas) surgem em diversos contextos do dia a dia dos alunos (não exclusivamente escolares) e são usados, frequentemente, para comunicar dados estatísticos (Curcio, 1989). Justifica-se, assim, a necessidade de desenvolver nos alunos competências que os ajudem a representar e a interpretar essa informação de um modo crítico e reflexivo, elevando os seus níveis de literacia (Carvalho, 2009). No entanto, estas competências não se desenvolvem apenas por intuição, é necessário desenvolver metodologias de sala de aula que promovam o trabalho com as representações gráficas, permitindo que os alunos realizem aprendizagens significativas sobre o conceito de gráfico e seus elementos e, consequentemente, desenvolvam a compreensão dos mesmos (Curcio, 1987; Shaughnessy, 2007).

O gráfico de barras simples é uma das representações fundamentais, pois é de fácil construção e leitura. Este gráfico é normalmente utilizado para representar dados de variáveis qualitativas ou quantitativas discretas, segundo categorias e é expresso por barras com uma largura uniforme, cuja altura ou comprimento é proporcional à quantidade que representam (Arteaga, 2010; Curcio, 1989). É composto por dois eixos perpendiculares, devidamente legendados e rotulados, que se intercetam na origem. As frequências também podem ser colocadas no eixo horizontal ou vertical. Na construção de um gráfico de barras simples, o espaçamento entre as barras deve ser aproximadamente igual à largura das barras, pois se for demasiado grande dificulta a comparação dos dados e se for demasiado próximo parece-se com um histograma (Silva, 2006).

O pictograma é usado para representar variáveis quantitativas discretas, através de símbolos que podem ser do mesmo tamanho e forma e que são colocados sobre um eixo horizontal ou vertical, devidamente legendado. Este tipo de gráfico, pelas suas características, é adequado para os níveis escolares iniciais (Carvalho, 2009). De facto, mesmo que utilizado sem legenda, o gráfico pode ser compreendido pelos alunos mais novos, uma vez que o símbolo é normalmente revelador do que se pretende representar, embora a sua divisão possa ser um obstáculo para algumas crianças (Curcio, 1989).

Ao construir um gráfico, os alunos têm que realizar um conjunto de procedimentos e usar uma série de conceitos e propriedades, relacionados com o seu tipo, que permita apresentar, de modo compreensível, informações que de outro modo seriam difíceis de interpretar (Arteaga, 2010). No entanto, os alunos nem sempre possuem os conhecimentos necessários sobre os principais elementos de um gráfico (Carvalho, 2009), essenciais na compreensão das relações nele representadas e que, segundo Curcio (1989), são o título, os rótulos dos eixos e as escalas. Silva (2006) complementa a lista destes elementos, acrescentando a legenda e as linhas auxiliares e distingue duas áreas distintas onde eles se dispõem: a área do desenho do gráfico e a área exterior ao gráfico. Dependendo do seu tipo, a área do desenho do gráfico deve incluir os eixos, construídos segundo linhas retas e onde são colocadas as frequências e as variáveis de forma ordenada da esquerda para a direita no eixo horizontal e de baixo para cima no eixo vertical, a partir do valor mínimo, caso sejam numéricas e as linhas auxiliares, que têm um papel secundário mas podem facilitar uma leitura correta dos dados. Na área exterior do gráfico deve estar representado o título, por cima do gráfico e na horizontal, que descreve sucintamente o que está apresentado mas contendo a informação essencial para uma interpretação correta do mesmo (Silva, 2006). Segundo o autor, os rótulos constituem a identificação dos eixos e devem fazer referência às unidades adotadas, no caso de valores numéricos. Já a legenda, pode estar em qualquer uma das áreas e é constituída por símbolos e respetivas designações.

Alguns estudos realizados sobre o desenvolvimento da compreensão de gráficos estatísticos, em diversos níveis de ensino, têm mostrado que os alunos sentem dificuldades e cometem erros na sua construção (Carvalho, 2001; Curcio, 1987; Morais, 2010; Shaughnessy, 2007). Estas dificuldades podem surgir por ser uma temática pouco explorada pelos professores, na sala de aula, que consideram "um tema para o qual os alunos são facilmente motivados e em cuja aprendizagem não apresentam grandes dificuldades" (Sousa, 2002, p.78). Outros autores argumentam que também podem ser devidas às metodologias usadas, aos materiais usados e respetiva exploração (Fernandes, Carvalho & Ribeiro, 2007).

Carvalho (2001) constatou que as dificuldades associadas à construção de gráficos estatísticos, por alunos do 7.º ano de escolaridade, estavam relacionadas com a grandeza dos dados e com a definição de escalas adequadas para os representar. Nos estudos de Ponte (1984) e Morais (2011), a identificação dos eixos horizontal e vertical foi uma dificuldade persistente numa grande variedade de tipos de gráficos. Além disso, num estudo com alunos do 9.º ano, Morais (2011) ainda identifica algumas dificuldades relacionadas com a falta de rigor na construção do gráfico e com a seleção de um gráfico adequado para representar a situação proposta.

No que diz respeito ao gráfico de barras simples, os erros identificados na literatura como os mais comuns são a falta de centralidade das barras nos valores do eixo das variáveis, a construção de barras unidas (Arteaga, 2010; Morais, 2011), a não divisão uniforme das escalas (Ponte, 1984; Wu, 2004), a existência de construções em que os valores das frequências não coincidem com os considerados nas escalas e a ausência de títulos e de rótulos nos eixos (Wu, 2004). Nestes gráficos também se verificam outras dificuldades associadas à marcação de escalas, nomeadamente omitir as escalas num dos eixos horizontal ou vertical ou em ambos, escolher uma escala inadequada ao conjunto de dados e marcar escalas em ambos os eixos, com um número insuficiente de divisões e que não contemplam o ponto de origem dos eixos coordenados (Arteaga, 2010; Wu, 2004).

Metodologia

Neste estudo, parte de um trabalho de investigação mais alargado, pretendemos descrever e analisar os erros e dificuldades que os alunos do 1.º ciclo revelam na representação de dados estatísticos através de gráficos, ao longo de uma unidade de ensino de Organização e Tratamento de Dados (OTD). Tendo em conta estes objetivos, optámos por uma metodologia de investigação qualitativa e interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994).

Os participantes são os 25 alunos (15 rapazes e 10 raparigas, com idades compreendidas entre 8 e 9 anos) do 3.º ano de escolaridade de uma turma de uma escola básica situada no concelho de Sintra, onde a primeira autora é também professora. O seu aproveitamento escolar, na área curricular de Matemática, é satisfatório mas apresentam um deficiente domínio da língua portuguesa, reflexo das diferentes etnias e culturas de origem e um comportamento inadequado em sala de aula, que prejudica visivelmente as suas aprendizagens.

A unidade de ensino realizou-se no ano lectivo de 2011/2012, nas aulas de OTD, apoiada na realização de 7 tarefas que visam desenvolver a capacidade de leitura, interpretação e construção de gráficos estatísticos, promovendo a aprendizagem dos alunos. A realização de cada tarefa, em sala de aula, contemplou três momentos principais (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2003): (i) a apresentação da tarefa, aos alunos, através de um enunciado escrito; (ii) a exploração da tarefa, durante a qual os alunos trabalharam em pares ou pequenos grupos de 3 elementos; e (iii) a apresentação e discussão das suas conclusões perante a turma. Nestes momentos de discussão, em grande grupo, foram trabalhados os aspetos das respostas dos alunos onde se verificaram dificuldades. Além disso, a discussão forneceu oportunidade para a professora validar e construir uma compreensão comum de várias representações gráficas e introduzir novos elementos. O trabalho em sala de aula também incluiu oportunidades para a resolução de problemas e de exercícios de aplicação e consolidação de conhecimentos.

No estudo que aqui relatamos, recorremos essencialmente à análise dos documentos produzidos pelos alunos, quer as suas resoluções escritas, durante a realização das várias tarefas, quer os testes diagnóstico e final. A análise apresentada tem por base os aspetos teóricos revistos na literatura sobre o tema em estudo e foca-se apenas nas tarefas que incluem questões relativas à construção de gráficos, nomeadamente os de barras e pictogramas. Assim, identificamos e descrevemos as principais dificuldades e os erros cometidos pelos alunos no teste diagnóstico, realizado antes da unidade de ensino, nas tarefas 1, 4, 5 e 7, realizadas ao longo da mesma e no teste final, realizado no fim do ano letivo. Deste modo, é feita uma análise ao percurso dos alunos, no sentido de aferir a sua evolução durante a unidade de ensino.

Desempenho dos alunos na construção de gráficos estatísticos

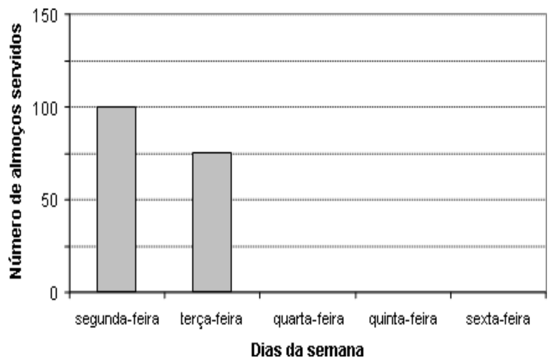
Antes da unidade de ensino

Antes das aulas de OTD terem início, foi aplicado um teste diagnóstico, realizado individualmente, com o objetivo de avaliar os conhecimentos e dificuldades dos alunos na compreensão de gráficos estatísticos. Na questão 4 do teste, pedia-se aos alunos para completarem um gráfico de barras a partir de informação fornecida numa tabela.

Teste diagnóstico

4 - A tabela indica o número de almoços servidos, durante uma semana, na escola do Paulo. Utiliza a informação da tabela para completares o gráfico seguinte.

Dias da semana	Número de almoços servidos
segunda-feira	100
terça-feira	75
quarta-feira	50
quinta-feira	100
sexta-feira	125



Nesta questão, a construção do gráfico de barras está bastante simplificada pelo facto de já estarem representados os eixos e respetivos rótulos e legendas, a escala e as linhas auxiliares. Contudo, 3 alunos não responderam à questão e 8 cometeram erros na construção do gráfico, desenhando barras com alturas não proporcionais ao número de casos observados (Figura 1). Esta dificuldade parece estar relacionada com a leitura da escala, pois os alunos desenham corretamente as barras com frequência 50 e 100, que são valores explícitos na escala mas não compreendem que as linhas auxiliares correspondem a divisões de 25 e, por isso, desenham incorretamente a barra correspondente à frequência 125.

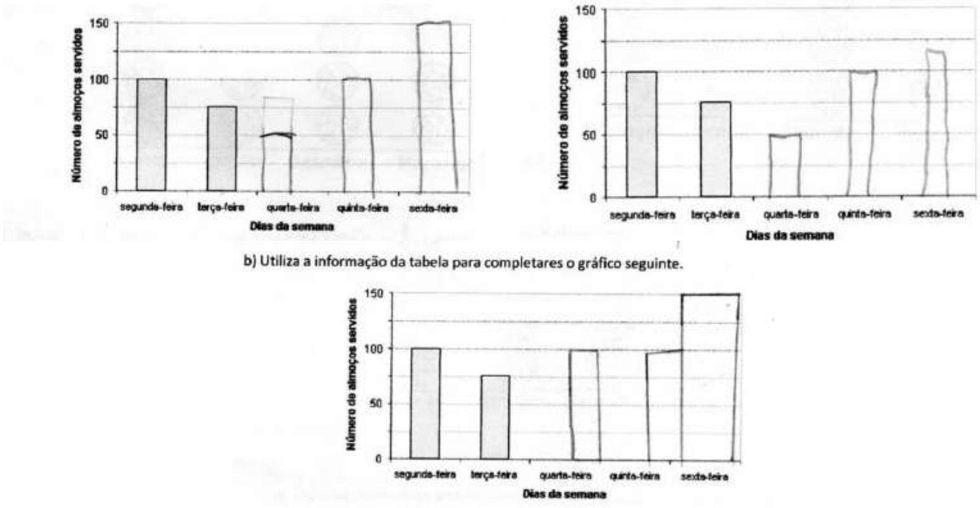


Figura 1. Respostas dos alunos na questão 4 do teste diagnóstico

Outros erros identificados nas suas respostas foram a construção de barras com larguras diferentes (6 alunos), a falta de centralidade das mesmas nos valores do eixo horizontal e um espaçamento não uniforme entre elas (4 alunos), sendo que, num dos casos, aparecem mesmo juntas.

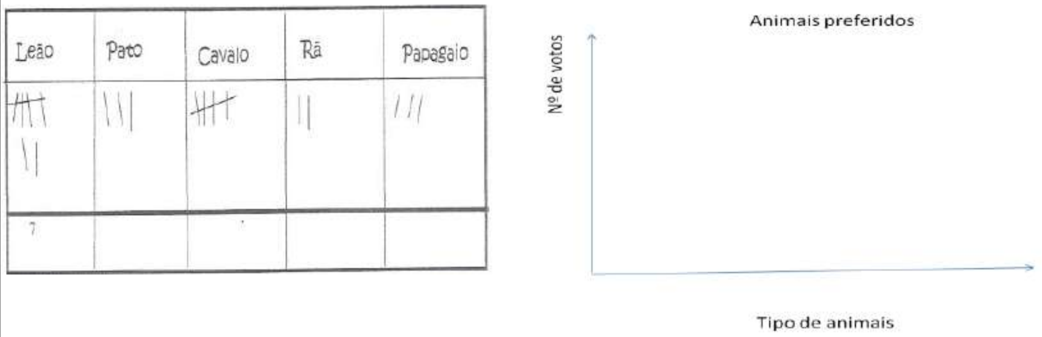
Durante a unidade de ensino

Na primeira tarefa proposta durante a unidade de ensino (Tarefa1), pedia-se aos alunos que completassem uma tabela com as frequências absolutas correspondentes às contagens indicadas na primeira linha da tabela e que construíssem um pictograma, a partir dessa informação, onde já estavam representados o título e os eixos com a sua identificação.

Os alunos completaram a tabela com facilidade. A única dificuldade com que se depararam, decidir se o 5.º traço diagonal nas contagens deveria ser considerado um voto e contar para a frequência, foi ultrapassada comparando o número de traços e a frequência correspondente na coluna do leão.

Tarefa 1- Animais preferidos

Perguntámos aos 20 alunos de uma turma do 1.º ciclo quais os animais que preferiam e os resultados foram os seguintes:



1 - Completa a tabela indicando os números respetivos.
2 - Constrói um pictograma, com base nas respostas dadas pela turma do 1.º ciclo.

Os alunos contataram com o pictograma, pela primeira vez, no teste diagnóstico, onde tinham que responder a algumas questões de interpretação. No entanto, durante a sua discussão, a professora fez referência aos seus elementos principais. Apesar disso, a construção do pictograma mostrou-se uma tarefa muito difícil com todos os grupos a cometerem algum tipo de erro. Quase todos os grupos (80%) construíram o gráfico utilizando símbolos pictóricos unitários e representativos de cada tipo de animal e onde cada coluna do gráfico contém um número de imagens do animal a representar igual à sua frequência na tabela, revelando compreensão do que é um pictograma. No entanto, estas opções dos alunos trouxeram dificuldades à sua construção. Como os alunos desenharam os vários símbolos com dimensões diferentes, a área do desenho do gráfico apresenta um grande desequilíbrio visual, em 60% das respostas dos grupos, como mostram os exemplos da Figura 2.

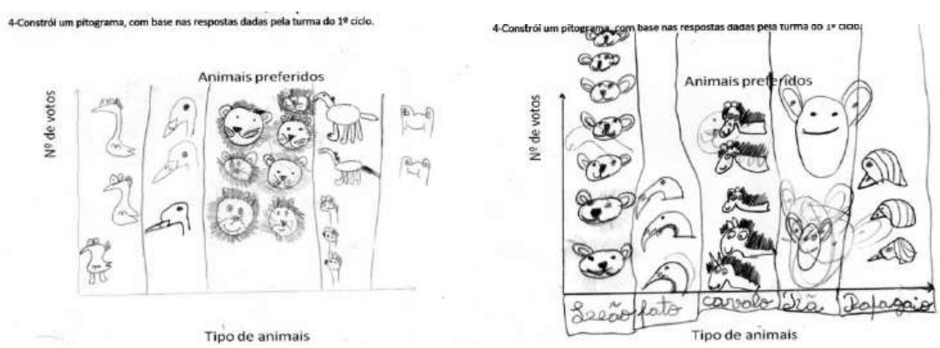


Figura 2. Pictogramas construídos pelos alunos (desequilíbrio visual)

Nalguns casos, as imagens dos animais (o leão que tem a maior frequência) saem fora desta área ou ocupam mais do que uma coluna. Noutros casos, a área do desenho ocupada por essas imagens não é proporcional à sua frequência. Observa-se, ainda, que a legenda do eixo horizontal está omissa em 30% dos gráficos construídos, talvez porque os alunos consideram que a imagem selecionada para representar o animal é auto explicativa.

Também é frequente iniciarem a construção do gráfico desenhando os símbolos de cima para baixo (25%) e, nalguns destes casos (15%), os rótulos são também escritos na parte superior do gráfico e não no eixo horizontal (Figura 3).

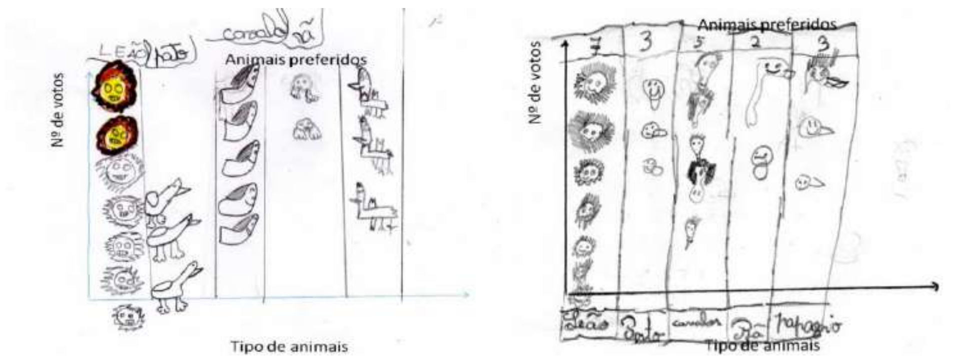


Figura 3. Pictogramas construídos pelos alunos (construção invertida)

Dois grupos desenham um único símbolo pictórico (um para cada animal) e complementam o gráfico com as respetivas frequências absolutas, representadas por números ou traços, tal como aparece na tabela do enunciado (Figura 4).

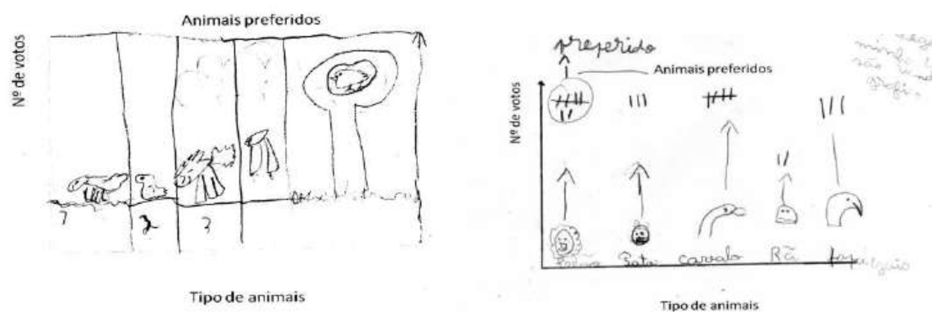


Figura 4. Pictogramas construídos pelos alunos (lógica de tabela)

Estes alunos parecem ver os gráficos numa lógica de tabela, onde os nomes dos rótulos são substituídos por símbolos, revelando falta de compreensão sobre o que é um pictograma e os elementos que o constituem.

Em 15% das respostas, os alunos utilizam símbolos não alegóricos unitários, como traços ou bolas, para representar a variável (Figura 5). Nestes casos, como o símbolo não explicita o tipo de animal, os alunos já sentem a necessidade de incluir rótulos no gráfico, apesar da evidente dificuldade na sua colocação adequada no eixo horizontal (abaixo dele).

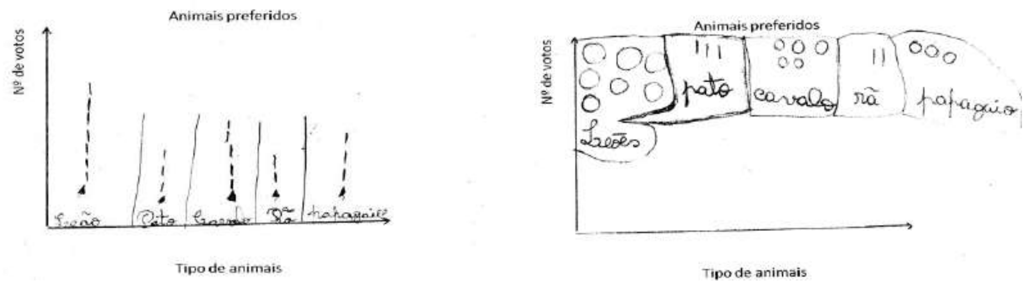


Figura 5. Pictogramas construídos pelos alunos (símbolos não alegóricos)

Na Tarefa 4, pediu-se aos alunos para construir um gráfico à sua escolha a partir de um conjunto de dados recolhidos e registados no quadro da sala de aula, por eles.

Tarefa 4 - Quantas algibeiras?

1 - Quantas algibeiras tens hoje na tua roupa? E os teus colegas?

2 - Constrói um gráfico, com o número de algibeiras que tu e os teus colegas têm.

Nesta tarefa, 20% dos grupos não desenham nenhum gráfico e dos restantes, 60% optam por construir um pictograma e 40% apresentam um gráfico de barras. Na construção dos pictogramas os alunos continuam a revelar muitas dificuldades, como mostram os exemplos da Figura 6. Todos os grupos utilizam símbolos pictóricos (algibeiras ou meninos) unitários mas não identificam corretamente a variável a representar e confundem a sua frequência com as suas categorias. No primeiro exemplo, os alunos desenharam o total de algibeiras dos alunos registados em cada uma das quatro colunas em que o quadro foi dividido durante o registo dos dados. No segundo exemplo, cada símbolo corresponde a um aluno rotulado com o respetivo número de algibeiras e, assim, os gráficos também não traduzem qualquer redução dos dados.

Os erros anteriormente identificados, como a omissão do eixo, da respetiva legenda e dos rótulos das categorias da variável ou a construção do gráfico de cima para baixo mantêm-se e até se agravam por falta de explicitação da variável e suas categorias.

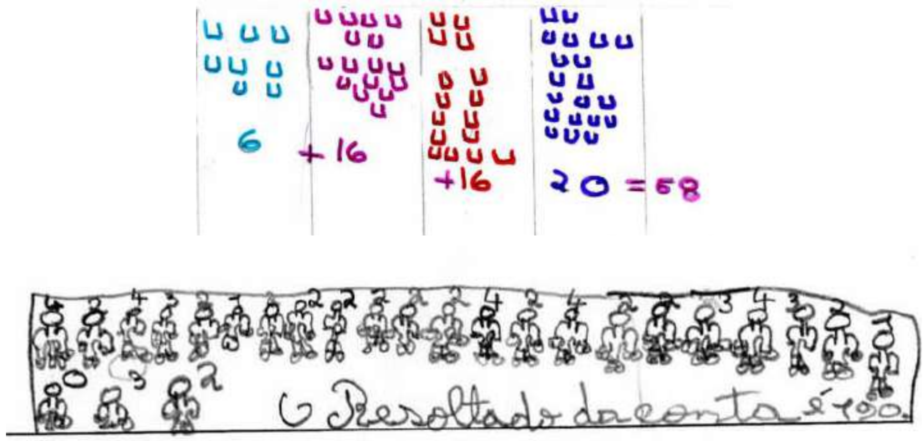


Figura 6. Pictogramas construídos pelos alunos na Tarefa 4

Este facto também deu origem à maioria dos erros observados na construção do gráfico de barras, exemplificados na Figura 7:

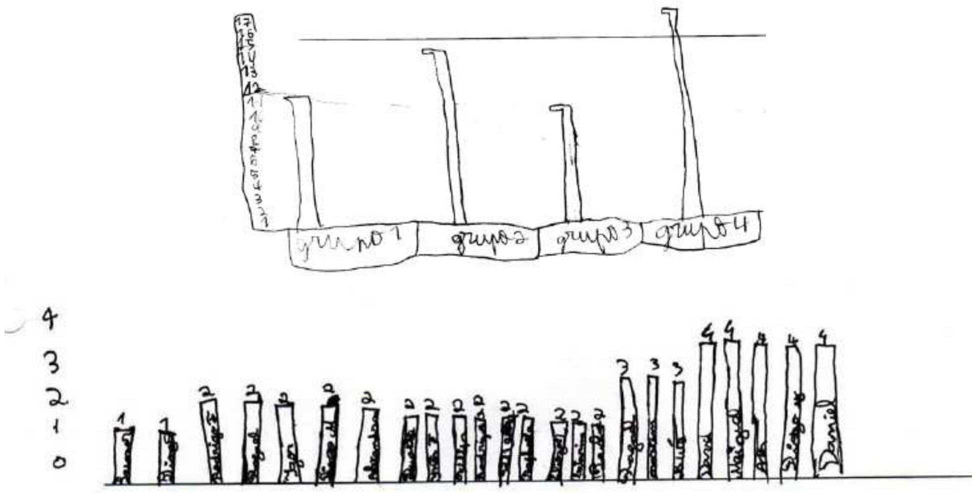


Figura 7. Gráfico barras construídos pelos alunos na Tarefa 4

Os alunos omitem eixos (15% dos grupos), linhas auxiliares e legendas (25%), a escala nem sempre começa no zero (15%), as barras não são retangulares (10%) e estão muito afastadas ou muito juntas, dificultando a leitura do gráfico (40%).

Na Tarefa 5, em que foi pedido aos alunos para construírem um gráfico de barras a partir dos dados de uma tabela, algumas das dificuldades descritas mantêm-se mas surgem com menor frequência.

Tarefa 5 - Os iogurtes

A tabela seguinte representa o número de iogurtes, consumidos pelos alunos do refeitório de uma escola do 1.º ciclo. Constrói um gráfico de barras.

Dias da semana	N.º de iogurtes
Segunda-feira	45
Terça-feira	30
Quarta-feira	40
Quinta-feira	15
Sexta-feira	10

A maior dificuldade observada na construção do gráfico foi a seleção e marcação da escala no eixo vertical. Metade dos alunos não seleciona uma unidade constante para a escala e marcam no eixo vertical apenas as frequências das várias categorias da variável, indicadas na tabela, pela ordem por que aparecem, como se mostra na Figura 8:

Figura 8. Gráfico barras construídos pelos alunos na Tarefa 5

Na Tarefa 7, a última desta unidade de ensino, pretendia-se que os alunos construíssem um gráfico à escolha para representar os dados da situação proposta. Para isso, deveriam começar por determinar as frequências absolutas, representando-as numa tabela.

Tarefa 7 - As cores preferidas na turma da Ana

1 - A tabela seguinte apresenta as cores preferidas de todos os alunos da turma da Ana. Faz a contagem de cada uma das cores e completa a tabela ao lado:

Cores preferidas na turma da Ana				
Amarelo	Verde	Castanho	Vermelho	Verde
Verde	Castanho	Amarelo	Amarelo	Amarelo
Vermelho	Verde	Vermelho	Azul	Azul
Azul	Azul	Azul	Verde	Amarelo
Verde	Amarelo	Verde	Vermelho	Vermelho

Cores	Contagem
Amarelo	
Verde	
Vermelho	
Azul	
Castanho	

5 - Com base na tabela anterior constrói um gráfico à tua escolha.

No preenchimento da tabela não se verificaram dificuldades e os poucos enganos deveram-se à falta de atenção na contagem, confirmada pelo questionamento posterior da professora. Em relação à construção do gráfico, todos os grupos responderam à questão e optaram pelo gráfico de barras.

A análise das respostas revela que 70% dos grupos cumpriram as regras relacionadas com a construção de gráficos de barras. A área de desenho já apresenta um equilíbrio visual adequado, com barras da mesma largura, com altura proporcional ao número de casos observados na categoria, centradas nos valores do eixo horizontal e espaçadas entre si, de forma aproximadamente homogénea, construídas num sistema de eixos perpendiculares que se intersetam na origem. Os exemplos da Figura 9 mostram os erros identificados nesta tarefa:

Figura 9. Gráficos de barras construídos na Tarefa 7

Só 15% dos grupos omitiram pelo menos uma das legendas e 10% destes cometeram, igualmente, erros relacionados com a escala, marcando no eixo vertical as frequências sem atender à proporção entre elas e repetindo-as em caso de igualdade. Só 5% dos grupos omitiu também os eixos. Portanto, salienta-se uma diminuição também no número de erros por gráfico.

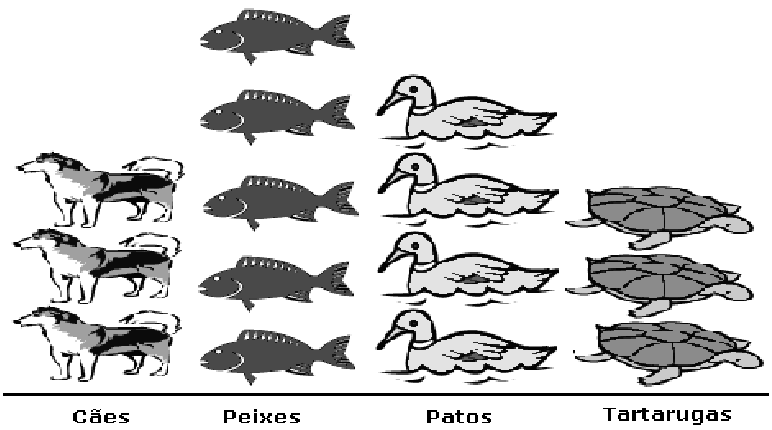
Final da unidade de ensino

No final da unidade de ensino, os alunos realizaram um teste, individualmente, onde lhes foi pedido para construírem um gráfico de barras para representar a informação disponibilizada através de um pictograma.

Nesta questão, todos os alunos foram capazes de retirar do pictograma a informação que precisaram para construir o gráfico de barras, sugerindo que as dificuldades com esse tipo de gráfico são, sobretudo, ao nível da sua construção.

Teste Final

3 - No jardim da escola, que tem um lago muito bonito, o professor decidiu ir com os alunos verificar que tipo de animais é que havia no jardim. Verificaram que havia animais de 4 tipos: cães, peixes, patos e tartarugas. Quando chegaram à sala de aula, os alunos representaram a informação recolhida no gráfico seguinte:



Constrói um outro gráfico para representar a informação dada no anterior.

Os gráficos de barras construídos apresentam-se, de modo geral, bastante completos. Os alunos já tiveram o cuidado de legendar os eixos, embora tenham dificuldade na escolha das expressões a utilizar, como mostram os exemplos da Figura 10:

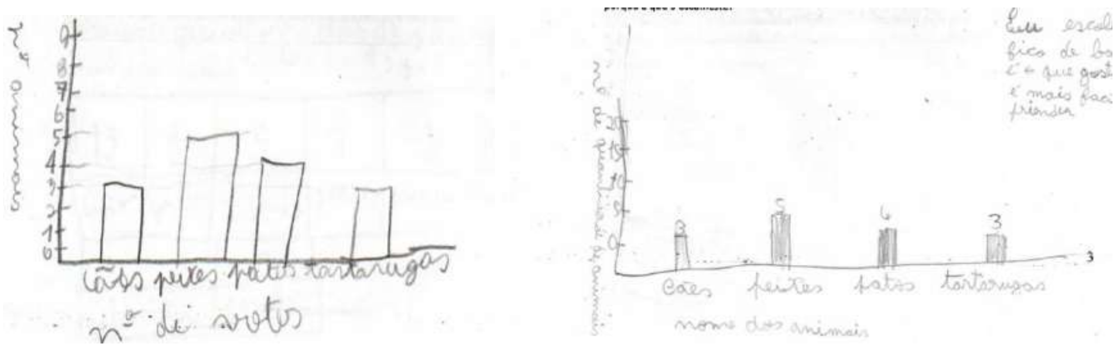


Figura 10. Gráficos de barras, teste final

Em relação à escala, os alunos também já a marcam a partir da origem dos eixos coordenados, com intervalos constantes e nem sempre unitários (por exemplo, de 5 em 5) e constroem barras com alturas proporcionais à sua frequência, mesmo quando esta não coincide com as marcas explícitas.

A concluir

Os resultados deste estudo revelam que os alunos enfrentam muitas dificuldades na construção de gráficos estatísticos e que, tal como sugerem Lima e Selva (2010), não são específicas deste nível de ensino, uma vez que também são referidas em estudos anteriores com alunos de diferentes idades (Freitas, 2011; Morais, 2011) e até com futuros professores (Arteaga, 2010). De facto, a omissão dos eixos e das respetivas legendas e rótulos foi o erro mais comum nos dois tipos de gráficos construídos pelos alunos, tal como verificado por Morais (2011). No gráfico de barras, as dificuldades sentiram-se, sobretudo, em relação à escala. Como referido nos estudos de Ponte (1984) e Wu (2004), os alunos não selecionam uma unidade constante para a escala e nem sempre a marcam a partir da origem dos eixos coordenados. Quando os dados são fornecidos através de uma tabela, os alunos marcam no eixo vertical as frequências das várias categorias da variável pela ordem por que são apresentadas, erro não mencionado por outros investigadores. Foram também identificados gráficos onde as barras têm larguras diferentes e um espaçamento não uniforme entre elas, não são centradas nos valores do eixo horizontal e as suas alturas não são proporcionais ao número de casos observados, aspetos mencionados em Arteaga (2010) e Morais (2011). Os pictogramas construídos apresentam um grande desequilíbrio visual, uma vez que os alunos desenham os vários símbolos com dimensões diferentes e, por vezes, de cima para baixo, rotulando-os na parte superior do gráfico e omitindo a legenda do eixo horizontal. Noutros casos, ainda, os alunos ou desenham um único símbolo pictórico (um para cada animal) e complementam o gráfico com as respetivas frequências absolutas, representadas por números ou traços, segundo uma lógica de tabela ou utilizam símbolos não alegóricos unitários, como traços ou bolas, para representar a variável.

Apesar das dificuldades observadas, o desempenho dos alunos na construção de gráficos de barras evoluiu ao longo da unidade de ensino, verificando-se uma diminuição no número de alunos a cometerem erros, bem como no número de erros identificados em cada gráfico. No pictograma, a evolução não é tão notória pois algumas dificuldades persistiram até ao final da unidade de ensino, evidenciando a necessidade de um trabalho mais continuado na sala de aula para se obter um bom desempenho na sua construção (Shaughnessy, 2007). Além disso, como as concepções erradas dos alunos são difíceis de mudar (Garfield & Ahlgren, 1988), o desenvolvimento da literacia estatística dos alunos mais velhos (onde se inclui a construção de gráficos) só será possível se nos primeiros anos desenvolverem compreensão profunda dos conceitos elementares.

Os resultados também evidenciam, face às dificuldades identificadas, a necessidade de investigação futura focando os diferentes conceitos envolvidos na compreensão dos gráficos e as causas das possíveis dificuldades dos alunos com eles relacionadas e o desenvolvimento de instrumentos pedagógicos para confrontar os alunos com as suas dificuldades e incompreensões para os ajudar a ultrapassá-las.

Referências

Arteaga, J. (2010). *Evaluación de conocimientos sobre gráficos estadísticos y conocimientos didácticos de futuros profesores* (Tesis Doctoral, Universidad de Granada).

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Carvalho, C. (2001). *Interacção entre pares. Contributo para a promoção do desenvolvimento lógico e do desempenho estatístico no 7.º ano de escolaridade* (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa).

Carvalho, C. (2009). Reflexões em torno do ensino e da aprendizagem da Estatística. In J. A. Fernandes, F. Viseu, M. H. Martinho & P. F. Correia (Orgs), *Actas do II Encontro de Probabilidades e Estatística na escola* (pp. 22-36). Braga: CIE, Universidade do Minho.

Curcio, F. R. (1987). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. *Journal for Research in Mathematics Education, 18*(5), 382-393.

Curcio, F. R. (1989). *Developing graph comprehension: elementary and middle school activities*. Reston, VA: NCTM.

Fernandes, A. J., Carvalho, C. & Ribeiro, S. (2007). Caracterização e implementação de tarefas de Estatística: um exemplo no 7.º ano de escolaridade. *Zetetiké, 15*(28), 27-61.

Freitas, C. (2011). *O desenvolvimento da literacia estatística no 5.º ano: Uma experiência de ensino* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).

Friel, S., Curcio, F. & Bright, G. (2001). Making Sense of Graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(2), 124-158.

Garfield, J., & Ahlgren, A. (1988). Difficulties in learning basic concepts in statistics: Implications for research. *Journal for research in Mathematics Education, 19*, 44-63.

Lima, I., & Selva, A. (2010). Youth and adults students interpreting bar and line graphs. In C. Reading (Ed.), *Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. Proceedings of the 8th International Conference on Teaching Statistics*, Ljubljana, Slovenia. Retirado em 16/06/2012 de http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.php

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME.

Morais, P. (2011). *Construção, leitura e interpretação de gráficos estatísticos por alunos do 9.º ano de escolaridade* (Tese de mestrado, Universidade do Minho).

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE.

Ponte, J. P. (1984). *Function reasoning and the interpretation of cartesian graphs*. (PhD Thesis, University of Georgia). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Brocardo, J. & Oliveira, H. (2003). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica.

Silva, A. A. (2006). *Gráficos e mapas: representação de informação estatística*. Lisboa: LIDEL.

Shaughnessy, J. M. (2007). Research on Statistics Learning and Reasoning. In F. Lester (Eds.) *Second Hanbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 957-1009). Greenwich, CT: Information Age Publishing and NCTM.

Sousa, O. (2002). *Investigações estatísticas no 2.º ciclo do ensino básico* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).

Wu, Y. (2004). *Singapore secondary school students' understanding of statistical graphs*. Retirado em 16/06/2012 de http://scholar.google.pt/scholar?q=Singapore+Secondary+School+Students%E2%80%99+Understanding+of+Statistical+Graphs&hl=pt-PT&lr=.

PLANEAMENTO ESTATÍSTICO E ANÁLISE DE DADOS NO 3.º CICLO DO ENSINO BÁSICO

Cristina Roque
Escola Secundária com 3.º Ciclo de Ferreira Dias
Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
cmmroque@gmail.com

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ul.pt

Resumo

O presente estudo visa identificar o contributo de uma experiência de ensino baseada na realização de investigações estatísticas e na análise crítica de estudos estatísticos para o desenvolvimento da capacidade de planeamento estatístico e de análise de dados de alunos do 8.º ano. Seguimos uma metodologia qualitativa, apresentando o caso da aluna Ana. Com a experiência de ensino, esta aprofunda, amplia e consolida os seus conhecimentos sobre ponderação de elementos que afetam a representatividade de uma amostra e os aspetos da variabilidade associada ao objeto de estudo. A experiência de ensino promove a sua compreensão da importância do planeamento estatístico e a sua perceção da natureza e do papel da Estatística.

Palavras-chave: planeamento estatístico, formulação de questões, amostragem, análise de dados.

Introdução

A crescente importância do pensamento estatístico em muitas atividades conduziu à substituição de processos rotineiros pela análise de situações que envolvem incerteza e variabilidade. Isto motivou alterações na educação estatística, dando ênfase crescente à análise de dados recolhidos a partir de experiências realizadas pelos alunos. O trabalho no planeamento estatístico e a análise exploratória de dados revestem-se assim de grande interesse.

O NCTM (2007) defende que a ideia-chave para o envolvimento dos alunos em novas ideias e procedimentos é o trabalho direto com dados. Em Portugal, o *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007) indica, relativamente ao 3º ciclo, que os alunos devem ser capazes de: (i) formular questões e planear a recolha de dados; (ii) identificar e minimizar possíveis fontes de enviesamento nesta recolha; (iii) distinguir entre população e amostra e ponderar elementos que podem afetar a representatividade de uma amostra; (iv) responder às questões do estudo e conjeturar se as conclusões obtidas serão válidas para a população; (v) compreender e determinar a mediana, os quartis e a amplitude interquartis de um conjunto de dados, e utilizar estas estatísticas na sua interpretação; (vi) comparar distribuições de vários conjuntos de dados e tirar conclusões tendo por base medidas estatísticas adequadas para resumir a informação neles contida; e (vii) construir, analisar e interpretar representações de dados.

O presente estudo visa identificar os contributos de uma experiência de ensino para o desenvolvimento das capacidades de planeamento estatístico e de análise de dados dos alunos do 8.º ano. Nesta comunicação analisamos a capacidade de planeamento e de análise de dados de uma aluna, tendo em atenção o seu desempenho no início e no final da experiência de ensino.

Planeamento estatístico

A "fase de produção" ou "de aquisição de dados", que precede a organização e análise de dados, assume um papel fundamental no planeamento estatístico, uma vez que a qualidade da informação estatística e das conclusões depende da qualidade dos dados.

A formulação de questões estatísticas

A formulação de questões estatísticas implica reconhecer a existência de variabilidade da resposta, isto é compreender a diferença entre uma questão para a qual se antecipa uma resposta determinística e uma questão para a qual se prevê a resposta com base em dados que variam (GAISE, 2005), sendo importante notar que existem diferentes fontes de variabilidade nos dados: (i) resultantes da medição; (ii) natural; (iii) induzida; e (iv) da amostragem.

Konold e Higgins (2003) analisam episódios de sala de aula em que professores e alunos transformam questões gerais em questões estatísticas. Defendem que os alunos podem aprender muito quando antecipam a realização do estudo com o auxílio das questões que projetam para a recolha de dados. Defendem ainda que a aprendizagem da formulação de questões estatísticas e a recolha e análise de dados está associada à capacidade de: (i) formular questões estatísticas suficientemente específicas de modo a permitir a recolha de dados relevantes mas que, por sua vez, não trivializem a questão inicial e (ii) assumir os dados produzidos como abstrações do contexto que os gerou sem esquecer que se trata de "números num contexto".

Recolha de dados e amostragem

Em Estatística recorre-se a amostras quando se pretende descrever populações com grande dimensão ou de difícil acesso a todos os seus elementos. O estudo de Jacobs (1999) sugere que alguns alunos rejeitam a ideia de amostragem porque subestimam as dificuldades associadas à realização de um censo, negligenciando a vantagem de se reduzir os dados a recolher. O processo de amostragem é crítico na recolha de dados e constitui um ponto fulcral de uma investigação estatística. O planeamento de um estudo estatístico deve evitar amostras enviesadas, tendo em consideração questões como: "Qual é a população? Como deverá ser selecionada a amostra de modo a ser representativa? É necessário utilizar uma amostra estratificada? Qual deverá ser a dimensão da amostra?" (NCTM, 2007, p. 384).

Segundo Martins e Ponte (2010) o trabalho a desenvolver com os alunos deve envolver: (i) a análise de situações em que é adequado o estudo de toda a população ou apenas de uma amostra; e (ii) a análise crítica de estudos estatísticos face ao uso de amostras não representativas e a ponderação de elementos que afetam a representatividade de uma amostra. Para Garfield (2002), o raciocínio correto sobre amostras inclui saber de que modo estas se relacionam com a população de que foram extraídas e o que se pode inferir a partir delas. O *Programa de Matemática* (ME, 2007), no 3.º ciclo, indica que os alunos devem desenvolver a noção que a seleção aleatória da amostra constitui o único processo que garante representatividade. Para Martins e Ponte (2010) os alunos do 3.º ciclo devem ser sensíveis a três aspetos: a dimensão de uma amostra depende da variabilidade da população, terá de ser tanto maior, quanto maior for a precisão exigida e não é necessariamente proporcional à dimensão da população a estudar. Pelo seu lado, Garfield (2002) destaca os seguintes erros no uso de amostras: (i) considerar, que boas amostras devem representar uma percentagem elevada da população; e (ii) confiar indevidamente em pequenas amostras e/ou assumir que uma amostra aleatória simples constitui um retrato fiel da população em análise dada.

Análise exploratória de dados

Na análise exploratória de dados (AED) estudam-se os dados de diversas perspetivas, recorrendo a diferentes representações e procedendo a comparações, procurando extrair o máximo de informação possível para gerar modelos a partir do conjunto, assumindo que são igualmente importantes as regularidades (padrões) e os desvios (lacunas, *clusters*), e sendo fundamental a forma e as variações dos dados. Segundo Shaughnessy, Garfield e Greer (1996) a análise exploratória de dados, embora se apoie significativamente na vertente visual da representação e em técnicas estatísticas, assume uma atitude de "dar sentido" ao conjunto de dados numa perspetiva global. Consideram, ainda, fundamental ter em consideração que os dados são recolhidos e apresentados por alguém que tem a sua agenda particular. Deste modo, no tratamento dos dados, devem ser tidas em consideração as crenças e atitudes por de trás de quem os recolheu e organizou. Para a abordagem da AED muito contribuiu o surgimento de duas representações – o diagrama de caule-e-folhas e o diagrama de extremos e quartis – ambas com um imediato e forte impacto visual. Ambas são usadas para representar distribuições de variáveis quantitativas, obtendo-se uma visualização ordenada dos dados em análise, e ambas possibilitam a comparação de duas distribuições.

Para Garfield (2002), o raciocínio estatístico sobre uma representação envolve: (i) compreender de que modo esta representa um conjunto de dados, (ii) compreender de que modo essa representação pode ser alterada para melhor representar um conjunto de dados, e (iii) conhecer características gerais, como a forma, o centro e a dispersão da distribuição. Na sua perspetiva, o raciocínio estatístico sobre os dados envolve capacidade para (i) reconhecer/categorizar os dados como quantitativos ou qualitativos, discretos ou contínuos e (ii) saber a razão pela qual um tipo específico de tabela, gráfico ou medida estatística se adequa a um certo tipo de dados. Finalmente, considera que o raciocínio estatístico sobre medidas estatísticas envolve: (i) compreender porque as medidas centrais e de dispersão fornecem informação sobre um conjunto de dados, (ii) identificar as medidas mais adequadas a usar face a diferentes condições, e de que modo representam ou não um conjunto de dados, (iii) saber que um resumo descritivo dos dados deve incluir uma medida central e uma medida de dispersão; e (iv) reconhecer que as medidas estatísticas centrais e de dispersão são úteis para comparar conjuntos de dados.

Unidade de ensino

Esta unidade de ensino tem por base o conjunto de tarefas (ver anexos) correspondente ao tópico planeamento estatístico proposto pelos professores das turmas-piloto e disponível no *site* da DGIDC, exceto as tarefas 2 e 3 adaptadas de Martins e Ponte (2010). Estas tarefas têm natureza exploratória e investigativa (Tabela 1). Assumimos que, para compreender a importância do planeamento estatístico, os alunos devem viver esse processo na realização de pequenas investigações estatísticas. Em contextos de realidade e semirrealidade, dando ênfase à construção do conhecimento com base no desenvolvimento da compreensão, partimos do conhecimento informal e intuitivo dos alunos para a construção do conhecimento formal.

Tabela 1. Objetivos das tarefas

Tarefa		**Objetivos**
1	*População e amostra*	Distinguir população de amostra e ponderar a representatividade de uma amostra em relação à respetiva população.
2	*Limpar dados*	Analisar criticamente um conjunto de dados de modo a detetar imprecisões antes de os começar a tratar, pondo em causa a fiabilidade da análise posterior.
3	*Exemplo de uma pequena investigação estatística*	Discutir e refletir sobre: (i) etapas de uma investigação estatística, (ii) contextualização dos dados, (iii) importância da escolha das medidas de resumo e de representações utilizadas, (iv) validade e fiabilidade das conclusões em função da informação disponível podendo um estudo motivar novas questões.
4	*Um estudo na escola*	Desenvolver um estudo envolvendo às várias etapas do ciclo investigativo: (i) formular questões e hipóteses; (ii) recolher dados (iii) analisar dados, e (iv) comunicar e interpretar resultados. Discutir e refletir quanto à variabilidade da amostragem e a validade das inferências para a população correspondente.
5	*A frequência das vogais na língua portuguesa*	Discutir e refletir quanto ao papel dos métodos estatísticos como meios poderosos de tomada de decisão e ponderação do grau de incerteza associado a previsões, para a população correspondente.
6	*Previsões*	

A unidade de ensino foi concretizada durante 3 semanas letivas. Foram disponibilizados, ao todo, 8 blocos de 90 minutos, privilegiando-se o trabalho em pequeno grupo. Nas várias tarefas, a dinâmica de aula incluiu momentos de discussão coletiva de toda a turma. Na tarefa 4 os alunos realizam um pequeno relatório sobre a investigação estatística efetuada.

Metodologia de investigação

O estudo seguiu um design de experiência de ensino numa abordagem de cunho qualitativo, com um estudo de caso. A primeira autora desempenhou o duplo papel de professora e investigadora tendo em conta os objetivos do estudo e o tipo de questões para as quais, como professora, gostava de obter uma compreensão aprofundada. Os critérios que levaram à escolha de Ana para estudo de caso foram a existência de evidência e a abrangência, dado que a aluna tem por hábito expressar as suas ideias e revela capacidade de fundamentação.

Ana vive com a mãe perto da escola e participa no grupo de escalada e canoagem da escola. Tem um desempenho bastante satisfatório ao longo do seu percurso escolar, sendo as suas disciplinas preferidas inglês e ciências naturais. Considera-se uma aluna mediana em matemática e sente que poderia ter mais sucesso se estudasse mais do que na véspera dos testes. Na aula revela-se conversadora, tendo facilidade em se expressar oralmente e por escrito.

Os dados foram recolhidos através de um pré-teste (T1), observação, duas entrevistas (E1 e E2), pós-teste (T2) e recolha documental (Fig. 1). A observação com gravações áudio e vídeo permitiu registar aspetos que de outro modo passariam despercebidos. As entrevistas realizadas à aluna (ver anexos) foram gravadas e permitiram conhecer as suas dificuldades, escolha de processos e decisões. A recolha documental incide sobre as produções escritas do grupo onde a aluna se inseria.

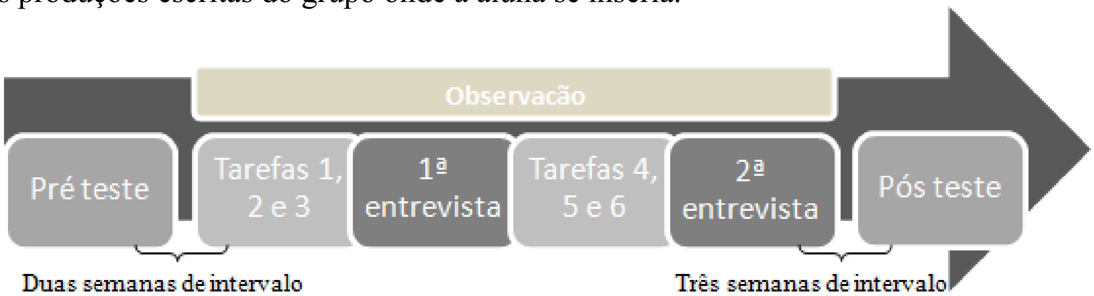


Figura 1. Sequência das tarefas, realização das entrevistas e testes

Ana e o seu percurso ao longo da experiência

Recolha de dados e amostragem

No T1, face a uma questão relativa à escolha de uma amostra, Ana seleciona um processo de amostragem aleatório simples – "questionar 160 alunos escolhidos por sorteio entre os 1560", rejeitando os processos de amostragem que considera passíveis de enviesamento. Durante o trabalho de grupo, intervém oportunamente constatando que na questão 5 da tarefa 1, a amostra não é representativa dado o elevado conhecimento na área de Biologia da generalidade dos médicos, por questões de formação académica, comparativamente à restante população. O seu trabalho no T1 e durante a realização da tarefa 1 mostra que, no âmbito do planeamento, reconhece possíveis fontes de enviesamento na recolha de dados e pondera elementos que podem afetar a representatividade de uma amostra em relação à respetiva população.

Perante a necessidade de escolha de uma amostra representativa, opta prioritariamente por uma amostragem aleatória simples. Deparando-se com dificuldades em pôr em prática esse processo de escolha aleatória opta por uma amostra estratificada (subgrupo de idades, género, turma…) (Fig. 2).

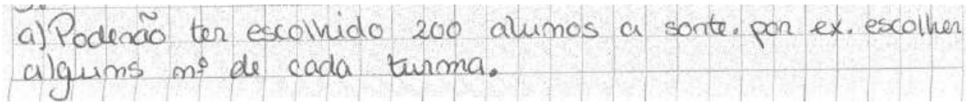

a) Poderão ter escolhido 200 alunos à sorte. por ex. escolher
alguns nº de cada turma.

Figura 2 - Resposta ao item 5a) da E1.

Quando inquirida sobre um procedimento que conduza a uma amostra enviesada, Ana indica, na maioria das vezes, a escolha de uma amostra restrita a um subgrupo da população (género, faixa etária…). Justifica que deste modo a amostra não será representativa da população pois a variável em estudo é dependente dos seus vários substratos (Fig. 3).

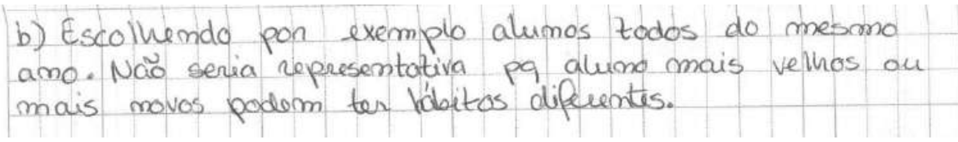

b) Escolhendo por exemplo alunos todos do mesmo
ano. Não seria representativa pq alunos mais velhos ou
mais novos podem ter hábitos diferentes.

Figura 3 - Resposta ao item 5b) da E1.

Ana reconhece que uma seleção aleatória da amostra constitui o único processo que garante a representatividade, mas perante a população "comunidade escolar" opta pela seleção aleatória em substratos. Mostra-se também capaz de fazer uma análise crítica de estudos estatísticos. Por exemplo, no item 4 da E2 (Fig. 4), apresenta argumentos para a rejeição de amostras não representativas.

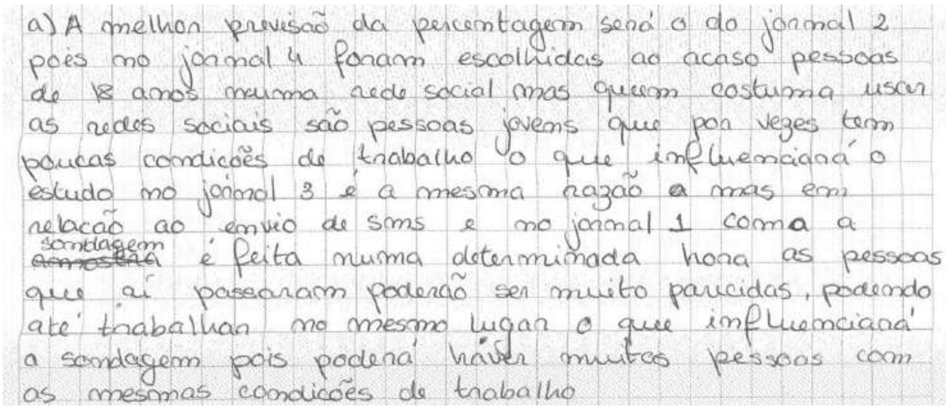

a) A melhor previsão da percentagem será o do jornal 2
pois no jornal 4 foram escolhidas ao acaso pessoas
de 18 anos numa rede social mas quem costuma usar
as redes sociais são pessoas jovens que por vezes tem
poucas condições de trabalho o que influenciará o
estudo no jornal 3 é a mesma razão mas em
relação ao envio de sms e no jornal 1 como a
sondagem ~~amostra~~ é feita numa determinada hora as pessoas
que aí passaram poderão ser muito parecidas, podendo
até trabalhar no mesmo lugar o que influenciará
a sondagem pois poderá haver muitas pessoas com
as mesmas condições de trabalho

Figura 4 - Resposta ao item 4 da E2.

Ana identifica e pondera elementos que afetam a representatividade de uma amostra em relação à respetiva população em diferentes contextos e recorre a exemplos para ilustrar os diferentes elementos que pondera.

Formulação de questões estatísticas

A análise do trabalho de grupo na questão 6b da tarefa 1 (Fig. 5) mostra que Ana e os colegas formulam questões bastante generalistas e dissociadas do objeto em estudo "projetos quanto ao prosseguimento de estudos". Durante a discussão constata-se que tanto ela como a generalidade dos colegas não compreendeu ainda este objeto:

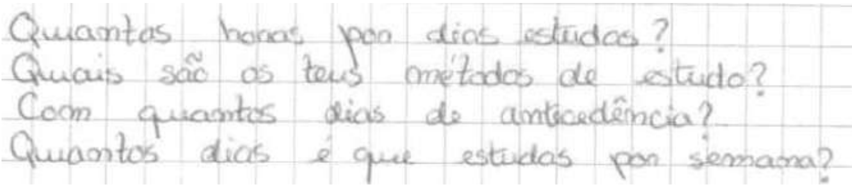

Quantas horas por dias estudas?
Quais são os teus métodos de estudo?
Com quantos dias de antecedência?
Quantos dias é que estudas por semana?

Figura 5. Resposta do grupo de Ana à questão 6b da tarefa 1

Sendo pedido um esboço do estudo para conhecer as práticas de higiene oral (item 4 da E2), Ana começa por formular as seguintes questões: "Quantas vezes escovas o(s) dentes por dia? Costumas utilizar fio dentário? Com que frequência vais ao dentista?" Ao ser interpelada pela professora sobre o significado atribuído a "utilizas" e constatando que o dado "SIM" devolvido na segunda questão poderia significar para algumas pessoas inquiridas uma única utilização semanal, optou por reformular a questão. Na terceira questão, considerou que os dados devolvidos poderiam ser "regularmente", "com pouca frequência". Perante a situação hipotética de um jovem que considera uma ida por ano ao dentista uma frequência regular, optou pela sua reformulação. Com a nova redação da questão teria o tempo entre idas e deste modo poderia organizar os dados num histograma cujas classes seriam o tempo compreendido entre duas idas ao dentista (Fig. 6).

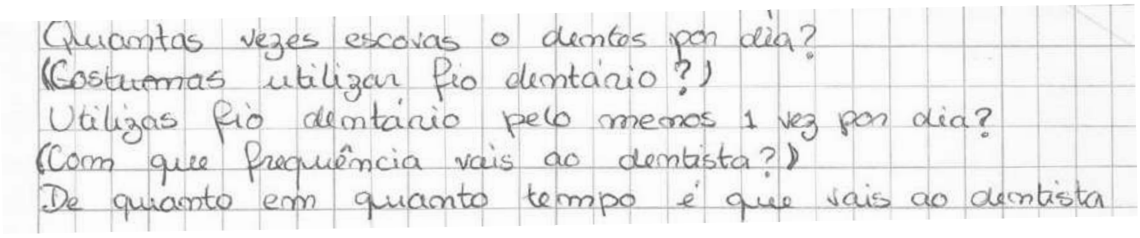

Quantas vezes escovas o dentes por dia?
(Costumas utilizar fio dentário?)
Utilizas fio dentário pelo menos 1 vez por dia?
(Com que frequência vais ao dentista?)
De quanto em quanto tempo é que vais ao dentista

Figura 6. Questões de inquérito propostas por Ana no item 4 da E2.

Ana revelou-se capaz de reconhecer a existência de variabilidade, nomeadamente a variabilidade natural existente num conjunto de dados que inclui naturalmente elementos distintos e a variabilidade decorrente do processo de amostragem. Na tarefa 5, “Frequência das vogais na língua portuguesa”, reconhece que podem existir amostras sem a presença das vogais “a” e “e” embora a tendência sentida no conjunto de diferentes amostras representativas seja que na maioria persista um domínio destas vogais, não foi capaz de argumentar junto dos restantes colegas que a inexistência das vogais “a” e “e” num texto resulta de um exercício literário artificial.

Análise exploratória de dados

Ana revela sentido crítico face as representações e a possíveis interpretações erróneas. No item 1 da E1, reconhece que o recorte do eixo vertical é o motivo da leitura errada por parte do coordenador (Fig. 7).

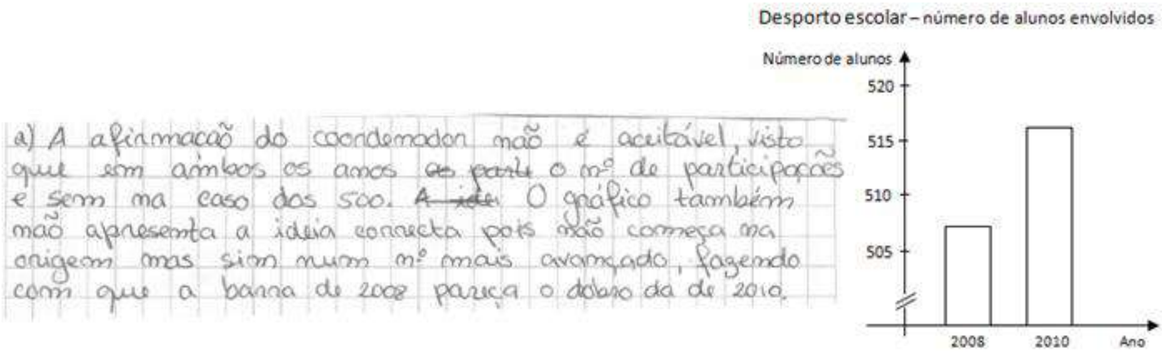


Figura 7. Resposta ao item 1 da E1.

Na E2 reconhece ser impossível afirmar que um sector de um sectograma está associado a um maior número de elementos da amostra/população que um sector de outro sectograma dado que desconhece a dimensão dos dois conjuntos de dados (Fig. 8).

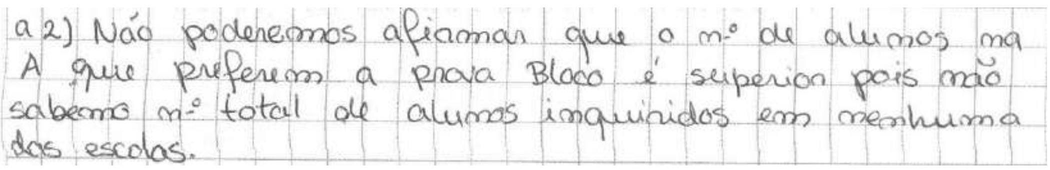


Figura 8. Resposta ao item 3 a2) da E2.

Ana é ágil na determinação das medidas de tendência central e mostra-se capaz de privilegiar o uso da média ou da mediana em detrimento da moda e o uso da mediana face à média em distribuições com *outliers* (Fig. 9).

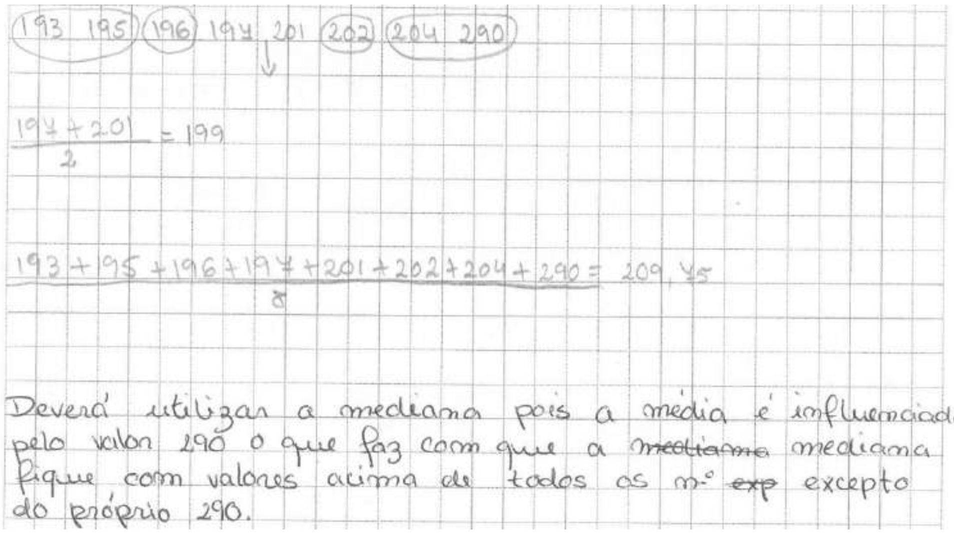


Figura 9 – Resposta ao item 3b) da E2

Quanto à transformação de uma representação numa outra, Ana, no T1, associa ao histograma B um diagrama de extremos e quartis com uma concentração mais acentuada à esquerda da mediana do que à sua direita (Fig. 10). No entanto na localização do 3.º quartil não há evidência da análise da concentração dos dados entre a mediana e o 3.º quartil face aos dados compreendidos entre o 3.º quartil e o máximo da distribuição.

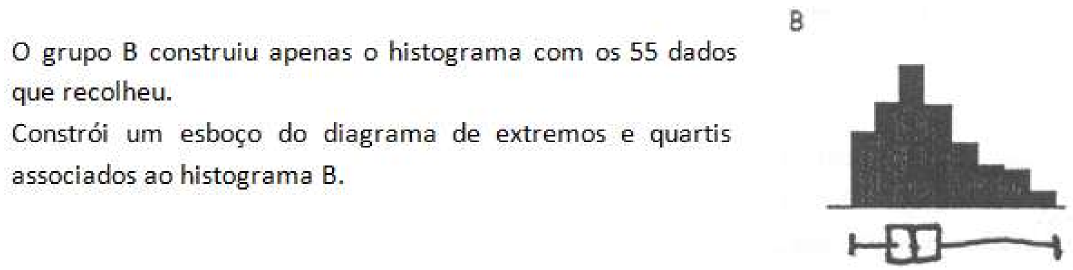


Figura 10 - Resposta ao item 5.2 do T1

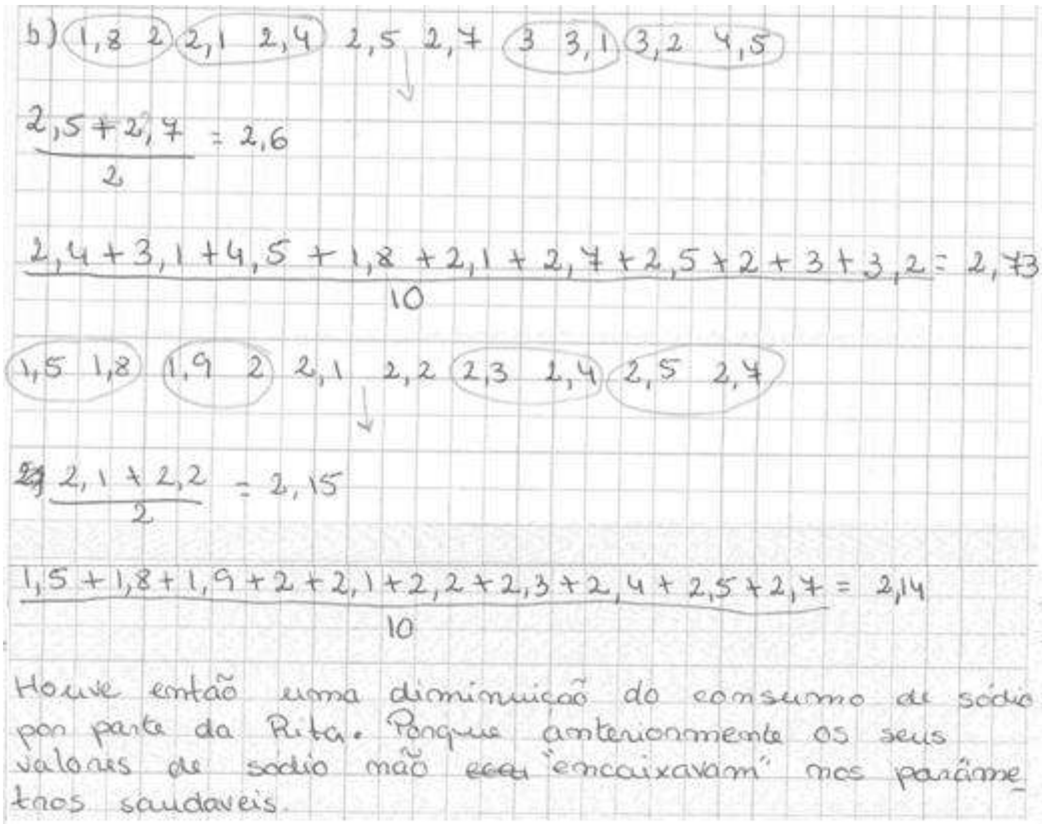
No item 5.3 do T2, estabelece uma correspondência correta entre os histogramas e os diagramas de extremos e quartis, ao indicar a seguinte associação A→1, B→ 3 e E→ 2 tendo fundamentado com base na forma e a localização da mediana da distribuição "pois o gráfico 1 vai ficando com as barras mais pequenas, o gráfico 2 pois a barra do meio é a mais pequena então é o meio (da distribuição e onde se localiza) o (2.º) quartil, o gráfico 3 vai a subir".

Em diferentes situações, Ana revela ser capaz de comparar duas distribuições. Na primeira entrevista, ao comparar duas distribuições sendo conhecidos os respetivos diagramas de extremos e quartis (E1, item 3a), reconhece a operadora cujos utilizadores recorrem mais ao envio de mensagens de texto, argumentando que a amplitude total e a amplitude interquartil são maiores nessa distribuição.

> **A:** Acho que foi na Edfon porque… os extremos… o máximo e o mínimo são maiores tem uma maior amplitude do que na Telepat, por isso vai haver mais mensagens e também (n)os quartis… também tem uma maior amplitude que os quartis da Telepat…

Complementa a sua argumentação dizendo "por último porque pudemos ver que quase 50% das pessoas inquiridas na Edfon manda mais mensagens que na Telepat."

Perante a necessidade de comparar dois conjuntos de dados recolhidos em duas fases de uma experiência (E2, item 1b), Ana opta por recorrer apenas ao uso de medidas de tendência central (mediana e média) não tendo feito qualquer referência à amplitude total e/ou interquartil para fundamentar a sua resposta (Fig. 11). Utiliza medidas de dispersão na comparação de duas distribuições quando existe uma representação em que predomina uma visualização ordenada dos dados.


b) 1,8 2 2,1 2,4 2,5 2,7 3 3,1 3,2 4,5

$$\frac{2,5+2,7}{2} = 2,6$$

$$\frac{2,4+3,1+4,5+1,8+2,1+2,7+2,5+2+3+3,2}{10} = 2,73$$

1,5 1,8 1,9 2 2,1 2,2 2,3 2,4 2,5 2,7

$$\frac{2,1+2,2}{2} = 2,15$$

$$\frac{1,5+1,8+1,9+2+2,1+2,2+2,3+2,4+2,5+2,7}{10} = 2,14$$

Houve então uma diminuição do consumo de sódio por parte da Rita. Porque anteriormente os seus valores de sódio não ~~eeei~~ "encaixavam" nos parâmetros saudáveis.

Figura 11 - Resposta ao item 1b da E2

Ao longo da unidade de ensino, Ana mostra-se capaz de interpretar diferentes representações, sendo capaz de transformar uma representação numa outra, bem como comparar duas distribuições, face ao reconhecimento de características gerais tais como forma, centro e dispersão de uma distribuição.

A concluir

De forma geral, Ana realiza com sucesso as tarefas propostas, revelando empenho durante o estudo do tema. Argumenta os seus pontos de vista recorrendo por vezes a ilustrações concretas para dar ênfase ao(s) elemento(s) que pondera quanto à afetação da representatividade ou explicitar a sua opção de amostragem de modo a minimizar possíveis fontes de enviesamento. Aceita e recorre à utilização de amostras aleatórias simples e reconhece na generalidade das situações as dificuldades associadas a um recenseamento da população. Sugere um processo de amostragem estratificado, dado o seu conhecimento da natureza da população "comunidade escolar".

Ana mostra-se capaz de reconhecer e categorizar conjuntos de dados e de escolher uma forma de representação adequada à sua análise. Na análise de dados identifica características gerais como a forma, o centro e a dispersão da distribuição, evidenciando uma visão agregada. Perante o quadro de análise do raciocínio estatístico sobre os dados e as representações (Garfield, 2002), mostra-se capaz de identificar as medidas estatísticas centrais e de dispersão mais adequadas à análise de um conjunto de dados e de compreender que determinada medida central ou de dispersão fornece informação sobre um conjunto de dados, embora nem sempre inclua no resumo descritivo pelo menos uma medida estatística de cada tipo. Procede com alguma destreza à comparação de duas distribuições reconhecendo medidas centrais e de dispersão pertinentes a cada situação, privilegiando no entanto o uso de medidas centrais.

Ao longo da realização desta unidade de ensino, Ana progride na compreensão de aspetos fundamentais da natureza e do papel da Estatística. No domínio das capacidades de planeamento estatístico, revela reconhecimento de variabilidade, sentido crítico face a estudos que recorreram a amostras não representativas, capacidade de formular questões pertinentes e capacidade de planear a recolha de dados tendo em consideração o objetivo do estudo.

A unidade de ensino, valorizando a realização de pequenas investigações estatísticas e análise crítica de estudos estatísticos (Martins & Ponte, 2010), mostrou-se exequível. O trabalho que suscitou em Ana foi determinante para a sua compreensão da importância do planeamento estatístico, nomeadamente no progressivo reconhecimento de variabilidade, aspeto fundamental para a compreensão da natureza e do papel da Estatística (GAISE, 2005) e na possibilidade de consolidar e articular conceitos e representações estatísticas. No entanto, tal como defendem Konold e Higgins (2003), no tema do planeamento estatístico, mantém-se a necessidade de propor mais situações de discussão de questões estatísticas e sua conversão em questões de inquérito.

Agradecimento

Trabalho financiado por fundos nacionais através da FCT no âmbito do Projeto *Desenvolver a literacia estatística: Aprendizagem do aluno e formação do professor* (contrato PTDC/CPE-CED/117933/2010).

Referências

GAISE Report (2005). *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education*. Retirado a 13.Jun.2010 de http://it.stlawu.edu/~rlock/gaise/

Garfield, J., (2002). The Challenge of developing statistical reasoning. *Journal of Statistics Education* 10(3). Retirado a 12.Jun.2010 de www.amstat.org/publications/jse/v10n3/garfield.html

Jacobs, V. R. (1999). How do students think about statistical sampling before instruction? *Mathematics Teaching in the Middle School*, 5(4), 240-246, 263.

Konold, C. & Higgins, T. (2003). Reasoning about data. In G. Burrill (Ed.), *Research Companion to Principles and Standards of School Mathematics* (pp. 193-215). Reston, VA: NCTM.

Martins, M.E. & Ponte, J.P. (2010). *Organização e tratamento de dados*. Lisboa: ME-DGIDC.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME-DGIDC.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

Shaughnessy, J. M., Garfield, J., & Greer, B. (1996). *Data handling*. In A. J. Bishop et al. (Eds.), *International handbook of mathematics education* (Vol. 1, pp. 205-237). Dordrecht: Kluwer.

Anexo 1 - Questões 3, 5 e 6 da tarefa 1 – Amostra e População

3. A Diretora de uma escola pretendia saber se os alunos estavam satisfeitos com a alimentação fornecida pela cantina da escola. Inquiriu todos os alunos com número ímpar.
   Faz um comentário sobre a representatividade da amostra.

5. O que terias a dizer sobre a representatividade de uma amostra constituída apenas por médicos para se estudar os conhecimentos de Biologia de uma determinada população?

6. Uma escola tem 523 alunos do 9.º ano. Pretende-se fazer um estudo sobre os seus projetos quanto ao prosseguimento de estudos. Para isso resolveu fazer-se um inquérito que abranja uma amostra representativa.
   a. Como obter essa amostra?
   b. Elabora três ou quatro perguntas que consideres fundamentais estar no inquérito para conhecer a opinião dos alunos quanto ao prosseguimento dos seus estudos.

Anexo 2 – Tarefa 4 – A frequencia das vogais na lingua portuguesa

Uma editora de jogos vai introduzir no mercado um jogo cujo objectivo é construir palavras. As letras são colocadas em fichas que os jogadores colocam em cada jogada. Para construir um número adequado de fichas é preciso conhecer a frequência relativa com que ocorre cada uma das letras na língua portuguesa. Como algumas das vogais são as letras mais frequentes, a empresa começou por organizar um estudo sobre a frequência de cada uma das vogais.

1. Vamos fazer o mesmo estudo a partir do texto "A Rádio escola" ....
   Escolhe quaisquer 5 linhas consecutivas do texto.
   Considerando as linhas que escolheste preenche a tabela com a frequência com que aparece cada uma das vogais.

Variável - vogal	Frequência absoluta na amostra do grupo A	Frequência absoluta na amostra do grupo B	Frequência absoluta na amostra do grupo C	Frequência absoluta na amostra do grupo D	Frequência absoluta na amostra do grupo E	Frequência absoluta na amostra da turma
a						
e						
i						
o						
u						
Total de vogais encontradas						

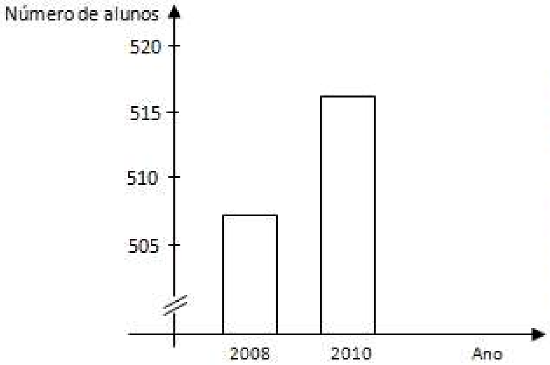
2. Qual é a vogal mais frequente?
3. Se a empresa quiser que o seu jogo tenha 200 peças com vogais, qual a quantidade de fichas que deve haver com cada uma das vogais?
4. Se repetíssemos a mesma experiência, mas com um outro texto obteríamos exactamente a mesma percentagem para cada uma das vogais?
5. Compara os resultados da amostra da turma com os resultados da frequência de cada uma das letras do alfabeto na língua portuguesa. Procura na internet, no wikipédia esta informação.

   http://pt.wikipedia.org/wiki/Alfabeto_portugu%C3%AAs

   O que podes concluir sobre a qualidade da amostra utilizada?

Anexo 3 – Item 1 da E1

O coordenador do desporto escolar da escola realiza anualmente um relatório: relativo ao numero de participantes, modalidades praticadas, resultados em provas de concelho, ….
No relatório de 2010 apresentou o seguinte gráfico e inclui o comentário lateral seguinte:

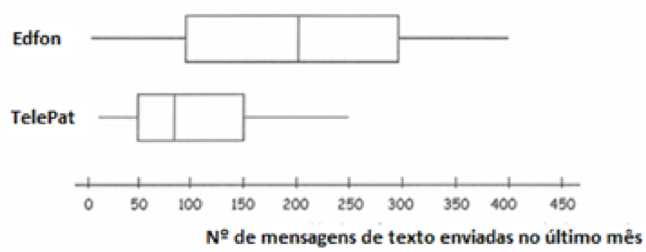


"Como podemos observar entre 2008 e 2010, houve um aumento do número de alunos envolvidos nas atividades do desporto escolar, tendo duplicado o número de participantes."

Consideras que a afirmação do coordenador é uma interpretação aceitável do gráfico?
Dá uma explicação que justifique a tua resposta.

Anexo 4 - Item 3 da E1

O João está interessado em comparar o número de mensagens de texto enviadas pelos utilizadores da Edfon e TelePat, pelo que inquiriu 100 pessoas (cerca de igual número de utilizadores da Edfon e TelePat). Os resultados obtidos estão apresentados nos seguintes diagramas de extremos e quartis:



Sabendo que a questão a que o João pretendia responder era: "Em qual das operadas de telecomunicações, os utilizadores enviaram mais mensagens de texto no último mês?"
Responder à pergunta do João. De que modo os diagramas de extremos e quartis mostram isso? Apresenta três argumentos para a fundamentação da resposta.

Anexo 5 - Item 5 a) e b) da E1

Como parte de um projecto "A Saúde e os hábitos alimentares" os alunos de uma turma do 8º ano pretendem recolherem dados junto de 200 dos 1025 alunos, quanto ao consumo semanal de refrigerantes.

a) Indica de que modo, terão procedido para escolher um conjunto de 200 representativos da população em estudo.
b) Indica um procedimento que leve à escolha de uma amostra enviesada (não representativa).

Anexo 6 - Item 1b da E2

A Rita, aluna da turma, ficou preocupada com o seu consumo diário de sódio, ao ter conhecimento de que "não se deve consumir mais do que 1,8 g a 2,4 g de sódio por dia". Decidiu monitorizar o seu consumo diário de sódio:

1º recolheu dados relativos ao consumo diário de sódio em 10 dias, que foram (em g):

2,4 3,1 4,5 1,8 2,1 2,7 2,5 2,0 3,0 3,2

2º alterou os seus hábitos alimentares durante um mês, tendo evitado consumir conservas/enlatados e salgados variados.

3º recolheu dados relativos ao consumo diário de sódio nos 10 últimos dias do mês em experiência, tendo obtido os seguintes valores (em g):

2,0 1,8 1,5 2,1 2,3 2,2 2,7 2,5 1,9 2,4

A Rita poderá concluir que a alteração dos seus hábitos alimentares contribuiu para uma diminuição do consumo de sódio? Explica a tua resposta.

Anexo 7 - Item 4 da E2

Em Lagutrop, foram efetuadas sondagens para saber a **opinião da população quanto as condições de saúde e segurança nos locais de trabalho.**

Quatro jornais efetuaram separadamente sondagens a nível nacional.
Os resultados dessas quatro sondagens, quanto à percentagem de população que consideraram ser <u>más as condições de saúde e segurança nos locais de trabalho</u> foram os seguintes:

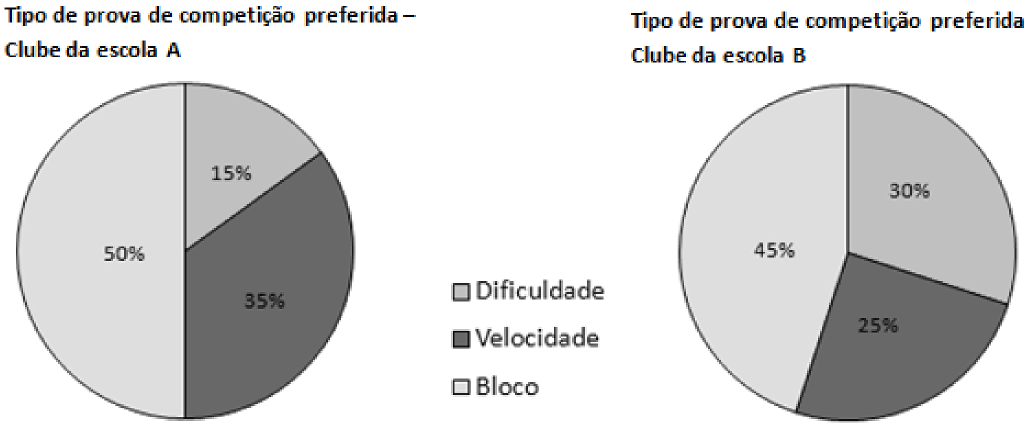
Jornal 1	**Jornal 2**	**Jornal 3**	**Jornal 4**
35%	35,5%	39%	32%
Sondagem realizada com base em 1500 entrevistas de rua, entre as 10h- 12h, junto de cidadãos, com mais de 18 anos, escolhidos ao acaso.	Sondagem realizada, com base numa amostra de 1000 cidadãos, com mais de 18 anos, escolhidos ao acaso entre os eleitores.	Sondagem realizada com base em 1500 SMS enviadas por assinantes, com mais de 18 anos, para a redação do jornal.	Sondagem realizada com base em 1000 entrevistas digitais a cidadãos, com mais de 18 anos, escolhidos ao acaso numa rede social digital.

Qual é o jornal cujos resultados darão, provavelmente, uma melhor previsão da percentagem de população que consideram ser <u>más as condições de saúde e segurança nos locais de trabalho</u>, em Lagutrop?
Indica para cada alternativa não selecionada uma razão da tua rejeição.

Anexo 8 - Item 3 a2) e b) da E2

A escalada é uma modalidade cada vez mais apreciada, surgindo clubes em várias escolas. As competições de escalada realizam-se em estruturas artificiais de escalada e existem três tipos de competição – ***Dificuldade***, ***Velocidade*** e ***Bloco***.

a) Quanto ao tipo de competição, os alunos do clube de escalada da escola A e da escola B indicaram o tipo de competição preferido. Os gráficos circulares seguintes ilustram os dados recolhidos.



a2) Podemos afirmar que o número de alunos da escola A que prefere competir em provas do tipo ***Bloco*** é superior ao número de alunos da escola B a preferir esse mesmo tipo de prova?
Explica a tua resposta.

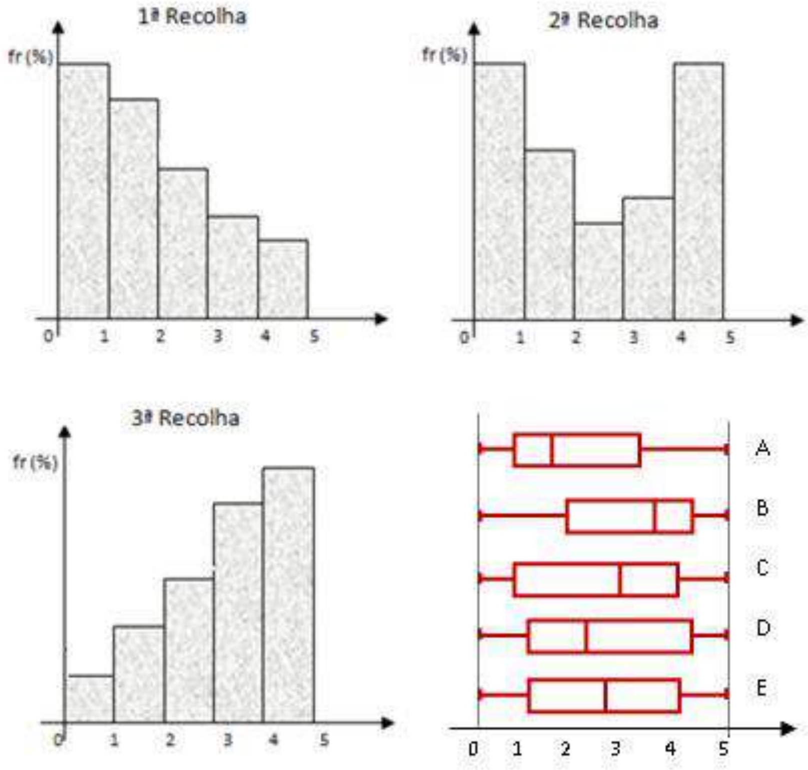
b) O melhor atleta de escalada da escola B, nos 8 últimos treinos para uma prova de competição do tipo ***Dificuldade,*** obteve os seguintes tempos (em segundos):

204	290	196	202	195	193	197	201

A professora responsável deverá utilizar que valor(es) numérico(s) para resumir os tempos dos últimos oito treinos? Explica a tua resposta.

Anexo 9 - Item 5.3 do T2

Optou-se por recolher dados junto de um conjunto representativo de 160 alunos da escola, em três momentos distintos do ano escolar. Os histogramas relativos à distribuição dos gastos semanais na escola, em cada recolha, foram os seguintes:



Indica para cada histograma a letra do correspondente diagrama de extremos e quartis. Justifica a tua resposta.

LITERACIA ESTATÍSTICA NO 5.º ANO: UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO[29]

Cátia Freitas

Escola EB2,3 do Bairro Padre Cruz

catiaperdigao@gmail.com

Resumo

Este artigo diz respeito a uma investigação que teve como principal objetivo conhecer o nível de compreensão e a capacidade de interpretação de dados dos alunos de uma turma do 5.º ano de escolaridade após a realização de uma unidade de ensino sobre o tema. Foi seguido um paradigma de caráter interpretativo com o design de estudo de caso, tendo eu desempenhado o papel de professora-investigadora. Os resultados indicam que a realização da unidade ajuda os alunos a desenvolver a sua leitura e interpretação crítica de dados, consolidando os seus conhecimentos sobre este tema.

Palavras-chave: Literacia estatística, interpretação de tabelas e gráficos, tarefas de exploração

Introdução

Embora o interesse pela Estatística tenha conhecido um crescimento assinalável nos últimos anos, o número de investigações sobre o ensino e a aprendizagem deste tema é ainda escasso, sabendo-se pouco sobre as diferentes capacidades e dificuldades dos alunos e suas estratégias de raciocínio (Fernandes, Sousa e Ribeiro, 2004).

Apesar de já ter um lugar de relevo no programa de Matemática anteriormente em vigor (ME, 1991) e até ter recebido um maior destaque no atual programa (ME, 2007), a Estatística é normalmente dada de uma forma rápida, pois muitos professores consideram que este é um tema fácil para os alunos.

Como professora, sempre considerei a Estatística como um tema fácil, onde os alunos obtinham bons resultados. Verifiquei tratar-se de um tema apelativo e motivante para os alunos. No entanto, nas perguntas onde era pedido algo mais do que uma leitura direta do gráfico, por norma os resultados não eram tão bons. Os alunos tinham dificuldades, por exemplo, em comparar gráficos com tabelas e em manipular dados de situações problemáticas para responder a outras questões.

[29] Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projeto *Desenvolver a literacia estatística: Aprendizagem do aluno e formação do professor* (contrato PTDC/CPE-CED/117933/2010).

O meu objetivo foi estudar a aprendizagem de alunos do 5.º ano de escolaridade no quadro de uma experiência de ensino visando desenvolver a literacia estatística, centrada na leitura e interpretação de dados. Desta forma, esta investigação procurou responder às seguintes questões:

a) Que aprendizagens demonstram os alunos, com a realização de uma unidade de ensino, na leitura e interpretação de tabelas de frequência absoluta e relativa, de gráficos de barras, linha, caule e folhas e circulares?

b) Quais as principais dificuldades demonstradas pelos alunos antes, durante e no fim da unidade de ensino, nas aprendizagens sobre leitura e interpretação de tabelas e gráficos?

A Estatística

A abordagem ao ensino da Estatística tem sido cada vez mais estudada por professores, investigadores e matemáticos no sentido de se promover uma mudança significativa nas práticas letivas. Segundo Martins e Ponte (2010, p. 7) "o objetivo do ensino da Estatística, a nível elementar, é, antes de mais, promover a literacia estatística, ensinando os alunos a ler e interpretar dados".

De acordo com o atual *Programa de Matemática* (ME, 2007) e indo ao encontro das *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar* (NCTM, 2001), na escolaridade básica os alunos devem desenvolver três grandes capacidades transversais a todo currículo de Matemática – a Resolução de Problemas, o Raciocínio Matemático e a Comunicação Matemática – que devem ser trabalhadas de forma integrada.

Uma outra capacidade transversal também importante diz respeito às conexões matemáticas. Brocardo e Mendes (2001) indicam que "o trabalho em torno da Estatística deve desenvolver as capacidades de comunicação, de raciocínio, de resolução de problemas e de estabelecer conexões, ou seja, deve contribuir para que os alunos se tornem matematicamente literados" (p. 36).

No que diz respeito ao *Programa de Matemática* (ME, 2007) o propósito principal do ensino, no âmbito deste tema, visa "desenvolver nos alunos a capacidade de compreender e de produzir informação estatística, bem como de a utilizar para resolver problemas e tomar decisões informadas e argumentadas" (p. 42).

Investigação sobre o ensino e a aprendizagem de tabelas e gráficos

A habilidade dos alunos para lerem gráficos tem recebido cada vez mais importância por parte de investigadores. Para Curcio (1987, 1989) e Friel, Curcio e Bright (2001) a compreensão de um gráfico envolve a sua leitura e o dar sentido ao gráfico em situações da vida real, assim como a capacidade de construção de gráficos que melhor transmitam informações e dados.

De acordo com Curcio (1989) "ser capaz de ler os dados presentes num gráfico é uma capacidade importante, mas o sujeito só tira o máximo de potencial de um gráfico quando consegue interpretar os dados e generalizar para a realidade a informação nele presente" (p. 1). Desta forma, torna-se essencial que os nossos alunos desenvolvam competências para que possam interpretá-los e compreendê-los. Partindo da análise do seu estudo, definiu três níveis de leitura e compreensão de tabelas e gráficos:

Nível 1: Ler os dados – É considerada apenas a leitura direta do gráfico sem qualquer interpretação, atendendo apenas a factos representados explicitamente.

Nível 2: Ler entre os dados – Já requer um nível de comparação, o conhecimento de conceitos e habilidades matemáticas, que lhe permitem identificar relações matemáticas;

Nível 3: Ler além dos dados – Exige uma ampliação dos conceitos, a predição, a inferência;

Além destes, Shaughnessy (2007) baseado no estudo de Shaugnessy, Garfield e Greer (1996), afirma que se deve acrescentar, ainda, um quarto nível: *ler por detrás dos dados*, justificando é indispensável para fazer conexões entre os dados e o contexto, sendo todos estes componentes importantes para o pensamento, o raciocínio e a literacia estatística (p. 991).

Dificuldades dos alunos na representação gráfica

Alguns autores investigaram os conhecimentos, erros e dificuldades de alunos na representação gráfica. Desta revisão, Sosa (2010), referindo-se à análise de Batanero (2001), aponta algumas dificuldades que os alunos tendem a apresentar:

1. Interpretação do conteúdo dos gráficos, além da incapacidade de processar a informação contida de forma coerente;
2. Interpretação de gráficos de nível superior;
3. Selecionar incorretamente o tipo de gráfico adequado;

4. Selecionar escalas de representação pouco ou nada adequadas;
5. Omitir as escalas em alguns dos eixos;
6. Não especificar a origem das coordenadas;
7. Não proporcionar divisões suficientes nas escalas dos eixos;
8. Desconhecer o modo correto como ser empregado um software para a construção de gráficos;
9. Obter um diagrama de setores em que estes não são proporcionais com as frequências das categorias ou comparar quantidades heterogéneas de um mesmo gráfico.

Espinel et al (2009) apontam, ainda, erros relacionados com a manipulação de pictogramas. Para estes autores, os alunos têm dificuldades quando se representa um conjunto de dados através de uma imagem ou apenas parte da imagem. Curcio (1989) aponta dificuldades com os gráficos circulares, considerando-os os mais complicados de trabalhar e os mais difíceis dos alunos compreenderem. Refere ainda que o sucesso na construção e interpretação deste tipo de representação depende da compreensão que o aluno tem de raciocínio proporcional. Carvalho (2009), referindo-se a um estudo de Profírio e Gordo (s/d) aponta também as dificuldades que os alunos têm em resumir informação apresentada através de tabelas ou gráficos, limitando-se a enumerar a informação presente.

Metodologia

Esta investigação teve como principal objetivo conhecer o nível de compreensão e a capacidade de interpretação de dados apresentados em gráficos e tabelas dos alunos do 5.º ano após a realização de uma unidade de ensino, assim como compreender as dificuldades apresentadas, com o intuito de melhorar o ensino e a aprendizagem. Ponte (2006) refere que num estudo de caso o "objetivo é compreender em profundidade o «como» e os «porquês» dessa entidade, evidenciando a sua identidade e características próprias, nomeadamente nos aspetos que interessam ao pesquisador" (p. 2). Acrescenta ainda que os estudos de caso "usam-se para compreender a especificidade de uma dada situação ou fenómeno, para estudar os processos e as dinâmicas da prática, com vista à sua melhoria (…)". Desta forma, segue um paradigma de caráter interpretativo, utilizando o design de estudo de caso como forma de proporcionar uma melhor e mais enriquecedora compreensão das estratégias dos alunos na resolução de problemas e de tarefas de exploração, das suas dificuldades e da evolução ao longo da unidade de ensino. Uma vez que a minha própria prática, neste tópico, tem sido um pouco de “mais do mesmo”, tendo como objetivo a mudança das práticas em sala de aula, decidi desempenhar o duplo papel de professora e investigadora.

Esta experiência de ensino destinou-se a alunos do 5.º ano de escolaridade. A sua realização teve lugar no mês de março de 2011, tendo a duração de sete blocos de 90 minutos, o que corresponde a sete aulas, incluindo as duas aulas onde foram aplicados os testes inicial e final. Inicialmente, estavam previstas seis aulas, no entanto, verificou-se que seria importante mais aulas para o desenvolvimento de exercícios de consolidação dos temas lecionados. Neste trabalho são apresentados os dados referentes ao desempenho de uma aluna: Maria.

Para proceder à recolha de dados, utilizei a: (i) observação participante, com registos em fotografia, áudio e/ou vídeo; (ii) recolha documental; (iii) entrevista semiestruturada; e (iv) testes inicial e final.

Uma vez que os dados obtidos através da aplicação das tarefas foram de natureza qualitativa, procedi à sua análise tendo por base os aspetos teóricos revistos na literatura sobre o tema em estudo e os objetivos desta investigação. Foram consideradas como categorias de análise: (i) os níveis de leitura/compreensão e interpretação dos dados; e (ii) as dificuldades sentidas em cada um dos momentos. É de referir que para esta análise não foi considerado o quatro nível proposto por Shaughnessy (2007) devido à faixa etária dos meus alunos e ao nível de escolaridade.

Maria

Maria tem 10 anos. Está no 5.º ano de escolaridade e não tem retenções no seu percurso escolar. Afirma que gosta de Matemática, mas, por vezes, sente alguma dificuldade em perceber os assuntos abordados. É muito participativa na interação oral e na realização das tarefas propostas, mas é notório que, por vezes, precisa de um apoio mais individualizado.

Desempenho antes da unidade

Leitura e interpretação de tabelas. Relativamente às questões de nível 1, Maria não demonstra quaisquer dificuldades, extraindo a informação necessária de uma tabela.

Uma das questões de nível 2 questiona o número total de rapazes e raparigas, dos 6 aos 10 anos que estavam no campo de férias. A sua resposta é a seguinte:

R: estão no campo de férias dos 6 aos 10 anos ~~no total~~ no total são
783

Para responder a esta questão, é necessário operar com os dados da tabela, neste caso através da adição e a aluna não responde corretamente. Aqui parece evidente que a sua dificuldade residiu somente na realização da adição, uma vez que a resposta era 86.

No que diz respeito à questão de nível 3, a aluna tinha que aferir sobre a veracidade do comentário "Mais de metade dos rapazes e raparigas que estão no campo têm idades entre os 11 e os 13 anos". A sua resposta é a seguinte:

1.3.1 Este comentário será verdadeiro? Explica porquê.

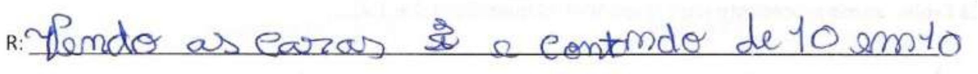
R: Não ~~toro~~ farque tamemà
dos 14 aos 16 anos

Como se pode verificar, além responder incorretamente, são notórias as suas dificuldades ao nível da escrita. A aluna não compreende a questão nem interpreta a informação fornecida.

Leitura e interpretação de pictogramas e gráficos de barras. Uma das questões apresenta um pictograma com os desportos praticados pelos rapazes no campo de férias, a um determinado dia da semana, valendo cada símbolo 10 rapazes. Quando pedida para fazer uma leitura literal do pictograma, Maria não apresenta dificuldades e responde corretamente às questões, embora sem apresentar o seu raciocínio.

Numa questão de nível 2, quando questionada sobre quantos rapazes não praticam nenhuma das atividades àquele dia da semana, a aluna não responde corretamente, nem apresenta quaisquer cálculos que suportem a sua resposta.

Uma questão de nível 3 apresenta um gráfico de barras com a distribuição dos alunos por três das atividades noutro dia da semana e, sabendo que todos frequentam uma atividade, solicita o completamento do gráfico de acordo com os dados fornecidos. Nesta questão, não responde corretamente e a sua justificação é a seguinte:



Maria não tem em consideração que o gráfico diz respeito às atividades praticadas noutro dia da semana e utiliza os dados do pictograma para o completar, ou seja, relaciona o novo gráfico com o anterior, não tendo em atenção que se trata de dias distintos.

Balanço global. Em suma, no teste inicial, Maria não responde corretamente a 5 das 11 questões apresentadas, tal como se sistematiza no quadro 12.

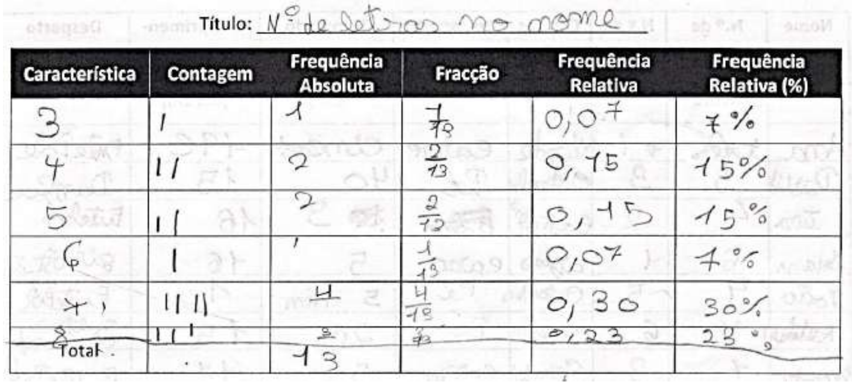
Quadro 1. Panorama geral do desempenho da Maria no teste inicial.

Níveis	Respostas corretas		Respostas incorretas	
	FA	%	FA	%
1	3	100%	0	0%
2	3	60%	2	40%
3	0	0%	3	100%

A aluna acerta em todas as perguntas de nível 1, não apresentando dificuldades na leitura literal dos gráficos ou na extração de informação elementar. Nas questões de nível 2, não consegue responder a duas das questões, onde tem de operar com diferentes informações para responder corretamente. Responde incorretamente a todas as três perguntas de nível 3. Aparentemente, as suas dificuldades prendem-se com a interpretação dos enunciados.

Desempenho durante a unidade

Leitura e interpretação de tabelas de frequências. Durante a realização da unidade, Maria não apresenta dificuldades na leitura e interpretação de tabelas de frequências. Na realização da tarefa 2, onde é apresentada uma tabela com dados relativos à turma, constrói a seguinte tabela de frequências indicando o número de letras no nome dos colegas da turma:



Título: Nº de letras no nome

Característica	Contagem	Frequência Absoluta	Fracção	Frequência Relativa	Frequência Relativa (%)
3	I	1	1/13	0,07	7%
4	II	2	2/13	0,15	15%
5	II	2	2/13	0,15	15%
6	I	1	1/13	0,07	7%
7	IIII	4	4/13	0,30	30%
8	III	3	3/13	0,23	23%
Total		13			

É de notar, que apesar de a sua tabela estar correta, a soma das frequências relativas não corresponde a 100%. Isto deve-se ao facto de a aluna não ter tido em atenção os arredondamentos às centésimas, dando neste caso, uma margem de erro de 3%. Quando solicitada a produzir um texto que resuma refere apenas qual a característica com que trabalhou e menciona, de uma forma um pouco atabalhoada, que 30% dos alunos tem 7 letras no nome.

Leitura e interpretação de gráficos. Numa tarefa de nível 2, são apresentados 2 gráficos, um gráfico de pontos e um pictograma indicando os resultados da votação no animal preferido. É de notar que a aluna organiza o seu trabalho a partir da informação dada em ambos os gráficos. Assim, nos próprios gráficos, apresenta os dados relativos às frequências absolutas conforme se verifica na figura:

Gráfico 1 Gráfico 2

Desta forma, Maria identifica a diferença fulcral para a realização da tarefa e responde corretamente às questões onde apenas necessita retirar dados explícitos nos gráficos.

Noutra tarefa, o prato favorito, uma tarefa de nível 3, Maria tem que completar o gráfico de acordo com proposições dadas. A aluna identifica os pratos que advêm de proposições diretas. Percebe rapidamente que a escala de gráfico não pode ser unitária e experimenta andar de dois em dois. Continua a organizar o seu trabalho de uma forma coerente, colocando por cima das barras indicações importantes para o desenvolvimento da tarefa, utilizando siglas e números para colocar os pratos nas barras corretas:

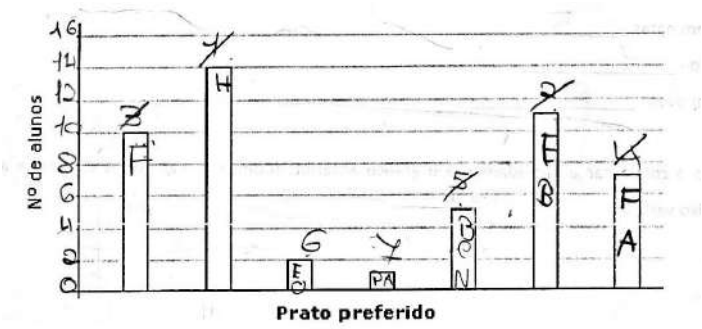
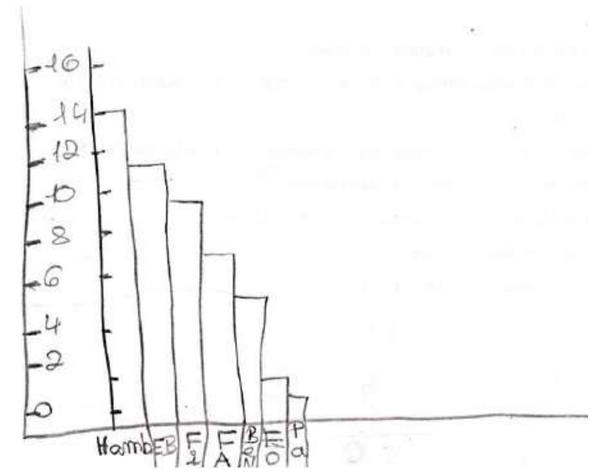


Gráfico 1 - O prato favorito

É interessante verificar que, nesta tarefa, mesmo sem ser solicitada, a aluna constrói um novo gráfico com toda a informação que tinha descoberto.



A análise deste gráfico evidencia vários erros de construção. Maria constrói um gráfico de barras, mas todas juntas umas às outras. Como podemos verificar, existem dois eixos verticais. Devido à falta de uso da régua, ao colocar a escala no gráfico, Maria não tem o cuidado de colocar o zero (0) no sítio correto e os espaçamentos não têm todos a mesma distância. Por fim, falta legendar os eixos e colocar um título. Em situação de entrevista, discuto com a aluna como deveria ter construído o gráfico e quais as regras que deveriam ter sido respeitadas. Os seus erros vão ao encontro da literatura existente sobre os tipos de erros que os alunos cometem na construção de gráficos.

Já no que diz respeito à manipulação de dados em pictogramas, numa tarefa de nível 2, Maria não apresenta muitas dificuldades. No entanto, numa das tarefas, os sabores de gelado, onde é apresentado um pictograma com os sabores de gelado preferidos dos amigos da Inês, quando questionada sobre o que representa o pictograma, não responde corretamente:

Refresentã o múmero do amigos
Refresenta o múmoro de saBores

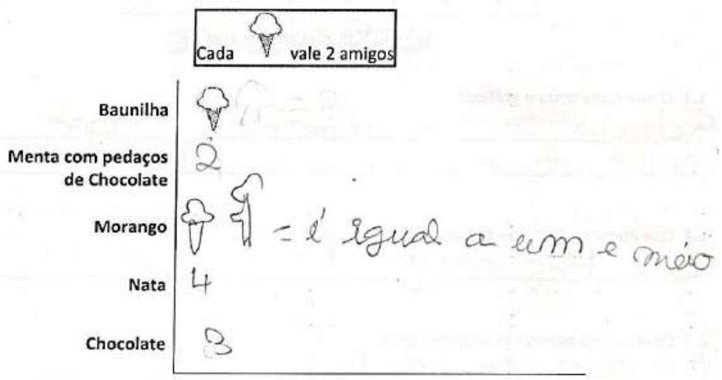
A aluna demonstra que não consegue interpretar a situação proposta e explicar, por suas palavras e de uma forma completa o que representa a situação. Quando solicitada a fazer uma leitura literal do pictograma, Maria não revela dificuldade.

Noutra questão de nível 3, onde é convidada a tomar decisões sobre que sabores de gelado devem ser comprados, a sua resposta é a seguinte:

Cofrava fara Todos . de tutéfrutá fara mão
haverá comfusão o forque são Bons

Neste caso, a aluna toma uma decisão baseando-se no seu gosto pessoal, sem ter em consideração os sabores preferidos pelos amigos apresentados no pictograma.

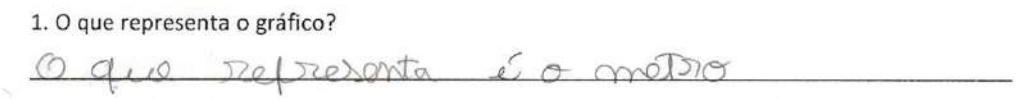
Por fim, Maria é capaz de relacionar pictogramas de acordo com dados apresentados, comparando-os e explicando quais as suas relações, como é o caso da situação em que é apresentado um pictograma com os sabores de gelado preferidos por uma dada amostra, onde cada símbolo vale 1 amigo. É pedido que complete um outro pictograma tendo em conta que cada símbolo vale 2 amigos. A sua resposta é a seguinte:



A aluna relaciona os dois pictogramas, mas comete erros de percurso, ou seja, não completa com os símbolos, mas sim com números e um dos sabores está incorreto. Ao questioná-la, Maria refere que se enganou a contar.

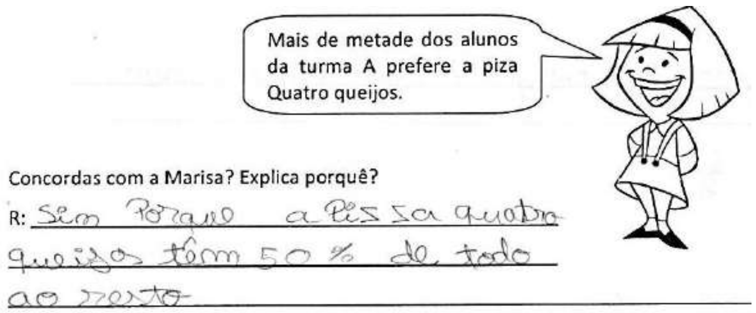
Em todas as tarefas relacionadas com pictogramas e gráficos de barras, a aluna revela algum à vontade nas questões que envolvem uma leitura direta do gráfico. No entanto, quando solicitada a tomar decisões baseia-se nas suas experiências pessoais e não nos dados apresentados nos gráficos.

Gráficos de linhas. Na tarefa que apresenta um gráfico de linhas, a corrida, Maria sente dificuldades na interpretação da informação apresentada. Quando questionada sobre o que representa o gráfico, a sua resposta é a seguinte:


1. O que representa o gráfico?
O que representa é o metro

Na realização da segunda questão da tarefa (de nível 2), completar um texto tendo em atenção as informações dadas no gráfico, reparei que a aluna está parada a olhar para o gráfico. Coloca o braço no ar e quando me aproximo refere que não está a perceber nada do gráfico (como se depreende da sua resposta na pergunta anterior) e não sabe como completar o texto. Desta forma, procuro desbloquear o seu raciocínio, auxiliando-a na interpretação do gráfico. De seguida, a aluna procura completar o texto, e apenas não consegue acertar nas mudanças de velocidade, que correspondem a mudanças na inclinação das linhas.

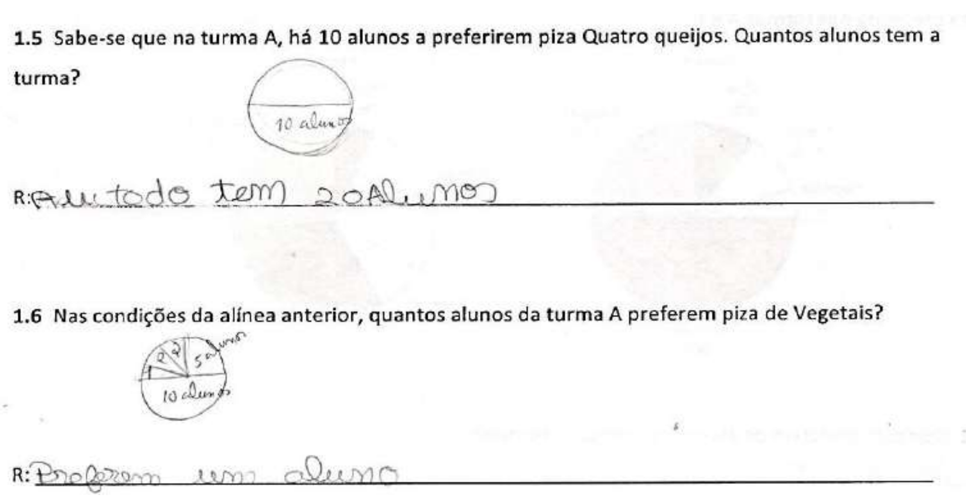
Gráficos circulares. Nestas tarefas, com questões de nível 2 e 3, Maria apresenta igualmente, algumas dificuldades. Uma tarefa apresenta dois gráficos com as pizas favoritas de duas turmas (não sendo dada a amostra), sendo que numa delas a piza favorita corresponde a 50% do gráfico. Quando solicitada a aferir sobre a veracidade da seguinte afirmação: "mais de metade dos alunos da turma A prefere a piza quatro queijos", a sua resposta é a seguinte:



Concordas com a Marisa? Explica porquê?
R: Sim porque a Pisza quatro queijos têm 50 % do todo ao resto

Como se pode verificar, a aluna considera que 50% já correspondem a mais de metade, não demonstrando qualquer evolução relativamente a prestações anteriores.

Dado o número de alunos a preferir uma determinada piza, Maria é questionada sobre o número total de alunos de uma turma e sobre o número de alunos que prefere uma determinada piza. As suas respostas são as seguintes:


1.5 Sabe-se que na turma A, há 10 alunos a preferirem piza Quatro queijos. Quantos alunos tem a turma?

10 alunos

R: Ao todo tem 20 Alunos

1.6 Nas condições da alínea anterior, quantos alunos da turma A preferem piza de Vegetais?

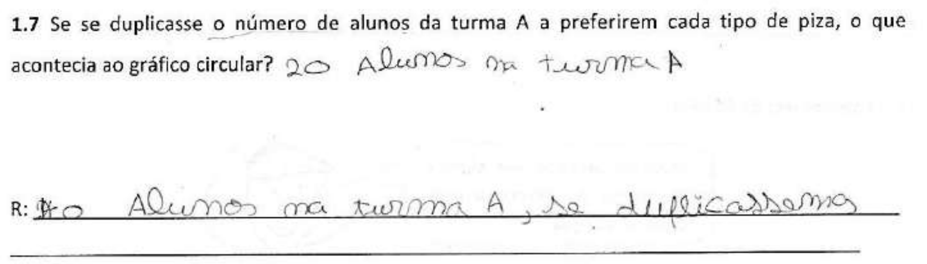
5 alunos

10 alunos

R: Preferem um aluno

Como podemos verificar, a aluna recorre a representações gráficas para responder às suas questões e fá-lo de uma forma correta.

A última pergunta da tarefa interroga se se duplicasse o número de alunos da turma A a preferirem cada tipo de piza, o que aconteceria ao gráfico circular. A aluna responde:


1.7 Se se duplicasse o número de alunos da turma A a preferirem cada tipo de piza, o que acontecia ao gráfico circular? 20 Alunos na turma A

R: 40 Alunos na turma A, se duplicassemos

A aluna chega à conclusão sobre quantos alunos teria a turma se duplicássemos o seu número, mas não responde à questão colocada, ou seja, o que aconteceria ao gráfico.

Diagrama de caule-e-folhas. Maria não apresenta dificuldades durante a concretização de uma tarefa que envolve a manipulação de um diagrama de caule-e-folhas. A tarefa consiste na construção e interpretação de um diagrama em que são registados os segundos que cada aluno conseguia suster a respiração.

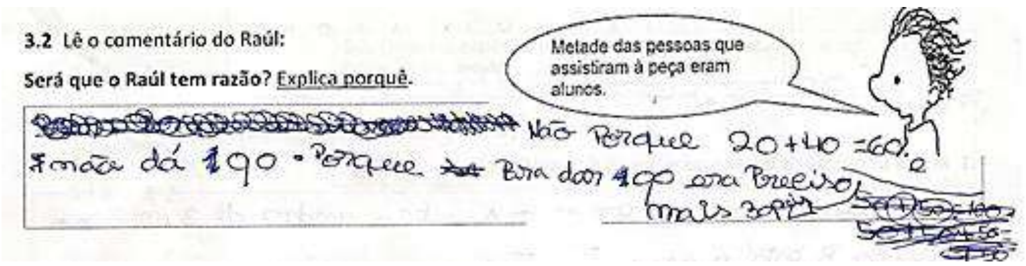
Balanço Global. Ao longo da unidade de ensino, Maria mostra-se sempre bastante empenhada e interessada em aplicar as indicações por mim sugeridas para a realização das tarefas. Tem uma participação oral razoável, sendo que muitas vezes apenas expõe as suas dúvidas quando solicitada a tal.

Desempenho depois da unidade

Durante a realização do teste final, a prestação de Maria é bastante satisfatória. No que diz respeito a tabelas de frequências absolutas e relativas a aluna não tem dificuldades, incluindo a frequência relativa onde anteriormente não tinha sido capaz de realizar corretamente os arredondamentos. É ainda pedido para completar a legendagem de um gráfico circular com o auxílio da tabela. A aluna não consegue resolver a totalidade da questão e erra ao comparar as diferentes representações apresentadas.

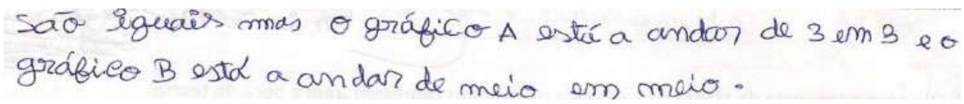
Quanto aos gráficos de barras e pictogramas, nas questões de nível 1, Maria não manifesta dificuldades na leitura dos dados.

Nas questões de nível 2, responde corretamente, mas, uma vez mais, não apresenta quaisquer cálculos ou raciocínios a sustentar as suas respostas. Numa das questões de nível 3, responde da seguinte forma:



Nesta questão, a aluna reconhece que, para o comentário ser verdadeiro, são precisos, por exemplo, mais 30 pais, demonstrando uma evolução positiva em relação a tarefas anteriores.

Em relação aos gráficos de linhas, uma questão apresenta dois gráficos com a mesma situação, a evolução de peso de uma criança, mas com a escala vertical diferente, Maria responde corretamente:



Nesta questão, Maria não só consegue perceber que ambos os gráficos são iguais, como identifica que a escala é diferente. É de notar que existe, uma vez mais, uma evolução positiva em relação a esta questão, pois aquando da exploração de situações com este tipo de gráfico, a aluna tinha demonstrado algumas dificuldades na interpretação e manipulação de dados.

Assim, no teste final, Maria não responde corretamente a apenas 5 das 19 questões apresentadas. As suas respostas estão sistematizadas no quadro 13.

Quadro 2. Panorama geral do desempenho da Maria no teste final.

Níveis	Respostas corretas		Respostas incorretas	
	FA	%	FA	%
1	6	86%	1	14%
2	6	67%	3	33%
3	2	67%	1	33%

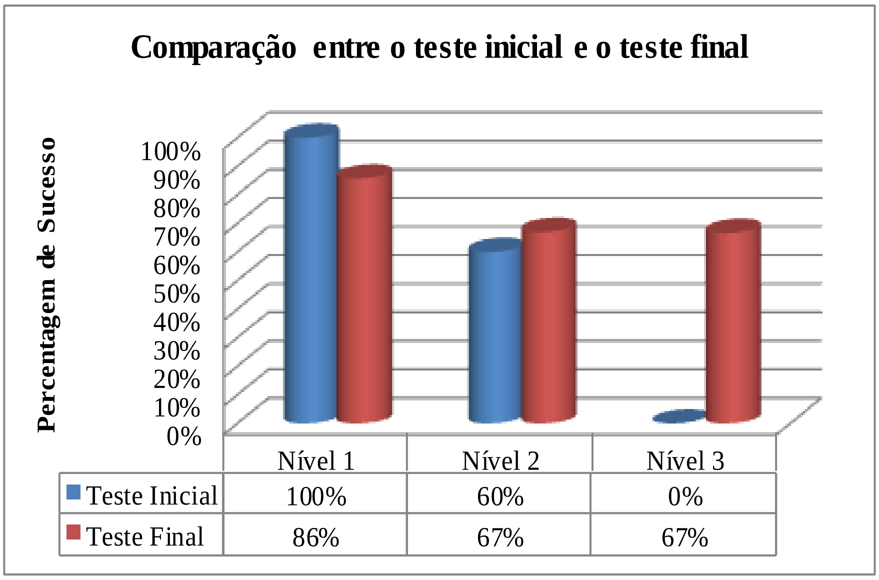


Figura 1. Comparação do desempenho entre o teste inicial e o teste final da Maria

Como podemos verificar, no nível 1, Maria não responde corretamente a apenas uma das questões apresentadas, tendo um desempenho inferior ao teste inicial. No que diz respeito às tarefas de nível 2, existe uma ligeira evolução de respostas corretas. No entanto, em duas dessas questões há apenas uma resposta incompleta, pois a aluna respondeu corretamente em alguns aspetos, como é o caso da pergunta envolvendo duas representações, requerendo completar um gráfico circular a partir de uma tabela de frequências. No que diz respeito ao nível 3, verificamos que há uma evolução bastante positiva no seu desempenho, uma vez que, inicialmente, a aluna não consegue responder corretamente a nenhuma das perguntas e, no teste final responde a duas das três perguntas propostas.

Considerações finais

Ao longo da unidade de ensino, Maria demonstra dificuldades, o que contraria a ideia de muitos professores de que este é um tópico simples (Fernandes et al., 2004) onde os alunos não sentem dificuldades.

No que diz respeito à leitura e interpretação de dados, Maria já evidencia um nível razoável antes da unidade de ensino. Além de conseguir realizar leituras literais dos gráficos, em algumas situações consegue relacionar os dados, manipulando-os para responder às diferentes questões. No que diz respeito a estas questões tal como no estudo de Curcio (1989), Maria não revela dificuldades. Como afirma a autora, isto deve-se ao facto dos alunos não terem de realizar uma interpretação dos dados, limitando-se a retirar a informação explícita no gráfico, ou nos seus elementos, como no título ou nos eixos.

A principal dificuldade apresentada por Maria, assim como muitos dos alunos da turma, diz respeito à comunicação matemática, onde inicialmente não é capaz de interpretar enunciados e comentar afirmações do tipo "mais de metade dos alunos têm idades compreendidas entre os 11 e os 13 anos". Além de problemas na interpretação das tabelas e gráficos demonstra lacunas na comunicação escrita como é visível em algumas questões onde as suas respostas são, muitas vezes, incertas ou pouco claras, não fazem sentido ou quando tem uma fraca capacidade de explicar, por escrito e em alguns casos oralmente, os seus raciocínios. É igualmente importante referir, que tal como relatado por Carvalho (2009), a aluna denota dificuldade em resumir gráficos ou tabelas, limitando-se a enumerar o que está explícito.

É interessante verificar que, em algumas das tarefas propostas ao longo da unidade de ensino, Maria faz uso dos conhecimentos do dia a dia ou das suas preferências pessoais para responder às questões, excluindo completamente a informação dada no gráfico, como é o caso da tarefa *Sabores de Gelado,* que escolhe os sabores que mais gosta.

No entanto, no que diz respeito às tabelas de frequências, evidencia pouca experiência na manipulação de diversos conceitos matemáticos, como é o caso dos números racionais e percentagens. Esta situação é igualmente apontada por Sosa (2010) e Curcio (1987, 1989), quando refere a falta de conhecimentos específicos prévios. Como aspeto significativo, depois da realização da unidade de ensino, Maria demonstra conseguir trabalhar mais facilmente a informação dada através de outras representações e consegue construir uma tabela de frequências absolutas e relativas, mas continua a sentir dificuldade em comparar representações.

É de notar que a aluna apresenta uma evolução positiva na apresentação dos processos utilizados na realização das tarefas e justificação dos seus raciocínios, principalmente em questões de nível 3. Assim, podemos dizer que desenvolveu a sua literacia estatística durante a unidade de ensino, mostrando-se capaz de ler e interpretar criticamente dados organizados em diferentes representações.

As conclusões deste estudo apontam para a necessidade de uma intervenção no ensino da Estatística e para uma maior atenção ao desenvolvimento da literacia estatística dos alunos. Apesar dos resultados deste estudo não serem generalizáveis, considero que o trabalho realizado traz um conjunto de experiências e informações que poderão ser uma mais-valia para estudos futuros.

Penso que será importante desenvolver mais estudos sobre as capacidades dos alunos, tanto dos mais novos, do 1.º ciclo, como dos alunos dos 2.º e 3.º ciclos, no sentido de um desenvolvimento de uma capacidade de leitura, compreensão e interpretação de dados em diferentes representações, bem como da sua literacia estatística.

Referências

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Granada: Universidad de Granada.

Bright, G., Curcio, F., & Friel, S. (2001). Making sense of graphs: Critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal of Research in Mathematics Education, 32(2),* 124-158.

Brocado, J., & Mendes, F. (2001) Processos usados na resolução de tarefas estatísticas. *Quadrante, 10(1)*, pp. 33-58.

Carvalho, C. (2009). Reflexões em torno do ensino e aprendizagem da estatística. In *Actas do II Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola* (pp. 22-51).

Curcio, F. (1987). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18(5), 382-393.

Curcio, F. (1989). *Developing graph comprehension. Elementary and middle school activities*. Reston, VA: NCTM.

Espinel, M. C., González, M. T., Bruno, A., & Pinto, J. (2009). Las gráficas estadísticas. In L. Serrano (Ed.), *Tendencias actuales de la investigación en educación estocástica* (pp.57-74). Málaga: Gráficas San Pancracio.

Fernandes, J. A., Sousa, M. V., & Ribeiro, S. ª (2004). O ensino da Estatística no ensino básico e secundário: Um estudo exploratório. In *Actas do I Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola* (pp. 165-193). Braga: Universidade do Minho.

Gal, I., & Garfield, J. (1997). Curricular goals and assessment challenges in statistics and education. In I. Gal & J. B. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 1-13). Amsterdam: IOS Press.

Martins, M. E. G., & Ponte, J. P. (2010). *Organização e tratamento de dados*. Lisboa: DGIDC

Ministério da Educação (1991). *Programa de Matemática: plano de organização do ensino-aprendizagem. Ensino básico, 2.º ciclo* (Vol. II). Lisboa: ME.

Ministério da Educação (2007). *Programa de matemática do ensino básico*. Lisboa: DGIDC.

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI (Org.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional (*pp. 5-28). Lisboa: APM. Lisboa: APM. Retirado de http://educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/02-Ponte%20%28GTI%29.pdf

Shaughnessy, J. M. (2007). Research on statistics learning and reasoning. In F. K. Lester (Eds.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 957-1006). Greenwich: NCTM.

Sosa, J. E. P. (2010). *Conocimiento didáctico del contenido sobre la representación de datos estadísticos: estudios de caso con profesores de estadística en carreras de psicología y educación.* Dissertação de Doutoramento apresentada à Universidade de Salamanca.

SIMPÓSIO 5

CAPACIDADES TRANSVERSAIS

CAPACIDADES TRANSVERSAIS EM EDUCAÇÃO EM MATEMÁTICA

Isabel Cabrita
Departamento de Educação da Universidade de Aveiro
icabrita@ua.pt

Lina Fonseca
Escola Superior de Educação do IP de Viana do Castelo
linafonseca@ese.ipvc.pt

Corporizando diversas recomendações nacionais e internacionais, fruto da mais recente investigação que se tem vindo a desenvolver no campo da Educação em Matemática, o atual Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB) anuncia três capacidades que se devem assumir como transversais a todo o currículo e a cujo desenvolvimento se deve conceder idêntica importância relativamente aos temas matemáticos que o estruturam. São elas a resolução de problemas, o raciocínio e comunicação (em) matemática (ME, 2007).

Um pouco por todo o mundo se defende que os alunos devem ser envolvidos em experiências significativas de matemática que lhes permitam uma mais sólida e motivada construção do conhecimento. No caso particular da matemática, tais experiências concretizam-se, em geral, através da resolução de tarefas, devidamente sequenciadas de acordo com hipotéticas trajetórias de aprendizagem (Serrazina e Oliveira, s/d; Simon, 1995; Simon & Tzur, 2004). Tais tarefas devem variar quanto à sua natureza insistindo-se, essencialmente, em enunciações mais ou menos abertas e gradativamente mais complexas. Nesta perspetiva, os problemas, a par de tarefas de investigação, têm vindo a ganhar terreno no campo da educação em matemática. Segundo Vale e Pimentel (2004), "a importância da resolução de problemas é não só utilitária mas sobretudo formativa, pois, além de nos ajudar a resolver os problemas do quotidiano, permite, principalmente, desenvolver processos e capacidades de pensamento que são o que de mais importante a matemática escolar pode desenvolver num indivíduo, uma vez que estas atividades complexas de pensamento estão presentes quando alguém é chamado a analisar, interpretar, criticar ou escolher, quer no contexto educativo, quer no dia-a-dia." (p.10). Por outras palavras, ao mobilizar processos complexos de pensamento, capacidades cognitivas de ordem superior, a par de outras capacidades e atitudes, também os desenvolve.

A consideração do raciocínio como uma capacidade transversal a desenvolver por todos os alunos também reforça a assunção de que o conhecimento matemático não ocorre por mera transmissão de informação que o aluno treina, resolvendo tarefas rotineiras, e reproduz. Antes, assenta na consideração de que o conhecimento matemático se constrói, e que nesse processo assume particular importância a intuição, a experimentação, a formulação de conjeturas, a generalização e a construção de cadeias argumentativas que a valide. O raciocínio pode ser entendido como uma operação mental recursiva, que atua sobre um conteúdo (aquilo sobre o que se raciocina) de forma a, por comparações complexas, estabelecer um encadeamento lógico entre as relações que esse conteúdo permite construir. O raciocínio é, assim, constituído por inferências (mais complexas que os juízos, que só pressupõem a comparação de dois termos e que evoluem das plausíveis para as potenciais) ou por silogismos que, através de um sistema de conexões ordenadas e orientadas pelas evidências, permite chegar à produção de uma conclusão e, consequentemente, de conhecimento novo (Cabrita et al, 2010). Habitualmente, inferência está conotada com raciocínio indutivo – permite atingir conhecimento novo pela observação e análise de casos particulares e pela procura da sua generalização, que não estava implicitamente nas premissas - e silogismo com o raciocínio dedutivo – num processo inverso, do mais universal para o mais particular, através de relações e conexões externas às proposições comparadas (id). E "a investigação tem vindo a evidenciar que se aprende mais quando a ação se baseia no estabelecimento de conexões e relações, na construção de redes ideológicas, do que no "seguir" uma sequência de implicações, ou seja, um enquadramento de proposições ligadas estritamente umas às outras de forma lógica mas linear." (id: 22). Nesse processo de construção do conhecimento, assume particular importância a abdução, associada à formulação de hipóteses explicativas do fenómeno em causa com base em insights decorrentes de conhecimentos e experiências prévias. Assim, "no âmbito da inferência abdutiva, a ação dos alunos tem como objetivo sugerir uma hipótese plausível sobre dados explorados. Já a dedução consiste em formular uma hipótese lógica e testável com base em outras premissas plausíveis, enquanto a indução consiste numa aproximação à verdade com o objetivo de sustentar as ideias ou crenças para pesquisa posterior. Assim, pode-se, de uma forma muito sintética, associar a abdução ao processo criativo, a indução à verificação e a dedução ao processo explicativo.” (id:ib). Simon (1996) refere, ainda, o raciocínio transformativo relacionado com a visualização das transformações e dos seus efeitos sobre os objetos.

A comunicação (em) matemática é indissociável (Cabrita et al, 2010) da (a) linguagem matemática, que urge ir dominando nos espaços formais ou não formais de aprendizagem, entendida como um sistema de representação específico, com simbologia, códigos e regras próprios, utilizado como principal meio de comunicação - oral, pictórico (incluindo as representações ativa, icónica e simbólica) e escrito -, por indivíduos pertencentes a uma comunidade linguística (Smole & Diniz, 2001; NCTM, 2007), e da (b) interação, que se deve fomentar em múltiplas direções (Boavida et al, 2008), entendida como fenómeno sociocultural de reação entre indivíduos que influencia, reciprocamente, o seu comportamento (Postic, 2007). No entanto, tal forma de interação só se efetiva quando o intercâmbio de informação entre os emerec’s (emissores|recetores) (Cloutier, 2001) produz sentido.

Autores vários (Almeida, 2007; Fonseca, 2009) distinguem como principais modelos de comunicação a exposição, o questionamento e a discussão que se devem ir descentrando da figura do professor. De facto, é a ele que tem cabido, essencialmente, a exposição e o questionamento, este principalmente na forma de perguntas de focalização, de confirmação ou de inquirição (Ponte e Serrazina, 2000). No entanto, é desejável que se evolua da comunicação unidirecional para a comunicação contributiva e reflexiva e mesmo para o modo de comunicação instrutiva, de cariz metacognitivo (Brendefur e Frykholm, 2000).

Contextos de aprendizagem ricos e diversificados, que proporcionem a interpretação de enunciados subjacentes a tarefas gradativamente mais abertas e complexas, a descrição e a explicitação de procedimentos e estratégias e a argumentação constituem-se, assim, espaços privilegiados e facilitadores do desenvolvimento, designadamente, do gosto pela matemática e do pensamento matemático a par de uma mais sólida construção de conhecimentos.

O Simpósio 5 – Capacidades Transversais - no âmbito do XXIII SIEM estrutura-se em doze comunicações e oito posters – sendo nove trabalhos focados na resolução de problemas; dois no raciocínio e cinco na comunicação, não obstante inter-relações entre tais capacidades que quatro trabalhos evidenciam.

Relativamente à **resolução de problemas**, destacam-se os artigos de:

- *Giovana Sander e Nelson Pirola*, no qual analisam como é que o desempenho de alunos, do 5º ano do ensino fundamental, na resolução de problemas se relaciona com as suas atitudes em relação à matemática;
- *Pedro Almeida*, no qual investiga como reagiram os alunos de uma turma do 3º ano de escolaridade colocados perante a tarefa de formularem perguntas no sentido de transformarem contextos em problemas;
- *Sandra Pinheiro e Isabel Vale*, no qual analisam a relação entre a resolução e formulação de problemas, por parte de alunos do 5º ano de escolaridade, e a criatividade;
- *Hélia Jacinto e Susana Carreira*, no qual as autoras se reportam a uma competição extraescolar *online*, o SUB14, onde procuram compreender de que forma os concorrentes põem em ação a sua fluência matemática e a sua fluência tecnológica na resolução de um dado problema de geometria.

e os posters intitulados:

- *Aprendizagem de conceitos matemáticos em cursos de engenharia*, de Manuela Alves, Cristina Rodrigues, Ana Maria Rocha e Clara Coutinho. O estudo pretendeu analisar atitudes dos estudantes de engenharia para com a aprendizagem de conceitos matemáticos;
- *Compreender problemas de processo: um contributo para a educação pré-escolar*, de Cláudia Soares e Lina Fonseca. O estudo pretendeu investigar o modo como crianças da educação pré-escolar compreendem e exploram problemas de processo;
- *Resolução de problemas de processo na educação pré-escolar*, de Helena Costa e Ana Barbosa. O estudo pretendeu compreender a forma como crianças do ensino pré-escolar resolvem problemas de processo;
- *As competições matemáticas online como contexto de investigação – vertentes do projeto problem@web*, de uma equipa coordenada por Susana Carreira. No âmbito do projeto pretende-se estudar o impacto dos campeonatos de matemática online, do ponto de vista de alunos, pais e professores, principalmente ao nível da afetividade, criatividade e fluência tecnológica na resolução de problemas;
- *Resolução de problemas e as avaliações externas de matemática no Brasil*, de Maria Madalena Dullius, Luciana Fernandes, Daniela Schossler e Virginia Furlanettorp. As autoras analisaram o tipo competências exigidas aos alunos para que possam vir a ter sucesso nas inúmeras provas externas, nacionais e internacionais, e propõem-se implementar uma série de medidas, envolvendo professores, que contribuam para o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas por parte dos respetivos alunos;

No que respeita ao **raciocínio**, destaca-se o artigo de:

- *Isabel Velez e João Pedro da Ponte*, relativo a um estudo onde os autores procuram compreender as representações usadas por alunos do 3.º ano de escolaridade, o seu papel na resolução de problemas e o modo como as representações se relacionam com os raciocínios que realizam.

e o poster que incide sobre:

- *Raciocínio matemático de alunos e futuros professores: uma primeira aproximação*, de Fernando Martins, Marta Vieira, Diogo Reis e Miguel Ribeiro que se debruçam sobre alguns aspetos associados ao raciocínio de futuros professores e alunos do 1º ciclo ao resolverem uma mesma tarefa envolvendo sequências.

Em relação à **comunicação**, destacam-se os artigos de:

- *Régis Luíz Lima de Souza e João Pedro da Ponte* com um estudo que visa investigar influências do Programa de Formação Contínua para professores dos 1º e 2º ciclos do Ensino Básico no desenvolvimento das práticas de ensino de matemática relativas à comunicação na sala de aula;
- *Luciane de Fatima Bertini e Cármen Lúcia Brancaglion Passos* cuja investigação pretendeu compreender o papel da comunicação matemática entre os estudantes num curso de formação de professores dos anos iniciais na modalidade à distância;
- *Carla Alves e Lina Fonseca* com um estudo que pretendeu estudar a comunicação escrita de alunos do 6º ano de escolaridade quando resolvem tarefas envolvendo proporcionalidade direta;
- *Joana Margarida Tinoco, Maria Helena Martinho e Anabela Cruz-Santos*, que nos apresentam um projeto de investigação, envolvendo alunos do 7º ano de escolaridade, que se situa na confluência da educação matemática e a educação especial e que persegue como principal finalidade conhecer a forma como se processa a comunicação matemática com alunos com deficiência auditiva;
- *Marta Moreno, Lina Fonseca e Teresa Gonçalves* com um estudo que acompanhou o envolvimento dos pais no TPC de matemática e analisou o seu contributo para o desenvolvimento da comunicação matemática de alunos no 1º e 2º anos de escolaridade.

Na interseção de **várias capacidades transversais**, referem-se os artigos de:

- *Sílvia Semana e Leonor Santos* com um estudo de caso que procura compreender como um aluno perspetiva e desenvolve a autoavaliação em Matemática, no contexto de uma intervenção de ensino intencional e em relação com as práticas avaliativas adotadas;
- *Fernando Luís Santos e António Domingos*, que apresentam um estudo que pretende descrever e analisar, usando o modelo SOLO, as respostas de alunos de um curso de formação inicial de professores a quatro questões e equacionar a qualidade das aprendizagens tendo por base a complexidade do pensamento matemático envolvido.

e dos posters intitulados:

- *Um outro olhar sobre os dados do PISA: caraterização dos alunos com níveis de proficiência elevados em matemática*, de Sónia Barbosa e Paulo Infante. Os autores testaram a capacidade de resolver problemas de jovens de 15 anos, recorrendo ao uso de expressões e modelos matemáticos formais algébricos ou de outro tipo, e também a capacidade dos alunos estabelecerem relações entre representações matemáticas formais e situações complexas da vida real, refletindo acerca dos raciocínios e comunicando-os.

- *Padrões: uma abordagem criativa à aprendizagem em diferentes áreas e domínios da educação pré-escolar*, de Ana Barbosa e Bibiana Lopes. O estudo focou-se numa abordagem criativa centrada nos padrões e no seu impacto ao nível da aprendizagem em diferentes áreas/domínios da educação pré-escolar.

Referências

Almeida, P. (2007). *Questões dos alunos e estilos de aprendizagem: um estudo com um público de ciências no ensino universitário*. Aveiro: Universidade de Aveiro. (tese de doutoramento).

Boavida, A.M., Boavida, A., Paiva, A., Cebola, G., Vale, I. e Pimentel, T. (2008). *A Experiência Matemática no Ensino Básico: Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1º e 2º ciclos do ensino básico*. Lisboa: ME/DGIDC.

Brendefur, J. & Frykholm, J. (2000). Promoting mathematical communication in the classroom: Two perspectives teachers' conceptions and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 3, 125-153.

Cabrita, I.; Coelho, C.; Vieira, C.; Malta, E.; Vizinho, I.; Almeida, J.; Gaspar, J.; Pinheiro, J.; Nunes, M.; Sousa, O. & Amaral, P. (2010). *Experiências de aprendizagem matemática significantes.* Aveiro: Universidade de Aveiro. Comissão Editorial. ISBN 978-972-789-321-8.

Cloutier, J. (2001). *Petit traité de communication: EMEREC à l'heure des technologies numériques.* Méolans-Revel: Atelier Perrousseaux, ISBN 2-911220-07-2.

Fonseca, L. (2009). Comunicação Matemática na sala de aula – Episódios do 1º ciclo do Ensino Básico. Em *Educação e Matemática*, 103, pp. 2-6. Lisboa: APM.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME-DGIDC.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. [Tradução Portuguesa dos Principles and Standards for School Mathematics]. Lisboa: APM.

Ponte, J. & Serrazina, L. (2000). *Didática da Matemática no 1º ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

Postic, M. (2007). *A relação pedagógica*. Lisboa: Padrões Culturais Editora.

Serrazina, L. & Oliveira, I. (s/d). Trajetórias de aprendizagem e ensinar para a compreensão. http://www.apm.pt/files/127552_Texto_3_-_Trajectorias_de_aprendizagem_e_ensinar_para_a_compreensao_Lurdes_e_Isolina_4cc165daa501c.pdf

Simon, M. A. & Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: an elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and learning*, 6(2), 91-104. http://pdfserve.informaworld.com/120027_778384746_785828248.pdf

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114-145.

Simon, M. A. (1996). Beyond inductive and deductive reasoning: the search for a sense of knowing. *Educational Studies in Mathematics*, 30, 197-210.

Smole, K. S. & Diniz, M. I. (2001). *Ler, escrever e resolver problemas – Habilidades básicas para aprender matemática*. Porto Alegre: Artmed Editora.

Vale, I. & Pimentel, T. (2204). Resolução de problemas. In Palhares, P. (coord.) (2004).
Elementos de matemática para professores do Ensino Básico. Lisboa: Lidel.

COMUNICAÇÃO MATEMÁTICA NA SALA DE AULA DOS ANOS INICIAIS: CONTRIBUTOS DE UM PROGRAMA DE FORMAÇÃO

Régis Luíz Lima de Souza[30]

Instituto de Educação da Universidade de Lisboa / Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo

regisluiz@usp.br

João Pedro da Ponte

Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

jpponte@ie.ul.pt

Resumo

Esta comunicação visa investigar possíveis influências do Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico (PFCM) no desenvolvimento das práticas de ensino de Matemática relativas à comunicação na sala de aula. O referencial teórico parte de estudos sobre formação de professores tendo por base a comunicação na sala de aula de Matemática como capacidade transversal e elemento potenciador do processo de ensino-aprendizagem. Trata-se de um estudo de caso com uma metodologia qualitativa e interpretativa, envolvendo uma professora [Clara] que leciona uma turma com alunos dos 1.º e 2.º anos do ensino básico e que participou do programa por dois anos. Os processos de recolha de dados foram entrevistas semiestruturadas, observação de aulas e análise documental do portfólio produzido durante o PFCM. O estudo permitiu inferir que este programa contribuiu significativamente para o desenvolvimento das práticas de ensino da professora associadas à comunicação matemática na sala de aula. Observa-se que durante as aulas de Matemática, esta alterna questões de focalização, confirmação e inquirição. Os episódios analisados evidenciam ainda que Clara tem procurado libertar-se da preocupação de "controlar" a aula por meio de uma organização que, supostamente, representa seu domínio sobre a turma, o que influi positivamente no modo como os alunos se comunicam nas aulas.

Palavras-chave: Comunicação matemática, Ensino da Matemática, Práticas de ensino.

Introdução

Há muito se questiona o trabalho dos professores dos anos iniciais no ensino da Matemática, recaindo sobre eles grande parte da responsabilidade pelo fracasso dos alunos nesta disciplina. Isso tem levado governos e instituições a promoverem programas de formação contínua tendo em vista apoiar o professor no seu desenvolvimento profissional no que respeita ao ensino e à aprendizagem da

[30] Bolseiro Capes. Atualmente cursa Doutorado Cotutela em Educação pelas Universidades de São Paulo e de Lisboa.

Matemática, reconhecendo assim a importância destes professores bem como a sua necessidade de uma formação matemática mais consistente. Deste modo, é amplamente reconhecida a importância da formação contínua para o desenvolvimento profissional docente, promovendo dinâmicas de atualização e aprofundamento do conhecimento necessário para o exercício da profissão.

Deste modo, o nosso objetivo é identificar possíveis influências do Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico (PFCM) no desenvolvimento das práticas de ensino de Matemática no que diz respeito à comunicação na sala de aula. Para tanto, tomamos por base a realidade da sala de aula de Clara[31], professora que leciona em uma classe que integra alunos de 1.º e 2.º anos e que participou do programa por dois anos. Diante do objetivo explicitado, a pesquisa foi orientada por duas questões: (i) Como um curso de suporte à ação pedagógica em matemática para professores dos anos iniciais, pode contribuir para o desenvolvimento de práticas que se pautem em ouvir o aluno e valorizar seu entendimento acerca do conhecimento matemático? (ii) Como o professor se apropria das reflexões, discussões e atividades desenvolvidas no âmbito de programas de formação e as coloca em prática em suas aulas?

O PFCM

O Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico em Portugal, criado em 2005, surgiu da necessidade de melhorar os níveis de sucesso dos alunos em Matemática. Segundo a coordenadora do PFCM 2010/11, Lurdes Serrazina[32], de acordo com os princípios orientadores deste programa, a comunicação matemática, suportada por diversas formas de representação, é uma vertente fundamental das práticas a desenvolver, reconhecendo assim, seus benefícios para a aprendizagem da Matemática.

De ordem mais estrutural, destaca-se que as inscrições para participar do PFCM eram voluntárias, feitas, geralmente, pelos agrupamentos ou pelas instituições de formação. As atividades de formação eram desenvolvidas nas escolas dos formandos e, em alguns casos, no agrupamento. A comissão de acompanhamento criou um perfil desejável de formador e, com base nesse perfil, cada Escola Superior de Educação e cada

[31] O nome da professora bem como da formadora e dos alunos citados nos episódios de aula são fictícios.
[32] Entrevista concedida em 2011 ao primeiro autor acerca do PFCM para fins da pesquisa de doutoramento.

Universidade, por meio de um coordenador institucional, organizou sua equipa de formação, estabelecendo um total de 18 equipas.

Os princípios orientadores referem ainda que os conteúdos abordados não eram pré-estabelecidos e visavam o desenvolvimento do conhecimento matemático, didático e curricular do professor, tendo como referência o Programa oficial dos 1.º e 2.º ciclos, o Currículo Nacional do Ensino Básico e, mais tarde, a proposta de Reajustamento dos Programas de Matemática do Ensino Básico. Durante o programa haviam sessões conjuntas do grupo de formação e sessões de acompanhamento em sala de aula. A avaliação era desenvolvida por meio da elaboração de um portfólio que refletia o desenvolvimento profissional do docente.

Comunicação matemática na sala de aula

Uma das vertentes atuais que os estudos em investigação das práticas letivas em Matemática têm abordado está relacionado com "prestar atenção às ideias matemáticas do aluno e construir a partir daí" e "atender aos detalhes do pensamento do aluno" (Franke, Kazemi, & Battey, 2007, p. 230), também associada a valorização do papel assumido pelo professor enquanto sujeito que respeita e valoriza o modo de pensar do outro [educando].

A comunicação na sala de aula de Matemática, em grande parte, sempre procurou privilegiar técnicas de aprendizagem, apresentando como objetivo principal a apropriação de algoritmos que auxiliassem os alunos na resolução de problemas propostos. No entanto, essa conceção vem mudando, uma boa comunicação matemática entre professores e alunos tem-se colocado como condição necessária para uma aprendizagem significativa por parte do aluno (NCTM, 2007).

Ponte et al. (2007) destacam que "a comunicação que ocorre na sala de aula de matemática marca de forma decisiva a natureza do processo de ensino-aprendizagem desta disciplina" (p. 40) ajudando a construir significados para os alunos organizar e expressar suas ideias coerentemente. Quando isso ocorre, os alunos são desafiados a pensar e raciocinar sobre a Matemática, criando estratégias próprias para comunicar os resultados obtidos, criando-se assim oportunidades de desenvolver seus próprios entendimentos. Estudos atuais realizados nessa perspetiva (Franke et al., 2007; Ponte, Quaresma, & Branco, 2012), sugerem que os professores criem estratégias que favoreçam o discurso por parte dos alunos. Vale ressaltar que, embora nas aulas em que se ensina Matemática seja mais usual a utilização da comunicação oral, o NCTM (2007) destaca também a importância da comunicação escrita como forma de "ajudar os alunos a consolidar o seu pensamento, uma vez que os obriga a refletir sobre o seu trabalho e a clarificar as suas ideias acerca das noções desenvolvidas na aula" (p. 67).

Uma estratégia a destacar na comunicação na sala de aula de Matemática é marcada pelo padrão triádico iniciação-resposta-avaliação, sequência I-R-A (Mehan, 1979) de conversação. Neste processo o professor inicia a resolução da tarefa convidando um aluno a compartilhar sua resposta. O aluno responde expondo, explicando e argumentando suas ideias. Por fim, o professor comenta a resposta do aluno antes de prosseguir e solicitar que outro aluno também apresente a sua resolução.

Para além desse padrão triádico, Mortimer e Scott (2002) discutem as interações não-triádicas em cadeia, nas quais o professor apresenta um *feedback* (F) para que o aluno descreva mais claramente o que aconteceu ou elabore melhor sua resposta [I-R-F-R-F....]. Os autores destacam que a estrutura analítica relativa à interação em sala de aula entre professor e alunos compreende o foco de ensino, as abordagens comunicativas e as ações, logo, não devem limitar-se a um padrão triádico estático. Salientam ainda duas dimensões nesse processo de comunicação: a interação entre professor e estudantes e o modo como o professor leva (ou não) em conta as ideias dos estudantes na construção de significados em sala de aula.

Esse novo olhar acerca da comunicação que se desenvolve entre alunos e professores evidencia, as relações de poder e a produção de significados que se estabelecem nas aulas de Matemática, promovendo o desenvolvimento da autonomia no aluno e o estabelecimento de tipos de cultura de sala de sala que estimulam a reconstrução da aprendizagem (Gravemeijer, 2004). Sendo assim, ganha destaque a forma pela qual o professor regula e promove as ações que favorecem a comunicação por parte dos alunos.

Esse diálogo promovido na sala de aula muitas vezes tem o *status* de verdade absoluta [quando proferido pelo professor], incorporando estratégias que sugerem uma forma única de se fazer Matemática nos ambientes escolares passando assim, a um discurso unívoco, onde uma voz prevalece sobre todas as demais (Ponte et al., 2012). Em geral, isso ocorre quando o professor assume um papel dominante no processo comunicativo.

Em contrapartida tem-se o discurso dialógico, caracterizado pela interação e participação de diversos interlocutores interagindo num nível de relativa igualdade nessa cadeia de significação. Isso, de fato, caracteriza-se como uma descentração da autoridade docente e favorece o estabelecimento de uma dinâmica cultural comunicativa na sala de aula.

Vale ressaltar que essa descentralização da autoridade docente não se faz somente com uma postura questionadora por parte do professor, ou seja, os questionamentos, por si só, não são suficientes, depende muito dos objetivos estabelecidos pelo docente com suas perguntas. Segundo Love e Mason (1995), na aula de Matemática, podemos considerar três tipos fundamentais de perguntas: de focalização, em que se salienta um aspeto que conduz à obtenção da resposta pretendida; de confirmação, que se servem para verificar os conhecimentos dos alunos; e de inquirição, que visam o esclarecimento do professor.

De acordo com o NCTM (2007), quando os alunos têm oportunidades e são encorajados a pensar, discutir, elaborar, ler, ouvir e perguntar sobre conceitos matemáticos, colhem benefícios duplos: se comunicam para aprender matemática e aprendem a comunicar-se matematicamente. Sendo assim, com o conhecimento construído por meio das interações sociais, pautadas na mediação, aspeto essencial para a aprendizagem (Vygotsky, 1991), a linguagem assume um lugar de destaque nas aulas de Matemática,

Diante do exposto, torna-se necessário que os professores, no processo de desenvolvimento profissional, se apropriem de novas compreensões de como ensinar matemática valorizando, sobretudo, o discurso do aluno em sala de aula.

Metodologia de investigação

Esta comunicação, desenvolvida a partir de uma metodologia de natureza interpretativa do tipo qualitativa, é pautada nos pressupostos de um estudo de caso que, segundo Yin (1994), é a estratégia mais adequada quando se pretende conhecer o "como?" e o "porquê?" O trabalho decorre em ambiente natural e foi realizado na perspetiva de investigar possíveis influências do PFCM no desenvolvimento das práticas de ensino de Matemática no que diz respeito a comunicação na sala de aula, procurando refletir acerca das ações desencadeadas a partir da realidade das aulas ministradas no ano letivo de 2011/12 pela professora Clara, numa sala composta por 14 alunos dos 1.º e 2.º anos. Utilizamos como recurso metodológico, técnicas qualitativas de análise, nomeadamente:

entrevistas semiestruturadas com Clara e sua formadora em momentos distintos (com Clara foi realizada uma entrevista inicial (EI) e 3 entrevistas pós-aula (EPA), que constituíam momentos de reflexão imediatamente após as aulas); observação de 3 aulas com a utilização de recursos audiovisuais; e análise documental dos portfólios produzidos durante o PFCM.

Após a atuação no campo de pesquisa, transcrição e textualização dos dados coletados nas entrevistas e no acompanhamento das aulas, o caminho percorrido por meio da reflexão crítica em torno dos dados obtidos permitiu estabelecer uma discussão profícua acerca do objetivo estabelecido. Procuramos deixar emergir vestígios que direcionassem a análise dos resultados sobre duas categorias principais: o programa de formação e as práticas letivas associadas a comunicação matemática na sala de aula. Esse momento de análise ideográfica "busca tornar visível a ideologia presente na descrição ingênua dos sujeitos" (Garnica, 1997, p. 116).

O caso de Clara

Clara frequentou o PFCM por dois anos consecutivos. Há mais de quinze anos exerce a função docente e tem, aproximadamente, cinquenta anos de idade. Formada no Magistério, obteve posteriormente o grau de Licenciatura em Educação Básica - 1.º Ciclo por meio do Curso de Complemento de Formação Científica e Pedagógica.

Direcionando nosso olhar para o objetivo inicialmente explicitado, destaca-se a sua visão acerca de uma mudança significativa em sua prática como decorrência a sua participação no PFCM: "O mais difícil pra mim foi aprender a questionar os alunos. A não responder aquilo que eu lhes perguntava. Às vezes eu fazia a pergunta e já ia adiantando a resposta" (EI). Esse diálogo que se estabelece entre a professora e os alunos pôde ser observado em todas as aulas acompanhadas e evidencia-se nos episódios de aula apresentados mais adiante.

O portfólio foi outro material rico para análise desta pesquisa. Enquanto componente avaliativo do PFCM mostrou-se um importante instrumento de reflexão da prática docente. Nele, Clara teve a oportunidade de expor o quanto sua participação no programa alterou sua visão em relação ao ensino da Matemática, especialmente no que respeita ao modo como direciona as ações dialógicas na sala de aula, corroborando com suas ações por nós observadas:

> O professor deixou de ser aquele que deposita ensinamentos, agora orienta os alunos na descoberta dos saberes. O que se espera das aprendizagens dos alunos é também muito diferente. Eles são sujeitos ativos: leem, interpretam, comunicam suas ideias, discutem os resultados, reformulam e chegam as conclusões. (Portfólio 2009/10, p. 3)

Clara destaca no portfólio a importância do professor promover a discussão, lançar desafios, questionamentos, e sobretudo deixar os alunos pensarem e explicitarem aquilo que pensam: "Hoje, durante uma tarefa permito que os alunos façam suas descobertas, tirem suas próprias conclusões. Na minha opinião é deste modo que as aprendizagens se tornam mais significativas" (Portfólio 2009/10, p. 3). Nesse contexto o portfólio permitiu que a professora compreendesse melhor suas ações, num autêntico processo de reflexão.

> Sinto que hoje eu dou uma tarefa aos alunos e tento primeiro que cada um faça a sua maneira, respeitando o percurso deles e, depois, quando vamos partilhar, cada um vai explicar como é que fez, como é que chegou lá, isso eu nunca fazia antes do programa de formação. (EI)

A elaboração do portfólio desenvolve a capacidade reflexiva e, nesse caso, assumiu um papel importante no desenvolvimento profissional de Clara, proporcionando-lhe uma visão mais ampla e crítica acerca da sua prática.

Comunicação matemática na sala de aula: Uma possibilidade de análise

Vamos concentrar as observações acerca do modo como Clara estabelece a comunicação matemática em suas aulas a partir do desenvolvimento de uma tarefa proposta aos alunos do 1.º ano do ensino básico. De acordo com seu planeamento o conteúdo proposto era "ler e escrever números até 20".

Clara inicia a tarefa organizando os alunos em pequenos grupos, sendo que na entrevista inicial declarou que esta não constituía uma de suas práticas pois, entendia que "os alunos em grupo, davam impressão de desorganização, toda gente falando, parecia bagunça". Segundo diz, essa prática passou a ser desenvolvida com sua participação no programa de formação:

> A formadora sempre nos falava sobre a importância dos alunos trabalharem em grupo. Bem, eu nunca tinha pensado nisso, mas comecei a fazer nas aulas e os miúdos começaram a participar mais, eles discutem uns com os outros e dizem, porque é que fez assim e não do outro jeito. Acho que foi um ganho e eu continuo fazendo. (EI)

De início, Clara solicita aos alunos que representem uma dezena de tampinhas, primeiro sobre a mesa e depois numa folha. "Já vimos o que é dezena na aula passada" [trecho da aula]. Após discussão e representação dos grupos, Clara pede a Ana para ir ao quadro e explicar aos colegas como seu grupo realizou a tarefa.

Figura 1. Resolução representada por Ana.

Após a aluna representar a dezena no quadro com as tampinhas, Clara as contorna, diz que formou uma linha de fronteira e pergunta aos alunos:

"O que temos aqui?" [pergunta de confirmação]
A maioria responde em coro "Uma dezena", mas a fala de **Jair** sobressai: "Dez dezenas".
Clara: Dez dezenas? Explique-me lá então Jair, porque dez dezenas? [pergunta de inquirição]
Jair: Porque tem dez tampinhas.
Clara: E cada tampinha é uma dezena? Eu não pedi para representar uma dezena na folha? Então, fizeste só uma tampinha? [pergunta de focalização]

A professora insiste em mostrar evidências até que Jair percebe que o grupo corresponde a uma dezena. Durante a discussão, Clara fomenta, não só a exploração das produções corretas, mas também utiliza o erro para alterar e consolidar aspetos conceituais e processuais e faz isso de forma consciente: "Os miúdos é que precisam saber e dizer onde erraram. Isso é muito importante." (EPA)

Clara continua a questionar e desafiar os alunos, o que segundo ela, "faz com que a sala não fique dispersa" (EPA). É possível observar aqui a preocupação da professora em manter o foco dos alunos na atividade mas também uma preocupação relacionada com a organização da sala, como relatado na entrevista inicial.

Figura 2. Situação proposta pela professora.

Clara: E se eu colocar uma tampinha aqui fora? [pergunta de focalização]
Caio: Tem uma dezena e mais um.
Clara: E como é que eu represento isso? Explique lá Caio. [pergunta de inquirição]

É possível inferir que Clara procura valorizar a comunicação matemática de seus alunos de vários modos: por meio de representação icónica, com explicações orais das resoluções dos alunos para a turma, e por meio de produções escritas, como sugere o NCTM (2007). A utilização dessas formas mistas de comunicação matemática na sala de aula mostra-se importante, tendo em atenção que se trata de alunos do 1.º ano, numa faixa etária onde a organização visual, com uso de imagens sinóticas permite uma assimilação mais significativa. Nota-se também que a professora não perde de vista a objetividade de uma representação mais elaborada, ou seja, uma representação simbólica, de ordem mais abstrata.

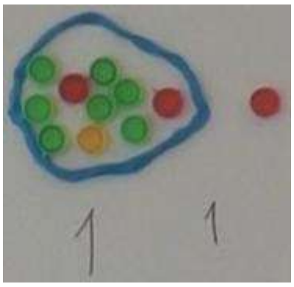


Figura 3. Representação de Caio para situação proposta pela professora.

Caio: Aqui tá o 1 do grupo, e aqui tá o 1 que tem lá fora.
Clara: Esses dois "um" valem a mesma coisa? [pergunta de confirmação]
Caio: Esse 1 é tudo isso. [diz Caio apontando para o grupo de dez unidades]

Observa-se aqui, conforme sugerem Mortimer e Scott (2002), interações não-triádicas em cadeia, onde o professor apresenta um *feedback* (F) para que o aluno descreva mais claramente o que aconteceu ou elabore melhor sua resposta [I-R-F-R-F...]. De fato, o aluno procura argumentar explicitando seu raciocínio matemático.

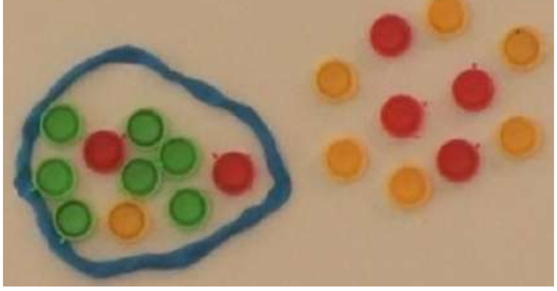


Figura 4. Última situação proposta por Clara.

Clara: Estão lá dez tampinhas, e agora eu quero saber o que faço a seguir? Quando eu tenho dez unidades o que é que eu formo? [pergunta de focalização e de confirmação]
Alunos: Uma dezena.
Raul: Forma outro grupo.
Júlia: Mas estes estão todos lá fora! Tem que fazer outra linha.
Clara: Ora! Então se já temos dez, fazemos a linha de fronteira.

Essa cultura da sala de aula de participação, criado pela professora, proporciona um ambiente onde os alunos têm liberdade para contribuir, discordar e argumentar. A própria professora marca a diferença: “Antes eu não deixava os alunos falarem” (EPA).

Figura 5. Representação das duas dezenas.

Clara: E como é que eu represento isso? Anda cá Amanda. Explique lá? [pergunta de inquirição]

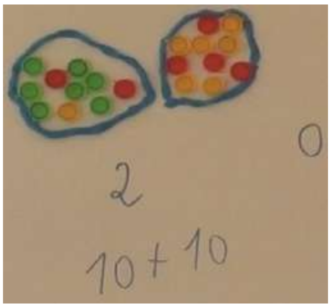


Figura 6. Resolução descrita por Amanda.

Clara desenvolve esse processo de interação constante com os alunos durante toda a aula, alternando questões de focalização, confirmação e inquirição, fazendo com que as diversas vozes prevaleçam nesse discurso. Trata-se de um comportamento desejável quando o foco se pauta na valorização do entendimento e comunicação matemática por parte dos alunos (Ponte et al., 2012).

Conclusão

Este estudo permitiu inferir que o PFCM contribuiu significativamente para o desenvolvimento das práticas de ensino de Clara associadas à comunicação matemática na sala de aula. Os resultados evidenciam que a comunicação promovida pela professora, suportada por diversas formas de representação, um dos objetivos do programa, passou a ser valorizada e colocada em prática em seu cotidiano a partir das intervenções decorrentes da sua participação no PFCM, o qual permitiu, mediante suas dinâmicas de formação, que Clara percebesse a importância de ouvir o aluno e valorizar seu entendimento acerca do conhecimento matemático. Os portfólios dão indícios do modo como as reflexões, discussões e atividades realizadas no âmbito do PFCM proporcionaram mudanças significativas em suas ações dialógicas na sala de aula, promovendo o desenvolvimento da sua capacidade reflexiva e proporcionando-lhe uma visão mais ampla e crítica acerca da sua prática, ratificando assim, as ideias de Franke et al. (2007) quando afirmam que os professores têm um papel significativo na estruturação como os alunos interagem e comunicam matematicamente na sala de aula.

O estudo mostra que Clara alterna os três tipos de questões identificados por Love e Mason (1995) numa aula de Matemática: focalização, confirmação e inquirição. Ressalta-se que a professora inicia valorizando a comunicação matemática de forma oral e icónica, utilizando material concreto no desenvolvimento da tarefa o que facilita a representação e expressão de ideias matemáticas, principalmente porque nessa faixa etária os alunos são extremamente visuais. No entanto, percebe-se também a preocupação de Clara, progressivamente, valorizar a comunicação escrita e simbólica.

Os episódios apresentados evidenciam ainda que Clara tem procurado se libertar da preocupação de "controlar" a aula por meio de uma organização que, supostamente, representa ter o domínio da turma, o que influi diretamente no modo como os alunos se comunicam nas aulas.

Referências

Franke, M. L., Kazemi, E., & Battey, D. S. (2007). Mathematics teaching and classroom practices. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *The second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 225-256). Charlotte, NC: Information Age.

Garnica, A. V. M. (1997). Algumas notas sobre pesquisa qualitativa e fenomenologia. *Interface*: *Comunicação, Saúde, Educação*, *1*(1), 109-122.

Gravemeijer, K. (2004). *Creating opportunities for students to reinvent mathematics.* Paper presented in ICME 10, Kopenhagen, Denmark, 4-11.

Love, E., & Mason, J. (1995). Telling and asking. *Subject learning in primary curriculum*. London: Routledge.

Mehan, H. (1979). *Learning lessons: The social organization of the classroom*. Cambridge: Harvard University Press.

Mortimer, E. F., & Scott, P. H. (2002). Atividade discursiva nas salas de aula de ciências: uma ferramenta sociocultural para analisar e planejar o ensino. *Investigações em Ensino de Ciências*. Porto Alegre, *3*, 7-18.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Guerreiro, A., Cunha, H., Duarte, J., Martinho, H., Martins, C., Menezes, L., Menino, H., Pinto, H., Santos, L., Varandas, J. M., Veia, L., & Viseu, F. (2007). A comunicação nas práticas de jovens professores de Matemática. *Revista Portuguesa de Educação, 20*(2), 39-74.

Ponte, J. P., Quaresma, M., & Branco, N. (2012). Práticas profissionais dos professores de matemática. *Avances en Investigación en Educación Matemática, 1*, 65-86.

Serrazina, M. L., Canavarro, A. P., Guerreiro, A., Rocha, I., & Portela, J. (2010). *Programa de formação contínua em matemática para professores dos 1.º e 2.º ciclos do ensino básico*. Recuperado em 12 abril, 2012, de http://www.dgidc.min-edu.pt/outrosprojetos/index.php?s=directorio&pid=89

Vigotski, L. S. (1991). *A formação social da mente* (4ª ed). São Paulo: Martins Fontes.

Yin, R. (1994). *Case study research: Design and methods* (2nd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.

COMUNICACÃO MATEMÁTICA ENTRE ESTUDANTES NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES A DISTÂNCIA

Luciane de Fatima Bertini
Universidade Federal de São Carlos – UFSCar – Brasil
lfbertini@gmail.com

Cármen Lúcia Brancaglion Passos
Universidade Federal de São Carlos – UFSCar – Brasil
carmen@ufscar.br

Resumo

A pesquisa desenvolvida pretendeu compreender o papel da comunicação matemática entre os estudantes em um curso de formação de professores dos anos iniciais na modalidade a distância. O cenário para a coleta de dados foi o curso de Licenciatura em Pedagogia de uma universidade pública brasileira, que valoriza em seu projeto pedagógico os processos interativos e a dialogicidade. A análise da comunicação envolveu uma característica específica desse tipo de ensino: a de que as interações acontecem predominantemente através da escrita. Observou-se a importância do tipo de atividade, de como ela é apresentada e da aceitação, pelos estudantes, do que foi proposto para que a comunicação pudesse ser considerada colaboradora nas aprendizagens. Apesar da distância física e, consequentemente, do não uso de alguns elementos da comunicação, como voz e gestos, constatou-se que a comunicação a distância pode contribuir para a construção coletiva de conhecimentos e que a linguagem escrita e pictográfica pode auxiliar a organização dos pensamentos, a aprendizagem de conteúdos matemáticos e a formação de professores, ao desafiá-los, ainda estudantes, a expressar na forma escrita seu entendimento e suas estratégias, de modo a garantir a compreensão do leitor.

Palavras-chave: Comunicação matemática, educação a distância, formação de professores.

A comunicação nas aulas de matemática

Abordar o tema comunicação nas aulas de matemática exige uma consideração inicial da matemática como uma linguagem.

> Sendo a matemática uma área do saber de enorme riqueza, é natural que seja pródiga em inúmeras facetas; uma delas é, precisamente, ser possuidora de uma linguagem própria [...]. Esta linguagem tem registros orais e escritos e, como qualquer linguagem, apresenta diversos níveis de elaboração, consoante a competência dos interlocutores [...] (Menezes, 2000, s.p.).

Segundo o autor, a matemática, além de possuir uma linguagem própria, também apresenta diferenças de acordo com o interlocutor – matemáticos profissionais ou estudantes em sala de aula.

Curi (2009), explorando, mais especificamente, a relação da linguagem matemática com o ensino desta disciplina, afirma que

> [...] a linguagem matemática, com sua codificação própria, constitui um modo de aprender, de ler e compreender o mundo. Ela não se restringe a operações com símbolos: relaciona-se também com o desenvolvimento de capacidades de interpretação, análise, síntese, significação, exploração, argumentação, entre outras (Curi, 2009, p. 139).

Tais considerações levam a refletir que, embora a matemática possua linguagem própria, essa linguagem tem relação com outras, principalmente com a língua falada e escrita.

Outro aspecto a considerar é a relação entre a comunicação estabelecida nas aulas e o processo de construção de conhecimento. Autores como Curi (2009); Nacarato, Mengali e Passos (2009); e Cândido (2001) defendem a existência dessa relação, identificando o papel fundamental da comunicação na qualidade do processo educativo.

As considerações desses autores dizem respeito à comunicação como possível colaboradora para as aprendizagens matemáticas em ambientes de sala de aula em que haja interação presencial entre os participantes. Mas a realidade atual possibilita outro tipo de interação: a educação a distância (EaD). Como acontece a comunicação nesta modalidade de ensino? Qual sua relação com a aprendizagem matemática de futuros professores? Estas são algumas questões que motivaram a presente pesquisa, que envolve a compreensão do papel da comunicação no estudo de conteúdos matemáticos em um curso de formação de professores dos anos iniciais na modalidade a distância.

A formação inicial de professores é considerada, neste estudo, não apenas um lugar no qual se adquirem técnicas e conhecimentos, mas parte fundamental do processo de constituição profissional (Nóvoa, 1992).

Dessa forma, como apontam Cochran-Smith e Lytle (1999), durante a fomação inicial (e continuada) é preciso considerar que os professores-estudantes possuem conhecimentos e experiências anteriores, sociais e específicas, que não podem ser desconsideradas. Na formação matemática do professor dos anos iniciais, segundo Silver (2006), é importante que seu conhecimento matemático esteja articulado com seu papel de professor.

Comunicação na educação a distância

As interações, na EaD via internet, acontecem nos Ambientes Virtuais de Aprendizagem (AVAs). No entanto, a orientação metodógica ali adotada não depende do AVA, mas, sim, da organização do curso (Paiva, 2010). Será possível utilizar esse ambiente e as ferramentas disponibilizadas tanto para atividades apenas individuais, que privilegiam a transmissão de informações, quanto para discussões, reflexões, interações e produções coletivas.

Valente (2011) destaca uma característica específica da EaD nesse tipo de abordagem: a escrita é utilizada, predominantemente, para mediar a interação. Tal particularidade não diz respeito apenas à organização, mas influencia a maneira de ensinar e de aprender. A escrita exige uma reflexão e uma organização de ideias diferentes de uma situação oral e também possibilita registrar todas as produções, discussões e reflexões. No entanto, não há como negar, neste processo, o desafio da distância física e das interações assíncronas, que excluem da comunicação elementos como tonalidade de voz, expressões faciais, gestos, olhares, silêncios.

Algumas ferramentas disponíveis nos AVAs permitem a redução das dificuldades postas pela distância física. É o caso do fórum de discussão, que possibilita a organização de grupos no AVA e a interação, pela escrita, entre os participantes.

No entanto, embora a proposta do fórum seja o debate ou a discussão sobre determinado assunto, a comunicação só acontecerá se os estudantes se dispuserem a participar e a discutir com os colegas. Mais uma vez surge o desafio de estabelecer uma relação de colaboração, interação e disponibilidade para o diálogo entre pessoas que, em geral, não se conhecem pessoalmente. As formas de interação precisam ser reconcebidas neste novo cenário.

Cenário da pesquisa

O cenário para a coleta de dados foi o curso de Licenciatura em Pedagogia, na modalidade a distância, da Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), Brasil, no que diz respeito à formação matemática dos futuros professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental e da Educação Infantil.

A opção pelo objeto a ser estudado e pela forma de análise dos dados permite aproximar tal pesquisa de um Estudo de Caso (André, 2005), pois envolve a busca de conhecimento, a partir de um caso específico: as especificidades da organização dos cursos a distância dessa instituição em relação à valorização da comunicação e ao trabalho de tutoria. O Projeto Pedagógico do curso indica que o diálogo entre os participantes, o ponto forte da ação educativa, precisa ser garantido. Para isso, a UFScar utiliza um tutor para o acompanhamento de um grupo de, no máximo, 25 estudantes em cada disciplina, enquanto, nas demais universidades do País, o tutor acompanha um grupo de estudantes em todas as disciplinas que ocorrem concomitantemente ou atende um grupo maior de estudantes numa mesma disciplina. Além disso, no curso de Pedagogia a distância da UFSCar, nas disciplinas de conteúdos matemáticos – "Linguagens: Matemática I" (LMI) e "Linguagens: Matemática II" (LMII) –, a organização das duplas de tutores se diferencia das demais disciplinas do curso.

No AVA dessas disciplinas organizaram-se os 125 alunos matriculados em 5 grupos de 25, com um tutor virtual para cada grupo. Nesta comunicação focalizam-se apenas as interações em um dos grupos de um dos fóruns de discussão sobre o conteúdo frações, proposto na disciplina LMII.

O grupo escolhido contou com a participação de 16 estudantes, pois os demais matriculados não realizaram as atividades previstas ou desistiram da disciplina. Os registros escritos das participações no fórum de discussão, disponíveis no AVA, foram acessados pela pesquisadora com a autorização expressa da coordenação do curso e dos estudantes participantes. Assim, constituiram-se em sujeitos da pesquisa o tutor responsável pelo grupo e esses 16 estudantes.

Para a análise foram considerados os dados do AVA. A análise de conteúdo (Bardin, 2011) partiu do que foi observado/revelado nos dados e buscou identificar aspectos da comunicação matemática presentes na interação realizada, procurando conhecer o que está por trás do significado das palavras "escritas", relativamente ao processo de aprender ou ressignificar o que o estudante sabia a respeito de frações e à forma como poderá ensinar esse conteúdo nos primeiros anos de escolarização.

A atividade como elemento importante no estabelecimento da comunicação

Para compreender as interações no estudo de frações, inicialmente foi realizada a análise da atividade a respeito do conteúdo frações proposta no Material Didático da disciplina (Quadro 1).

Quadro 1: Atividade proposta pelo material da disciplina LMII.

AIII-2 Leitura, resolução de problemas e reflexão

Nesta atividade, você deverá completar a leitura da Unidade 3, anotando suas dúvidas e comentários.

Em seguida, deverá trabalhar na resolução dos problemas propostos. Cecília Monteiro e Cristolinda Costa apresentam, na revista portuguesa *Educação e Matemática*, n° 40, de 1996, página 61, quatro situações-problema propostas por Simon Mochon, envolvendo quantidades representadas por frações. Resolva-as, justificando sua resposta.

Problema n° 1 - Andei 1/2 km hoje e ontem tinha andado 1/4 km. Quanto andei ao todo nos dois dias?

Problema n° 2 - Se um jogador de basquetebol encesta uma bola em duas tentativas em um jogo e noutro jogo ele encesta uma bola em quatro tentativas, qual é a fração que representa o desempenho do jogador nos dois jogos?

Problema n° 3 - 1/2 do cereal A é açúcar. 1/4 do cereal B é açúcar. Se misturarmos porções iguais de ambos os cereais, que fração desta mistura é de açúcar?

Problema n° 4 - Em uma sala de aula 1/2 dos estudantes são rapazes e noutra sala 1/4 dos estudantes são rapazes. Se pusermos os dois grupos juntos, que fração de rapazes será obtida?

[...] Após a resolução dos problemas, comente com seus colegas, no fórum de discussão, as dificuldades e facilidades encontradas no processo de resolução dos problemas. Procure apresentar suas reflexões de forma contextualizada com as ideias apresentadas no Guia de Estudos e contribua para o avanço do debate.

Esta proposta de atividade pode colaborar para a comunicação entre os estudantes e para a construção de conhecimentos a partir dessa comunicação.

De acordo com Menezes (2000, s.p.):

> A influência da natureza das tarefas na qualidade e quantidade do discurso é de crucial importância. As tarefas rotineiras, vulgarmente designadas por exercícios, não são, normalmente, geradoras de grande discussão entre os alunos [...]. As tarefas demasiado difíceis para os alunos – sem nenhum tipo de familiaridade – são, no outro oposto, inibidoras do desencadear da comunicação [...]. Por isso, é preciso encontrar tarefas que sejam equilibradas para cada tipo de alunos, ou seja, que sejam abordáveis por estes, mas, ao mesmo tempo, desafiantes.

O autor faz a relação da natureza da tarefa com a qualidade e a quantidade do discurso. No caso da EaD, essa relação é estabelecida com a qualidade e a quantidade das interações escritas.

O desafio foi garantido pela problematização da ideia de que problemas são solucionados pela aplicação de fórmulas ou algoritmos. Nesses casos, conhecer o procedimento de cálculo para a soma de duas frações não será suficiente.

Além disso, a proposta da atividade procurou estimular a comunicação, pois não se limitou a solicitar que os problemas fossem resolvidos e buscou debater as facilidades e as dificuldades nos seis dias do fórum de discussão, com setenta e cinco postagens.

A comunicação num fórum de discussões de questões matemáticas

A análise das interações ocorridas no fórum mostrou que os estudantes aceitaram o convite para a comunicação. Skovsmose (2008) considera essa aceitação fundamental num cenário de investigação nas aulas de matemática, o que é válido e importante também nas situações de comunicação no ambiente virtual de aprendizagem: ser ou não um cenário para comunicação dependerá da natureza da tarefa, da forma como o convite é feito pelo professor e também da atitude do estudante.

A aceitação do convite por parte de alguns estudantes transparece em suas participações em todo o fórum e também nos questionamentos entre eles:

> Bom, não sei se está correto, mas é assim que fiz... e vocês? (Felipe)
>
> [...] o problema 3 está obscuro para mim. Alguém, por favor, poderia explicar novamente? (Valéria).

Estas postagens mostram a disponibilidade para o diálogo com os colegas da turma: dúvidas e reflexões são partilhadas. O aceite ao convite também se revela pelas postagens: os estudantes efetivamente leram as mensagens colegas e refletiram sobre elas, como expõe Júlio:

> Vejo que posso ter errado na quarta questão, pois minha reflexão momentânea, de pronto me guiou a pictogramas, pensei na sala como tendo 100 alunos, 100%, mas após o Marcelo ter relatado suas experiências penso que posso ter me enganado [...] (Júlio).

No entanto, nem todos aceitaram o convite. Umas das estudantes, por exemplo, que só participou do fórum no último dia, explicou apenas que teve dificuldades com o segundo, terceiro e quarto problemas. Apesar de ter realizado postagens nesse último dia, ela não utilizou o fórum como espaço de diálogo e aprendizagem; não explicitou suas dúvidas; não comentou nem questionou as postagens já realizadas pelos colegas – enfim, não interagiu com a turma.

Mais do que não participar nas interações, a não aceitação do convite implica na eliminação da oportunidade de aprendizagem por meio delas. A estudante Amanda, por exemplo, apresentou a seguinte postagem:

> No exercício 1, acho que todos chegaram à mesma conclusão a soma de 1/2km do primeiro dia e 1/4km do segundo dia. No segundo exercício foi pedido a fração que representa o desempenho do jogador nos dois jogos, quer dizer, a soma do desempenho dele nesses dois jogos, então é a mesma conta. No exercício 3, foi dado a quantidade de açúcar de cada cereal, se foi misturado a mesma quantidade do cereal A e B, a proporção de açúcar de cada um se manteve, então é pedido a fração que corresponde a sua mistura, quer dizer a sua soma. E por fim, o último exercício que pede a fração que corresponde a união dos dois grupos de rapazes da sala de aula, novamente a soma. Então: ½ + ¼ = ¾. O que vocês acham? (Amanda).

Tal resolução dá indícios de que ela não considerou as discussões feitas no grupo sobre as diferenças entre os problemas. Por exemplo, a inadequação da resposta ¾ para o terceiro problema já havia sido comentada pelos colegas, e Amanda não fez referência a ela. É possível inferir que o processo de comunicação desencadeado no fórum pela turma não colaborou com a aprendizagem dessa estudante.

Para aqueles que aceitaram o convite à abertura ao diálogo, houve reflexo na aprendizagem do conteúdo matemático. Os estudantes puderam expressar, pela escrita, seu conhecimento e sua forma de pensar:

> Em relação à questão 1 não cheguei a fazer o mmc. Peguei a medida de um quilômetro e vi que ½ corresponde à 500m e ¼ corresponde a 250 metros, resultando o total de 750 ou seja ¾ de quilômetro. Confesso que às vezes raciocino, mas sinto dificuldade em expressar o modo como cheguei ao resultado. Espero que esteja claro (Jaqueline).

A participação da estudante mostra que o fato de ela precisar explicar a forma como pensou, considerando a compreensão do leitor, levou-a à preocupação de como organizar e registrar suas ideias. Observa-se a relação – identificada por Curi (2009) – entre a linguagem matemática e o desenvolvimento da capacidade de argumentação que, neste caso, foi oportunizada por um aspecto específico da EaD, a comunicação através da escrita (Valente, 2011).

De forma complementar ao recurso da escrita, alguns estudantes utilizaram a representação pictórica.

> O primeiro problema eu o resolvi como sendo uma adição de frações. Entendi que a unidade percorrida é a mesma, assim, somei as duas partes caminhadas de um mesmo quilômetro (Renato).

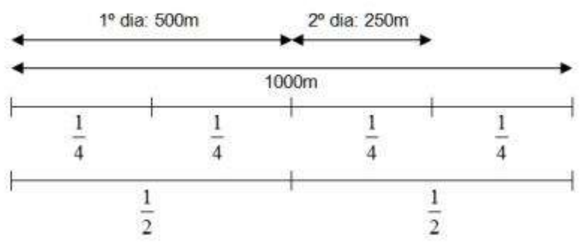


Figura 1: Representação da solução do primeiro problema apresentado pelo estudante Renato.

A representação pictográfica mostrou-se, ainda, eficiente na comunicação matemática para a organização do pensamento e para compreensão do problema, revelando a inter-relação, identificada por Cândido (2001), entre a comunicação e a compreensão, referida no raciocínio descrito por Marcelo:

> No problema 3, num primeiro momento, pensei em ¾ como resposta, porém quando representei na forma pictórica, percebi que precisava manter 8 como total (partes iguais do cereal, sendo 4 de cada tipo) e tomar 3 partes (aquelas que representam o açúcar presente) (Marcelo).

De acordo com essa postagem, a representação pictográfica como forma de comunicar seus pensamentos fez com que Marcelo percebesse um equívoco inicial e pudesse compreender melhor o que estava sendo solicitado.

Os estudantes utilizaram a linguagem escrita e pictográfica para o registro das suas ideias e também para colaborar com a aprendizagem do grupo, propondo explicações para os casos de dúvida. Isso pode ser notado nas participações dos estudantes Daniel e Valter, que, embora já tivessem resolvido com sucesso os quatro problemas, continuaram participando do fórum. Quando uma das estudantes afirmou que considerava que a solução de todos os problemas seria 3/8, Daniel interveio:

> Acredito que o resultado do problema 1 passe pela explicação que dei anteriormente e o uso do MMC é uma opção, ou seja, se andei 1/2 km em um dia e 1/4 km em um outro dia, basta igualarmos os denominadores (2/4 + 1/4) e obtermos o resultado de 3/4 de km pois se trata de princípio aditivo, um dia se completa com o outro. Diferentemente do problema 3 onde, na mistura não existe essa relação de complemento tão dependente. No problema 2, existe uma relação de soma entre as tentativas e os acertos das duas situações, ou seja, para um total de 6 tentativas foram 2

> acertos (2/6) que, por simplificação ou equivalência, resulta em 1/3 (Daniel).

De forma semelhante, Valter procurou contribuir para a compreensão do terceiro problema, ainda pouco claro para alguns estudantes, além de projetar esta reflexão para a futura prática docente:

> [...] seria um contrassenso um resultado em que mais da metade da composição do cereal seria açúcar, uma vez que no cereal A metade era açúcar e no B 1/4 era açúcar, portanto juntando os dois cereais em porções iguais, seria ilógico uma porcentagem maior que 50% de açúcar. Muitas vezes, quando resolvemos alguns problemas, ficamos tão contentes ao chegar a uma solução que esquecemos de verificar se essa solução é lógica ou se encaixa numa faixa de resultados possíveis. Acho importante passar essa noção aos alunos (Valter).

A preocupação de Valter tem relação com a perspectiva de ensino de matemática abordada por Serrazina (2002). Ela destaca que a ideia de que a matemática é um conjunto de regras e procedimentos, prontos para serem usados, deu lugar a uma ideia de matemática escolar que privilegia o fazer e a compreensão dos conceitos. Essa concepção possibilitou que os estudantes daquele grupo pudessem explicar e justificar suas aprendizagens.

Oferecer oportunidades como estas num curso de formação de professores que ensinarão matemática nos anos iniciais propicia também que os estudantes pensem em como explicar a outras pessoas conceitos já compreendidos, o que é de grande importância no exercício da profissão docente, principalmente quando se trabalha com crianças que estão iniciando seu contato com a matemática escolar.

Durante as discussões sobre como tais reflexões poderiam contribuir para o ensino desse conteúdo nos anos iniciais, algumas observações e conclusões foram relativas: à importância da apresentação de diferentes representações para os números racionais; ao uso de frações equivalentes, no início do trabalho, com as operações adição e subtração de frações; à importância do uso de algoritmos quando a conceitualização já estiver sido construída, com o objetivo de agilizar o cálculo; à importância do trabalho com a resolução de problemas e com o incentivo das interações entre os estudantes; à potencialidade das situações desafiadoras no ensino de matemática; e à importância da compreensão do que é solicitado em um problema, bem como da análise do resultado obtido.

Reflexões dessa natureza são fundamentais no processo formativo de profissionais, pois, como aborda Silver (2006), o conhecimento matemático precisa estar articulado com o papel do professor ainda durante a formação inicial.

A oportunidade de discutir com seus colegas esse assunto ficou registrada no fórum:

> [...] acredito que esta atividade é uma atividade válida e que comprova que sempre aprendemos um com o outro (Valeria).

A aprendizagem dos estudantes por meio da comunicação era um dos objetivos da atividade proposta. Afinal, como afirmam Nacarato, Mengali e Passos (2009), quando se propõe um ambiente de comunicação e interação é porque se acredita na possibilidade de que os estudantes aprendam uns com os outros.

Algumas considerações

A análise realizada evidencia que a comunicação matemática em um AVA na educação a distância pode envolver as mesmas potencialidades que a comunicação presencial. A comunicação pela escrita, se tiver origem em uma proposta de atividade desafiadora, que incentive as interações entre os participantes, poderá configurar-se como colaboradora no processo de aprendizagem dos estudantes que "aceitarem o convite" para o diálogo.

Esta potencialidade permite também desafiar os professores em formação a expressar de forma escrita seu entendimento e suas estratégias, de forma a garantir a compreensão do leitor.

Permanece, nesta modalidade de ensino, o desafio de reconceber as formas de interação e produzir propostas que incentivem a comunicação entre os estudantes.

Referências bibliográficas

André, M. E. D. A. (2005). *Estudo de caso em pesquisa e avaliação educacional*. Brasília, Brasil: Livro Editora.

Bardin, L. (2011). *Análise de conteúdo*. São Paulo: Edições 70.

Cândido, P. T. (2001). Comunicação em matemática. In K. S. Smole & M. I. Diniz (Eds.), *Ler, escrever e resolver problemas: Habilidades básicas para aprender matemática* (pp. 15-28). São Paulo, Brasil: ARTMED.

Cochran-Smith, M., & Lytle, S. (1999). Relationship of knowledge and practice: teacher learning in communities. *Review of research in education*, v. 24, 249-306. Washington, DC: American Educational Research Association.

Curi, E. (2009). Gêneros textuais usados frequentemente nas aulas de matemática: exercícios e problemas. In C. E. Lopes & A. M. Nacarato (Eds.), *Educação matemática, leitura e* *escrita: Armadilhas, utopias e realidade*. Campinas, Brasil: Mercado de Letras. pp. 137-150 (Série Educação Matemática).

Menezes, L. (2000). Matemática, linguagem e comunicação. *Millenium*, 20. Acedido em 17 de Maio, 2012, em http://www.ipv.pt/millenium/20_ect3.htm.

Nacarato, A., Mengali, B. L. S., & Passos, C. L. B. (2009). *A matemática nos anos iniciais do ensino fundamental: Tecendo fios do ensinar e do aprender*. Belo Horizonte, Brasil: Autêntica. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

Nóvoa, A. (1992) Formação de professores e profissão docente. In A. Nóvoa (Ed.), *Os professores e sua formação.* Lisboa: Publicações Dom Quixote.

Paiva, V. M. O. (2010, dezembro). Ambientes virtuais de aprendizagem: implicações epistemológicas. *Educação em Revista*, v. 26, n. 3, Belo Horizonte, Brasil. Acedido em 28 de Março, 2012, em http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0102-46982010000300018&lng=pt&nrm=iso.

Serrazina, L. (2002). A formação para o ensino da matemática: perspectivas futuras. In L. Serrazina (Ed.), *A formação para o ensino da matemática na educação pré-escolar e no 1° ciclo do ensino básico*. Porto: Porto Editora. (Cadernos de formação de professores 3, pp. 9-19).

Silver, E. A. (2006). Formação de professores de matemática: desafios e direções. *Bolema*, 19 (26), 125-152. Rio Claro. ISSN: 0103-636X.

Skovsmose. O. (2008) *Desafios da reflexão em educação matemática crítica*. Tradução: Orlando de Andrade Figueiro e Jonei Cerqueira Barbosa. Campinas, Brasil: Papirus. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

Valente, J. A. (2011). Educação a distância: criando abordagens educacionais que possibilitam a construção do conhecimento. In Arantes, V. A. (Ed.), *Educação a distância: Pontos e contrapontos*. São Paulo, Brasil: Summus. (Coleção pontos e contrapontos, pp. 13-44).

AS ATITUDES EM RELAÇÃO À MATEMÁTICA E SUAS INFLUÊNCIAS NO DESEMPENHO DE ALUNOS EM RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Giovana Pereira Sander

Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Brasil

giovanapsander@gmail.com

Nelson Antonio Pirola

Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Brasil

npirola@uol.com.br

Resumo

Este trabalho teve por finalidade analisar como o desempenho na resolução de problemas de alunos do 5º ano do Ensino Fundamental se relaciona com as suas atitudes em relação à Matemática. Para isso, a pesquisa está fundamentada em estudos da Psicologia da Educação Matemática. Foram participantes da pesquisa 54 alunos de três turmas do 5º ano de uma escola pública de Bauru-SP, que responderam a uma escala de atitudes do tipo Likert que continham afirmações que demonstravam sentimentos positivos e negativos em relação à Matemática a fim de avaliar suas atitudes diante dessa disciplina. Desses alunos, 7 foram escolhidos para participar de uma entrevista que utilizou a metodologia "pensar em voz alta", onde foi solicitado aos alunos, individualmente, que descrevessem para o pesquisador os procedimentos adotados para resolver alguns problemas retirados do SARESP. Os resultados mostraram que nenhum participante solucionou todos os problemas de forma satisfatória. No entanto, de forma indireta, o desempenho se relacionou às atitudes no aspecto referente à confiança, pois os alunos com atitudes positivas apresentaram maior confiança para resolver os problemas apresentados.

Palavras-chave: Resolução de problema; Atitudes; Desempenho.

Introdução

Este trabalho teve por finalidade analisar possíveis relações entre o desempenho dos alunos do 5º ano do Ensino Fundamental – Ciclo I – na resolução de problemas matemáticos e as atitudes relacionadas à Matemática. Para isso, foi realizado um levantamento bibliográfico sobre os processos de resolução de problemas e outro sobre as atitudes em relação à Matemática.

A realização desta pesquisa se justificou pelo fato de que os alunos estão concluindo o Ensino Médio com baixo desempenho em Matemática, tal como apresentado pelos resultados do Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo –

SARESP. Em 2009, por exemplo, o rendimento dos alunos ficou nos níveis “abaixo do básico” e “básico”, predominantemente.

Ainda, tendo em vista que, nessas avaliações, são focados apenas aspectos cognitivos, a presente pesquisa também abordará as atitudes, já que essas são importantes elementos que interferem na aprendizagem Matemática escolar.

Desta forma, procurou-se responder a seguinte questão: Alunos com atitudes positivas possuem melhor desempenho na resolução de problemas quando comparados a alunos com atitudes negativas?

Resolução de problemas no ensino da Matemática

A resolução de problemas é considerada, por diversos autores, primordial para o ensino da Matemática. Há autores que a consideram como o eixo medular do ensino da Matemática[33], de forma que a Matemática deveria ser ensinada por meio de problemas para que a aprendizagem ocorra de maneira significativa.

Para definir o que é um problema, Brito (2006) aponta autores como Pólya (1949), Sternberg (2000) e Echeverria e Pozo (1998), que salientam que problema apresenta um fim a ser alcançado com um obstáculo para superar. Se o objetivo é atingido facilmente, a tarefa se caracteriza como um exercício. Ainda, diferenciando problema de exercício, salientam que exercício possui uma disponibilidade imediata de mecanismos que levam à solução. Desta forma, para um problema ser reconhecido como tal, faz-se necessária reflexão ou tomadas de decisões sobre os passos a serem realizados.

Partindo disso, é possível uma mesma situação ser, para um sujeito, um problema e para outro, um exercício, pois, caso o sujeito não se interesse pela situação, ou já possua mecanismos suficientes para resolver a tarefa proposta, não será um problema.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, a importância dessa disciplina se apoia no fato de que ela permite ao aluno resolver problemas da vida cotidiana, funcionando também como instrumento essencial durante a construção de conhecimento em diversas áreas curriculares. (MEC/SEF, 1997).

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (MEC/SEF, 1997), a resolução de problemas é o foco central da aprendizagem matemática, ressaltando que:

[33] Discurso do Prof. Dr. Nelson Antonio Pirola na abertura do curso de Formação de formador de tutores do Programa Pró-Letramento de 2011 – Unesp – *Campus* de Bauru.

> o O ponto de partida da atividade matemática não é a definição, mas o problema. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las;
> o O problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operário. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada; (...)
> o O aluno não constrói um conceito em resposta a um problema, mas constrói um campo de conceitos que tomam sentido num campo de problemas. Um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações; (...). (MEC/SEF, 1997, p. 32 e 33)

Nessa perspectiva, para resolver problemas se faz necessário conceitos e princípios já aprendidos e estes devem estar disponíveis na memória para que se possa combiná-los e encontrar o resultado final. Isso fará com que a estrutura cognitiva se amplie ao incluir novos conhecimentos. (Brito, 2006).

Em aulas de Matemática, ao utilizar a resolução de problemas, há diferentes formas para que elas sejam trabalhadas. Moura, Marco, Souza e Palma (2007) salientam que uma delas é utilizar a resolução de problemas como simples exercício após a explicação do conteúdo. Desta forma, uma situação-problema não propõe obstáculos a serem derrubados pelos alunos, tendo em vista que já lhes foram apresentados os mecanismos necessários para superá-los, tornando-se assim, mais um exercício com mecanismos repetitivos.

A outra forma de utilizar a resolução de problemas nas aulas de Matemática é como ponto de partida de cada conteúdo, tornando-se uma “mola propulsora da matemática”, fazendo com que o sujeito construa ou atribua novos significados às situações matemáticas vivenciadas.

Como ponto de partida de um conteúdo matemático, de acordo com Amaro e Fini (2006), a resolução de problema prepara o sujeito para a vida, desenvolvendo o raciocínio através de uma linguagem que favorece a aprendizagem de uma série de conceitos fundamentais e de forma articulada.

A afetividade no contexto de ensino e aprendizagem da Matemática

As atitudes, apesar de não serem cobradas em exames, por não poderem ser avaliadas de forma objetiva em testes de larga escala, elas se constituem em fatores intervenientes para a aprendizagem da Matemática. (Gonçalez, 2000)

O termo atitude é usualmente confundido pelo senso comum com as falas, comportamentos e ações dos indivíduos, como salienta Sarabia (1992 citado por Moron; Brito, 2001). Contudo, o conceito de atitudes é definido por Gonçalez (1995), Brito (1996) e Moron (1998) como "predisposição, aceitação ou rejeição, favorável ou desfavorável, positiva ou negativa, aproximativa ou esquiva." (Gonçalez, 2000 p. 33).

As atitudes são compostas por elementos que determinam a predisposição do sujeito, sendo estas positivas ou negativas, em relação a objetos, pessoas ou eventos, a saber:

- Cognitivo: este componente esta relacionado com conhecimentos e crenças;
- Afetivo: este se relaciona ao sentimento;
- Conativo: este componente se refere às intenções do sujeito em relação ao objeto através das ações e comportamentos. (Brito, 1996)

Desta forma, ao contrário das concepções do senso comum, as atitudes não são as falas, comportamentos e ações, mas sim, como apresentado no componente conativo, elas são demonstradas através desses meios.

Brito (1996) salienta que as atitudes não são estáveis e variam de acordo com as experiências do sujeito e do ambiente. No caso do ensino da Matemática, se a atitude de um aluno for negativa em relação a essa disciplina, o professor pode procurar formas de estruturar os objetivos de sua aula para favorecer o seu desenvolvimento para torná-las favoráveis.

Ainda, Gonçalez (1995) também salienta que é um dos deveres da escola criar condições favoráveis para que os alunos ultrapassem o mero domínio das informações factuais, estimulando o desenvolvimento de atitudes positivas. Contudo, os profissionais envolvidos nesse processo pouco se dedicam a esses aspectos, pois não são contemplados nas grades curriculares. Os seus objetivos estão focados na aquisição de conceitos e de fatos ligados apenas aos aspectos cognitivos. Todavia, se esses aspectos também estivessem ligados ao aspecto afetivo, o aluno teria maior predisposição favorável à aprendizagem, indo além das informações transmitidas no contexto escolar, pois essa atitude lhe causaria satisfação, prazer em aprender e confiança em sua capacidade para resolver problemas.

Gonçalez (2000) também salienta que familiares, gênero e confiança influenciam no desenvolvimento das atitudes em relação à Matemática e que as atitudes positivas estimulam a independência nos alunos, produzindo autonomia na construção de uma saber crítico e reflexivo. Desta forma, quando o aluno sente confiança para resolver, por exemplo, problemas matemáticos, quando estiver nessa situação, não apresentará atitudes negativas quanto a isso, pois acredita que é capaz de resolver o problema.

Em seus estudos, a autora cita Aksu (1991) e Reyes (1984) para afirmar que a confiança é um componente importante para um bom desempenho do aluno diante da Matemática. Reyes (1984) salienta que as atitudes em relação à Matemática também são influenciadas pela confiança sendo esta uma das mais importantes variáveis afetivas que permite que o sujeito se sinta capacitado para aprender essa disciplina, cumpra as atividades durante as aulas e provas e não desista com facilidade ao se deparar com situações problemas.

A pesquisa de Gonçalez (2000) também obteve resultados semelhantes já que o índice de confiança foi maior no da série com melhor desempenho, mostrando que é importante o desenvolvimento de atitudes positivas. A autora salientou também que elas não são imutáveis e que a confiança nessas habilidades favorece um melhor aprendizado da Matemática.

O trabalho desenvolvido por Brito (1996) aponta que a Matemática *per se* não produz atitudes negativas. Elas se desenvolvem ao longo dos anos escolares. Se estas atitudes serão positivas ou negativas, dependerá do professor, do ambiente em sala de aula, do método utilizado, da expectativa da escola, da auto percepção de desempenho do aluno, entre outros fatores. Por fim, se as atitudes são aprendidas e elas podem ser ensinadas, as escolas deveriam contemplá-las nos currículos escolares em qualquer nível de ensino.

Metodologia

O presente estudo foi desenvolvido em uma escola da rede pública de ensino do interior do Estado de São Paulo, com uma metodologia de pesquisa quantitativa e qualitativa.

A pesquisa aconteceu em dois momentos distintos: a) o primeiro momento com a participação de 54 alunos distribuídos em três turmas de 5º ano selecionadas de forma aleatória, sendo 17; 21 e 16 alunos das turmas A, B e C, respectivamente. A quantidade de participantes se deu por conta da autorização dos pais dos alunos. Cada classe teve tais denominações para manter seu anonimato. b) para o segundo momento da pesquisa, foram selecionados 7 alunos, sendo 3 da turma A e 2 da turma B e outros 2 da turma C.

Como instrumentos para coleta de dados foram utilizados uma escala de atitudes do tipo Likert elaborada por Aiken (1961), Aiken e Dreger, (1963) e traduzida, adaptada e validada por Brito (1996, 1998); e a metodologia de pesquisa para a resolução de problemas, "pensar em voz alta".

A escala de atitudes, utilizada no primeiro momento da pesquisa, está distribuída em 10 afirmações positivas, 10 negativas e uma afirmação que permite verificar a auto-percepção do aluno em relação ao seu desempenho em Matemática. Os alunos tinham que assinalar alternativas "Discordo Totalmente", "Discordo", "Concordo", "Concordo Totalmente", dependendo do seu posicionamento. Se a afirmação apresentar uma situação positiva e for assinalada a opção, por exemplo, "Concordo Totalmente", é atribuído 4 pontos ao aluno. Se a afirmação for uma situação negativa, e o aluno assinalar a mesma opção, é atribuído 1 ponto. Com essas pontuações, foi feita uma média de cada turma. Os alunos que apresentaram pontuações abaixo da média foram considerados com tendências para atitudes negativas. Caso contrário, apresentaram tendências para atitudes positivas.

Pelas pontuações, foram selecionados 2 alunos de cada turma, um com a atitude mais positiva e outro com atitude mais negativa, para resolverem problemas utilizando o método, "pensar em voz alta". Na turma A, por motivos de empate, foi selecionado um aluno a mais com atitudes positivas, totalizando 7 participantes neste momento da pesquisa.

Nesta metodologia de pesquisa, era solicitado aos alunos que narrassem o seu procedimento de resolução, e quando não o fazia, a pesquisadora questionava sobre o que ele estava fazendo para solucionar o problema. Através do "pensar em voz alta", a análise não fica apenas nos protocolos dos alunos, onde é preciso deduzir seu raciocínio, mas foca também em suas falas. O "pensar em voz alta", também foi utilizado por Utsumi (2000) com a finalidade de identificar os componentes da habilidade evidenciados pelos sujeitos ao resolverem um problema.

Os problemas apresentados aos alunos foram retirados do SARESP (2005; 2007) com o critério de que trabalhassem conteúdos de adição, subtração, multiplicação e divisão, totalizando 4 situações-problemas. Ainda, foram retiradas da prova as alternativas de respostas dos problemas.

Esse procedimento foi realizado individualmente e audiogravado. Com isso, a pesquisadora transcreveu cada gravação para que, posteriormente, fossem melhor analisados.

Análise e discussão dos dados

Primeiramente, os alunos responderam a escala de atitudes do tipo Likert. Cada afirmação foi lida pela pesquisadora e era passada para a seguinte após todos terem assinalado a opção que representasse melhor o seu sentimento.

A seguir, segue tabela 1 que apresenta os resultados das escalas de atitudes respondidas pelos alunos:

Tabela 1: Dados coletados através da escala de atitudes

Turmas	**A**	**B**	**C**
Média dos pontos	73,76	68,33	58,43
Nº de alunos com atitudes positivas	13	10	8
Nº de alunos com atitudes negativas	4	11	8
Menor pontuação na escala	58	52	42
Maior pontuação na escala	84	83	78

Na tabela 1 é possível observar que a turma A obteve a maior média. As demais turmas tiveram um equilíbrio quanto à distribuição dos alunos com atitudes positivas e negativas. No entanto, suas médias tiveram uma diferença de quase 10 pontos. As pontuações dos alunos variavam entre 42 e 84, sendo que a primeira foi de um aluno da turma C e a segunda, de um aluno da turma A.

Tendo em vista que o contexto escolar desses alunos é o mesmo, um dos aspectos diferenciais é a professora. Desta forma, esse pode ser um dos fatores que contribuiu com essas diferenças, pois, como salienta Gonçalez (2000), as atitudes podem ser ensinadas aos alunos.

Logo após, os alunos com a menor e a maior pontuação resolveram problemas utilizando o método de pesquisa "pensar em voz alta", a fim de apresentar se seus desempenhos estavam relacionados com suas atitudes.

Nesta etapa, todos os alunos buscaram resolver os problemas apresentados, com exceção do aluno com atitudes negativas da turma B que não conseguiu resolver e, tampouco, interpretar os enunciados, mesmo com certa intervenção da pesquisadora.

Na tabela 2, segue de forma sucinta o desempenho dos alunos em cada problema apresentado. Esses desempenhos foram representados da seguinte maneira: Acertou procedimento e resposta (AP/AR); Acertou o procedimento e errou a resposta: (AP/ER); Errou o procedimento e acertou a resposta (EP/AR); Errou o procedimento e a resposta (EP/ER); Não soube resolver nada (NR); Acertou o raciocínio, mas não soube representar (ARa/NRp). Os alunos foram representados pela letra A junto à sua pontuação na escala de atitudes. Os alunos que igualaram a pontuação foram diferenciados pelas letras "a" e "b".

Tabela 2: Distribuição da pontuação dos alunos na escala de atitudes, média das turmas e desempenho dos alunos na resolução de problemas

Turmas	**Aluno**	**Atitude**	**Problemas**			
			1	**2**	**3**	**4**
A	**A58**	Negativa	AP/AR	EP/AR	AP/ER	EP/AR
	A84a	Positiva	AP/AR	ARa/NRp	AP/ER	EP/ER
	A84b		AP/AR	AP/AR	AP/ER	AP/AR
B	**A52**	Negativa	ARa/NRp	NR	NR	NR
	A78	Positiva	AP/AR	AP/AR	AP/ER	EP/AR
C	**A42**	Negativa	AP/AR	AP/ER	AP/ER	NR
	A72	Positiva	AP/AR	AP/AR	AP/ER	AP/ER

Olhando apenas para a tabela 2, pode-se perceber que os resultados dos alunos com atitudes positivas na resolução dos problemas apresentam um melhor desempenho quando comparados aos alunos com atitudes negativas.

Das 28 resoluções apresentadas na tabela, mais de metade (18) usam procedimentos corretos e quase metade (13) respondem acertadamente. Das 18 que usam procedimentos corretos, 13 são resoluções dos alunos com atitude positiva. Das 13 respostas corretas, 9 são respostas dos alunos com as maiores pontuações na escala.

Ainda, é possível observar que a maior quantidade de acertos se encontra no problema 1 e a maior quantidade de erros, no problema 3. Isso mostra que, nesses casos, o desempenho dos alunos é recorrente aos graus de dificuldades das situações apresentadas, e não às atitudes em si dos alunos em relação à Matemática.

A seguir, é apresentado um resumo da tabela anterior quanto aos procedimentos e respostas corretas dos alunos com atitudes positivas e negativas.

Tabela 3: Distribuição da quantidade de procedimentos e respostas corretas

	Alunos com pontuação mais elevada nas atitudes	Alunos com pontuação mais baixa nas atitudes
Procedimentos corretos (%)	87,5	50
Respostas corretas (%)	56,25	33,33
Total de resoluções (%)	100	100

Do total de resoluções feitas pelos alunos com atitudes mais positivas, 87,5% foram resoluções com procedimento correto e 56,25% com resposta acertada. Do total de resoluções feitas por alunos com atitudes mais negativas, 50% acertou os procedimentos e 33,33% acertou as respostas.

É possível observar que a diferença de acertos nos procedimentos para resolução dos problemas entre alunos com atitudes mais positivas de alunos com atitudes mais negativas não é muito elevada (37,5%) e a diferença da porcentagem dos acertos dos problemas também não é tão discrepante (22,92%).

Outro aspecto importante, é que, independentemente das atitudes em relação à Matemática, o desempenho dos alunos nos problemas 1 e 3 foram semelhantes. Esse acontecimento pode ser decorrente do grau de dificuldade encontrado nos problemas, sendo que no primeiro os alunos não tiveram dificuldade e no terceiro, tiveram. O primeiro problema solicitava um procedimento cujos alunos já estão mais familiarizados; para solucioná-lo, era preciso uma operação de subtração com números naturais apenas. Já o terceiro problema, exigia um procedimento mais elaborado, sendo que eram necessárias duas operações para encontrar a sua solução, uma subtração e uma adição; ainda, os dados contidos no enunciado eram números decimais, o que tenha causado certo grau de dificuldade entre os alunos.

Ainda, através da metodologia de pesquisa do “pensar em voz alta”, foi possível notar que os alunos com atitudes positivas apresentaram maior confiança ao resolver os problemas, mesmo quando não o estava fazendo corretamente.

Por fim, venho ressaltar que os dados coletados foram de alunos que se encontram com atitudes em relação à Matemática nas extremidades possíveis, ou seja, são os alunos com as maiores e menores pontuações na escala de suas turmas.

Considerações sobre a pesquisa

A fim de analisar como o desempenho de alunos do 5º ano do Ensino Fundamental em resolução de problemas se relacionava (ou não) com as suas atitudes em relação à Matemática, a presente pesquisa utilizou como instrumentos para coleta de dados uma escala de atitudes do tipo Likert e problemas matemáticos retirados do SARESP para serem resolvidos através da metodologia de pesquisa, “pensar em voz alta”.

Através dos dados coletados pelos instrumentos, é possível afirmar que, num contexto onde a distribuição dos alunos com tendência a atitudes positivas e negativas em relação à Matemática é de forma semelhante, seus desempenhos ao resolver problemas matemáticos foram equivalentes, pois nenhum deles solucionou todos os problemas completamente e de forma satisfatória.

Quanto aos dados apresentados nas tabelas 2 e 3, seria necessária uma análise estatística para poder afirmar, com maior precisão, o quanto as atitudes interferem no desempenho dos alunos em resolução de problemas. Esta necessidade surge, pois a diferença dos acertos de procedimentos e de solução dos problemas entre os alunos com atitudes mais positivas e mais negativas não é tão discrepante.

No entanto, a análise apresentou o desempenho dos alunos como se fosse divido em duas partes, a do procedimento e a da solução final da resolução de problemas. Através da metodologia de pesquisa do “pensar em voz alta” foi possível notar que a confiança que os alunos com atitudes positivas demonstravam ao escolher um procedimento para resolver a situação era maior quando comparado aos alunos com atitudes negativas. Mesmo assim, isso não foi garantia de que eles resolvessem toda a situação. Esse fato chamou a atenção durante a coleta de dados, pois mesmo as atitudes não sendo um diferencial no desempenho em si dos alunos de uma forma geral, elas se apresentaram dessa forma: alunos com atitudes positivas demonstraram maior confiança ao resolver os problemas, mesmo que o procedimento ou o resultado estivessem equivocados. Ainda, estes alunos demonstraram maior predisposição para resolver os problemas e prazer no que estavam fazendo, fato evidenciado ao utilizar a metodologia de pesquisa do “pensar em voz alta”.

A confiança, como aponta Gonçalez (2000), influencia nas atitudes e, de acordo com Reyes (1984, citado por Gonçalez, 2000), essa é uma das mais importantes variáveis afetivas. Desta forma, mesmo não estando evidentes no desempenho em resoluções de problemas dos alunos, podemos observar que as atitudes estão relacionadas com a forma, prazer e disposição deles ao resolverem problemas matemáticos, não desistindo facilmente ao se deparar com essas situações.

Por fim, a literatura vem mostrando que as atitudes não são inatas e que elas influenciam no desempenho dos alunos em diversas situações, tais como resolver problemas matemáticos escolares. Desta forma, refletir sobre as atitudes que são ensinadas aos alunos deve fazer parte de propostas curriculares que, como salienta Gonçalez (1995), pretendem ir além de transmissão de informações que ocorrem em contextos escolares.

Referências bibliográficas

Amaro, F. de O. S. T. & Fini, L. D. T. (2006). Currículo transversal e a Matemática: Intervenção do professor em solução de problemas. In Pirola, N. A. & Amaro, F. de O. S. T. (Eds.), *Pedagogia cidadã: Cadernos de formação: Educação Matemática.* (2 Ed., pp. 137 – 154). Revista. São Paulo: Unesp, Pró-Reitoria de Graduação.

MEC/SEF. (1997). *Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática* / Secretaria da Educação Fundamental. Brasília: D.F.

Brito, M. R. F. de. (1996). *Um estudo sobre as atitudes em relação à Matemática em estudantes de 1º e 2º graus.* Tese de Livre Docência**,** Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil.

Brito, M. R. F. de. (2006). Alguns aspectos teóricos e conceituais da solução de problemas matemáticos. In Brito, M. R. F. de. (Eds.). *Solução de problemas e a Matemática escolar.* (Cap. 1, pp. 13-53), Campinas: Alínea Editora.

Gonçalez, M. H. C. de C. (1995). *Atitudes (des)favoráveis com relação à Matemática*. Dissertação de mestrado**,** Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil.

Gonçalez, M. H. C. de C. (2000). *Relações entre a família, o gênero, desempenho, a confiança e as atitudes em relação à matemática.* Tese de doutorado, Departamento de Psicologia Educacional, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil.

Moron, C. F. & Brito, M. R. F. de. (2001) Atitudes e concepções dos professores de Educação Infantil em relação à Matemática. In Brito, M. R. F. de. *Psicologia da educação matemática.* (Cap. 12, pp. 263-277). Florianópolis: Editora Insular.

Moura, A. R. L. (2007). de. Et al. Resolver problemas: o lado lúdico do ensino da matemática. In MEC/SEF, Ministério da Educação/SEB. *Pró-Letramento: Programa de formação continuada de professores dos anos/séries iniciais do Ensino Fundamental: Matemática.* – edição revista e ampliada incluindo SAEB / Prova Brasil matriz de referência / Secretaria de Educação Básica - Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica.

Utsumi, M. C. (2000). *Atitudes e habilidades envolvidas na solução de problemas algébricos: Um estudo sobre o gênero, a estabilidade das atitudes e alguns componentes da habilidade matemática.* Tese de doutorado, Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil.

COMUNICAÇÃO ESCRITA DE ALUNOS DO 6.º ANO DE ESCOLARIDADE

Carla Alves
Escola Superior de Educação de Viana do Castelo
carlasfalves@gmail.com

Lina Fonseca
Escola Superior de Educação de Viana do Castelo
linafonseca@ese.ipvc.pt

Resumo

Comunicar na sala de aula permite aos alunos partilhar ideias matemáticas, interagir com as expostas pelos colegas e pelo professor, mas também aprofundar as suas. Neste sentido, a comunicação desenvolve o pensamento e promove a aprendizagem da matemática. Cada aluno pode ter o seu método de resolução de problemas, porém partilhar outras formas de resolver um problema pode beneficiar a sua aprendizagem e promover a comunicação matemática, pois comunicar um raciocínio exige a reorganização do pensamento. A comunicação envolve a capacidade de ler e escrever matemática e interpretar ideias. Escrever e falar clarifica as ideias dos alunos e por isso importa colocar na aula o enfoque na comunicação, visto que a matemática é essencialmente uma língua e a aprendizagem e o ensino são atividades sociais. Este estudo tem por objetivo estudar a comunicação escrita de alunos do 6º ano de escolaridade. A maior dificuldade apresentada pelos alunos relaciona-se com a explicitação do pensamento: que palavras usar, como organizar as frases, como encadear as ideias. A maioria resiste à escrita, basta-lhe apresentar os cálculos para explicar o raciocínio.

Palavras-chave: comunicação matemática; comunicação escrita; proporcionalidade direta.

Introdução

Uma das finalidades para o ensino da Matemática da Educação Básica é o desenvolvimento da "capacidade de comunicar em Matemática, oralmente e por escrito, descrevendo, explicando e justificando as suas ideias, procedimentos e raciocínios, bem como os resultados e conclusões a que chega" (ME, 2007, p.4).

O professor deve dar atenção ao raciocínio dos alunos incentivando-os a explicitarem com clareza o seu pensamento e a apreciarem os raciocínios dos colegas, favorecendo desta forma o desenvolvimento da comunicação matemática. Esta comunicação deve envolver a vertente oral e escrita, "os alunos devem ser capazes de, oralmente e por escrito, descrever a sua compreensão matemática e os procedimentos matemáticos que utilizam" (ME, 2007, p.5).

Para Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999), o conceito de proporcionalidade é essencial no desenvolvimento da capacidade de lidar com diversas situações do mundo real; na apreensão de conhecimentos em várias áreas do saber e, no desenvolvimento cognitivo do aluno.

Assim, dada a importância da comunicação matemática, propus-me a estudar a comunicação escrita de alunos do 6.º ano de escolaridade quando resolvem tarefas envolvendo proporcionalidade direta e para orientar o estudo defini três questões:

(a) Como se caracteriza o desempenho de alunos do 6.º ano de escolaridade em tarefas de proporcionalidade direta? (b) Como se caracteriza a comunicação escrita dos alunos?, (c) Que dificuldades manifestam os alunos na comunicação do seu raciocínio? Como podem ser superadas essas dificuldades?

Nesta comunicação apresenta-se parte do estudo realizado.

Comunicação escrita

A linguagem escrita pelas suas características e pela sua natureza processual, problemática e social do uso, pode ser considerada um elemento facilitador da construção do pensamento (Lampreia, 1996; Menezes, 1996; Marques, 2008; NCTM, 2008). Alunos e professores expressam a sua compreensão matemática através da linguagem, podendo esta ocorrer através de seis meios: (a) linguagem comum – do dia a dia; (b) linguagem verbal matemática – uso de palavras escritas ou faladas; (c) linguagem simbólica – uso de símbolos; (d) linguagem visual – gráficos, diagramas, esquemas; (e) linguagem quase matemática – uso de formulações pouco ortodoxas (p.e. metáforas) (Pirie, 1998).

A comunicação escrita tem como principal finalidade dizer algo que seja importante e, tal como falar, escrever requer aprendizagem. O treino é essencial para o bom desempenho da escrita (Lampreia, 1996) sendo esta a chave de todo o processo de ensino-aprendizagem e podendo desempenhar um papel de relevo nos processos de aquisição, estruturação e expressão do conhecimento (Carvalho & Pimenta, 2001).

Segundo Ben-Chaim, Ilany e Keret (2008), o tema da proporcionalidade é de extrema importância, pelo que devia ocupar parte central no currículo das escolas e no dos cursos de formação inicial de professores de matemática e apontam várias pesquisas que dizem: “poucos alunos, com habilidades razoáveis, usam o raciocínio proporcional de modo adequado ou enfatizam com sucesso atividades que o envolvam” (p. 131).

Proporcionalidade direta

No que concerne ao desempenho dos alunos no ensino formal do tema da proporcionalidade direta Pittalis, Chistou e Papageorgiou (2003) consideram quatro níveis de complexidade para as respostas dadas: (a) nível pré-estrutural: dados ou processos incorretos são usados de modo simplista o que conduz a conclusões irrelevantes; (b) nível uniestrutural: um único dado ou conceito é aplicado a pelo menos um item dos dados. Pode utilizar-se uma conclusão inválida, porque os dados selecionados não foram suficientes; (c) nível multiestrutural: processos e conceitos são usados num ou mais itens de dados, mas sem a síntese de informações ou conclusões intermediárias, o que pode indicar desempenho cognitivo inferior ao requerido para a solução correta do problema; (d) nível relacional: a resposta é caraterizada pela síntese de informações, processos e resultados intermediários.

Metodologia

De acordo com a natureza do problema e das questões optei por um estudo qualitativo que assumiu a forma de estudo de caso segundo Bogdan e Biklen (1994), visto que foram acompanhados três pares de alunos (três alunos foram escolhidos por mim e cada um deles escolheu o seu par). Assumi o duplo papel de professora e investigadora. Os participantes eram alunos do 6.º ano de escolaridade, de uma turma constituída por 25 alunos com idades entre os 10 e os 12 anos. Foram aplicadas onze tarefas, feitas observações, tiradas notas de campo e realizadas entrevistas. Para analisar os dados recolhidos foram criadas categorias com base na literatura e nos dados recolhidos: bom, médio e fraco. Relativamente ao desempenho dos alunos nas tarefas de proporcionalidade direta seguiu-se Pittalis e colegas (2003) e na caracterização da sua comunicação escrita, seguiu-se Pirie (1998).

Apresentação e análise de dados

Uma das tarefas propostas, apresentada a seguir, foi implementada em duas fases distintas da investigação: antes de ser lecionado o tema da proporcionalidade direta e após a sua lecionação. A tarefa revelou-se difícil para os alunos. Inicialmente não compreendiam o que tinham de fazer, sabiam que tinham de agrupar os problemas, mas não sabiam se os tinham de resolver primeiro ou em que é que deviam basear-se para os agrupar.

> As tarefas que se seguem podem agrupar-se em dois conjuntos. Investiguem-nas com muita atenção e **agrupem-nas**, **justificando por palavras vossas** os motivos que vos levaram a agrupa-las nos respetivos grupos.
>
> A – A Sra. Matilde comprou 2 caixas de maçãs, cada uma com 20 maçãs. A Sra. Maria comprou 10 caixas de maçãs iguais às da amiga. Quantas maçãs comprou a Sra. Maria?
>
> B – A mãe da Rita colocou 3 toalhas no varal. Após 12 horas estavam secas. O seu vizinho vai colocar 6 toalhas iguais no varal, quanto tempo levarão a secar?
>
> C **-** A Helena e o João estão a correr em volta de uma pista. Eles correm à mesma velocidade, mas a Helena começou um pouco depois.
>
> Quando a Helena completou 5 voltas, o João já tinha dado 15 voltas. Quando a Helena completar 30 voltas quantas voltas completa o João?
>
> D – O Pedro trabalha numa padaria. Para fazer 13 pães usa 10 kg de farinha. Quantos pães pode fazer se utilizar 23 kg de farinha?
>
> E – A Ana com um mês de idade pesava 3,750 kg, com dois meses de idade 4,780 kg e com três meses 5,820 kg. Qual será o peso da Ana ao quinto mês?
>
> F – Hoje a Ana faz 2 anos de idade e a Rosa 6 anos. Quando a Ana fizer 12 anos, quantos anos faz a Rosa?
>
> G – Um grupo de 5 músicos tocam uma música em 10 minutos. Outro grupo de 35 músicos vai tocar a mesma peça. Quanto tempo vai levar o grupo a tocar a música?
>
> H – Ontem, um navio chegou ao Porto de Aveiro com 326 carros "Nissan Patrol". O peso total destes carros era de 521 mil toneladas. Amanhã, um novo barco vai chegar trazendo 732 carros "Nissan Patrol". Qual será o peso total desses carros?

Grupo 1	Grupo 2

> **Porque fizeram os conjuntos desta forma?** (podes referir o que tiveste em conta, o que têm em comum, …)

Resposta do par A

Para realizarem esta tarefa, as alunas indicaram sempre os cálculos que envolviam cada problema e só depois os agruparam.

As suas respostas foram:

Antes da lecionação		Após a lecionação	
Grupo 1	Grupo 2	Grupo 1	Grupo 2
A, E, F, H	B, C, D, G	A, C, D, F, G, H	B, E

No início sentiram bastantes dificuldades na classificação dos problemas, especialmente no que se refere às operações a utilizar na sua resolução. No primeiro grupo colocaram dois problemas de proporcionalidade, um aditivo e um de não proporcionalidade e dizem que são resolvidos com multiplicações. No grupo dois colocaram dois "problemas constantes"[34], um aditivo e um de proporcionalidade e dizem que são resolvidos com somas. As alunas não distinguiram o tipo de problemas, nem identificaram as estratégias de resolução, erros, que provavelmente, se associam à pouca familiaridade com problemas deste tipo, uma vez que durante a realização da tarefa discutiram bastante os processos de resolução dos problemas.

No final do tema, fizeram uma separação mais correta, à exceção de terem colocado um problema constante no grupo dos problemas que envolvem cálculos.

Enquanto realizavam a tarefa eu circulava pela sala e presenciei a sua discussão acerca da classificação "raciocínio e lógica". Uma defendia que o problema B tinha uma "ratoeira" e era parecido com um que fizeram, e que o problema E não era possível calcular pois dependia da "quantidade de comida que a Ana comesse" e por isso não se podiam fazer cálculos, visto que a outra aluna tentava fazer cálculos e tinha chegado a 7,850 Kg (resposta que apagaram, mas que ficou percetível).

Comparando as duas resoluções notou-se evolução. Houve maior preocupação em ler os enunciados com detalhe e atenção de forma a não serem induzidas em erro. Evoluíram nos argumentos utilizados para separar os problemas em dois grupos, sendo a última fundamentação mais aceitável do que a primeira. Contudo, apresentaram respostas simplistas, inseguras e pouco fundamentadas matematicamente.

Assim, após várias leituras cuidadas e atentas do enunciado, conseguiram interpretá-lo corretamente, necessitando de agrupar os problemas e arranjar critérios que justificassem as suas escolhas. Apesar da insegurança, mostraram empenho e interesse na realização da tarefa.

Na escolha e implementação da estratégia de resolução optaram por identificar os processos/operações de resolução de cada problema. Foi uma boa estratégia, contudo não procederam à separação acertada dos problemas, selecionaram incorretamente estratégias de resolução dos problemas. O desempenho das alunas foi considerado médio na leitura e interpretação do problema e fraco na seleção e implementação da estratégia. A sua resposta encontra-se no nível uniestrutural, em que um único dado ou

[34] Entende-se por "problemas constantes" aqueles em que a resposta está no enunciado do problema (problemas B e G).

conceito é aplicado a pelo menos um item dos dados. Pode ser utilizada uma conclusão inválida, porque os dados selecionados não foram suficientes (Pittalis et al., 2003).

A comunicação centra-se na linguagem verbal da matemática, uso de palavras escritas e na linguagem simbólica, uso de símbolos (Pirie, 1998).

As dificuldades das alunas verificaram-se, inicialmente, na compreensão do objetivo da tarefa, lacuna que foi ultrapassada com diálogo e várias leituras, mas também as dificuldades centraram-se na escolha das estratégias de resolução dos diferentes problemas e consequente separação. Foi variada a discussão sobre qual a estratégia de resolução a aplicar a cada problema e como não aplicaram as estratégias corretas, sentiram dificuldades em selecionar o critério de diferenciação para os grupos.

Resposta do par B

O par não efetuou qualquer cálculo para realizar a tarefa. As respostas foram as seguintes:

Antes da lecionação do tema		Após a lecionação do tema	
Grupo 1	Grupo 2	Grupo 1	Grupo 2
A, C, D, E, H	B, F, G	A, C, D, H	B, E, F, G

No início os alunos distinguiram os problemas que envolvem cálculos dos que não envolvem, designando estes últimos de "iguais". Na entrevista, percebi que a palavra "iguais" se referia à resposta do problema, que é dada no próprio enunciado, e não ao tipo de problema. No primeiro grupo colocaram os problemas que podiam ser resolvidos usando proporções (erraram uma das opções) e no segundo grupo, problemas que tinham outras estratégias de resolução, envolvendo ou não cálculos. O par não efetuou cálculos para responder à tarefa concluindo pela leitura dos enunciados, o que revela concentração na leitura e vai ao encontro do defendido por Costa (2007), de que os alunos que leem mais do que uma vez os enunciados fazem uma interpretação mais adequada e apresentam melhor desempenho.

Quanto à escolha e implementação da estratégia de resolução optaram pela leitura atenta do enunciado. Embora não tenham acertado completamente na resposta à tarefa foram quem se aproximou do objetivo. O seu desempenho foi considerado médio, mas próximo do bom, porque leram e interpretaram corretamente o enunciado e aplicaram uma estratégia adequada. A resposta à tarefa encontra-se no nível multiestrutural, pois foram utilizados processos de resolução, contudo com falhas, o que pode indicar desempenho cognitivo inferior ao requerido para a solução correta do problema (Pittalis et al., 2003). Como utilizaram apenas palavras escritas a comunicação centra-se na linguagem verbal da matemática (Pirie, 1998). Sentiram dificuldades em percecionar o objetivo da mesma e na separação dos problemas pelos grupos. Durante a primeira realização da tarefa, assisti a algumas indecisões dos alunos, nomeadamente onde enquadrar os problemas B e G (constantes). Só depois de leitura mais atenta é que perceberam que os problemas continham "ratoeiras" como diziam.

Resposta do par C

Depois de lerem várias vezes o enunciado resolveram cada problema e só depois os agruparam. As suas respostas foram as seguintes:

Antes da lecionação do tema		Após a lecionação do tema	
Grupo 1	Grupo 2	Grupo 1	Grupo 2
A, C, F, G	B, D, E, H	A, C, D, F, G, H	B, E

No início no Grupo 2 colocavam problemas resolvidos com "divisões, somas e subtrações" o que não coincidiu com os cálculos realizados, pois não usaram divisões. Esta contradição mostra a confusão que a tarefa provocou, talvez por ser a primeira vez que se depararam com uma tarefa onde a resposta envolvia justificações e não apenas cálculos. Quando se referem aos problemas que não dão para resolver com proporcionalidade, analisando os cálculos efetuados percebe-se que entenderam que o problema B era constante e o F era de não proporcionalidade. Contudo, relativamente aos problemas que se referem à proporcionalidade direta fizeram confusão misturando problemas aditivos com constantes e com os que envolvem, realmente, a proporcionalidade. Esta confusão pode ter-se gerado por terem terminado o estudo da proporcionalidade e pensarem que o objetivo da tarefa se centrava neste tópico, o que os levou a separar os problemas que envolvem cálculos dos que não envolvem, mas não tiveram a capacidade de pensar corretamente sob o ponto de vista aditivo e multiplicativo.

Apesar do primeiro impacto com a tarefa revelar insegurança, incertezas e confusão mental, os alunos empenharam-se para perceber. Tiveram o cuidado de ler várias vezes o enunciado e de arranjar uma estratégia para o resolver. A leitura do enunciado foi cuidada e atenta e o desempenho foi considerado médio. Porém, a leitura dos alguns problemas não foi assim tão atenta, pois no problema B concluíram que não precisavam de fazer cálculos, mas no problema G, do mesmo género, usaram as proporções.

A estratégia escolhida foi a resolução dos diferentes problemas e posterior separação conforme as operações usadas. Como falharam na escolha das operações em diferentes problemas e a resposta à tarefa foi influenciada por esses erros, o desempenho dos alunos foi considerado fraco. A resposta encontra-se no nível uniestrutural (Pittalis et al., 2003). A comunicação utilizada foi a linguagem verbal matemática e a linguagem simbólica, uso de palavras escritas e cálculos, respetivamente (Pirie, 1998).

As dificuldades centraram-se essencialmente na leitura pouco cuidada e atenta dos problemas e na escolha das estratégias de resolução dos mesmos. Na primeira resolução referiram que todos os problemas envolviam cálculos e só acertaram na estratégia do problema A. Na segunda em todos os problemas que referiram envolver cálculos, aplicaram as proporções, talvez por terem terminado o estudo desse tópico e pensarem ser esse o objetivo da tarefa. Se o professor está a lecionar um conteúdo, pensam que as tarefas propostas giram à sua volta.

Análise cruzada das resoluções apresentadas

Cruzando as resoluções desta tarefa, na primeira aplicação alguns resolveram os problemas e a partir das operações utilizadas agruparam-nos (pares A e C), outros tentaram encontrar palavras comuns nos diferentes problemas e outros separaram em: problemas que necessitavam de cálculos e problemas que não envolviam cálculos. Contudo, não indicaram as operações que seriam utilizadas nos problemas que envolviam cálculos (par B). Nenhum par usou as palavras "proporcionalidade direta". Na segunda aplicação, os pares B e C usaram a justificação "os que dão para resolver usando a proporcionalidade e os que não dão" embora, não tenham efetuado corretamente a sua separação. Foi possível constatar que os alunos não distinguem ou confundem problemas aditivos com problemas de proporcionalidade direta, o que demonstra dificuldades em identificar corretamente as situações.

Um aspeto a referir e baseado na análise das respostas dadas antes da lecionação do tema da proporcionalidade, é o facto de todos os pares terem colocado o problema A num grupo e o B noutro grupo, o que mostra que os perceberam como diferentes. Apenas o par B agrupou, acertadamente, o problema D no grupo do A. Os pares A e B consideraram, corretamente, o problema H semelhante aos A e D. Os pares A e B encaixaram o problema E (não proporcional) no grupo dos problemas com proporcionalidade, talvez por saberem que nos primeiros meses de vida todos os bebés, por regra, aumentam de peso. Contudo não tiveram em atenção que esse aumento não é constante. Os pares A e C agruparam o problema F (não proporcional) no grupo dos problemas com proporcionalidade e ambos o resolveram recorrendo ao pensamento aditivo, o que revela que o confundem com o pensamento multiplicativo. O mesmo aconteceu com o problema C (não proporcional) considerado de proporcionalidade pelos pares B e C.

Apesar do problema G ser semelhante ao B, o par C colocou-o no grupo dos problemas com proporcionalidade. Talvez o enunciado do problema G seja mais complexo do que o do B, uma vez que logo na primeira frase estão presentes duas variáveis: número de músicos e tempo, e no problema C as variáveis/informações são fornecidas em frases diferentes, simplificando o pensamento dos alunos.

Com esta tarefa pretendia-se que se distinguissem problemas que envolvem proporcionalidade direta dos que não envolvem, agrupando num conjunto os problemas A, D e H e noutro conjunto os problemas B, C, E, F e G. O par que teve melhor desempenho nesta tarefa foi o B, embora não acertando completamente na resposta à tarefa, foi o que mais se aproximou. Todos os pares demonstraram que leram e interpretaram corretamente o enunciado do problema e apresentaram uma separação/justificação aceitável dos problemas. As respostas dos alunos encontram-se, segundo Pittalis e colegas (2003), no nível uniestrutural (pares A e C) e multiestrutural (par B).

Quanto à caracterização da comunicação escrita os três pares enquadram-se na linguagem verbal matemática – uso de palavras escritas ou faladas e, na linguagem simbólica – uso de símbolos (Pirie, 1998).

As dificuldades desta tarefa foram mais visíveis antes da lecionação do tema, não pelo conteúdo em si, mas pelo tipo de tarefa. Inicialmente não compreenderam o que era pretendido. Depois de perceberem que tinham de agrupar os problemas, não sabiam em que se focar para os separar: efetuar cálculos ou procurar palavras comuns nos diferentes problemas? Sentiam-se preocupados com o que estavam a fazer, se seria o certo ou se era aquilo que a professora pretendia. Foi uma tarefa que deixou os alunos perdidos, sem saberem por onde e como começar. Nunca tinham realizado uma tarefa deste género e por isso mostraram insegurança na sua realização, pois não tinham qualquer certeza se o procedimento implementado era o correto, uma vez que não dei qualquer ajuda para não influenciar as respostas. Os seus argumentos parecem revelar não ter consciência de utilizar o raciocínio proporcional antes do tema da proporcionalidade ser trabalhado, o que vai contraria a literatura que defende que os alunos ao longo da sua vida quotidiana e escolar se deparam com diversas situações de proporcionalidade (Oliveira & Santos, 2000; NCTM, 2008). Não significa que não se deparem com tais situações mas, provavelmente, não as encaram como tal, uma vez que os termos "raciocínio proporcional" e "proporcionalidade" lhes são alheios.

Para ultrapassar estas dificuldades importa aplicar mais tarefas de classificação ao longo dos diferentes tópicos do programa e, ainda, apresentar tarefas menos abertas, isto é, limitar o campo de escolha dos alunos, fornecendo-lhes, p. ex., o tipo de classificação pretendido.

Enquanto realizavam a tarefa pela primeira vez, foram vários os alunos que mostraram um ar pouco convicto sobre o que estavam a fazer, como se duvidassem do que faziam e alguns até questionaram "professora é assim que quer que responda? não é preciso apresentar cálculos?". Esta postura vai ao encontro das conclusões obtidas por Dirk De Bock, Wim Van Doreen e Lieven Verschaffel (2005), em matemática, os alunos não estão habituados a dar respostas escritas, mas sim a responder através de cálculos.

Conclusões

O desempenho dos alunos em tarefas de proporcionalidade direta varia entre médio e bom. Os três pares revelaram um desempenho razoável/bom na leitura dos enunciados das tarefas, na escolha e implementação da estratégia e na resposta dada. Foi notável um melhor desempenho nas tarefas que envolviam cálculos e nas questões de valor omisso, as ditas tarefas rotineiras de proporcionalidade direta. Nas tarefas com números inteiros o desempenho dos alunos foi superior ao das que envolviam valores não inteiros. A tarefa apresentada foi a que se revelou mais complexa para os alunos verificando-se que o desempenho dos alunos foi menos positivo e os objetivos propostos menos conseguidos. Mais do que qualquer dificuldade significativa na leitura do enunciado ou na escolha e implementação de uma estratégia de resolução, os alunos revelaram insegurança com o tipo da tarefa, pois era a primeira vez que se deparavam com uma tarefa daquele género e não sabiam como começar.

Ao longo da investigação foi possível constatar que passar para palavras o raciocínio, usar linguagem simbólica e oral são tarefas complexas para os alunos. Lampreia (1996) defende que a transcrição da fala para a escrita não consegue fazer com que esta atinja o colorido da fala. Também Carvalho e Pimenta (2005) mencionam que o insucesso muitas vezes não está associado à falta de conhecimentos, mas sim à incapacidade em os verbalizar. Foi visível que os alunos sentem que para explicar os conteúdos matemáticos é suficiente e mais importante o recurso aos cálculos do que à escrita. Esta atitude vai ao encontro do que referem Pirie e Schwarzenberger (1988): os alunos não são ensinados a escrever matemática. Em várias situações diziam que já tinham feito os cálculos para explicar, logo não era preciso escrever por palavras o que fizeram. É de realçar que nas tarefas onde o desempenho foi melhor, a comunicação escrita também foi mais completa do ponto de vista matemático.

Globalmente, a comunicação escrita dos participantes caracteriza-se pelo uso de linguagem simbólica na resolução/justificação das suas respostas, talvez por estarem habituados a que lhes sejam propostas tarefas que apenas exijam este tipo de comunicação. Inverter esta tendência está nas mãos de cada um de nós, professores. Para tal devemos apresentar aos alunos tarefas que os desafiem e estimulem a escrever em Matemática e a propósito da Matemática (Boavida, Paiva, Cebola, Vale & Pimentel, 2008). Outras prováveis causas para a falta de momentos de escrita nas aulas de Matemática podem ser o reduzido número de horas atribuídas à disciplina e a extensão do programa ou ainda, como defendem Sousa, Cebolo, Alves e Mamede (2008) muitas vezes o professor não sabe *quando* nem *como* promover esta comunicação.

A maior dificuldade apresentada pelos alunos está relacionada com a conversão do pensamento em palavras: que palavras usar, como organizar as frases, como encadear as ideias. A maioria demonstra resistência à escrita. Os textos produzidos pelos alunos nas justificações das suas respostas são, maioritariamente, pobres e de pouca qualidade. Para superar estas dificuldades deve haver um esforço conjunto de professores e alunos no sentido de proporcionarem oportunidade de comunicação escrita.

Bibliografia

Abrantes, P., Serrazina, L. & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: Ministério da Educação - Departamento da Educação Básica.

Ben-Chaim, D., Ilany, B. & Keret Y. (2008). "Atividades Investigativas Autênticas" para o Ensino de Razão e Proporção na Formação de Professores de Matemática para os Níveis Elementar e Médio. Acedido em 22 de agosto, 2011 de http:// www.rc.unesp.br/ igce/matematica/bolema/ SITE % 2031 /David.pdf.

Boavida, A., Paiva, A., Cebola, G., Vale, I. & Pimentel, T. (2008). *A Experiência Matemática no Ensino Básico*. Ministério da Educação – DGIDC.

Bogdan, R., Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação*. Porto: Porto Editora.

Carvalho, J. Pimenta, J. (2005). *Escrever para aprender, escrever para exprimir o aprendido*. Braga: Universidade do Minho.

Costa, A. (2007). *A importância da língua portuguesa na aprendizagem da matemática*. Tese de mestrado. Universidade do Minho.

Dirk De Bock**,** Wim Van Dooren & Lieven Verschaffel (2005). *The significance of task design in mathematics education: examples from proportional reasoning*, pp. 5-10. Acedido em janeiro de 2011 de http: //www.emis.de/ proceedings/ PME29/PME29ResearchForums/ PME29RFAinleyPratt.pdf

Lampreia, J. (1996). *Técnicas de Comunicação*. Acedido em fevereiro, 2010, de http://w3.ualg.pt/~jmartins/tecnicascomunicacao/tecnicascomunicacao.pdf .

Marques, R. (2008). *Matemática e Língua Portuguesa: Laços para o Sucesso?* Tese de mestrado em Educação. Universidade de Lisboa. Departamento de Educação da Faculdade de Ciências.

Menezes, L. (1996). *Comunicação na aula de matemática*. Comunicação apresentada no ProfMat99. Acedido em dezembro, 2009, de http://www.esev.ipv.pt/mat1ciclo/Comunicacao/Comunicação_LM1996.pdf

Menezes, L.(2009). *Matemática, Linguagem e Comunicação*. Acedido em dezembro, 2009, de http: //clientes.netvisao.pt/lmenezes/ Microsoft%20Word%20%20Artigo%20ProfMat%2099.pdf.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa.

NCTM (1991). Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar. Lisboa: APM e IIE.

NCTM-APM (2008). Princípios e Normas para a Matemática escolar. Lisboa: APM.

Oliveira, I. & Santos, M. (2000). *O ensino fundamental e a resolução de problemas de proporção simples: Uma análise das estratégias*. 23.ª ANPED, Acedido em 12 de abril, 2011, de http://168.96.200.17/ar/libros/anped/1913T.PDF.

Pirie, S. & Schwarzenberger, R. (1988). *Mathematical discussion and mathematical understanding.* Acedido em dezembro, 2011, de http://www.springerlink.com/content/t10800l434428234/.

Pirie, S. (1998). Crossing the Gulf between Thought and Symbol: Language as (Slippery) Stepping-Stones: Em H. Steinbring, Maria Bartolini Bussi, Anna Sierpinska (Eds), *Language and Communication in the Mathematics Classroom*, pp. 7-29.

Pittalis, M., Chiristou, C. & Papageourgiou, E. (2003). *Students' ability in solving proportional problems*. Acedido em 20 de agosto, 2011, de http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG3/TG3_Pittalis_cerme3.pdf.

Sousa, F., Cebolo, V., Alves, B. & Mamede, E. (2008). *Comunicação Matemática: contributos do PFCM na reflexão de práticas de professores*. Acedido em 23 de agosto, 2011, de http: //www.apm.pt/files /_CO_Sousa_Cebolo_Alves_Mamede_4a41313eee16e.pdf.

ENVOLVIMENTO DAS MÃES NO TRABALHO DE CASA (TPC) DE MATEMÁTICA: CONTRIBUTO PARA O DESENVOLVIMENTO DA COMUNICAÇÃO MATEMÁTICA

Marta Moreno
Agrupamento Vertical de Escolas de Barroselas
marta_moreno94@hotmail.com

Lina Fonseca e Teresa Gonçalves
Escola Superior de Educação
linafonseca@ese.ipvc.pt e teresag@ese.ipvc.pt

Resumo

O TPC é uma forma de promover a comunicação entre a escola e a família e de aumentar o envolvimento desta nas aprendizagens dos seus educandos.

Esta investigação centrou-se no estudo do envolvimento dos pais no TPC de Matemática e no seu contributo para o desenvolvimento da comunicação matemática dos alunos, quando se encontram a resolver tarefas matemáticas, entre díades (mãe e filha), em casa. Verificou-se que o envolvimento das mães no TPC de matemática contribui para o desenvolvimento da comunicação matemática das alunas e que as dificuldades face à aprendizagem da Matemática podem ser diminuídas.

Palavras-chave: Trabalho de casa (TPC); envolvimento dos pais; comunicação matemática; motivação; ensino básico (E.B.).

Introdução

O TPC é tipicamente aplicado no sentido de promover a transferência de competências e conhecimentos aprendidos anteriormente a novos contextos e/ou atividades, ou seja, prepara os alunos para aulas futuras e treina-os reforçando as competências recentemente adquiridas. É fundamental o desempenho sério da parte dos professores, mas também, o envolvimento dos pais na escola, particularmente através do TPC de Matemática, para a melhoria do desempenho dos alunos.

Neste estudo pretendeu-se acompanhar o envolvimento das mães no TPC de matemática e analisar o seu contributo para o desenvolvimento da comunicação matemática dos alunos. A sua realização foi orientada por várias questões, das quais se destacam: Como se carateriza o envolvimento dos pais no TPC de Matemática? Como se descreve e como evolui a comunicação matemática de alunos no início da escolaridade?

Enquadramento Teórico

Envolvimento dos pais no TPC

Com o envolvimento dos pais no TPC espera-se desenvolver hábitos de trabalho, explorar diferentes ferramentas, familiarizando-as entre os envolvidos, apurar fatores de afetividade, de motivação e de *feedback*, bem como desenvolver a comunicação matemática e, segundo Baldaque (2008), poderá também ser um processo incentivador para inverter o historial de insucesso da disciplina de Matemática. Importa orientar as famílias no sentido de estimular a curiosidade das crianças, falando sobre o que aprenderam na escola para haver ligação mais direta entre o que aprenderam na escola e o seu dia-a-dia. Coleman e Tabin (1992) defendem que este processo depende da iniciativa e do convite dos professores.

Desde o início da escolaridade é essencial ajudar os alunos a adotar uma perspetiva dinâmica para a resolução do TPC de Matemática. Esta rotina diária, com incentivo dos pais, poderá ajudar a construir o conhecimento matemático através da integração ativa de ideias e experiências. Os pais tendem a considerar que acompanhar o TPC dos filhos é responsabilidade sua e um papel que socialmente se espera que cumpram. Segundo Hoover-Dempsey, Battiato, Walker, Reed, De Jong, e Jones, (2001), quando os professores sugerem, implícita ou explicitamente, que a ajuda dos pais é apreciada, tal constitui um incentivo adicional ao seu envolvimento. Na década de 70 do século XX, Baumrind (1967) provou a existência de uma relação positiva entre as práticas educativas parentais e o desenvolvimento das crianças e adolescentes. Esta autora investigou sobre as práticas educativas parentais, tendo identificado três estilos parentais distintos, com consequências diversas para o desenvolvimento dos filhos: o estilo autoritário, o estilo democrático e o estilo negligente. O estilo autoritário carateriza-se por controlo elevado, regras rígidas e uso de uma disciplina restritiva. Os filhos têm pouca autoridade e pouca oportunidade para negociar decisões. Os pais com estilo educativo democrático também estabelecem regras claras e limites para o comportamento, mas explicitam os fundamentos das regras e decisões. Estes pais comunicam mais abertamente com os filhos e encorajam os filhos a tomar responsabilidades e a autorregularem o seu comportamento. Finalmente, no pólo extremo, encontra-se o estilo negligente, que se subdivide no estilo permissivo-indulgente e no estilo permissivo-indiferente.

Os pais podem utilizar diferentes estratégias de colaboração nos TPC, desde a organização do espaço e materiais, interação com o professor, supervisão geral ou monitorização da realização do TPC, estabelecer regras para a sua execução e dar *feedback* aos filhos. Diferentes formas de envolvimento no trabalho poderão ter efeitos positivos na realização académica dos alunos (Corno, 2000; Patall, Cooper & Robinson, 2008). Os autores defendem que o efeito do envolvimento dos pais no TPC poderá depender da área implicada, tendo verificado efeitos positivos no caso das áreas verbais, mas as relações não são tão claras no caso da Matemática. Em determinadas situações, as competências de tutoria dos pais podem ser inadequadas ou entrar em conflito com as do professor (Patall *et al.*, 2008). Tal pode ocorrer na área da Matemática, uma vez que é mais provável que os pais não tenham conhecimentos atualizados. Pomerantz, Grolnick e Price (2005) defendem que as formas mais eficazes de envolvimento dos pais são as que apoiam a autonomia do filho e providenciam orientações claras e consistentes sobre o TPC. As investigações de Gonida, Voulala e Kiosseoglou (2009) confirmam que os pais que têm confiança nas suas competências adotam práticas mais positivas na colaboração no TPC. Aunola, Lerkkanen e Rasku-Puttonem (2003) consideram que os ambientes onde há envolvimento afetivo e apoio satisfazem a necessidade de vinculação, entre pais e filhos. Os mesmos autores entendem que este sentimento facilita a interiorização dos valores dos pais acerca da escola.

Vários estudos têm demonstrado vantagens duma relação mais estreita entre os professores e as famílias (Villas-Boas, 1996). No entanto, segundo a mesma autora, apesar da legislação atual favorecer o envolvimento parental, as dificuldades são muitas e as escolas parecem manter os seus padrões de baixa interação com as famílias. As dificuldades que surgem na interação família-escola podem dever-se ao facto dos professores, elementos-chave nesta dinâmica, poderem não estar preparados para esse papel. Também quando nem tudo corre como desejado, os pais têm tendência em considerar a escola culpada do insucesso dos seus educandos, mantendo-se à parte da situação (Moreira & Sampaio, 2000). Em diversos estudos internacionais (Aunola et al, 2003; Matthews, Ponitz & Morrison, 2009; Ryan, Patrick & Shim, 2005) é reconhecido que não só a motivação, mas também o comportamento em sala de aula, são fatores a ter em conta para o desenvolvimento de capacidades matemáticas dos alunos. Exemplos disso foram estudos que demonstraram que o envolvimento dos pais nas tarefas de matemática está relacionado com os comportamentos dos alunos, referindo que o papel dos pais é importante, especialmente para a aquisição das competências matemáticas de forma a influenciarem os comportamentos dos alunos enquanto realizam tarefas matemáticas.

Um estudo de Van Voorhis (2001) revelou que 74% dos alunos que completam o TPC dizem que são ajudados pela mãe.

A comunicação matemática

A Matemática é uma área do saber de enorme riqueza e possuidora de uma linguagem própria (Menezes, 2005). A comunicação matemática deve fazer parte dos instrumentos de trabalho do seu ensino e aprendizagem, pois estamos perante um meio de comunicação possuidor de um código próprio, com uma gramática e que é utilizado por uma comunidade.

O Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB) (ME, 2007) destaca a comunicação matemática tanto como conteúdo de aprendizagem como orientação metodológica para ensinar. O professor poderá estimular a comunicação ao promover o *feedback* das correções do TPC, fator que deverá ser tido em conta pelos pais, pois poderá alertar, sugerir e fundamentar aprendizagens de conceitos matemáticos. A organização do ensino deverá incentivar a comunicação matemática motivando as crianças a descrever, interpretar, explicar e justificar situações do dia-a-dia, em ambiente de sala de aula, mas também em casa (Serrazina, 2010). Em casa, com o envolvimento dos pais no TPC, pode encontrar-se um meio de desenvolver a comunicação aprendida na sala de aula, com a orientação do professor. Indo ao encontro de Menezes (2005), há professores que nas suas práticas letivas estabelecem contactos com os pais para, por exemplo, lhes comunicar os objetivos de aprendizagem, transmitindo-lhes a importância da monitorização, encorajamento e reforço do TPC. Segundo PMEB (ME, 2007), os alunos devem ser capazes de:

> oralmente e por escrito, descrever a sua compreensão matemática e os procedimentos matemáticos que utilizam. Devem, igualmente, explicar o seu raciocínio, bem como interpretar e analisar a informação que lhes é transmitida por diversos meios. Estas capacidades, desenvolvem-se comunicando por uma variedade de formas e aperfeiçoando os seus processos de comunicação. (ME, 2007, p. 5)

A comunicação matemática dos alunos deverá ser percebida como interação social em prol da aprendizagem de conceitos e de ideias matemáticas, de forma a possibilitar ações interativas de contextos múltiplos na qual se instalam estratégias de negociação de significados entre as intervenientes (Martinho, 2004). É necessário ter em conta padrões de interação e de formas de comunicar com os alunos, desde cedo na escolaridade básica (Menezes, 2005), aspetos que incluem uma diversidade de situações como por exemplo falar, escutar, observar, ler, argumentar, especular, discutir, pensar, explicar e provar (Martinho, 2004).

Opções Metodológicas

Atendendo ao problema optou-se por uma metodologia de investigação qualitativa concretizada sob a forma de estudo de caso múltiplo, de caráter longitudinal. O estudo decorreu numa turma do 1º Ciclo do E.B., numa escola do meio rural do concelho de Viana do Castelo, em duas fases: 1ª fase, no 3º período do 1º ano e 2ª fase, no 2º período do 2º ano, e teve a duração de um ano. Acompanharam-se 3 díades constituídas por 3 mães e 3 alunas. Selecionaram-se as alunas que demonstraram mais motivação e empenho na resolução das tarefas matemáticas na sala de aula e TPC e quem as ajudava no TPC: as mães. Estas mostraram bastante motivação e vontade em cooperar neste projeto, aderindo de imediato.

A recolha de dados baseou-se nas observações diretas na sala de aula, nos registos de “diário de bordo” após as observações, nos inquéritos (entrevistas e conversas informais com as mães e as filhas) e documentos (registos da realização das tarefas). Para além da recolha de dados em sala de aula, foram feitas gravações áudio em casa dos pares, aquando da resolução do TPC de matemática.

Para analisar os dados relativos ao envolvimento das mães seguiu-se de perto Patall et al. (2008). Respondendo ao detetado pelos autores e com o objetivo de “atualizar” o conhecimento de todos os encarregados de educação das crianças da turma sobre a matemática, e não só

Envolvimento das mães no TPC de matemática. (Adaptado de Pattal et al, 2008)

Categorias	Indicadores
Envolvimento ***positivo***	- A mãe orienta a resolução do TPC de matemática, mas tem o cuidado de incutir na filha a responsabilidade sobre os raciocínios a desenvolver - A mãe proporciona a intervenção da filha, apelando às suas explicações, autorreflexões e aos seus conhecimentos matemáticos com adequado uso da linguagem matemática - A mãe contribui para a evolução na aprendizagem matemática da aluna - O envolvimento da mãe no TPC de matemática proporciona na aluna uma aprendizagem mais produtiva e motivadora e de mais qualidade - A mãe estabelece afetos positivos - A mãe estimula o humor positivo e está atenta durante a realização de TPC - A mãe estimula o prazer na realização do TPC - Desenvolve-se a comunicação entre mãe e filha -A mãe promove o desenvolvimento da autorregulação e de competências de estudo
Envolvimento ***negativo***	- Aumenta a tensão entre mãe e filha - A mãe faz interferências com a aprendizagem - A mãe confunde técnicas de ensino - Acionam-se custos emocionais e de tensão - Aumenta a fadiga, frustração e o desapontamento - Aumenta a pressão na aluna para a realização do TPC

das mães envolvidas no estudo, foram realizadas várias reuniões com o objetivo de os motivar e de lhes dar a conhecer tarefas e materiais usados nas aulas de matemática.

Apresentação e análise dos dados

Na sala se aula era central o objetivo de desenvolver a comunicação dos alunos. Para TPC foram aplicadas diversas tarefas. Um dos objetivo centrou-se no reconhecimento de regularidades, de conceitos e formas de comunicação por parte das díades. Exemplo disso foi o caso da tarefa: Tabela do 100 de que se apresenta excertos da conversa estabelecida aquando da resolução em casa (Par A).

TAREFA 1 – "TABELA DO 100"
NÚMEROS E OPERAÇÕES – Leitura e escrita de números

Completa a seguinte tabela:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11									

Explica como pensaste:

A.:(Aluna A): É de 10 em 10.

M. (Mãe A): Os números ficam de 10 em 10? Como é que é isso?
A.: 21, 31, 41, 51…
M.: Ah! Já percebi. De 10 em 10, em coluna.
A.: 61, 71, 82, 91 (foram dizendo em coro).
M.: Então e agora, não tens mais nada para explicar à mamã?
A.: O algarismo das unidades é sempre o mesmo.
(…)
M.: Ai é? Deixa-me ver… 1, 1, 1, … É! Realmente é! E… o das dezenas?
A.: E o das dezenas fica por ordem crescente.
M.: Por ordem crescente?! Deixa-me cá ver. 2, 3, 4, … Fica mesmo. E agora como é que completas o resto da coluna, por linha ou por coluna? Como queres?
A.: Em linha.
M.: Então faz. 31, 32. É assim mesmo! 33, 34, … 40. Olha uma coisa, em linha, se leres os números da direita para a esquerda, o que é que acontece?
A.: Ficam em ordem decrescente.
M.: Está bem! Só queria saber se sabias!
A.: Mas na última coluna é sempre de 10 em 10, porque tenho o algarismo das unidades acaba sempre em zero.
M.: Ah! Pois é. E o algarismo das dezenas?
A.: É sempre em ordem crescente. (Excerto da gravação aúdio – Par A – 2ª fase)

As três mães, sem exceção, adotaram o estilo democrático, comunicando abertamente com as filhas encorajando-as a tomar responsabilidades e a autorregularem as suas aprendizagens (Baumrind, 1967). Verificou-se a ocorrência de progressos no envolvimento das mães no TPC, à exceção da mãe C que apresentou sempre um envolvimento positivo.

Segundo Menezes (2005) o envolvimento dos pais no TPC pode ser um meio de desenvolver a comunicação aprendida na sala de aula, com a orientação do professor, como se pretendia e se verificou. Também Coleman e Tabin (1992) destacam a promoção deste envolvimento, confirmando que o processo depende da iniciativa e do convite dos professores, tal como se verificou. Os resultados sugerem que uma mudança no tipo de envolvimento dos pais no TPC afeta positivamente a qualidade de comunicação estabelecida durante a resolução de tarefas matemáticas. Desta forma, será também possível promover progressos na forma dos alunos apresentarem as suas respostas (mais claras) e os seus registos (mais estruturados), ou seja, contribuindo para um melhor desempenho e para a diminuição das dificuldades de aprendizagem da Matemática.

Detetaram-se dificuldades, adequaram-se estratégias de ensino às caraterísticas dos alunos, identificaram-se as suas motivações e interesses, bem como o caso do envolvimento dos pais.

> Mãe A: (…) Sinto menos dificuldade em explicar-lhe pois há uma forma diferente de falar nas aulas de matemática e que eu fui aprendendo ao longo deste projeto. (…) É uma forma prática e divertida de aprender. (…) Agora mostra mais segurança naquilo que diz e comunica bem melhor. (…) Quando traz tarefas novas é ela que me explica e eu consigo percebê-la. (…) No ano passado eu tinha que consultar o caderno dela muitas vezes. Agora faço-o, mas mais para satisfazer a minha curiosidade sobre os registos que lá estão e não tanto para consulta. Já não há necessidade. (Excerto da entrevista à mãe A – 2ª fase)

Conclusões

Relativamente à questão: "Como se carateriza o envolvimento dos pais participantes no TPC de Matemática?" foi possível verificar um envolvimento das mães maioritariamente positivo. Foram as mães que se envolveram no TPC de Matemática, tal como encontrado nos estudos de Voorhis (2001). As mães promoveram a motivação das alunas para a realização das tarefas de TPC e fomentaram a autorregulação das suas aprendizagens. Estes dados vão no sentido dos trabalhos de Baumrind (1967) que mostraram os efeitos positivos do estilo parental democrático. Deste modo também ajudaram a desenvolver a autoeficácia elevada das alunas, o que, por sua vez deverá influenciar positivamente a resposta face às dificuldades na aprendizagem da Matemática, tal como referem Aunola et al. (2003). Estas mães auxiliaram as filhas na resolução das tarefas matemáticas (TPC) usando os princípios de contagem, determinaram se as situações apresentadas incluíam sequências, adequaram estratégias (de cálculo e de tentativa erro), observaram se as respostas a que chegaram eram ou não aceitáveis e integraram termos matemáticos próprios destes dois anos de escolaridade. Estes dados concordam com o defendido por Menezes (2005). O envolvimento positivo das mães foi mais evidente na mãe C, uma vez que as outras mães lideraram a resolução do TPC tornando as filhas elementos passivos, embora todas as alunas tenham lido os enunciados, maioritariamente por iniciativa própria. Estas mães colocaram questões pertinentes às alunas, mas por vezes sugeriram e adiantaram respostas. Nem sempre lhes deram oportunidade para se expressar nem para autorrefletir sobre as respostas, de forma global na 1ª fase. Já as investigações de Gonida et al. (2009) vão no sentido de confirmar que os pais que têm confiança nas suas competências adotam práticas mais positivas na colaboração no TPC, enquanto os pais menos confiantes revelam maior interferência. A diferença de literacia matemática das mães poderá ter influenciado a forma de envolvimento no TPC. No entender das duas mães com menos habilitações, o facto de não se sentirem muito à vontade com as matérias trabalhadas com as filhas, fez com que nem sempre mostrassem segurança enquanto se envolviam no TPC. Por vezes, tiveram a necessidade de consultar o caderno diário das alunas a fim de confirmar estratégias de cálculo, conceitos e termos matemáticos em tarefas semelhantes. Uma destas mães salientou o facto de ser importante ouvir a filha explicar, com paciência, e tempo necessário, como é que aprendia na sala de aula, para assim adotar a linguagem própria que reconhece existir na área de Matemática, pois só desta forma é que poderia entender e comunicar matematicamente de forma entendível, com a sua filha.

Sobre a questão “Como se descreve e como evolui a comunicação matemática de alunos no início da escolaridade?” ao comparar os registos das tarefas de sala de aula das alunas com os das tarefas resolvidas em casa e com as gravações áudio (no momento da resolução do TPC de Matemática, em casa, sem a intervenção da professora), foi possível verificar que, no início do estudo, as alunas usaram as estratégias adequadas para resolver as tarefas, mas nem todas tiveram a oportunidade de desenvolver a forma de comunicar matematicamente, uma vez que não se sentiam confortáveis em expor as suas explicações à turma devido à falta de vocabulário. Já, em ambiente mais individualizado (entre aluna e professora e entre alunas e mães), foram capazes de transmitir pormenores significativos para a evolução das aprendizagens matemáticas e para um melhor entendimento matemático (comunicação matemática). No término da 1ª fase, as mães e alunas passaram a integrar mais termos e conceitos matemáticos para justificar as operações e as estratégias que apresentaram. A integração natural de termos matemáticos no discurso produtivo das alunas ficou a dever-se à importância atribuída, desde o início de escolaridade, ao desenvolvimento da comunicação matemática em sala de aula, como forma de ajudar e explicitar o raciocínio. No início da 1ª fase a qualidade da comunicação das alunas revelou-se razoável, tendo evoluído para boa e muito boa na fase seguinte (2º ano). No geral os alunos da turma desenvolveram a capacidade de comunicar, mas foram as 3 alunas participantes no estudo que se destacaram perante os colegas da turma, no que diz respeito à precisão e pormenor com que comunicaram, uma vez que tinham o compromisso de efetuar gravações da resolução do TPC de Matemática e isso teve influência na qualidade da comunicação manifestada.

Registaram-se evoluções na qualidade da comunicação de todas as alunas, como era expectável, mas uma delas com maior acuidade devido às solicitações da mãe no desenrolar do TPC. Foi notória a utilização de questões mais pertinentes e, consequentemente, mais afirmações e justificações dadas pela aluna em resposta ao solicitado. Esta mãe, também orientou a resolução do TPC de Matemática, mas teve o cuidado de incutir na filha a responsabilidade sobre os raciocínios a desenvolver. Globalmente, proporcionou a intervenção da filha, apelando às suas explicações, autorreflexões e aos seus conhecimentos matemáticos com bom uso da linguagem matemática.

Por tudo o que foi vivido ao longo deste estudo, pelo desempenho das alunas e opiniões das mães conclui-se que o envolvimento dos pais/mães no TPC de matemática favorece o desenvolvimento da comunicação matemática dos alunos e por isso importa que os professores encorajem os pais a envolverem-se no TPC de matemática dos seus filhos desde cedo, pois a aposta séria por parte de professores e pais neste tipo de envolvimento poderá elevar o empenho e desempenho dos alunos para o estudo na área da matemática.

Bibliografia

Aunola, K., Nurmi, J., Lerkkanen, M. & Rasku-Puttonen, H. (2003). The roles of achievement-related behaviours and parental beliefs in children´s mathematical performance. *Educational Psychology, 23 (4)*, 403-421.

Baldaque, M. (2008). *Mapeando o TPC de matemática: uma análise processual e suas relações com o rendimento académico.* Braga: Universidade do Minho:

Baumrind, D. (1967). Child care practices anteceding three patterns of preschool behavior. *Genetic Psychology Monographs, 75(1)*, 43-88.

Coleman, P. & Tabin, Y. (1992.) The good teacher: A parent perspective. *American Educational Research Association (AERA)* Annual Meeting. S. Francisco, CA.

Corno, L. (2000). Looking at homework differently. *Elementary School Journal, 100 (5),* 529-548.

Gonida, E. N.; Voulala, K. & Kiosseoglou, G. (2009). Students' achievement goal orientations and their behavioral and emotional engagement: coexamining the role of perceived school goal structures and parent goals during adolescence. *Learning and individual differences, n.19*, p. 53-60.

Hoover-Dempsey, K., Battiato, A., Walker, J., Reed, R., De Jong, J. & Jones, K. (2001). Involvement in Homework. *Educational Psychologist*, 36 (3), 195-209.

Martinho, H. (2004). *A comunicação na sala de aula de matemática: contributos para o desenvolvimento profissional do professor.* (Relato de trabalho de Doutoramento na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa). Consultado a 3 de junho de 2010 em: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/temporario/HM-Projeto.pdf

Matthews, J. ; Ponitz, C. & Morrison, F. (2009). Journal of Educational Psychology, Vol 101(3), Aug 2009, 689-704.

Menezes, L. (2005). *Desenvolvimento profissional de professores pela investigação das suas práticas: Uma experiência colaborativa no campo da comunicação matemática.* In V Congresso Iberoamericano de Educação Matemática. Porto: APM (Edição em CD-ROM). Consultado a 17 de fevereiro de 2010 em: http://clientes.netvisao.pt/lmenezes/Microsoft%20Word%20%20CIBEM%20_%20CO%20LMenezes%20CIE.pdf.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC.

Moreira, A. & Sampaio M. (2000). *A Parceria entre a Escola, a Família e a Comunidade. À descoberta da Matemática e a Dinamização da biblioteca como formas de envolvimento dos pais.* DAPP. Ministério da Educação.

Patall, E.; Cooper, H. & Robinson, J. (2008). Parental involvement in homework: A research synthesis. *Review of Educational Research, 78*, 4, 1039-1101.

Pomerantz, E.; Grolnick, W. & Price, C. (2005). The role of parents in how children approach achievement. In A. J. Elliot & C. S. Dweck (Eds.), *Handbook of Competence and Motivation.* New York: Guilford Press.

Serrazina, M. (2010). *Metas de aprendizagem de Matemática.* Consultado a 12 de abril de 2011 *em www.scribd.com/doc/.../Metas-de-Aprend-Matemática.*

Van Voorhis, F. (2001). Teachers' Use of interactive homework and its effects on family involvement and science achievement of middle grade students. *American Educational Research Association (AERA)* (pp. 1-37). Seattle: Office of Educational Research and Improvement.

Villas-Boas, A. (1996). Dificuldades dos professores nos contactos com as famílias. *In* ADEF e CIIE (Org.) *Ciências da Educação*: *Profissões e espaços sociais*. Porto: CIIE - UP.

FORMULAÇÃO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Pedro Almeida

Escola Superior de Educação de Lisboa

pedroa@eselx.ipl.pt

Resumo

Esta comunicação refere-se a um estudo[35] *que procurou investigar como reagiam os alunos de uma turma do 3.º ano de escolaridade colocados perante a tarefa de formularem perguntas no sentido de transformarem contextos em problemas. Os contextos fornecidos como estímulo consistiam em situações, apresentadas sob a forma de texto, com informação suficiente para constituírem problemas matemáticos através de uma ou várias perguntas. Os dados das situações favoreciam o estabelecimento de relações multiplicativas. Os alunos foram ainda convidados a responder a perguntas formuladas por si mesmos.*

Através de análise de conteúdo procurou-se observar a adequação da pergunta do aluno ao contexto da situação apresentada e, por outro lado, avaliar a sua compreensão da situação através da relação entre a pergunta formulada e a resposta dada.

Palavras-chave: formulação de problemas, problem posing, resolução de problemas.

Introdução

A resolução de problemas apresentados sob a forma de texto exige capacidades de leitura e interpretação da linguagem corrente, mas também a capacidade de compreender o sentido específico que expressões comuns assumem na linguagem matemática. Edward Silver (1987) afirma que "There is considerable evidence suggesting that failure to solve problems can often be attributed to failure to understand the problem adequately." (p.45).

Em orientações curriculares mais recentes como os Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2007), a formulação aparece associada à resolução de problemas, como um meio de promover o desenvolvimento desta capacidade. Neste documento chama-se a atenção para o facto de que os "indivíduos que são bons a resolver problemas têm uma tendência natural para analisar cuidadosamente as situações em termos matemáticos e para formular problemas baseados nas situações com que se deparam" e que a "formulação de problemas surge, naturalmente, às crianças..." (pp.58-59) sugerindo que educadores e encarregados de educação

[35] Tese de Mestrado: Se não sabe por que pergunta – as perguntas dos alunos e a interpretação de problemas, Pedro da Cruz Almeida. ESE de Lisboa. 2011.

alimentem esta sua tendência. No capítulo destinado à faixa etária do pré-escolar ao 2.º ano afirma que “a colocação de problemas, isto é, a criação de novas questões no contexto de um problema, constitui uma disposição matemática que os professores devem fomentar e desenvolver” (p.135) e ainda, referente aos alunos do 2.º ao 5.º ano “é necessário que os alunos aprendam também a colocar questões que permitam alargar o problema” (p.215) de modo a desenvolverem o gosto por satisfazer a sua própria curiosidade sobre ideias matemáticas.

Objetivo e questões do estudo

O objetivo deste estudo consistiu em descrever e procurar interpretar o que acontece na resolução de problemas quando estes são formulados pelos alunos, a partir de situações problemáticas propostas.

Considerei situações problemáticas como sendo situações apresentadas sob forma de texto, imagem, fotografia, ou qualquer outra linguagem, mas desprovidas de perguntas claramente explicitadas, e que podem ser problematizadas mediante uma pergunta formulada dentro do contexto apresentado (Matos, 1994). O meu interesse esteve, neste caso, nas situações problemáticas apresentadas sob a forma de texto escrito.

As questões que orientaram esta investigação foram:

1. Como são vistas pelos alunos as perguntas formuladas nos problemas?
2. Manifestam, os alunos, dificuldades de compreensão dos dados ou do contexto na resposta a perguntas por si formuladas?
3. As perguntas dos alunos exigem novos conceitos ou procedimentos matemáticos, ou implicam uma simples aplicação dos procedimentos ou conceitos já ensinados?

Na base da estruturação do trabalho de campo estavam algumas expectativas relativas ao que os alunos poderiam fazer. Esperava que os alunos, sabendo que tinham de responder à pergunta que formulavam, fizessem perguntas sobre o que compreendiam e às quais saberiam responder. Lakatos (1976, p. 70) citado por Kilpatrick (1987) afirma que “A problem never comes out of the blue. It is always related to our background knowledge” (p. 131).

Enquadramento teórico

A resolução de problemas na educação matemática tem sido um alvo da investigação desde o final dos anos sessenta. O número de trabalhos empíricos realizados e a sua relevância neste campo é enorme e tem contribuído para o desenvolvimento do currículo escolar e para a compreensão do trabalho a desenvolver com os alunos no sentido de promover uma melhor aprendizagem da matemática.

A formulação de problemas nem sempre foi um domínio do vasto campo de trabalho em resolução de problemas (Kilpatrick, 1987).

A afirmação de que os bons solucionadores de problemas são os que naturalmente questionam os dados, merece uma reflexão sobre o significado de "tendência natural para (…) formular problemas" (NCTM, 2007). Seria deveras desanimador que se entendesse "tendência natural" como algo hereditário ou geneticamente determinado e, portanto, fora do alcance da educação (Silver, 1997). Considerando que tal "tendência natural para formular problemas" pode significar um hábito de pensamento passível de ser aprendido, crucial para a capacidade de resolução de problemas, terá então de se entender que, num contexto educativo de iniciação, não se trata de aprender a inventar problemas mas de desenvolver a formulação de perguntas pertinentes sobre os dados, as condições, as relações e as incógnitas do problema proposto, que ajudem na compreensão do problema e na descoberta do processo de resolução.

Kontorovich e Koichu, em 2009, consideravam que a pesquisa sobre a formulação de problemas entrara na fase em que a pesquisa sobre a resolução de problemas e raciocínio matemático estava cerca de duas décadas antes. Do ponto de vista do interesse principal da pesquisa já realizada as tendências podem ser agrupadas em ***i)*** relação entre formulação e resolução de problemas; ***ii)*** habilidades de formulação de problemas e processos envolvidos na formulação dos mesmos; ***iii)*** classificação de tarefas de formulação de problemas e ***iv)*** formulação de problemas e criatividade (Pelczer & Gamboa, 2009).

Metodologia

O objetivo e as questões do estudo levaram-me a optar por uma investigação qualitativa que me permitisse fazer uma interpretação das produções dos alunos.

Nas análises que fiz dos produtos dos alunos, usei categorias *a priori* e categorias emergentes definidas por Fiorentini e Lorenzato (2006).

As categorias definidas *a priori* são as estabelecidas pela literatura, pelo conhecimento construído. De entre estas, para classificar os dados obtidos através das perguntas e respostas dos alunos às situações problemáticas, utilizei os tópicos definidos pelo PNEB, os conceitos de representação icónica e simbólica e a correção das respostas.

As categorias emergentes são as que resultam do trabalho de interpretação do investigador sobre os dados de campo. Este género de categorização foi a que utilizei para classificar as justificações escritas que os alunos deram às perguntas nas duas primeiras tarefas.

A recolha de dados

O trabalho de recolha de dados ocorreu numa escola pública da periferia de Lisboa. O estudo incidiu sobre dezassete alunos da turma no seu 3.º ano de escolaridade, todos com oito anos de idade completados até 31 de Dezembro de 2009 (ano letivo 2009/2010)

O quadro seguinte (Q*uadro 1*) resume a sequência das tarefas realizadas para recolha de dados.

Quadro 1: Sequência de tarefas.

<table>
<tr><th>N.º</th><th>Tarefa</th><th>Sinopse do contexto</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Formular uma pergunta e justificar a sua razão ou objetivo.</td><td rowspan="2">Compra de leite a 3€ cada conjunto de 6 pacotes de litro.</td></tr>
<tr><td>2</td><td>a) Selecionar uma de 4 perguntas e justificar a escolha.
b) Selecionar uma de 4 perguntas e responder.</td></tr>
<tr><td>3</td><td rowspan="2">Formular uma pergunta e responder.</td><td>Viagem de uma turma no teleférico do Zoo de Lisboa.</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Número de passos entre postes de iluminação no passeio de uma rua.</td></tr>
</table>

Estas tarefas foram realizadas individualmente, em suporte escrito, num ambiente de avaliação, procurando evitar esclarecimentos orais para além dos estritamente necessários. As situações problemáticas apresentadas como estímulo à formulação das perguntas foram elaboradas de modo a que pudessem favorecer o estabelecimento de relações multiplicativas, uma vez que este era o assunto dominante dentro dos tópicos que estavam a ser trabalhados nas aulas.

Nesta comunicação vou apenas apresentar e discutir alguns resultados da primeira, terceira e quarta tarefa.

Análise dos dados e alguns resultados

Primeira tarefa

I. Lê com atenção este texto.

O pai pediu ao João que fosse comprar leite ao supermercado. O leite estava embalado em conjuntos de seis pacotes de litro. Cada conjunto de seis pacotes de leite custava três euros.

II. Se fosses professor, que perguntas fazias para dares um problema, com este texto, aos teus alunos? Explica por que fizeste essa(s) pergunta(s).

Figura 1: Primeira tarefa

Aos produtos dos alunos recolhidos nesta tarefa fiz duas análises: uma sobre as justificações dadas às perguntas que fizeram definindo categorias emergentes dos dados e outra que procurou identificar os tópicos matemáticos envolvidos nas mesmas perguntas.

Por meio de uma interpretação das expressões utilizadas pelos alunos para justificar a pergunta que fizeram, procurei fazer emergir categorias que definissem o modo como os alunos viam o motivo dessa pergunta.

O quadro 2 mostra, na coluna da direita, as categorias que emergiram da análise às justificações dadas pelos alunos às perguntas que fizeram. Foram foram justificadas 19 das 29 perguntas formuladas. As perguntas e justificações que se apresentam são exemplos das que se inserem em cada categoria.

Quadro 2: Categorização das justificações dadas na tarefa 1.

N	Perguntas	Justificação	Categorias
Car	Se um conjunto de seis pacotes custava 6€ e o João trouxesse seis conjuntos, quantos euros ele gastou?	Porque é apropriado a eles.	Adequação
Ali.1	Se houvesse o triplo de embalagens, quantas teria? É 18.	Eu escolhi esta pergunta para saber se os meus alunos sabiam calcular o triplo.	Avaliação
Cel.2	Se eu tivesse 10 em cada uma?	Escolhi esta pergunta porque é ainda mais difícil.	Desafio
Ali.2	Quantos grupos de 2 conseguia fazer com o dobro desta embalagens? É 36.	Eu faria esta pergunta para tirar as dúvidas aos meus alunos.	Ensino
Bia	Quantos ao todo são?	Porque é importante saber quantos são de leites.	Necessidade

Na categoria *Adequação* englobei as 2 justificações que expressam a oportunidade da pergunta. A categoria *Avaliação* engloba as 3 justificações em que os alunos referem explicitamente que o objetivo da pergunta é avaliar. A categoria *Desafio* envolve todas as 4 justificações onde é feita qualquer referência à facilidade ou dificuldade da pergunta. A categoria *Ensino* contém todas as 5 justificações que indicam preocupações de ordem da aprendizagem ou da atividade relacionada com o aprender, como a justificação "Porque podem contar de 2 em 2". As 5 justificações que se relacionam com a importância de saber dados mais ou menos explícitos no contexto definiram a categoria *Necessidade*.

Uma outra análise aos dados resultantes desta mesma tarefa foi feita com o objetivo de conseguir vislumbrar os conceitos e procedimentos que estavam a ser explorados nas aulas. Nesse sentido fiz uma categorização das perguntas que os alunos fizeram considerando como categorias definidas a priori os tópicos e objetivos específicos do Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB).

O quadro que se apresenta a seguir (quadro 3) mostra, na coluna da direita as noções em causa nas perguntas dos alunos. A categoria "Localização de dados" consta do quadro das Capacidades transversais, no tópico da Resolução de problemas. As outras encontram-se no quadro referente ao tema Números e operações. A pergunta codificada como Leo.4, apresentada neste quadro, é justificada, pela mesma aluna, com a expressão "Eu fazia esta pergunta para ver se estavam com atenção". Esta é, de facto, uma exigência da capacidade de resolução de problemas no que se refere à interpretação do enunciado.

Quadro 3: Categorização das perguntas da tarefa 1 quanto à incidência matemática.

N	Perguntas	Categorias
Art	Quanto custava os pacotes de leite?	Localização de dados
Leo.3	Se uma embalagem de seis leites custa três euros, quanto precisava para o triplo?	Multiplicação
Ali.2	Quantos grupos de 2 conseguia fazer com o dobro desta embalagens? É 36.	Multiplicação Relações numéricas
Nic.3	Se forem 7 pares quantos leites eram?	Relações numéricas

Mais de metade das perguntas feitas evocavam a multiplicação como procedimento de resposta. A incidência da maioria das perguntas em relações multiplicativas confirmou a expetativa de que os alunos fariam perguntas sobre as noções mais recentemente trabalhadas ou que dominariam.

Como já referi, não apresento os resultados da segunda tarefa.

Terceira tarefa

I. Lê com atenção este texto.

Uma turma de 19 alunos e a sua professora foram fazer uma visita de estudo ao Jardim Zoológico de Lisboa. Uma das actividades que fizeram foi andar no teleférico. Claro que em cada cabine só podiam ir duas pessoas.

II. Faz uma boa pergunta para transformar este texto num problema. Mostra como se pode resolver e responder à pergunta que fizeste .

Figura 2: Tarefa 3.

Aos dados recolhidos nesta tarefa fiz duas análises: uma sobre incidência matemática das produções dos alunos tendo em conta apenas as perguntas e outra sobre as representações utilizadas nas respostas e respetiva correção.

O quadro 4 mostra a incidência matemática das perguntas dos alunos. Expõem-se apenas alguns exemplos de perguntas em cada categoria e indica-se o número de questões que nela foram incluídas.

Quadro 4: Categorização das perguntas da tarefa 3 quanto à incidência matemática.

N	Perguntas	Categorias	n.º de perg.
Art.1	Quantos meninos e meninas andaram a pares no teleférico?	Localização de dados	**1**
Lau	Se acrescentasse mais 6 à turma, quantos ficaram na turma contando com a professora?	Adição	**1**
Mad.1	Se faltassem 10 alunos, quantos iam à visita de estudo?	Subtração	**5**
Ric	Se um teleférico por exemplo custava 26€ e 100 pessoas iam andar de teleférico quanto é que custava?	Multiplicação	**1**
Fil	Quanto teleféricos usaram?	Multiplicação, Divisão	**7**
Mar	Quanto teleférico eram precisos para 19 alunos e 1 professora?		
Nic	Se fossem 20 alunos, quantos teleféricos seriam usados?		

Há uma razão para a diferença entre a categoria Multiplicação – Divisão e a categoria Multiplicação. As sete perguntas incluídas na categoria Multiplicação – Divisão pretendem saber o número de cabines usadas pela turma (um quociente), que claramente se insere dentro da operação divisão na qual temos como dividendo o número de ocupantes das cabines (19 alunos e professora ou 20 alunos) e como divisor o número de alunos por cabine (2). As estratégias que os alunos utilizaram vão desde as contagens de agrupamentos passando pela adição sucessiva até à linguagem formal (20x½) apresentada por uma aluna. Na categoria Multiplicação insere-se o trabalho apresentado pelo Ricardo que reformula completamente a situação do contexto e responde a uma pergunta que incide exatamente sobre multiplicação.

Numa segunda análise pretendi verificar então a representação exibida por cada aluno tendo em conta o valor correto ou incorreto da sua resposta. Dos 15 problemas formulados a resposta é correta em 10 dos que usaram representações icónicas e/ou simbólicas. Destas apenas 4 são unicamente simbólicas. Há uma grande maioria de respostas corretas aos problemas formulados, sendo também verdade que nestes há um recurso frequente à representação icónica como auxiliar ou como confirmação do cálculo. A Leonor é a única que apresenta uma representação exclusivamente simbólica (Figura 3).

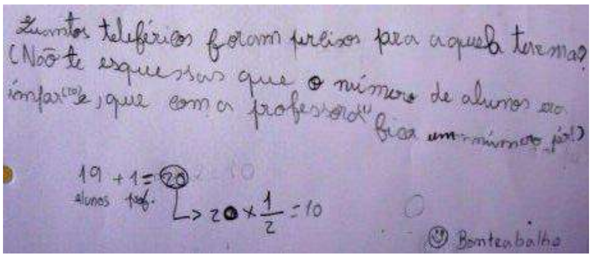


Figura 3: Trabalho da Leonor na tarefa 3.

Quarta tarefa

I. Lê com atenção este texto.

A Helena andava no passeio da rua onde morava e reparou que havia 10 postes de iluminação, todos à mesma distância uns dos outros. Ela contou 36 passos certinhos entre o primeiro e o terceiro poste.

II. Faz uma boa pergunta para transformar este texto num problema de matemática. Responde à pergunta que fizeste e mostra como pensaste através de palavras, desenhos ou contas.

Figura 4: Tarefa 4

Aos produtos dos alunos recolhidos nesta tarefa fiz as mesmas duas análises que na tarefa anterior: uma sobre incidência matemática das produções dos alunos, tendo em conta as perguntas e outra sobre as representações utilizadas nas respostas e respetiva correção.

O quadro 5 mostra a incidência matemática das perguntas dos alunos. Expõem-se apenas alguns exemplos de perguntas em cada categoria e indica-se o número total de questões que nela foram incluídas.

A categoria designada Multiplicação-Regularidades inclui catorze perguntas que poderiam ser resolvidas recorrendo a tabelas de sequência de múltiplos, dentro do tópico das regularidades tal como é apresentado no PMEB. Neste caso a sequência teria de ser os múltiplos de 18, que corresponde ao número de passos percorridos num intervalo entre dois postes.

Quadro 5: Categorização das perguntas da tarefa 4 quanto à incidência matemática.

<table>
<tr><th>N</th><th>Perguntas</th><th>Categorias</th><th>n.º de perg.</th></tr>
<tr><td>Fre</td><td>O Ricardo viu 36 postes mas 10 estavam desligado. Quanto será o resultado da conta e o dobro?</td><td>Subtração e Multiplicação</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Lau</td><td>São dez postes. Se houvessem 4 lâmpadas em cada poste, quantas eram as lâmpadas ao todo?</td><td>Multiplicação</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Ali</td><td>Se fosses a contar do primeiro ao sexto?</td><td rowspan="4">Multiplicação-Regularidades</td><td rowspan="4">14</td></tr>
<tr><td>Car</td><td>Se contasse até ao 9º poste de iluminação, quantos passos dava?</td></tr>
<tr><td>Edg</td><td>Quantos passos seriam de dois postes de iluminação?</td></tr>
<tr><td>Tia</td><td>Quantos passos deu do 1º ao último poste?</td></tr>
</table>

A análise que fiz procurando verificar o valor correto ou incorreto da resposta e a representação exibida por cada aluno, mostra-me que, num total de 16 respostas (a 16 problemas) apenas 3 estão corretas. Saber o número de passos entre um determinado número de postes é objeto de 14 perguntas e é apenas uma a resposta correta entre as que manifestam este interesse. Trata-se do trabalho do Edgar, que procura saber o número de passos entre 2 postes, achando um meio de 36 através da expressão simbólica 36x½=18.

Os erros dos alunos parecem envolver, de facto, a dificuldade em ver que entre um certo número de postes há sempre um intervalo a menos e que se trata de múltiplos de 18. Dito desta maneira parece difícil esta questão. O recurso à representação icónica dos postes teria facilitado o acesso à resolução? Porque não recorreram os alunos à representação icónica na resolução dos problemas que formularam? São perguntas que ficaram sem resposta.

A Alice e Carla que formulam perguntas bem determinadas, reveladoras de um domínio particular de relações multiplicativas. A Alice pergunta especificamente o número de passos até ao 6.º poste e explica claramente o seu raciocínio: "Eu pensei assim: Como três é metade de seis e três postes levam 36 passos, o dobro é 72 passos. Carla pergunta sobre o número de passos até ao 9.º poste e apresenta a multiplicação de por 3, sem explicitar o seu raciocínio, mas seguindo talvez o mesmo raciocínio da Alice, multiplicando por 3 porque 9 é o triplo de 3.

Discussão dos resultados

No sentido de descrever e procurar interpretar o que acontece na resolução de problemas quando estes são formulados pelos alunos, a partir de situações problemáticas desenhei as tarefas 3 e 4, nas quais os alunos teriam de responder a uma pergunta por si formulada. Com estas duas tarefas responderia à 2ª e 3ª questão do estudo. No entanto, pareceu-me também importante perceber que sentido atribuiriam os alunos às suas perguntas (1ª questão do estudo). A resposta a esta primeira questão do estudo procurei-a através da análise aos resultados da tarefa 1, na qual o aluno teria apenas de identificar o sentido que dava à pergunta por si formulada, sem ter de responder.

Esperava que as perguntas dos alunos não divergissem muito do género de perguntas a que habitualmente são submetidos e que, portanto, as suas justificações revelassem o sentido que os próprios atribuíam às perguntas que têm de responder nas aulas. As categorias definidas a partir da análise dos dados revelam uma diversidade de sentidos: ***i)*** adequação das perguntas aos alunos ou ao contexto da situação, ***ii)*** avaliação da atenção e dos conhecimentos dos alunos, ***iii)*** preocupações com o ensino e com o ***iv)*** nível de desafio colocado e a ***v)*** necessidade de identificar informações importantes. Embora não se possa considerar que qualquer destes diferentes sentidos sejam assumidos por todos os alunos da turma, não deixam de ser indicadores dos sentidos que as suas perguntas assumem na formulação dos problemas.

Ao fornecer um contexto como estímulo para a formulação de perguntas (problemas) confere-se guias ou condicionantes ao trabalho pedido, mas essas condicionantes não são as únicas a interferir no produto final. O conhecimento que tem o aluno que formula a pergunta é outra condicionante. Esta parece-me ainda mais importante quando se pede também uma resposta. É, aliás, nesta linha que Lin (2004) usa a formulação de problemas como um meio para a avaliação do conhecimento dos alunos.

Um dos aspetos que pretendi observar nas tarefas 3 e 4 foi se os alunos manifestavam dificuldades de compreensão dos dados fornecidos na resposta à pergunta por si formulada. Esperava encontrar na correta resposta do aluno o indicador da compreensão dos dados fornecidos no contexto. No entanto, a maioria de respostas corretas à tarefa 3 e a sua quase inexistência na tarefa 4 mostraram-me que o conhecimento evocado pelo aluno para formular uma pergunta não garante uma resposta correta, mesmo sendo ele a fonte da pergunta. Entretanto, tal não significa que a pergunta formulada pelo aluno não coloque corretamente em confronto os dados da situação. Tanto as perguntas que pretendem saber o número de cabines necessárias para levar todos os alunos a passear no teleférico (tarefa 3), como as que procuram saber quantos passos daria a Helena entre um certo número de postes (tarefa 4), relacionam os dados fornecidos na situação de uma maneira que é possível responder. Estas são perguntas que fazem sentido dentro da situação e, talvez se possa dizer, são as mais interessantes, sendo plausível afirmar que a situação problemática foi compreendida.

Nas respostas dos alunos às perguntas que formularam percebe-se como são exigidos dos alunos mais que uma mera aplicação de conhecimentos que já lhe foram ensinados, algo que é sobretudo evidenciado pelos resultados obtidos na tarefa 4. A facilidade ou correção com que os alunos respondem às perguntas formuladas na tarefa 3 e a dificuldade ou incorreção manifestada nos procedimentos utilizados nas respostas às perguntas formuladas na tarefa 4 permitem-me pensar como é importante e decisivo o estímulo fornecido aos alunos na situação problemática. Mais do que discutir se o contexto da situação deve ser fácil ou difícil é necessário encontrar estímulos cuja qualidade possa motivar os alunos e colocá-los em tensão para a formulação de perguntas que sejam desafiantes e promovam a aprendizagem (Silver, 1997).

Embora variadas orientações curriculares recomendem a integração da formulação de problemas no processo de aprendizagem parece-me haver ainda um vasto campo de investigação sobre o modo de o fazer, sobretudo, parece-me, quando se pretende que isso desenvolva a capacidade de resolver problemas. Depois de Pólya deu-se, talvez, mais importância à sequência de etapas para a resolução de um problema do que à sua importante lista de perguntas. Hoje, parece-me a mim, o mais importante é aprender a fazer perguntas. Formular perguntas a partir do nada, a partir de estímulos em que ainda não foram formuladas perguntas, ou de problemas já formulados? Com que objetivo? De que modo cada uma destas modalidades deve ser usada e que aprendizagem promove?

Referências bibliográficas

Fiorentini, D. Lorenzato, S. (2006). *Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos*. Campinas: Autores Associados

Kilpatrick, J. (1987). Problem Formulating: Where Do Good Problems Come From? In Schoenfeld, A. H. (Ed), *Cognitive Science and Mathematics Education*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates (pp 123-147).

Kontorovich, I. Koichu, B. (2009). Towards a Comprehensive Framework of Mathematical Problem Posing, *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, pp. 401-408, Thessaloniki, Greece: PME

Lakatos I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge:Cambridge University Press.

Lin, Pi-Jen. (2004). Supporting Teachers on Designing Problem-Posing Tasks as a Tool of Assessment to Understand Students' Mathematical Learning, *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol 3 pp 257–264 , Bergen, Norway, PME

Matos, J. F. (1994). Processos cognitivos envolvidos na Resolução de Problemas de aplicação matemática. In Fernandes, D. Borralho, A. Amaro, G. (Ed.) *Resolução de Problemas: processos cognitivos, concepções dos professores e desenvolvimento curricular.* IIE, Lisboa (pp. 65-92)

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.

Pelczer, I. Gamboa, F. (2009). Problem Posing: Comparison Between Experts and Novices, *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, pp. 353-360, Thessaloniki, Greece: PME

Silver, Edward A. (1987). Foundations of Cognitive Theory and Research for Mathematics Problem-Solving Instruction. In Schoenfeld, A. H. (Ed), *Cognitive Science and Mathematics Education*, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates (pp 33-60).

Silver, Edward A. (1997). Fostering Creativity through Instruction Rich in Mathematical Problem Solving and Problem Posing, *ZDM The International Journal of Mathematics Education*, Vol. 29 N.º 3 pp. 75-80.

CRIATIVIDADE: ONDE A ENCONTRAR NA AULA DE MATEMÁTICA?

Sandra Pinheiro
Escola Básica Júlio Saúl Dias
sandrapinheiro@ipvc.pt

Isabel Vale
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo
isabel.vale@ese.ipvc.pt

Resumo

Este texto tem por base uma investigação, mais alargada cujo objetivo é analisar a relação entre a resolução e formulação de problemas e a criatividade, tendo em conta a tipologia de tarefas e as representações que os alunos utilizam nos seus registos. Optou-se por uma abordagem qualitativa na modalidade de estudo de caso. O presente texto trata uma primeira análise da criatividade através da resolução de três tarefas por uma das díades em estudo. Os resultados preliminares mostram que os alunos se envolveram ativamente, revelando capacidades de natureza criativa sobretudo ao nível da fluência.

Palavras-chave: Criatividade, resolução de problemas, tarefas, ensino básico.

Introdução

Em pleno século vinte e um, Robinson (2010) chama a atenção sobre as finalidades da escola referindo que "a maioria dos alunos nunca chega a explorar o alcance das capacidades e interesses" (p. 28). Reforça ainda esta ideia afirmando que "as perspetivas da educação asfixiam algumas das mais importantes capacidades de que os jovens precisam para se afirmarem cada vez mais na exigente sociedade do século XXI: os poderes da mente criativa" (p. 27). Este mesmo autor apela à necessidade de, nas escolas, se proporcionarem ambientes onde cada um se sinta inspirado a desenvolver-se criativamente.

Na fase de mudança curricular e social em que nos encontramos, os alunos necessitam de desenvolver e aperfeiçoar a sua capacidade de pensar criativamente e de resolver problemas. Cabe, deste modo, à escola proporcionar mecanismos que estimulem o potencial criativo dos seus alunos, e que mantenham esse potencial, de modo que lhes permita desenvolver a sua imaginação e produzir novas ideias que lhes venham a ser úteis pessoalmente e para a sociedade no global (Vale, 2012).

De acordo com o Programa de Matemática do Ensino Básico - PMEB (2007) a atividade matemática desenvolve-se criativamente utilizando meios e capacidades cognitivas variadas, sendo estas indispensáveis à formação de conhecimento matemático. Por outro lado, no Relatório Nacional de 2011 sobre a Prova de Aferição de Matemática do 2.º Ciclo (GAVE, 2011), menciona que os alunos continuam a "evidenciar dificuldades na resolução de problemas contextualizados bem como uma preocupante falta de sentido crítico face à plausibilidade das soluções que apresentaram e uma manifesta dificuldade na comunicação escrita das suas ideias e raciocínios matemáticos" (p. 20). Por conseguinte, é destacada a importância dos alunos vivenciarem experiências matemáticas nomeadamente ao nível da resolução de problemas onde estes experimentem, através da partilha e da discussão de ideias, diversas estratégias de resolução, analisando as suas próprias produções bem como as produções de outros alunos e interpretando os respetivos significados, tendo sempre em consideração a promoção do conhecimento assim como a compreensão dos conceitos e dos procedimentos.

Em Portugal são poucos os estudos efetuados sobre a criatividade em matemática e os que ocorreram são no âmbito da psicologia. De acordo com Silver (1997) a pesquisa direcionada para o ensino da matemática que compreende a resolução de problemas pode promover nos alunos abordagens mais criativas nesta área. De acordo com este autor quer a resolução quer a formulação de problemas estão intimamente ligadas com a criatividade na aula de matemática.

Neste sentido considerou-se pertinente a realização de um estudo, com alunos do 5º ano de escolaridade, que ainda está em curso. Pretende-se, com este estudo, compreender a relação entre a criatividade e a resolução e formulação de problemas. Esta comunicação apenas focará a relação entre a criatividade e a resolução de problemas.

A dinâmica da aula de matemática

Desde sempre, a resolução de problemas é considerada como uma das dimensões primordiais da atividade matemática (ME, 2007). Pehkonen (1997) afirma que "pelo mundo fora, a resolução de problemas faz parte do currículo de matemática" (p. 64). Refere também que, na literatura, existem algumas razões que fundamentam essa presença, tais como o desenvolvimento de habilidades cognitivas gerais, a promoção da criatividade, o fazer parte do processo da aplicação da matemática e por outro lado por motivar os alunos na aprendizagem da matemática. Mas então, qual o significado de *resolução de problemas*? Segundo Boavida, Paiva, Cebola, Vale e Pimentel (2009) diversos autores referem que a "resolução de problemas é o processo de aplicar o conhecimento previamente adquirido a situações novas e que pode envolver exploração de questões, aplicação de estratégias e formulação, teste e prova de conjeturas" e "constituindo uma parte integrante de toda a aprendizagem matemática." (p. 14). Por outro lado, a solução desses mesmos problemas de diferentes formas torna-se uma ferramenta para a construção de conexões matemáticas. (Leikin, 2009). Neste sentido, Roberts (2010) recomenda que o ensino decorra em torno da resolução de problemas. Segundo este mesmo autor, os professores devem ser promotores de uma atmosfera de envolvimento dos alunos na sala de aula onde a resolução de problemas possa florescer e onde os alunos possuam momentos em que possam "formular, discutir e resolver problemas complexos" o desenvolvimento e esforços consideráveis para numa fase seguinte serem estimulados a ponderar os seus raciocínios.

De facto, no PMEB (2007) é referido que o desenvolvimento da matemática advém do esforço posto na resolução de problemas que lhe são caraterísticos. A resolução de problemas assume a identificação de capacidade transversal e por esse motivo deve ser trabalhada ao longo dos diferentes níveis de ensino e dos diferentes temas da matemática. Polya (2003) vai mais longe quando afirma que o professor deve "colocar-se no papel" do estudante, percebendo a sua visão, tentando descobrir de que modo é que está a desenvolver o seu raciocínio, realizando uma questão ou propor uma medida que pudesse ter vindo do próprio aluno. Por outro lado, o mesmo autor apresenta quatro etapas para a resolução de problemas: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e verificação.

Torna-se fundamental refletir sobre a importância dada à resolução de problemas nas nossas escolas. Do mesmo modo, é necessário analisar de que modo através desta capacidade transversal é possível promover mais eficazmente a aquisição de conhecimentos matemático (Vale & Pimentel, 2012). Também aos alunos deve ser permitida a exploração livre de tarefas propostas de resolução de problemas para proporcionar momentos altamente ricos e com rasgos criativos nas suas produções (GAVE, 2011).

Neste sentido, torna-se pertinente enquadrar a resolução de problemas na dinâmica da sala de aula. Segundo Stein e Smith (2009), uma tarefa é um segmento da atividade da sala de aula destinada à promoção de uma ideia matemática própria. Por outro lado, segundo as autoras, as tarefas devem apresentar-se com uma duração bem estipulada e que sustentem toda a aprendizagem dos alunos requerendo que os mesmos realizem pensamentos conceptuais e que estejam predispostos a realizar conexões, permitindo que, com o passar do tempo, os alunos desenvolvam ideias intrínsecas à matemática. Também afirmam que as tarefas de níveis de exigência diferenciadas proporcionam distintas formas de aprendizagem e sendo tarefas de maior grau de exigência permitem a utilização de estratégias que levam a conexões com saberes matemáticos, sendo estas diversificadas e motivadoras, onde os alunos encontrem diferentes formas de representar, ao contrário das de baixo nível de exigência cognitiva que conduzem a estratégias rotineiras. Concordante com estas ideias sobre a aula de matemática está Skovsome (2000) quando defende os "cenários de investigação", segundo os quais na aula de matemática se deve optar por uma abordagem de "investigação" em contraposição ao domínio do "paradigma do exercício", o qual admite apenas uma abordagem rotineira e repetitiva onde impera a resposta correta.

Neste cenário, é ao professor que cabe apostar em boas tarefas, que, de acordo com a NCTM (2007), são aquelas que permitem a introdução de noções matemáticas cruciais, constituindo deste modo um repto aos alunos permitindo-lhes diferentes abordagens. Por sua vez, Leikin (2009) afirma que nas tarefas de múltiplas soluções, as quais denomina por "multiple-solution task" (MST), são consideradas soluções diferentes para um mesmo problema, aquelas que apresentam: diferentes representações sobre conceitos matemáticos que envolvem as tarefas; diferentes propriedades dos objetos matemáticos em campos distintos; diferentes propriedades dos objetos matemáticos em campos distintos.

Meissner (2005) afirma que são necessários problemas "desafiadores" e "ideias espontâneas" para continuar a desenvolver habilidades individuais e sociais e para raciocinar criativamente, em educação matemática ou seja é imprescindível a utilização de problemas verdadeiramente desafiadores. Vale (2012) afirma que esta tipologia de tarefas, que habitualmente exigem uma visão diferente, promove o pensamento divergente, mais rico, complexo e produtivo, movimentando deste modo conhecimentos prévios. Consideramos que o pensamento divergente carateriza-se pela observação do problema, analisando todas as possibilidades de resolução e explorando a melhor estratégia para alcançar a solução do problema (Vale & Pimentel, 2012). Na aplicação das tarefas cognitivamente exigentes e matematicamente desafiadoras, de acordo com Stein et al (2008), para facilitar a discussão matemática, estas devem passar por cinco momentos na sua aplicação: 1) antecipar, prevendo o que os alunos poderão vir a realizar; 2) monotorizar o trabalho desenvolvido pelos alunos assim como o seu empenho nas tarefas; 3) selecionar determinados alunos para a exposição do seu trabalho à turma; 4) Sequenciar as resoluções a apresentar pelos alunos; 5) Conectar as resoluções apresentadas com as ideias matemáticas.

Deste modo, Boavida et al. (2009) afirmam que os problemas abertos, são especialmente indicados para trabalho de grupo, sendo importante prever, no final, uma síntese feita com toda a turma, onde as ideias, os conceitos e as estratégias utilizadas são exploradas e os alunos têm oportunidade de clarificar os seus raciocínios e de compreender os dos outros. Ventura, Branco, Matos e César (2002) corroboram esta ideia quando afirmam que o trabalho em díade pode contribuir para o sucesso de uma atividade de investigação. Segundo estas autoras, durante o trabalho em díade, existem vários momentos, sendo eles de partilha, ajuda mútua, discussão e justificação, existindo grande probabilidade de daí resultarem produções criativas. Por outro lado, consideram que o trabalho em díade melhora significativamente a autonomia, o sentido crítico e até mesmo o rendimento escolar dos alunos. No entanto também referem que o trabalho em díade é fortemente influenciado pelos critérios de escolha dos elementos da díade e pelo contexto em que se insere – a turma. Estas autoras afirmam ainda que a dinâmica da díade torna-se mais proficiente se for constituída por alunos distintos quer ao nível das competências matemáticas, quer em termos sociais e de personalidade.

Criatividade e Resolução de problemas: que relação?

"Todos nascemos com enormes capacidades criativas. Mas essas capacidades têm de ser desenvolvidas" (Robinson, 2010, p. 64). Mina (2008) refere que a criatividade é vista como um requisito básico para viver na nossa era, da mesma forma que refere que no ensino deve ser dado ênfase ao processo criativo. Se procurarmos o percursor no estudo da criatividade em matemática, Sriraman (2004) afirma que Henri Poincaré é assinalado por bastantes autores como sendo o pioneiro nesta área. A criatividade está intrinsecamente ligada à matemática, mas no sistema de ensino não ocorre a valorização deste domínio na matemática (Silver, 1997).

Leikin (2009) assegura que a definição de criatividade não é simples, pois existem variadas conceções e que estas estão em permanente mudança. Mann (2006), numa revisão da literatura sobre criatividade, refere a existência de inúmeras maneiras de expressar a criatividade, reconhecendo mais de 100 definições contemporâneas da temática. Pehkonen (1997) afirma que o "pensamento criativo pode ser definido como a combinação entre o pensamento lógico e o pensamento divergente" (p. 65). Sobre esta questão do pensamento divergente Vale (2011) afirma que tanto a flexibilidade como a originalidade incentivam o pensamento divergente, proporcionando processos mentais de ordem superior. Entretanto Gontijo (2007) refere que a criatividade em matemática é considerada como sendo a habilidade de expor diferentes hipóteses de solução adequadas a uma situação ou problema, para que estas evidenciem aspetos distintos dos problemas e/ou formas díspares de resolve-lo, particularmente modos pouco comuns.

Vale e Pimentel (2012) referem que a criatividade é uma área esquecida pelos docentes ao longo das aulas de matemática ou porque os professores não têm conhecimento sobre o tema e/ou ainda não tomaram consciência da sua relevância em matemática e no ensino da matemática, mas que deve assumir um papel preponderante ao nível do programa de matemática, ao longo dos diferentes níveis de ensino. Neste sentido, Mann (2006) afirma que "a essência da matemática é pensar criativamente, e não simplesmente chegar à resposta correta" (p. 238). Leikin (2009) refere que o potencial criativo pode ser desenvolvido e que o desenvolvimento da matemática criativa é um objetivo da educação matemática na escola. Mina (2008) refere ainda que a criatividade pode ser promovida por meio da utilização de problemas não rotineiros e que o professor deve ser promotor de um ambiente criativo para que os alunos tenham consciência das suas próprias capacidades.

Segundo Mann (2006), a criatividade matemática é essencial no desenvolvimento de talento em matemática mas também é muito difícil de identificar e de avaliar. De acordo com alguns autores (e.g. Balka, 1974; Conway, 1999; El-Demerdash & Kortenkamp, s.d.; Leikin, 2009; Mann, 2006), as produções dos alunos devem ser analisadas contemplando três dimensões da criatividade: fluência, flexibilidade e originalidade. Consideram ainda que *fluência* corresponde ao número de respostas/resoluções diferentes corretas de um aluno perante um problema; a *flexibilidade* corresponde ao número de respostas/resoluções apresentadas que retratam diferentes formas de pensar; a *originalidade* corresponde ao número de respostas únicas ou raras, por comparação com as respostas/resoluções da turma. Deste modo a resolução de problemas é um contexto privilegiado para o estudo da criatividade em matemática.

Contexto e metodologia

Neste texto descrevem-se os resultados preliminares de uma investigação de natureza qualitativa, segundo o design de estudo de caso de cariz particular e bastante pormenorizado (Yin, 2011). Com este estudo pretende-se, analisar a relação existente entre a resolução de problemas e a criatividade tendo em conta a tipologia de tarefas e analisando as representações e resoluções apresentadas pelos alunos. Foram utilizadas tarefas com múltiplas soluções e/ou tarefas apenas com uma solução e múltiplas estratégias de resolução, privilegiando os contextos figurativos.

A experiência didática subjacente a esta investigação decorreu, ao longo das aulas de matemática 2º ciclo, 5º ano de escolaridade, numa turma de vinte e um alunos, entre os nove e os onze anos, organizados em díade, das quais apenas estão a ser estudadas exaustivamente três díades. Consideram-se como questões orientadoras principais: Como se carateriza a criatividade de alunos do 2º ciclo na resolução de problemas? Que diferentes processos e representações são utilizados pelos alunos na resolução de problemas? Neste artigo apenas serão analisadas as resoluções, correspondentes a três tarefas, apresentadas por uma díade. Esta díade é composta por dois alunos - um de nível três e outro de nível quatro. Estes alunos consideram que a matemática é uma disciplina que exige empenho e muita concentração, sendo por eles bastante admirada, e que, se trabalharem muito, podem ser criativos em matemática. Afirmam mesmo que *"um problema de matemática é como comer gelatina, é fácil*". Estes alunos, apesar de bastante agitados, irrequietos e até mesmo faladores, são dinâmicos e aplicados, tendo demonstrado enorme preocupação na resolução das tarefas assim como na busca constante de novas e diferentes soluções, bem como diferentes representações.

Neste trabalho naturalista com o foco na criatividade e na resolução de problemas no qual as tarefas têm um papel fundamental, percorreu-se o modelo de Stein, Engle, Smith e Hugues (2008), tendo a professora: realizado a previsão das resoluções das tarefas; acompanhado o trabalho realizado e o empenho da díade durante a aplicação das tarefas num ambiente descontraído; selecionado os alunos para a apresentação do seu trabalho à turma; organizado os trabalhos, de forma sequencial, do mais comum para o mais diverso e escolhendo os alunos para fazerem a apresentação dos mesmos; promovido as conexões entre as resoluções com as ideias matemáticas.

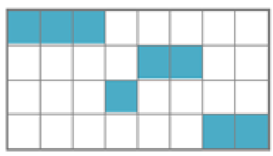
Esta investigação decorreu ao longo do terceiro período do ano letivo, onde a experiência didática recaiu no tema "Números de Operações", no tópico "Números racionais não negativos". Em todas as tarefas utilizadas durante a experiência, os alunos foram convidados a analisar, resolver e discutir as tarefas propostas, dando enlevo à comunicação quer oral, quer escrita, nomeadamente as representações realizadas pelos alunos. A recolha dos dados foi realizada de forma holística, onde se incluem as observações na sala de aula, questionário, notas de campo, entrevistas e produções escritas dos alunos. Para melhor percecionar a ideia que possuíam de criatividade, mais rigorosamente a criatividade em matemática, foi realizado um inquérito no início da operacionalização da experiência didática. Do mesmo modo, no fim da aplicação das tarefas, foi realizado um inquérito final onde os alunos exprimiam a sua opinião relativamente ao facto das tarefas serem criativas ou serem promotoras de produções criativas, ao grau de dificuldade das tarefas, assim como à metodologia de trabalho em díade. Também se utilizaram entrevistas às díades em estudo.

Resultados e discussão

Apresentam-se aqui os resultados preliminares decorrentes da análise das resoluções de três tarefas[1] utilizadas por uma díade em estudo.

Tarefa 1

Que fração da figura está pintada?



Explica o teu raciocínio.

No conjunto das tarefas, a Tarefa 1 foi a primeira proposta de trabalho uma vez que de entre o conjunto de tarefas aplicadas esta foi a mais simples, e gradualmente utilizamos tarefas mais complexas e/ou abertas.

[1] As tarefas aqui apresentadas são adaptadas de Vale, Sousa, e Pimentel, (2007); Vale, Fão, Alvarenga, Sousa, e Pimentel (2008); Vale e Pimentel (2012).

Para esta tarefa, perspetivava-se que os alunos escrevessem que a fração que representa a parte pintada era $\frac{8}{32}$, tendo por base a noção de fração na sua interpretação como parte/todo. Eventualmente, poderiam visualizar uma figura equivalente onde se colocavam os quadrados pintados numa só linha, na horizontal, e deste modo seria representado por $\frac{1}{4}$, como é possível visualizar na Figura 1.

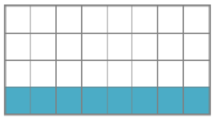


Figura 1- Resolução possível da Tarefa1

A díade apresentou as resoluções esperadas, como é possível observar na Figura 2.

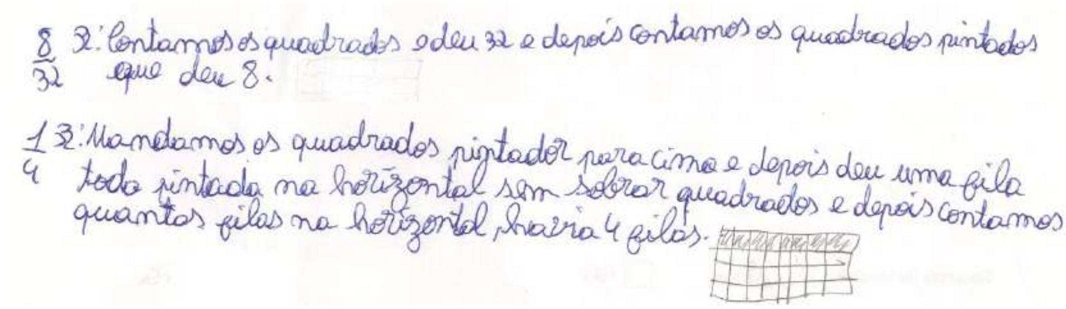


Figura 2- 1ª e 2ª resoluções da Tarefa 1

A díade, para além de chegar a estas duas resoluções, também apresentou como solução colocar todos os quadrados pintados em colunas, às quais denominam por “fila na vertical”. Descobriram que ficariam duas colunas pintadas e uma vez que a unidade ficaria dividida em oito colunas, chegaram à fração $\frac{2}{8}$, como é possível ver na Figura 3.

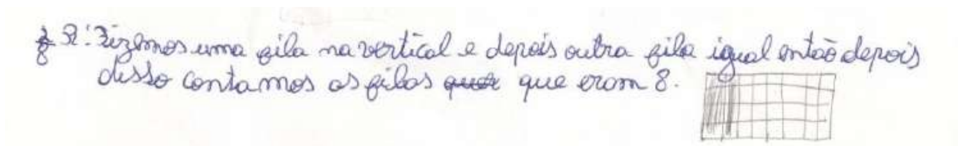


Figura 3- 3ª resolução da Tarefa1

Finalmente, aproveitando a noção de fração equivalente, a díade chegou às seguintes frações: $\frac{16}{64}$ ao multiplicar a fração $\frac{8}{32}$ por dois; $\frac{4}{16}$ ao multiplicar por dois a fração $\frac{2}{8}$; $\frac{32}{128}$ ao multiplicar a $\frac{16}{64}$ por dois. Estes cálculos são visíveis na Figura 4.

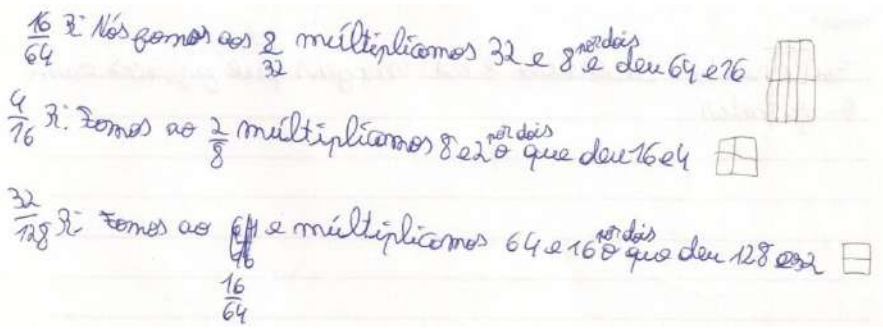
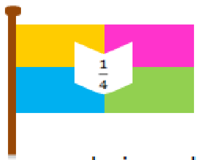


Figura 4- 4ª, 5ª e 6ª resoluções da Tarefa1

Ao analisar as resoluções quanto ao nível da criatividade, nas suas três categorias, fluência, flexibilidade e originalidade, verificamos que a díade em termos de fluência conseguiu apresentar seis resoluções corretas; em termos de flexibilidade apresenta estratégias de resolução de natureza diferente. Quanto à originalidade, no contexto da turma, podem ser consideradas originais: 3ª resolução, Figura 3, pois apenas três no total de dez díades, incluindo esta, apresentou-a; a 6ª resolução, Figura 4, nas dez díades, apenas uma díade, para além desta, apresentou esta resolução.

Tarefa 2

A professora Ana decidiu fazer com os seus alunos bandeirinhas para enfeitar a festa da vila. Propôs alguns materiais para a sua construção: folhas de papel retangulares brancas; marcadores ou lápis de cor; cola; régua; palitos ou palhinhas e instruções para a sua construção. Cada aluno teria de dividir a folha de papel em partes geometricamente iguais, tantas quantas conseguisse, de acordo com o país: país dos "meios" $\frac{1}{2}$; país dos "terços" $\frac{1}{3}$; país dos "quartos" $\frac{1}{4}$. Depois de dividir o papel teriam de colorir cada uma com diferentes cores e construir noutro papel um dístico com o nome do país.



Apresenta diferentes possibilidades de construir as bandeiras do país dos "meios", dos "terços" e dos "quartos".

Para esta tarefa, perspetivava-se que os alunos representassem a bandeira do país dos "meios" dividindo na vertical, na horizontal e na diagonal. Quanto ao país dos "terços", esperava-se que os alunos dividissem na vertical e na horizontal. Finalmente quanto ao país do "quartos" acreditava-se que realizassem igualmente a divisão na horizontal, na vertical e com as duas diagonais.

Esta tarefa envolveu mudança de estratégia que decorreu da observação sobre o trabalho realizado. A folha branca disponibilizada, para alguns alunos, estava a condicionar a visualização assim como provar a equivalência de partes obtidas, Neste sentido, foi disponibilizada uma folha de papel quadriculado, para mais facilmente chegarem aos raciocínios necessários.

A díade, para o país dos "meios", apresentou as divisões esperadas, Figura 5.

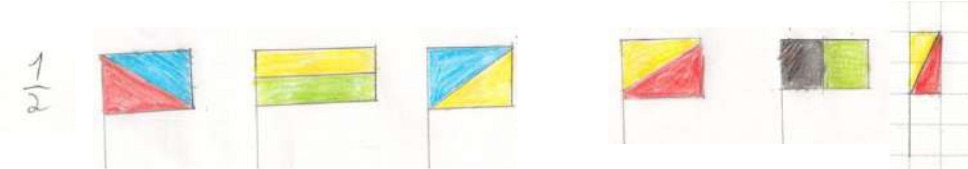


Figura 5 – País dos “meios”

Para além das referidas divisões, também apresentou uma divisão da diagonal pouco comum, como é possível observar na Figura 6.

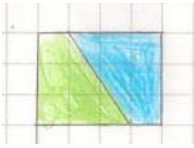


Figura 6 – País dos “meio, divisão pouco comum

Para o país dos “terços” a díade, apresentou as divisões esperadas, Figura 7.

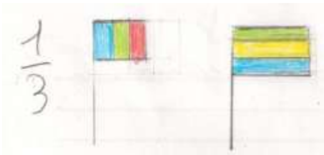


Figura 7 – País dos “terços”

No que respeita ao país dos “ quartos”, a díade apresentou a divisões esperadas, Figura 8.

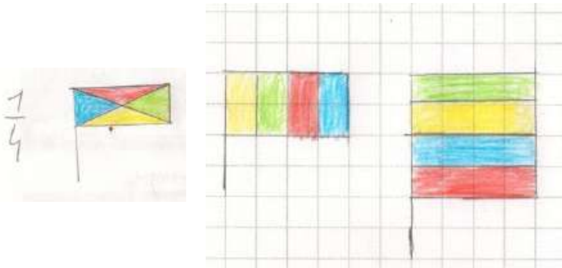


Figura 8- País dos “quartos”

Esta díade, para além de apresentar as resoluções esperadas, mostrou mais uma hipótese para o país dos “quartos”, como está na Figura 9.

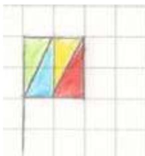
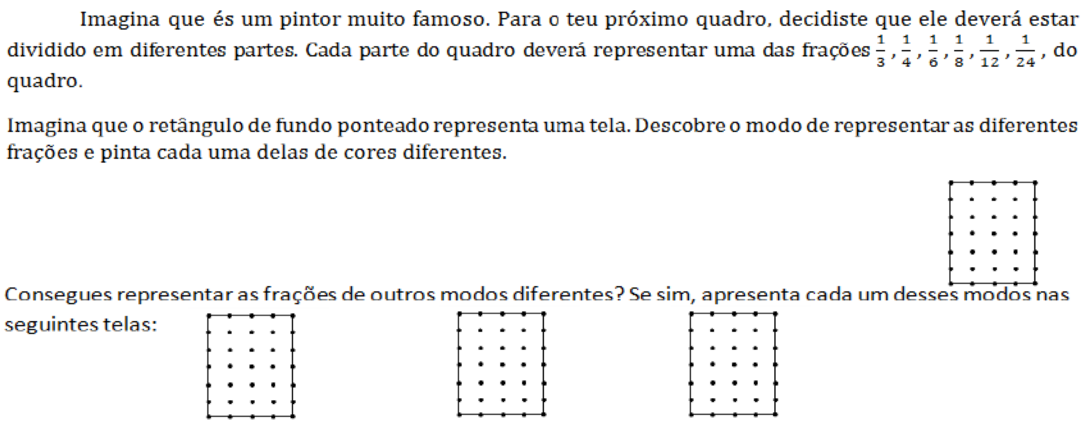


Figura 9 – Resolução incomum

Ao examinar as resoluções ao nível da criatividade, nas suas três categorias, fluência, flexibilidade e originalidade, verificamos que a díade em termos de fluência conseguiu apresentar treze soluções diferentes; em termos de flexibilidade apresenta estratégias de resolução de natureza diferente Quanto à originalidade, a resolução da Figura 6 assim com as resoluções da Figura 9 foram consideradas originais no contexto da turma, no conjunto das dez apenas esta díade realizou-as.

Tarefa 3


Imagina que és um pintor muito famoso. Para o teu próximo quadro, decidiste que ele deverá estar dividido em diferentes partes. Cada parte do quadro deverá representar uma das frações $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}$, do quadro.

Imagina que o retângulo de fundo ponteado representa uma tela. Descobre o modo de representar as diferentes frações e pinta cada uma delas de cores diferentes.

Consegues representar as frações de outros modos diferentes? Se sim, apresenta cada um desses modos nas seguintes telas:

Esta tarefa foi uma das últimas devido o grau de complexidade ser considerado elevado. Para esta tarefa, perspetivava-se que os alunos representassem as frações em "bloco", ou seja sem as partir em diferentes partes.

Esta díade representou as frações conforme o esperado, Figura 10.

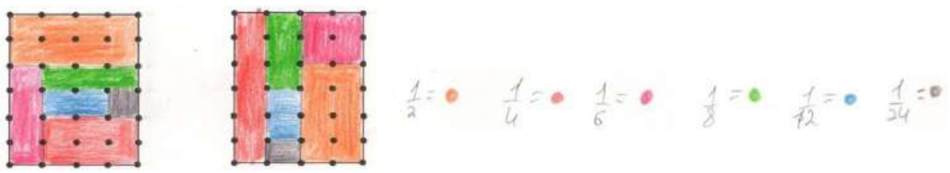


Figura 10 – Resolução da Tarefa 3

Esta díade, por outro lado apresentou mais uma solução, desta vez separando as peças de cada "bloco" representativo de cada fração, Figura 11, que também outras, em pequeno número, o fizeram.

Figura 11 – Resolução pouco comum

Esta díade, de forma imprevisível, apresentou mais duas resoluções, uma dividindo a quadrícula em duas partes e outras em quatro partes, Figura 12, e ainda afirmou que existiam mais soluções, bem como colocaram reticências para reforçar esta ideia.

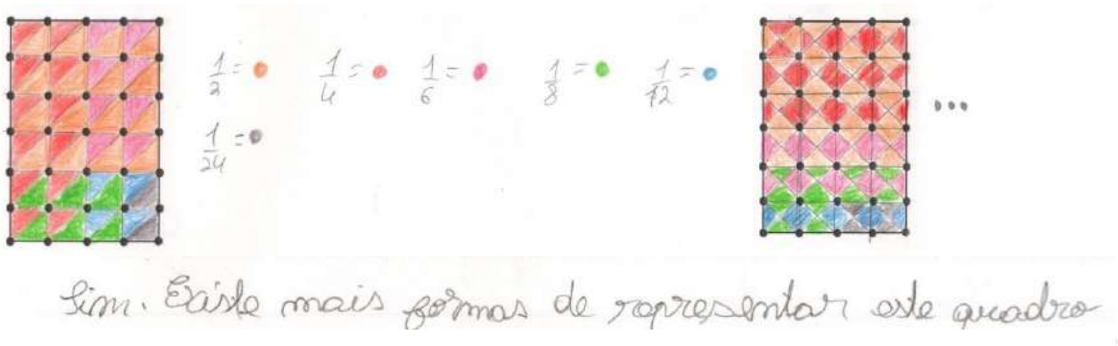


Figura 12 – Resoluções muitíssimo raras

Será de salientar que esta tarefa já foi aplicada num estudo, Vale e Pimentel (2012) com alunos da formação inicial onde os resultados comparativamente com os obtidos com estes alunos foram muito fracos e onde não apareceu nenhuma resolução onde tenha sido considerado partes da quadrícula do geoplano, ou seja, ninguém apresentou resoluções do género ilustrado na Figura 12. Estes resultados poderão ser um aspeto que merece ser melhor estudado.

Algumas considerações finais

Este é um trabalho numa área ainda muito recente ao nível da educação, a criatividade. Todas as tarefas foram desenhadas de acordo com os objetivos previamente enunciados e com o tópico em estudo. Apesar de, como já foi referido, este ser um estudo ainda em curso, podemos contudo adiantar algumas reflexões.

Ao longo deste estudo foram encontradas algumas dificuldades, nomeadamente o facto de os alunos não estarem familiarizados com tarefas de natureza mais aberta, tarefas com múltiplas soluções e tarefas fechadas na resposta mas de múltiplas estratégias de resolução. Por esse motivo e uma vez que os alunos nunca tinham trabalhado segundo o atual PMEB (ME, 2007), ao longo do ano letivo foi necessário, de forma mais intensiva, explorar estratégias de resolução de problemas e até mesmo dinâmicas de grupo. Uma outra dificuldade sentida foi a avaliação da criatividade dos alunos na resolução de problemas. Para proceder a avaliação da criatividade ao nível dos seus domínios (fluência, flexibilidade, originalidade) tomou-se como fio condutor ideias de autores, sendo eles Silver (1997), Conway (1999) e El-Demerdash e Kortenkamp (s.d.).

Foi uma agradável surpresa o grande envolvimento e empenho dos alunos na realização das tarefas, nomeadamente a busca constante de mais, melhores e diferentes soluções assim como de mais, melhores e diferentes metodologias revelando grande persistência na resolução das tarefas e boas dinâmicas de grupo. Todo este trabalho desenvolveu-se tendo por base o modelo de trabalho proposto por Stein et al (2008). O trabalho desenvolvido pelos alunos superou, em grande escala, as espectativas delineadas para realização da experiência didática.

O conhecimento prévio de um vasto conjunto de estratégias de resolução de problemas resultante de um árduo trabalho desde o primeiro dia de aulas assim como o incentivo constante à procura de mais, melhores e diferentes soluções vão de encontro ao pensamento divergente, tendo as díades revelado facilidade na apresentação de diferentes representações.

A realização da avaliação da criatividade ao nível da resolução de problemas não é com o intuito de categorizar os alunos nas já referidas dimensões, mas sim ter conhecimento de quais as tarefas que permitem florescer a criatividade na sala de matemática.

Para concluir podemos constatar que ao nível da criatividade, a dimensão mais fácil de analisar é a fluência. No que respeita à flexibilidade e originalidade são sempre mais complexas de discernir. Foi possível concluir que tarefas de múltiplas soluções permitem aos alunos promover as conexões com conteúdos e conceitos matemáticos assim como a própria criatividade.

Referências bibliográficas

Balka, D. (1974). Creativity ability in mathematics. *Aritmetic Teacher, 21*, 633-636.

Boavida, A., Paiva, A., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2009). *A experiência Matemática no Ensino Básico - Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação - Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

Conway, K. (Maio de 1999). Assessing Open-Ended Problems. *Mathematics Teaching in the Middle School, 4*, 510-514.

El-Demerdash, M., & Kortenkamp, U. (s.d.). *The development of an Instrument to Measure Geometric Creativity.* Obtido em janeiro de 2012, de http://cinderella.de/material/gkt/files/gct_paper.pdf

GAVE. (2011). *Prova de Aferição de Matemática do 2.º Ciclo – Relatório Nacional de 2011.* Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

Gontijo, C. (2007). Relações entre criatividade, criatividade em matemática e motivação em matemática em alunos do ensino médio. *Tese de doutoramento*. Universidade de Brasília, Brasília.

Leikin, R. (2009). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu, *Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students* (pp. 129-145). Rotterdam, the Netherlands: Sense Publishers.

Mann, E. (2006). Creativity: The Essence of Mathematics. *Journal for the Education of the Gifted, 30(2),* 236-260.

ME. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

Meissner, H. (2005). Creativity and Mathematics Education. *ICMI Regional Conference - The third East Asia Regional Conference in Mathematics Education.* Shangai, Nanjing e Hangzhou - China.

Mina, F. (2008). Promoting Creativity for all students in Mathematical Education. *The 11th International Congress on Mathematical Education.* México.

NCTM. (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar.* (M.Melo, Trad.) Lisboa: Associação de Professores de Matemática (APM).

Pehkonen, E. (1997). Fostering of Mathematical Creativity - The State-of-Art in Mathematical. *ZDM, Vol. 29, No.3,* 63-67.

Polya, G. (2003). *Como resolver problemas* (1.ª ed.). (L. Moreira, Trad.) Lisboa. (Trabalho original publicado em 1945): Gradiva.

Roberts, S. (2010). The important thing about teaching problem solving. *Mathematics Teaching in the Middle School (NCTM), 16,* 104-108.

Robinson, K. (2010). *O Elemento.* (Â. S. Pereira, Trad.) Porto: Porto Editora.

Silver, E. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM, 3,* 75-80.

Skovsmose, O. (2000). Cenários para Investigação. *Bolema, 14,* 66-91.

Sriraman, B. (2004). The characteristics of mathematical creativity. *The Mathematics Educator, 14(1),* 19–34.

Stein, M., & Smith, M. (2009). Tarefas Matemáticas como quadro para a reflexão. *Educação e Matemática*, 22-28.

Stein, M., Engle, R., Smith, M., & Hugues, E. (2008). Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five Practices for Helping Teachers Move Beyond Shown and Tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 313-340.

Vale, I. (2011). Tarefas Desafiantes e Criativas. *Actas do SERP -Seminário em resolução de problemas, CD-ROM* (pp. 1-12). Rio Claro, Brasil: UNESP.

Vale, I. (2012). As tarefas de padrões na aula de Matemática: um desafio para professores e alunos. *Interações, 20,* 181-207.

Vale, I., & Pimentel, T. (2012). Um novo-velho desafio: da resolução de problemas à criatividade em Matemática. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. M. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes, & S. Carreira (Ed.), *Investigação em Educação Matemática - Práticas de Ensino da Matemática* (pp. 347-360). Lisboa: SPIEM.

Vale, I., Fão, A., Alvarenga, D., Sousa, R., & Pimentel, T. (2008). *Matemática no 1º e 2º Ciclos - Propostas para a Sala de Aula.* Viana do Castelo: Escola Superior de Educação de Viana do Castelo.

Vale, I., Sousa, R., & Pimentel, T. (2007). *Matemática no 2º Ciclo - Propostas para a Sala de Aula.* Viana do Castelo: ESE-IPVC.

Ventura, C., Branco, N., Matos, A., & César, M. (2002). Um aventura fantástica: Contributo do trabalho em díade para o sucesso de uma actividade de investigação. In APM, *Actas do ProfMat2002.* Viseu: APM.

Yin, R. (2011). *Qualitative Research from Start to Finish.* New York: The Guilford Press.

PROPOSTA DE UM PROJETO DE INVESTIGAÇÃO SOBRE A COMUNICAÇÃO MATEMÁTICA COM ALUNOS COM DEFICIÊNCIA AUDITIVA: UM ESTUDO DE CASO NUMA TURMA DO 7.º ANO

Joana Margarida Tinoco
CIEd, Universidade do Minho
joanamargaridatinoco@gmail.com

Maria Helena Martinho
CIEd, Universidade do Minho

Anabela Cruz-Santos
CIEd, Universidade do Minho

Resumo

A nível nacional e internacional constatámos que existe pouca investigação sobre as aprendizagens matemáticas de alunos com deficiência auditiva, e em particular, que relacione a comunicação com a aprendizagem efetiva da matemática em alunos com deficiência auditiva, apesar dos estudos existentes indicarem que estes alunos se encontram desfasados dos seus pares no desempenho em matemática.

Nesse sentido, este estudo a que nos propomos procura interligar estas duas áreas distintas que lhe conferem o suporte teórico: a educação matemática e a educação especial. Tendo como finalidade contribuir para conhecer a forma como se processa a comunicação matemática com alunos com deficiência auditiva, pretendemos fazer um levantamento para compreender os padrões de interação presentes, o tipo de tarefas propostas e a forma como é discutida a sua resolução e as diversas representações matemáticas presentes nas aulas, pois considerámos que estas podem constituir barreiras ao nível da comunicação matemática.

Pretendemos que esta comunicação promova um espaço de reflexão e discussão sobre esta temática, de onde podem surgir contribuições importantes para a implementação do nosso estudo.

Palavras-chave: matemática, comunicação matemática, deficiência auditiva.

Introdução

A comunicação está presente em qualquer sala de aula de qualquer disciplina. Ou mais amplamente, na maioria das ações humanas. Quando falamos de alunos com deficiência auditiva (DA), longe de pensarmos que esta comunicação não existe, pensamos sim que pode ser encarada numa perspetiva diferente, que deve ser bem compreendida de modo a poder ser bem aplicada e contribuir para o sucesso académico destes alunos em matemática.

Este projeto centra-se na comunicação matemática que se estabelece, em contexto de sala de aula, com alunos com DA. A maioria dos estudos que envolvem alunos com DA em contexto educacional focam o seu interesse na linguagem ou literacia e relativamente poucos olham especificamente para questões que envolvem a matemática. Apesar disso, os estudos existentes sugerem que o desempenho académico em matemática dos alunos com DA é bastante inferior ao dos seus pares. O estudo de caso que se pretende desenvolver tem como finalidade contribuir para conhecer a forma como se processa a comunicação matemática com alunos com DA. Pretendemos, para tal, fazer um levantamento e tentar compreender os padrões de interação presentes; o tipo de tarefas propostas e a forma como é discutida a sua resolução e as diversas representações matemáticas presentes nas aulas, pois consideramos que podem constituir barreiras ao nível da comunicação matemática.

Alguns estudos sobre a matemática e a deficiência auditiva

Tradicionalmente, a matemática é vista como uma disciplina complexa e em que várias gerações de alunos manifestaram dificuldades na sua aprendizagem. A literatura existente não nos permite generalizar sobre a facilidade, ou a falta dela, com que os alunos com DA encaram a matemática, chegando alguns relatos a ser contraditórios.

Apesar disso, a maioria dos estudos apontam para um atraso na aprendizagem da matemática dos alunos com DA em relação aos seus pares entre 2 a 3,5 anos. Este atraso mantém-se constante ao longo da escolaridade e não aumenta à medida que a escolaridade aumenta, o que sugere que ambos têm processos de aprendizagem semelhantes e que o atraso na aprendizagem se deve a um atraso no processo inicial de aprendizagem da matemática e não em algum desenvolvimento desviante da mesma (Swanwick, Oddy & Roper, 2005).

São referidos, por exemplo, atrasos ao nível do conceito de número, desenvolvimento do conceito de fração, da resolução de problemas aritméticos de comparação, conhecimentos de contagem (Zarfaty, Nunes & Bryant, 2004), no raciocínio multiplicativo informal (Nunes et al., 2009), na composição aditiva de números, a compreensão da relação inversa entre adição e subtração (Nunes, Evans, Barros & Burman, 2011).

Kritzer (2009) e Nunes, Evans, Barros e Burman (2011), sugerem que este desfasamento se deve ao facto das crianças com DA não dominarem conhecimentos que são adquiridos pela generalidade das crianças, antes destas ingressarem no ensino básico, e que depois servirão de base à formação de conhecimentos aprendidos na escola, por terem menos acesso a experiências de aprendizagem informais. Estes alunos têm, de uma maneira geral, menos exposição à informação, por isso, demoram mais tempo a adquirir conhecimentos informais, comparativamente com os seus pares.

Alguns autores, como Nogueira e Zanquetta (2008), referem que nos discursos escolares é frequente encontrar afirmações que vão no sentido de os alunos com DA evidenciarem uma maior facilidade na aprendizagem da matemática do que da língua portuguesa. No entanto, a matemática aparece nesses discursos como que compartimentada, quando é referido que os alunos com DA têm dificuldades na realização de atividades do foro cognitivo, realçando a dificuldade que evidenciam na resolução de problemas matemáticos.

Esta diferença verificada nos discursos escolares pode estar associada ao que Kelly, Lang e Pagliaro (2003) e Pagliaro e Ansell (2002) defendem quando referem que o enfoque das aulas de matemática para estes alunos se encontra na resolução de exercícios, mais ou menos rotineiros, favorecendo a aquisição de regras e treino de procedimentos e raramente em situações de resolução de problemas cognitivamente desafiadoras.

A valorização do trabalho rotineiro surge para alguns autores como associado a um aumento de confiança por parte dos alunos nas suas capacidades. Por exemplo, Nogueira e Zanquetta (2008) acreditam que, o facto das tarefas propostas nas aulas serem rotineiras e pouco desafiantes, pode proporcionar aos alunos com DA um acréscimo de confiança nas suas capacidades para lidar com esta disciplina tornando-a uma disciplina apreciada, considerada fácil e em cuja aula eles participam com prazer. Estes autores referem que enquanto a generalidade das crianças não gosta de resolver tarefas como, por exemplo, “expressões numéricas”, os alunos com DA realizam-nas até com algum prazer, uma vez que compreendem exatamente o que é esperado deles na tarefa em questão e demonstram satisfação em cumpri-la com sucesso.

No entanto, a resolução destas tarefas pouco aliciantes e pouco exigentes e que assentam na memorização de procedimentos não favorece o desenvolvimento de um pensamento verdadeiramente matemático pois surgem da mesma forma que "somos capazes de memorizar uma canção numa língua que não conhecemos" (Nogueira e Zanquetta, 2008, p. 234). A estes alunos está-lhes vedada a possibilidade de aceder a uma matemática de um nível cognitivamente mais exigente.

Um outro motivo que leva a que não sejam exploradas verdadeiras situações de resolução de problemas são as dificuldades acrescidas que os alunos com DA evidenciam na leitura e interpretação de enunciados de problemas matemáticos. Este facto faz com que, quando estas situações são exploradas, seja dada mais importância e mais tempo, à análise e compreensão de enunciados do que ao desenvolvimento do pensamento crítico, raciocínio, síntese de informação e aspetos inerentes à análise da resolução do problema e à análise e desenvolvimento de outras possíveis estratégias de resolução (Kelly, Lang & Pagliaro, 2003; Nunes & Moreno, 2002; Zarfaty, Nunes & Bryant, 2004). Em particular, o apoio dado na fase inicial da resolução do problema, em que se tenta clarificar de tal forma o enunciado, pode transformá-lo numa mera resolução de exercícios. Este risco está patente em todas as situações de sala de aula, no entanto, com alunos com DA a preocupação pela compreensão da situação apresentada no problema, leva a um acréscimo de explicações.

Fávero e Pimenta (2006) e Kritzer (2009) referem que os alunos com DA evidenciam dificuldades em traduzir a situação problemática, tentando solucionar o problema por meio de operações aritméticas desvinculadas da questão, considerando possível mais de uma resposta para a solução de uma mesma questão. Além disso tentam seguir um padrão de atuação no que diz respeito à resolução de problemas: utilizam os números que aparecem no enunciado, na sequência em que foram fornecidos, associando-os com os sinais convencionais das operações aritméticas, sem evidenciar espírito crítico, quer durante a resolução quer na apresentação de resultados.

Outro resultado extraído do estudo levado a cabo por Kelly, Lang e Pagliaro (2003) é a noção de que, para colmatar possíveis dificuldades de comunicação oral, estes alunos tendem a ser sujeitos a situações que envolvem estratégias visuais concretas em detrimento das estratégias analíticas. Os autores chamam a atenção para o facto da representação visual ser uma excelente estratégia para perceber as variáveis de um problema (para qualquer aluno), mas é insuficiente, por si mesma quando se trata da resolução de problemas mais avançados, mais desafiantes ou mais complexos.

Estas questões levaram Nogueira e Zanquetta (2008) a alertar para o facto da escola não se dever limitar a traduzir para Língua Gestual as metodologias, estratégias e procedimentos utilizados nas turmas regulares. Deve sim, organizar tarefas e atividades eficazes que promovam o trabalho matemático dos alunos com DA.

A comunicação matemática

Tal como referem Boavida, Amado e Coelho (2009), podemos comunicar matematicamente através de modos diversos: por exemplo, oralmente ou por escrito, através de símbolos matemáticos e da linguagem natural ou recorrendo a diagramas, tabelas, gráficos, materiais manipuláveis e simulações, à semelhança da forma como nos conseguimos orientar num país cuja língua não conhecemos. Também segundo Martinho (2007), comunicar pode abarcar situações como falar, escrever, escutar, observar, ler, argumentar, especular, provar, explicar, pensar e discutir.

A expressão comunicação matemática está a ser amplamente usada, tendo os documentos curriculares como os programas de matemática, a nível nacional, ou o NCTM, a nível internacional, contribuído muito para esse fenómeno. No entanto, esta expressão tem subjacente perspetivas distintas, que lhe conferem vários modelos de caracterização, resultantes da investigação que tem vindo a ser desenvolvida.

Este projeto, recorre a uma composição de quatro categorias que, segundo Brendefur e Frykholm (2000), agrupam as várias perspetivas sobre comunicação matemática. Estas categorias são designadas por *comunicação unidirecional, comunicação contributiva*, c*omunicação reflexiva e comunicação instrutiva* e representam níveis sucessivos de comunicação no sentido em que cada um inclui características do seu antecessor.

Relativamente à *comunicação unidirecional*, o professor dá poucas oportunidades aos alunos para comunicar as suas estratégias, ideias e pensamentos pois tende a dominar o discurso da aula, fazendo exposições e colocando perguntas fechadas. Por outro lado, na *comunicação contributiva,* o discurso centra-se em “interações entre professor e alunos em que a conversação se limita ao apoio e partilha, frequentemente com pouco ou nenhum pensamento profundo (...) Estas conversações são, tipicamente, de natureza corretiva” (p. 127). Já quando se está perante uma c*omunicação reflexiva* assemelha-se à contributiva no sentido em que também há partilha de ideias, estratégias e resoluções. No entanto, as conversações matemáticas constituem pontos de partida para o aprofundamento da compreensão matemática dos participantes. Ou seja, o que os alunos e professor dizem e fazem tornam-se num objeto explícito de discussão e reflexão.

Por fim, na *comunicação instrutiva*, mantém-se o encorajamento à partilha de ideias e à reflexão sobre essas ideias e suas relações. Como resultado da conversação que ocorre, o professor, não só começa a compreender os processos de pensamento, pontos fortes e dificuldades dos alunos, como a utiliza para modelar a sua própria forma de ensinar, o que torna este tipo de comunicação muito poderoso.

As orientações veiculadas no novo programa de matemática do ensino básico vão no sentido de valorizar os últimos dois níveis de comunicação: comunicação reflexiva e instrutiva. Estes níveis são conceptualmente diferentes dos anteriores (unidirecional e contributiva), pois o foco passa da transmissão de informação para a construção e negociação de significados (Brendefur e Frykholm, 2000). Esta mudança implica alterações significativas no papel dos alunos e do professor.

Quando se analisa a comunicação na sala de aula, qualquer que seja o nível de comunicação presente, é necessário encará-la segundo um processo dinâmico. De acordo com Martinho (2007), na análise do processo comunicativo deve-se atender a três fases da comunicação: a *interação*, a *informação* e a *influência*. A *interação* pode ser vista como a dinâmica do processo de comunicação, envolvendo dois ou mais sujeitos em graus eventualmente distintos. As várias interações que ocorrem na sala de aula podem ser caracterizadas dependendo dos seus protagonistas: interação entre professor-aluno, professor-grupo, professor-turma, aluno-aluno, aluno-grupo, aluno-turma, grupo-turma, bem como os seus simétricos. A *informação* configura o objeto da comunicação e a construção dos discursos pessoais e coletivos que lhe estão associados e compreende a troca de mensagens verbais e não verbais através da utilização de códigos comuns.

Por fim, a *influência* está intimamente associada à informação e à interação. Mas a existência de um ambiente interativo onde a informação está presente é condição necessárias mas não suficientes para que ocorra uma influência. Para isso é necessária a atribuição de significados por parte do recetor, e portanto, um envolvimento ativo. Em contexto de sala de aula, há vários tipos de influências que podem ser exercidas sobre os alunos e que correspondem de forma mais ou menos explícita a preocupações do professor, particularmente ao nível do desenvolvimento social e cognitivo.

Ao longo do ano letivo, alunos e professor negoceiam de forma explícita ou implícita modos de participação, papéis, intervenções, espaços de partilha, argumentação e discussão bem como aspetos de disciplina dentro da sala de aula. Esta negociação remete-nos para a influência pois o aluno, através das vivências na sala de aula, interioriza e adota determinados comportamentos e atitudes. É neste sentido que se defende que a comunicação matemática desempenha um papel fundamental quando se tenta perceber o que os alunos sabem ou são capazes de fazer.

Quando os alunos são desafiados a pensar e a raciocinar sobre a matemática e a comunicar as ideias daí resultantes, oralmente ou por escrito, aprendem a ser claros e convincentes, desenvolvendo a sua própria compreensão da matemática, pelo que importa propiciar aos alunos momentos de interação em torno de ideias matemáticas significativas, de modo a favorecer a apropriação das várias dimensões da matemática e a possibilitar a organização e aprofundamento de ideias e conceitos (Boavida, Amado & Coelho, 2009).

É nesse sentido que o novo programa de matemática do ensino básico (Ponte et al., 2008) a considera uma "capacidade transversal" a todo o trabalho realizado na disciplina de matemática, um "objetivo curricular importante" ou uma "importante orientação metodológica", referindo que "o aluno deve ser capaz de expressar as suas ideias, mas também de interpretar e compreender as ideias que lhe são apresentadas e de participar de forma construtiva em discussões sobre ideias, processos e resultados matemáticos" (p. 8).

Comunicação matemática: alguns estudos com alunos com deficiência auditiva

A comunicação em sala de aula é um fator que pode contribuir para o insucesso dos alunos com DA. A matemática envolve representações visuais, pictóricas e simbólicas mas também textuais, o que à partida pode constituir uma limitação a quem lida com dificuldades de comunicação.

O professor deve ter uma preocupação acrescida em usar um meio adequado de comunicação que seja claro e facilmente compreendido pelos alunos com DA. Se os alunos não forem capazes de interagir em sala de aula usando linguagem científica, não serão capazes de colocar questões no sentido de esclarecer as suas dúvidas e de processar conhecimentos matemáticos mais complexos. Uma comunicação fluida na sala de aula faz com que os alunos com DA se sintam mais envolvidos na sua aprendizagem e consequentemente estejam mais dispostos a aprender (Rowley, 2001).

O uso da língua gestual como forma de comunicação na aula de matemática também tem suscitado alguma reflexão. Lang e Pagliaro (2007) referem que os alunos com DA memorizam significativamente melhor termos que são transmitidos na forma de um único gesto do que os transmitidos com recurso ao soletrar ou à combinação de gestos. Também o uso de termos considerados familiares é melhor entendido e recordado pelos alunos com DA. No entanto, é necessário estar-se atento ao facto de existirem alguns gestos que correspondem a palavras cuja interpretação em matemática é diferente da interpretação comum. Estes fatores realçam a necessidade de pensar a forma como o conhecimento é transmitido pelo professor ou partilhado entre colegas pois é fundamental para um aluno com DA.

Kelly e Gaustad em 2007 e Júnior e Ramos em 2008 referem que um dos grandes desafios da comunicação de pessoas com DA ao nível da matemática (bem como de outras áreas científicas) é a inexistência de gestos específicos para termos empregues nesta disciplina, e que por vezes também são usados em língua portuguesa mas com significados alternativos, o que compromete o sucesso na compreensão de alguns conceitos associados a esta área.

Para tornar clara e específica a interpretação da informação transmitida de forma oral ou escrita em gestual, é necessária a existência de mais vocabulário na modalidade gestual, de forma a colmatar algumas ambiguidades nas instruções e na interpretação ao nível dos sinónimos, da codificação e da manipulação de conceitos mais avançados sem recorrer ao soletrar (gestual). Kelly e Gaustad (2007) salientam que nos últimos anos tem havido algum esforço em criar gestos (em língua gestual inglesa) para representarem vocabulários técnicos necessários a áreas específicas. Contudo, a generalidade dos professores ainda não os conhece ou simplesmente não os usa.

Favero e Pimenta (2006) argumentam que embora a língua gestual seja uma forma de comunicar diferenciada, ela proporciona, à semelhança da oralidade, uma forma dos sujeitos partilharem informações e negociarem significados, considerado pelas autoras fundamental na construção dos conceitos matemáticos.

Após a negociação de significados, os alunos deverão desenvolver argumentos progressivamente mais complexos e abstratos, ao longo da sua escolaridade. Este facto é propiciado pelo enriquecimento que se verifica no pensamento quando os alunos apresentam a sua metodologia de resolução de determinado problema, quando justificam o raciocínio utilizado ao grupo de trabalho, grupo turma ou ao professor, ou quando formulam questões sobre assuntos que os intriguem. Segundo Silva, Sales e Bentes (2009), a comunicação é a verdadeira chave para o sucesso em situações escolares, enquanto meio de interação privilegiado através do qual todos os alunos, quer tenham DA ou não, podem indicar aos professores se os objetivos curriculares estão a ser alcançados com sucesso.

Objetivos do projeto

A finalidade deste estudo é contribuir para a compreensão da forma como se processa a comunicação matemática com alunos com DA. Pretendemos que ele constitua uma interligação de duas áreas distintas mas que existem em simultâneo nas nossas escolas: a comunicação matemática na sala de aula e a educação especial. Pretendemos fazer um levantamento e tentar compreender os padrões de interação presentes; o tipo de tarefas propostas, a forma como é discutida a sua resolução e as diversas representações matemáticas presentes nas aulas, pois consideramos que podem constituir barreiras específicas ao nível da comunicação matemática. O projeto está enquadrado pelas seguintes questões de investigação:

1. Que padrões de interação se estabelecem na aula de matemática com alunos com deficiência auditiva?
2. Que tipo de tarefas são propostas na aula de matemática aos alunos com deficiência auditiva?
3. Como são discutidas as resoluções das tarefas propostas na aula de matemática?
4. Que representações matemáticas são utilizadas na aula de matemática com alunos com deficiência auditiva?

Na nossa opinião, conhecer os padrões de interação presentes nas aulas de matemática com alunos com DA, pode contribuir para conhecer a forma de trabalhar matematicamente destes alunos e com estes alunos. Pretendemos fazer um levantamento sobre qual o principal referencial das interações: o professor, aluno-aluno/grupo ou aluno/grupo-turma. Também consideramos importante perceber o papel do intérprete de língua gestual portuguesa (LGP) enquanto mediador das interações professor/alunos.

No que respeita às tarefas que são propostas nas aulas de matemática, iremos fazer a sua recolha e análise e observar as aulas para compreender como é que os alunos as trabalham. Particularmente, será analisada a forma como os alunos interpretam os enunciados e se envolvem na sua concretização, individualmente ou em grupo, como justificam os seus raciocínios e como argumentam matematicamente em contexto de aula na eventual apresentação e discussão de resultados.

Desde a introdução da tarefa à sua conclusão, os alunos trabalham diferentes representações matemáticas. É igualmente nosso interesse perceber quais são as representações matemáticas que estes alunos privilegiam como forma de trabalhar e de se expressar matematicamente.

Metodologia

Este estudo irá utilizar uma metodologia de caráter qualitativo e interpretativo, através da análise de um estudo de caso, de seis alunos com DA de uma mesma turma do 7.º ano. A metodologia seguida centra-se na observação de, aproximadamente, 45 horas, ministradas durante o 2.º período do ano letivo 2012/2013, onde se irão analisar as várias dinâmicas que ocorrem numa aula de matemática.

Antes do início do estudo de campo serão solicitadas autorizações escritas ao diretor do agrupamento e aos encarregados de educação de cada aluno bem como ao professor e ao intérprete de LGP. Neste pedido de autorização será deixado bem claro que os dados recolhidos, e de forma particular as imagens, serão para uso exclusivo no âmbito desta investigação e que o anonimato dos alunos e da escola será garantido.

Participantes

Neste estudo, participarão seis alunos com DA, com idades compreendidas entre os 12 e os 13 anos, a frequentar o 7.º ano de escolaridade, numa turma de essência bilingue, de uma escola pública de referência para o ensino bilingue, o professor de matemática, o intérprete de LGP, e o professor de Educação Especial. A presença do intérprete de LGP nas aulas destes alunos é justificada pelo facto destes alunos estarem inseridos num currículo bilingue.

Instrumentos de recolha de dados

A sala de aula será o local privilegiado de recolha de dados, para os quais existirá a preocupação de reunir um conjunto de informações válidas e diversificadas e serão explorados eventuais fatores que possam desencadear barreiras à comunicação matemática. Para isso serão utilizados diferentes instrumentos, nomeadamente, as produções escritas dos alunos em contexto de aula de matemática, fotografias dos registos do quadro, notas de campo do investigador e gravações áudio/vídeo.

As gravações áudio/vídeo permitirão avaliar as respostas dos alunos a estímulos exteriores (tarefas, discurso do professor, discurso dos colegas da turma e papel do interprete de língua gestual) e identificar eventuais situações problemáticas. Para esta análise procurar-se-á colocar várias câmaras para que seja possível filmar os diálogos com câmaras frontais captando a língua gestual. Este tipo de recolha de dados permitirá escrever os diálogos dos alunos em sala de aula, bem como os diálogos entre professor e alunos, recorrendo à ajuda de um intérprete, diferente do que trabalha frequentemente com os alunos. Como a utilização de várias câmaras de vídeo pode constituir um elemento perturbador na aula e, consequentemente, afetar os dados recolhidos, será utilizado o dispositivo por um largo período de tempo para minimizar esse efeito.

As produções escritas podem ajudar a perceber as limitações na interpretação dos enunciados, a identificação dos raciocínios e estratégias utilizadas na resolução das tarefas propostas, as representações privilegiadas e a organização da informação matemática apresentada. Exteriormente ao contexto de sala de aula serão efetuadas entrevistas semi-estruturadas ao professor de matemática, ao intérprete de LGP e ao professor de Educação Especial responsável pelo acompanhamento dos alunos.

Referências:

Brendefur, J., Frykholm, J. (2000). Promoting mathematical communication in the classroom: two preservice teachers' conceptions and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education* 3, 125-153.

Boavida, A. M., Amado, N. & Coelho, V. (2009). A comunicação matemática dos alunos no contexto da resolução de problemas. In J. Fernandes, H. Martinho & F. Viseu (Orgs.), *Atas do XX Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 354-367). Braga: Instituto de Educação e Psicologia, Universidade do Minho.

Fávero, M., & Pimenta, M (2006). *Pensamento e linguagem: a língua de sinais na resolução de problemas*. Psicologia e reflexão crítica, 19(2). Disponível em http://redalyc.uaemex.mx/pdf/188/18819208.pdf

Júnior, H., & Ramos, M. (2008, julho). *Matemática para pessoas surdas: proposições para o ensino médio*. Comunicação oral apresentada no 2º SIPEMAT. Recife, Pernambuco, Brasil.

Kelly, R., Lang, H., & Pagliaro, C. (2003). Mathematics word problem solving for deaf students: a survey of practices in grade 6-12. *Journal of Deaf Studies and Deaf Education*, *8*(2), 104-119. doi: 10.1093/deafed/eng007

Kelly, R., Gaustad, M. (2007). Deaf college student’s mathematical skills relative to morphological knowledge, reading level and language proficiency. *Journal of Deaf Studies and Deaf Education*, *12*(1), 25-37. doi: 10.1093/deafed/en1012

Kritzer, K. (2009). Barely started and already left behind: a descriptive analysis of the mathematics ability demonstrated by young deaf children. *Journal of Deaf Studies and Deaf Education*, *14*(4), 409-421. doi: 10.1093/deafed/enp015

Lang, H., & Pagliaro, C. (2007). Factors predicting recall of mathematics terms by deaf students: implications for teaching. *Journal of Deaf Studies and Deaf Education*, *12*(4), 449-460. doi: 10.1093/deafed/enm021

Martinho, H. (2007). *A comunicação na sala de aula de matemática: Um projeto colaborativo com três professoras do ensino básico*. (Tese de Doutoramento não publicada). Universidade de Lisboa: Lisboa.

Nogueira, C., & Zanquetta, M. (2008). Surdez, bilinguismo e o ensino tradicional de matemática: uma avaliação piagetiana. *Zetetiké Cempem Fe Unicamp*, *16*(30), 219 – 237. Disponível em http://www.fae.unicamp.br/revista/index.php/zetetike/article/view/2523

Nunes, T., Bryant, P., Burman, D., Bell, D., Evans, D., & Hallett, D. (2009). Deaf children’s informal knowledge on multiplicative reasoning. *Journal of Deaf Studies and Deaf Education*, *14*(2), 260-277. doi: 10.1093/deafed/enn040

Nunes, T., Evans, D., Barros, R., & Burman, D. (2011, junho). *Promovendo o sucesso das crianças surdas em matemática: uma intervenção precoce*. Comunicação oral apresentada no XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil.

Nunes, T., Moreno, C. (2002). An intervention program for promoting deaf pupils’ achievement in mathematics. *Journal of Deaf Studies and Deaf Education*, *7*(2), 120-133. doi: 10.1093/deafed/7.2.120

Rowley, H. (2001). *Teaching strategies in mathematics: differences in sign language use*. (Tese de mestrado). National Technical Institute of the Deaf. Rochester Institute of Technology. Rochester: New York.

Swanwick, R.; Oddy, A.; Roper, T. (2005). Mathematics and deaf children: an exploration of the barriers of success. *Deafness and Education International*, *7*(1), 1-21. doi: 10.1002/dei.20

Pagliaro, C., & Ansell, E. (2002). Story problems in the deaf education classroom: frequency and mode of presentation. *Journal of Deaf Studies and Deaf Education*, *7*(2), 107-119. doi: 10.1093/deafed/7.2.107

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, L., Brenda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E., & Oliveira, P. (2008). *Programa de matemática do ensino básico*. Lisboa.

Silva, F., Sales, E., & Bentes, N. (2009). A comunicação matemática e os desafios da inclusão. *Arqueiro*, *17*, 7-18. Rio de Janeiro. Disponível em http://ersalles.files.wordpress.com/2009/05/a-comunicacao-matematica-e-os-desafios-da-inclusao.pdf

Zarfaty, Y., Nunes, T., & Bryant, P. (2004). The performance of young deaf children in spatial and temporal number tasks. *Journal of Deaf Studies and Deaf Education*, *9*(3), 315-326. doi: 10.1093/deafed/enh034

COMO O MODELO SOLO PERMITE ANALISAR AS RESPOSTAS DOS ALUNOS? UM CASO NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES

Fernando Luís Santos(*)
Escola Superior de Educação Jean Piaget, Almada
fsantos@almada.ipiaget.org

António Domingos(*)
Faculdade de Ciência e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa
amdd@fct.unl.pt

(*) UIED – Unidade de Investigação em Educação e Desenvolvimento

Resumo

O objetivo desta comunicação é descrever e analisar as respostas de alunos de um curso de formação inicial de professores a quatro questões e equacionar a qualidade das aprendizagens tendo por base a complexidade do pensamento matemático envolvido. Enquadrados nas teorias de Tall sobre o pensamento matemático avançado e utilizando o modelo SOLO para a criação das categorias procedeu-se à análise de conteúdo às respostas dos alunos tendo subjacente a Teoria da Atividade.

Com o modelo SOLO, utiliza-se uma ferramenta que fomenta a compreensão e posterior interpretação do conhecimento matemático dos alunos bem como a sua natureza, permitindo direcionar melhor o processo de ensino.

Os resultados evidenciam a utilidade do modelo SOLO para a descrição das respostas dos alunos tendo em conta as especificidades de cada uma das questões envolvidas, indicando algumas pistas para a promoção de um futuro modelo de formação inicial de professores tendo em vista a qualidade das aprendizagens matemáticas a vários níveis: científico, pedagógico e didático.

Palavras-chave: Qualidade das aprendizagens, formação inicial de professores, modelo SOLO, pensamento matemático avançado, teoria da atividade.

Introdução

Este estudo exploratório faz parte de uma investigação que pretende analisar a complexidade do pensamento matemático e a qualidade das aprendizagens por alunos da formação inicial de professores em Educação Básica. A questão inicial é: *será o modelo SOLO útil para aferir as respostas dos alunos tendo como pano de fundo a qualidade das aprendizagens matemáticas?*

Para responder a esta questão, analisaram-se as respostas de alunos a um conjunto de quatro questões realizadas em aula (figuras 2 a 5). A análise dos dados é qualitativa e foram utilizados como categorias os níveis do modelo SOLO (Biggs & Tang, 2007) analisados à luz dos trabalhos de Tall sobre o Pensamento Matemático Avançado (Tall, 2002) interpretados e enquadrados pela Teoria da Atividade (Engeström *et al*, 1999).

Apresenta-se o enquadramento teórico, especificando de seguida os dados recolhidos bem como a metodologia utilizada. Por fim, apresentam-se os resultados e termina-se com uma discussão sobre a adequação entre o enquadramento teórico escolhido e os resultados obtidos.

Enquadramento teórico

Considera-se que o estudo da complexidade do pensamento matemático e a qualidade das aprendizagens, num ambiente tão multidimensional como a formação inicial de professores, requer a consideração de múltiplos fatores como o contexto da formação, o nível de formação e o conhecimento prévio. Assim, o enquadramento escolhido envolve as teorias de David Tall e a Teoria da Atividade que permite uma abordagem holística possibilitando uma melhor compreensão sobre a complexidade do pensamento matemático (Tall, 1989; Štech, 2006).

A complexidade do pensamento matemático

Nos seus estudos, Tall (1989) ao abordar a questão do desenho curricular, e mais especificamente nos ciclos de aprendizagem, levanta uma questão pertinente quando afirma que o problema do desenvolvimento curricular é o de apresentar contextos em que o desenvolvimento do conhecimento matemático seja possível, conduzindo a um crescimento significativo do pensamento matemático dos alunos. Este difícil processo de transição de uma matemática menos formal, para uma compreensão mais formal dos processos matemáticos, necessita de ser avaliado ou aferido pelo professor, quer ao nível da complexidade do pensamento evidenciado, quer ao nível da qualidade das aprendizagens realizadas.

Esta passagem para um pensamento matemático cada vez mais complexo é uma transição difícil pois os vários conceitos (e suas abordagens) podem coexistir em vários modos cognitivos, ou em vários mundos, como defende Tall (2006) na sua teoria dos três mundos da matemática, produzindo uma variedade de conflitos cognitivos.

Neste estudo, centramo-nos nas dualidades existentes entre *processo* e *procedimento*, vistos (o *processo*) como uma atividade, o processo de resolução de uma atividade matemática, e o *procedimento* como a aplicação de um algoritmo específico para a implementação de um processo. Outra dicotomia existente aborda o *procedimento* (o que fazer) centrado nas manipulações rotineiras de objetos matemáticos e o *conceito* (o que saber) baseado numa rede de conhecimentos e suas ligações (Gray & Tall, 1994).

Para evitar ambiguidades existentes nestas dualidades, Gray & Tall (1994) utilizam o conceito de *proceito* como um conjunto de três componentes: "...um *processo* que produz um *objeto* matemático, e um *símbolo* que é utilizado para representar quer o processo quer o objeto." (Gray & Tall, 1994:6)

O modelo SOLO

Das várias teorias explicativas e preditivas do desenvolvimento cognitivo na educação matemática, um dos enfoques tem sido nos ciclos de aprendizagem e nas bases empíricas nas quais estas questões se devem centrar. Pegg & Tall (2005) distinguem dois tipos de teorias: (i) enquadradas globalmente no crescimento cognitivo a longo prazo do indivíduo como as teorias dos estádios conceptuais de Piaget; e (ii) enquadradas localmente no crescimento conceptual como a teoria APOS de Dubinsky ou a taxonomia SOLO (*Structure of the Observed Learning Outcomes,* Biggs & Collis, 1982).

Algumas destas teorias, como o modelo SOLO (Biggs & Tang, 2007) incorporam estas duas categorias. Esta abordagem neo-Piagetiana à aprendizagem pode ser descrita com base em três características (Killen & Hattingh, 2004):

- os *modos* de funcionamento cognitivo;
- as *formas* de conhecimento que são desenvolvidas e
- como os alunos *estruturam* o seu conhecimento matemático.

O modelo SOLO muda o foco da atenção dos construtos internos do estádio de desenvolvimento para a qualidade das representações de aprendizagem tendo como base as respostas dos alunos. Biggs & Collis (1982) distinguem a *estrutura cognitiva generalizada* e as *respostas efetivas* que os alunos fornecem na tarefa de aprendizagem. Ao mesmo tempo que assumem como um facto a existência dessa *estrutura cognitiva* *generalizada*, acreditam também que esta não consegue ser diretamente mensurável e referem-na como *estrutura cognitiva hipotética* (ECH).

Os estádios de ECH são relativamente estáveis e são independentes do processo de ensino, já o nível SOLO refere-se à aquisição de conhecimento e reflete o desempenho do aluno numa determinada tarefa (Ceia, 2002). A ênfase numa tarefa particular é importante pois a taxonomia SOLO assume que os alunos variam o seu desempenho entre tarefas que estejam ligadas em termos da lógica subjacente, incluído o conceito de desvio dentro do modelo.

É esta ênfase na análise da qualidade das respostas dos alunos que torna o modelo SOLO interessante para este estudo. Ao longo do desenvolvimento das tarefas o enfoque não está nas respostas corretas ou erradas, mas sim na estrutura (natureza) das respostas, que codificadas em categorias baseadas nos níveis SOLO tornam possível inferir uma mudança ao longo do tempo, permitindo assim uma descrição mais pormenorizada do desenvolvimento do pensamento matemático e a qualidade das suas aprendizagens.

Os níveis SOLO são *marcadores* suficientemente amplos ao longo do processo de desenvolvimento do pensamento matemático, contudo, apesar das suas características de cada nível se manterem constantes, a especificidade das respostas pode variar consoante a abordagem, o método e o conteúdo e, visto os níveis SOLO formarem um ciclo de aprendizagem coerente, permite aos alunos e professores estabelecerem relações entre as várias aprendizagens.

Nas versões mais recentes (Biggs & Collis, 1991, Biggs & Tang, 2007), o modelo SOLO retêm o conceito de nível para descrever a complexidade estrutural do desempenho mas o construto inicial de *estádio* foi substituído pelo construto de *modo* (*mode*) e refere-se ao grau de abstração das representações. Estes modos e níveis interagem para formar um modelo integrado.

Estes *modos* de pensamento são importantes, mas não fornecem informação necessária para explicar como a complexidade do pensamento matemático ocorre em cada modo ou que é necessário acontecer de forma a que o pensamento progrida para um modo mais elevado, para tal é necessário considerar a forma como o aluno estrutura o seu pensamento de uma forma sistemática, esse sistema é a taxonomia anteriormente desenvolvida por Biggs & Collis (1982) permitindo inferências sobre a profundidade da sua compreensão.

A tabela seguinte resume o modelo e indica expressões que podem ser colocadas nas questões dirigidas aos alunos.

Tabela 1. Descrição dos níveis no modelo SOLO relacionando-os com os indicadores de resposta adaptado de Biggs & Collis (1982) e de Seia (2002)

	Pensamento matemático	Indicadores
Abstrato	Vai para além do tópico, faz ligações a outros conceitos e generalizações.	Teoria, generalização, hipótese, reflexão.
Relacional	Faz conexões complexas e sintetiza partes para o significado global.	Comparar, explicar as causas, integrar, analisar, relatar, aplicar.
Multi-estrutural	Faz algumas conexões, mas falta uma visão unificadora.	Enumerar, classificar, descrever, listar, combinar, trabalhar com algoritmos.
Uni-estrutural	Faz ligações simples, sem identificar a sua importância.	Identificar, memorizar, realizar procedimentos simples.
Pré-estrutural	Fornece informação solta e desorganizada não a relacionando.	Não consegue relacionar.

Este modelo transforma-se numa ferramenta que permite um enquadramento que auxilia a implementação de um modelo didático, baseado na complexidade do pensamento matemático, com vista à qualidade das suas aprendizagens pois permite evitar a insistência num único percurso de aprendizagem.

O campo da avaliação tem sido uma área fértil devido ao reconhecimento da necessidade de encontrar formas mais eficazes de avaliar a qualidade das aprendizagens matemáticas e a complexidade do pensamento matemático. Para Biggs (citado por Pegg, 2003) o processo avaliativo só tem a ganhar se as classificações se tornarem *realmente* informativas baseadas numa hierarquia que descreva a evolução da aprendizagem.

Ao pretender medir a qualidade das aprendizagens realizadas pelos alunos, há a necessidade de descrever claramente as diferenças entre essas aprendizagens, com descrições focalizadas em tópicos como a capacidade de interpretar, analisar, organizar e aplicar o conhecimento matemático não se centrando somente na memorização e sua reprodução.

A Teoria da Atividade

Esta teoria desenvolvida inicialmente por Vygotsky e Leontiev centrada na tríade da atividade orientada por objetos foi posteriormente expandida por Engeström (1999, 2001) e para além de estudar um *sujeito* agindo sobre um *objeto* para produzir um *resultado*, introduzem-se variáveis como a noção de que essa atividade do sujeito é mediada por *ferramentas* (quer cognitivas, quer físicas ao dispor do sujeito) – ao qual se denomina de *sistema de produção*.

Engeström *et al* (1999) defende os estudos dos artefactos como componentes inseparáveis do funcionamento humano, mas centra o foco dos estudos nas suas relações com os outros componentes do sistema de produção.

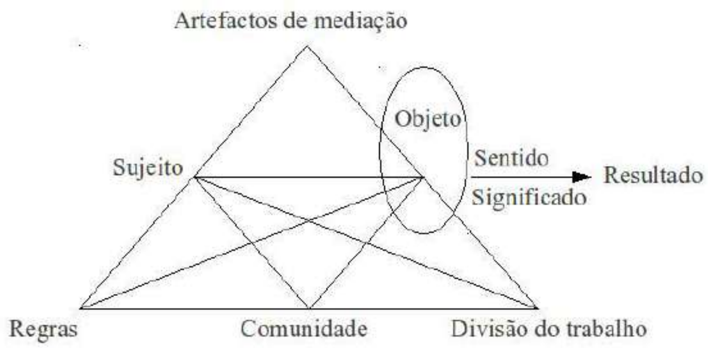


Figura 1. Modelo da segunda geração da Teoria da Atividade, baseado em Engeström et al (1999)

Esta progressão, expande a representação inicial de modo a permitir o estudo a nível macro da comunidade em detrimento do nível micro centrado no indivíduo, enfatizando deste modo a importância das contradições no sistema.

A compreensão da atividade orientada por objetos é fulcral na teoria da atividade, mas a conceção de objeto atualmente pode ser vista sob duas perspetivas nas abordagens contemporâneas da teoria da atividade, uma centrada nas noções de Leontiev onde o objeto da atividade está relacionado com o motivo, outra centrada nas noções de Engeström onde o objeto está relacionado com o sistema de produção.

Assim, os vários vértices dos triângulos do modelo, neste estudo, são os seguintes:

- O sujeito são os alunos de formação inicial de professores;
- O objeto da atividade consiste nas respostas dos alunos e no seu pensamento matemático, interligado com a qualidade das aprendizagens;

- Os artefactos de mediação permitem o exercício da atividade, neste caso são as teorias de Tall e o modelo SOLO.
- A comunidade centra-se nos sujeitos que partilham a mesma atividade, neste caso a formação inicial de professores.
- A divisão do trabalho faz referência à organização da comunidade com o sujeito e às tarefas na atividade.
- As regras são as normas onde se organiza o sistema da atividade, neste estudo centram-se, para os alunos nas regras matemáticas dos vários tópicos abordados, para o professor nas categorizações utilizando o modelo SOLO e sua análise.

Metodologia

A análise dos dados é qualitativa e refere-se às respostas dadas, por alunos do primeiro ano do curso de educação básica a frequentar a Unidade Curricular (UC) de Matemática I no segundo semestre de 2011/2012, em três mini-testes realizados em aula. Estes alunos têm formações (antes do ensino superior) muito diversas e a maioria não tem contacto com a disciplina desde o 9.º ano de escolaridade, daí o programa da UC se centrar em aspetos fulcrais no pensamento matemático como a lógica proposicional (propriedades e leis de DeMorgan), a teoria elementar de conjuntos (propriedades e quantificadores) e a aritmética racional.

Foram utilizados os níveis SOLO para a criação das categorias das respostas das quatro questões selecionadas (de um total de seis questões, duas por cada mini-teste), identificadas quer pelo seu conteúdo quer pelo seu nível esperado de resposta, assegurando que o nível dos conhecimentos dos alunos é de grau adequado ao estudado.

Dados

Numa primeira questão (figura 2) era solicitado que fosse identificado o valor lógico das proposições e de seguida que se aplicassem as propriedades da conjunção. A informação do enunciado é suficiente para a resolução e envolve raciocínios dedutivos já experimentados em aula, bastando para a sua conclusão a substituição dos valores lógicos. A resposta expectável seria de nível *pré-estrutural*.

Sabendo que $\neg p \equiv V$ *e* $q \equiv F$
determine o valor lógico de $p \wedge q$.

Figura 2. Primeira questão sobre cálculo proposicional

A segunda questão, para além da identificação das prioridades das operações lógicas, solicitava a necessidade de interpretar os resultados da respetiva tabela de verdade. O tipo de conhecimentos podiam ser utilizado de forma isolada, mas era necessário identificar as prioridades das operações sendo esperado algum nível de generalização com a utilização de processos alternativos de resolução. A resposta expectável seria de nível *multi-estrutural*.

Determine o valor lógico da proposição:

$$((p \wedge q \rightarrow r) \wedge (p \vee q \rightarrow \neg r)) \Rightarrow (p \wedge q \wedge r).$$

Figura 3. Segunda questão sobre cálculo proposicional

Na terceira questão, era solicitada a tradução de uma frase para linguagem simbólica e posteriormente a utilização das leis de DeMorgan para a sua negação. Para além da relação existente entre a linguagem corrente e a linguagem simbólica seria necessário identificar a informação relevante (qual o quantificador, propriedades da negação de expressões quantificadas e identificação de conjuntos) e realizar generalizações. A resposta expectável seria de nível *relacional*.

Seja A o conjunto de todos os alunos.
Traduza por meio de expressão quantificada
a seguinte proposição e negue-a de seguida:
Todos os alunos estudam Matemática.

Figura 4. Terceira questão sobre a utilização de conjuntos e quantificadores

A quarta questão, necessitava de uma demonstração do enunciado partindo da elaboração de uma hipótese de trabalho, implicando a identificação e relação entre múltiplos e a utilização do algoritmo da divisão. Estão envolvidos raciocínios indutivos e era solicitada uma generalização que atendendo ao nível dos raciocínios permite alternativas de resposta logicamente válidas. A resposta expectável seria de nível *abstrato*.

Demonstre que a soma dos quadrados de
dois números ímpares consecutivos
é um múltiplo de 8 *mais duas unidades.*

Figura 5. Quarta questão sobre aritmética racional

A análise e posterior tratamento estatístico (cálculo da proporcionalidade das respostas em percentagem) foram trabalhados de acordo com a seguinte tabela:

Tabela 2. Dados de análise (numéricos e respetiva percentagem) por questão e nível SOLO

Nível SOLO	Questão 1		Questão 2		Questão 3		Questão 4	
	N (43)	%	N (43)	%	N (40)	%	N (34)	%
Pré-estrutural	31	72,1	11	25,6	0	0	13	38,2
Uni-estrutural	7	16,3	14	32,6	5	12,5	8	23,5
Multi-estrutural	5	11,6	13	30,2	10	25,0	3	8,8
Relacional	0	0	5	11,6	25	62,5	2	5,9
Abstrato	0	0	0	0	0	0	8	23,5

Só foram contabilizados para análise os dados dos alunos que responderam às respetivas questões em estudo.

Resultados e discussão

Na análise das respostas dadas à primeira questão, os resultados apontam para 72,1% dos alunos abaixo do nível da questão (*uni-estrutural*), apresentando-se no nível *pré-estrutural*. No exemplo apresentado o aluno simplesmente substitui o valor lógico pelo apresentado no enunciado e responde ignorando a negação da proposição e as propriedades da conjunção onde o valor lógico verdade é elemento neutro.

$$V \wedge r \equiv F$$

Figura 6. Exemplo de uma resposta de nível pré-estrutural

Somente 16,3% obtiveram classificação dentro do nível uni-estrutural e 11,6% responderam de forma apontada para um nível superior, pois a resposta baseou-se na identificação dos valores lógicos numa tabela de verdade (figura 7). Apesar de não ser a resolução mais elegante em termos matemáticos implica, em termos de pensamento matemático a análise de várias componentes.

p	q	r	$\neg p$	$p \wedge q$
V	V	V	F	V
V	V	F	F	V
V	F	V	F	F
V	F	F	F	F
F	V	V	V	F
F	V	F	V	F
F	F	V	V	F
F	F	F	V	F

Figura 7. Exemplo de uma resposta de nível multi-estrutural

Estes dois exemplos podem ser vistos à luz das teorias de Tall como a simples utilização de processos rotineiros sem nenhum pensamento sobre o resultado e no exemplo da figura 7 já se pode falar na identificação de um *proceito*, mesmo que elementar, sendo a resposta simbolizada pela tabela de verdade e pelo seu *processo* de resolução emergindo também a interpretação do objeto matemático criado para obter a resposta solicitada.

Os dados da segunda questão apontam para valores significativos abaixo do nível da questão (nível *multi-estrutural*), mas 30,2% das respostas estão dentro do nível esperado. Há também uma percentagem de respostas (11,6%) acima do nível expectável classificadas no nível *relacional*. Nas questões classificadas abaixo do nível previsto notou-se a tentativa de evitar a utilização das tabelas de verdade, passando para a utilização de propriedades, mas com vários erros na utilização dos teoremas específicos, no exemplo seguinte (figura 8) existe um erro na utilização das leis de DeMorgan.

$$
\begin{gathered}
((p\wedge q\rightarrow r)\wedge(p\vee q\rightarrow\neg r))\Rightarrow(p\wedge q\wedge r)\\
\neg p\wedge\neg q\vee r\wedge\neg p\vee\neg q\vee\neg r\rightarrow p\wedge q\wedge r\\
p\wedge q\vee r\wedge\neg p\vee\neg q\vee\neg r\rightarrow p\wedge q\wedge r\\
\vdots
\end{gathered}
$$

Figura 8. Exemplo de uma resposta de nível *uni-estrutural*

O pensamento matemático evidenciado na resposta do exemplo da figura 8 acaba por envolver um raciocínio mais elaborado que, apesar das falhas no procedimento, tentava englobar os vários tópicos abordados em aula.

Na terceira questão analisada, classificada como nível *relacional*, obteve-se um resultado de 62,5% dentro do nível. As respostas abaixo do nível, foram classificadas desta forma pois existiram muitas confusões, não na aplicação da propriedade, mas sim na passagem da linguagem corrente para a linguagem simbólica.

No exemplo seguinte (figura 9), apesar do sentido da utilização das leis de DeMorgan esteja correta, faltam alguns elementos na tradução da linguagem corrente para a simbólica, existe assim lacunas entre o *processo* de resolução (correto) e o *procedimento*.

A é o conjunto de todos os alunos.
M é o conjunto Matemática. Logo

$$
\begin{gathered}
A\in M\\
\neg(A\in M)\\
A\notin M
\end{gathered}
$$

Figura 9. Exemplo de uma resposta de nível *pré-estrutural*

Já neste exemplo, a tradução da expressão está correta em termos formais, mas existe um engano na utilização do quantificador.

$$\begin{gathered}\exists x \in A : x \in M \\ \neg(\exists x \in A : x \in M) \\ \forall x \in A : x \notin M\end{gathered}$$

Figura 10. Exemplo de uma resposta de nível *uni-estrutural*

Nas respostas a esta questão, também existiram formas alternativas de resolução, como se encontra no exemplo seguinte:

$$\begin{gathered}\textit{Seja } A \textit{ o conjunto de todos os alunos,} \\ M \textit{ o conjunto Matemática, logo:} \\ \forall x \in A : \textit{estudam Matemática} \\ \textit{negando fica} \\ \exists x \in A : \textit{não estudam Matemática}\end{gathered}$$

Figura 11. Exemplo de uma resposta alternativa de nível *multi-estrutural*

Este caso evidencia a compreensão do *processo* e do *procedimento* mas, simbolizado de forma diferente. Em termos de pensamento matemático a resposta do aluno demonstra compreensão não só do *proceito*, mas também das várias *nuances* que envolvem o raciocínio sobre os objetos matemáticos.

Já os resultados das classificações da quarta questão que pretendia a produção de uma demonstração, inicialmente colocada no nível *abstrato*, apresentam 38,2% de respostas de nível *pré-estrutural* conforme o exemplo seguinte:

$$\begin{gathered}3+5=8\mathrm{n}+2 \Leftrightarrow 8=8\mathrm{n}+2 \Leftrightarrow 6=8\mathrm{n} \Leftrightarrow \frac{6}{8}=n \textit{ logo} \\ \textit{a demonstração é errada.}\end{gathered}$$

Figura 12. Exemplo de uma resposta de nível *pré-estrutural*

Neste caso, somente 23,5% das respostas foram classificadas dentro do nível esperado, sabendo de antemão que a demonstração por indução de um qualquer enunciado obriga necessariamente a um conjunto de relações entre *processos* e *procedimentos* por parte dos alunos sendo solicitado um nível mais elevado de pensamento matemático e uma aplicação direta de relações entre vários objetos matemáticos.

Considerou-se então que, neste caso o modelo SOLO serviu para categorizar as respostas, fornecendo aos alunos indicações sobre a forma como responderam às questões, o que permite também ao professor aferir critérios de classificação mais adequados ao desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos. O resumo dos valores percentuais de cada uma das questões analisadas está resumido na tabela seguinte:

Tabela 3. Resumo dos resultados das quatro questões analisadas tendo em conta o nível SOLO expectável

	Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4
Percentagem no nível SOLO esperado	16,3%	30,2%	62,5%	23,5%

O estudo sobre a complexidade do pensamento matemático, sustentados pelas ideias de Tall, não ocorre somente em conceitos matemáticos diferentes, mas em níveis de operacionalização diferentes, nomeadamente nos níveis de resposta dos alunos, daí a utilização do modelo SOLO que sustenta a caracterização dos objetivos da aprendizagem, numa tentativa de ir para além do processo, mas também na construção do próprio conceito matemático.

Considerações finais

O modelo SOLO permite identificar de uma forma sistemática os pontos fortes e fracos das respostas dos alunos. Desta forma, sugere-se que a aplicação deste modelo pode permitir aos professores ter um conjunto mais vasto de ferramentas avaliativas e, mais do que isso, formativas, permitindo analisar não só as respostas finais dos alunos, mas o seu processo de pensamento matemático que estas podem envolver.

Este estudo, apoiado na ideia da complexidade do pensamento matemático e no modelo SOLO para caracterizar a qualidade das aprendizagens dos alunos, permite avançar já com pistas que podem servir de etapas para outras experimentações:

4. A taxonomia SOLO permite avaliar o desempenho num determinado momento, evitando tirar conclusões sobre as suas estruturas cognitivas (Ceia, 2002).
5. O modelo SOLO promove um enquadramento que permite uma interpretação consistente da estrutura e da qualidade das respostas dos alunos em vários ambientes de aprendizagem, em vários tópicos e em várias áreas.
6. A utilização do modelo SOLO permite alterar as práticas do professor de um modo sustentado na qualidade do pensamento matemático dos alunos.

7. A Teoria da Atividade que está subjacente a este modelo de análise permite efetuar a ligação entre os vários vértices do triângulo (figura 1) evitando interpretações causais devido à sua visão de conjunto.

A visão do modelo SOLO permite, com base na Teoria da Atividade e sustentada pelas teorias de Tall sobre o pensamento matemático, seguir a lógica dos ciclos de aprendizagem de forma consistente com a tradição epistemológica de Piaget.

Referências bibliográficas

Biggs, J. & Tang, C. (2007). *Teaching for Quality Learning at University*. Berkshire. McGraw Hill.

Biggs, J. & Collis, K. (1991). Multimodal learning and the quality of intelligent behaviour. In H. Rowe (Ed.), *Intelligence, Reconceptualization and Measurement* (57–76). New Jersey: Laurence Erlbaum Assoc.

Biggs, J. & Collis, K. (1982). *Evaluating the quality of learning*. London: Academic Press.

Ceia, M. (2002). *A taxonomia SOLO e os níveis de van Hiele*. Comunicação apresentada no XI. Encontro de Investigação em Educação Matemática, Coimbra.

Engeström, Y. (2001). Expansive Learning at Work: toward an activity theoretical reconceptualization . *Journal of Education and Work 14 (1),* 133-156: DOI 10.1080/13639080020028747.

Engeström, Y, Miettinen, R. & Punamäki, R-L (Eds) (1999). *Perspectives on Activity Theory*. Cambridge: Cambridge University Press.

Gray, E. & Tall, D. (1994). Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic, *The Journal for Research in Mathematics Education, 26 (2),* 115– 141.

Killen, R. & Hattingh, A. (2004). A theoretical framework for measuring the quality of student learning in outcomes-based education. *South African Journal of Higher Education,* 18(1), 72-86.

Pegg, J., & Tall, D. (2005). The fundamental cycle of concept construction underlying various theoretical frameworks. *International Reviews on Mathematical Education (Zentralblatt für Didaktik der Mathematik), 37(6)*, 468-475.

Pegg, J. (2003). Assessment in Mathematics: A developmental approach. In J. M. Royer (Ed.), *Advances in Mathematical Cognition* (227-259). New York: Information Age Publishing.

Štech, S. (2006). School mathematics as a developmental activity. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehliková (Eds.). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 1,* (35-48). Prague: PME.

Tall, D. (2006). The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity and Proof. In Grouws D.A. (ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (495–511), New York: Macmillan.

Tall, D. (Ed.). (2002). *Advanced Mathematical Thinking*. New York: Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. (1989). Concept images, computers, and curriculum change. *For the learning of mathematics, 9 (3),* 37-42.

REPRESENTAÇÕES E RACIOCÍNIO DE ALUNOS DO 3.º ANO DE ESCOLARIDADE NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS[36]

Isabel Velez

Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

velez@campus.ul.pt

João Pedro da Ponte

Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

jpponte@ie.ul.pt

Resumo

A aprendizagem das representações matemáticas por parte dos alunos vem merecendo crescente atenção dos investigadores. Nesta comunicação, procuramos compreender as representações usadas pelos alunos de 3.º ano, o seu papel na resolução de problemas e o modo como as representações se relacionam com os raciocínios que realizam. Os dados foram recolhidos através de gravações áudio e vídeo na sala de aula, bem como das produções escritas dos alunos. Verificamos que os alunos usam representações bastante diversificadas, que variam segundo o objetivo que lhe atribuem – representação como processo ou como instrumento de comunicação. Através das representações dos alunos é possível identificar e compreender as suas estratégias de raciocínio.

Palavras-Chave: Representações; Raciocínio, Resolução de problemas, 1.º ciclo.

Introdução

As representações matemáticas desempenham um papel fundamental na aprendizagem desta disciplina, sendo cada vez mais valorizadas pelos documentos curriculares (Ponte & Serrazina, 2000). Esta comunicação procura compreender quais as representações utilizadas por alunos do 3.º ano de escolaridade e qual o seu papel na resolução de problemas. Procuramos, ainda, saber quais os raciocínios que os alunos fazem a partir das diversas representações que usam.

Representações matemáticas

Goldin (2008) refere que a relação entre a representação e o objeto representado é mais complexa do que o que se poderia pensar. Assim, uma palavra pode representar vários objetos diferentes e um dado numeral pode representar os elementos de um conjunto ou

[36] Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projeto *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (contrato PTDC/CPE-CED/0989311/2008).

um ponto numa reta numérica. Este autor fala das representações internas (mentais) das crianças e externas (observáveis num certo suporte). Referindo-se às representações externas, Bruner (1999) distingue entre representações ativas, icónicas e simbólicas.

São vários os investigadores que se têm debruçado sobre a aprendizagem das representações matemáticas, analisando a forma como os alunos aprendem os conceitos. Por exemplo, Webb, Boswinkel e Dekker (2008) distinguem três tipos de representações: informais, preformais e formais. Estes autores descrevem o percurso que os alunos podem fazer na sua aprendizagem das representações em três fases distintas: (i) a fase *informal*, em que os conceitos são abordados de forma concreta num contexto familiar; (ii) a fase *pré-formal*, em que, progressivamente, o grau de complexidade vai aumentando para representações mais abstratas e formais; e (iii) a fase *formal*, em que são utilizadas notações matemáticas formais. Na sua perspetiva, os alunos começam por recorrer a representações informais e, gradualmente, vão-nas formalizando. Tanto Goldin (2000) como Webb et al. (2008) referem que perante um novo contexto, quando os alunos se sentem mais inseguros ou quando têm dúvidas na realização de uma tarefa, voltam a utilizar algumas das representações informais e preformais que tinham deixado de utilizar.

Alguns investigadores procuram estudar o modo como os alunos formam as suas representações internas através da análise das representações externas que produzem. Para Goldin (2000) investigar as representações matemáticas dos alunos "permite-nos compreender detalhadamente o [seu] desenvolvimento matemático em interação com o ambiente que os rodeia" (p. 180). Na perspetiva de Stylianou (2011) "representar" é uma ferramenta importante para os alunos comunicarem o seu raciocínio aos que os rodeiam, permitindo compreender o percurso que seguiram na resolução de uma determinada tarefa. Também para o NCTM (2007), os professores podem compreender o raciocínio dos seus alunos a partir das representações por eles utilizadas. As representações surgem assim como um importante objeto de estudo tendo em vista interpretar o raciocínio matemático dos alunos durante a realização de tarefas.

Metodologia de investigação

Este estudo segue uma abordagem qualitativa e interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994) e foi realizado num Agrupamento de Escolas localizado na zona limítrofe de Lisboa. Os participantes são a professora Fernanda e os seus 19 alunos do 3.º ano (todos os nomes, da professora e dos alunos, são fictícios). A professora leciona no Agrupamento há cerca de dez anos, pertence ao respetivo quadro e acompanha estes alunos desde o início da sua escolaridade. Segundo ela, os alunos estão habituados a resolver problemas na sala de aula, tendo realizado uma tarefa idêntica um mês antes. Nesta comunicação, analisamos uma aula com a duração de cerca de uma hora e vinte minutos, registada em áudio (para as interações entre a professora e cada par de alunos) e em vídeo (durante a resolução da tarefa e a discussão final coletiva). Recolhemos também as produções dos alunos. A observação, feita pela primeira autora, assumiu uma natureza não participante. A análise de dados focou-se nas representações utilizadas pelos alunos segundo as categorias (i) escolha da representação, (ii) tipo de raciocínio; e (iii) comunicação do raciocínio.

Os alunos e as representações

Fernanda começa por escrever no quadro o problema para os alunos resolverem a pares, registando a sua resposta numa folha A3, tendo em vista a respetiva discussão com a turma: "Numa quinta existem 21 patos e coelhos. Se contarmos as patas sabemos que são 54 no total. Quantos serão os patos e quantos serão os coelhos?" Depois de uma breve explicação por parte da professora sobre o que se pretende, os alunos começam a trabalhar, solicitando o seu auxílio, sempre que consideram necessário. Quando está com cada par, a professora volta a analisar o enunciado da tarefa de modo a ajudar os alunos a interpretar e representar o problema. Quase todos tentam resolver a tarefa por tentativa-erro, desenhando e apagando os seus registos.

Escolha da representação adequada

Os alunos usam sobretudo representações informais (desenhos dos animais) e pré-formais (esquemas com tracinhos ou patas em representação dos animais). Alguns pares usam um determinado tipo de representação durante todo o seu trabalho, outros mudam de representação a meio da sua resolução. Por exemplo, Guida e Júlio começam por desenhar animais, mas chegam à conclusão que este tipo de representação não é o mais adequado. Assim, apagam o que fizeram e fazem um novo esquema, desta vez desenhando apenas as patas. O mesmo acontece com Daniel e Núria que justificam assim a razão da mudança: "Nós já tínhamos começado… Já estávamos a fazer desenhos, mas depois ela [Núria] disse: 'Vamos apagar porque assim vamos demorar!' E depois fizemos por patas!" Estes alunos, que fazem representações figurativas, muito pormenorizadas, incluindo informação que depois verificam ser desnecessária e consumidora de tempo, avaliam o seu trabalho e alteram as representações, de forma a resolverem a tarefa. Assim, denota-se que percebem a necessidade de adequar a representação usada às necessidades da resolução do problema, concluindo que basta representar apenas as patas de cada tipo de animal.

Patrício e Sandro, os dois alunos mais velhos da turma, para resolver a tarefa começam por usar uma representação formal (cálculo horizontal), o que não traduz as condições do problema. Questionados pela professora, compreendem o que é pedido e optam por uma representação invulgar e diferente de toda a turma. Recorrem à primeira letra do nome de cada animal, P (patos) e C (coelhos), e desenham pequenas patas nas letras (duas nos P e quatro nos C). Esta representação, que poderia facilitar o seu raciocínio, revela-se demasiado formal para estes alunos, que acabam por confundir o número de patas com o número de animais (Figura 1), não conseguindo resolver a tarefa sozinhos. No final, depois de assistirem à apresentação dos colegas (que utilizam representações mais informais), conseguem traduzir as representações dos outros alunos para o seu esquema e registam a resposta correta.

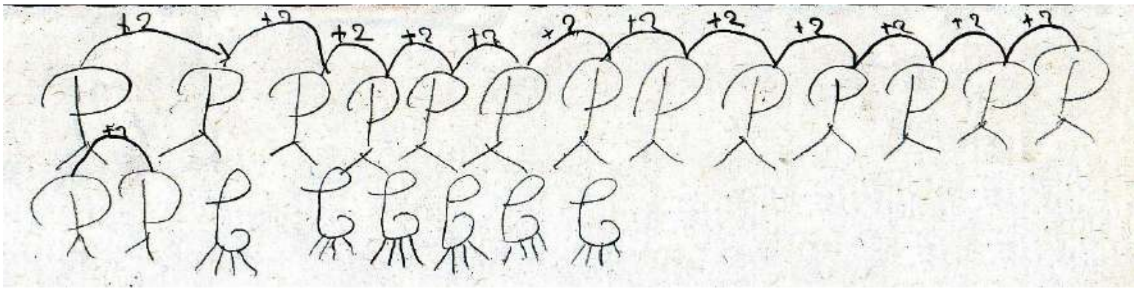


Figura 1. Representação utilizada por Patrício e Sandro

Muitas vezes, os professores consideram que as representações formais são as mais adequadas e refletem um raciocínio elaborado (Ponte & Velez, 2011). Esta parece ser a ideia de Patrício e Sandro, que insistem numa representação (primeiro formal e depois pré-formal) que não dominam, mas que é claramente mais elaborada que a da maioria dos seus colegas. No final, conseguem perceber a resolução do problema através da discussão na turma (durante a qual se mantêm calados) e da interpretação das representações utilizadas pelos colegas, que, para eles acabam por ser mais significativas do que as suas próprias representações.

Outros pares optam por nunca mudar a representação escolhida. É o caso Maria e Tiago que recorrem a representações pictóricas, desenhando pormenorizadamente cada animal

(Figura 2), sem, no entanto, chegarem à solução correta. A representação que usam impossibilita a resolução atempada do problema, pois cada vez que substituem um animal por outro, voltam a reproduzir os pormenores do desenho, dispersam-se muito e perdem o seu raciocínio.

Figura 2. Representação utilizada por Maria e Tiago

Verificamos que 3 pares representam os animais com grande pormenor, 3 pares desenham apenas uma parte de cada animal (cabeça ou patas) e os restantes recorrem a tracinhos (3 pares) ou letras (1 par) (tabela 1),

Tabela 1. Representações utilizadas pelos alunos

Representação utilizada	Alunos
Desenho pormenorizado de animais	Tiago e Maria Vanessa e Eloísa Joaquim e Francisco
Desenho de parte do animal (cabeça ou patas)	Renata e Rui Guida e Júlio Núria e Daniel
Esquema com tracinhos	Dário e Kátia Bruna Ernesto e Patríck
Esquema com letras	Patrício e Sandro

Representações e raciocínio

Quase todos os alunos resolvem o problema por tentativa-erro, mas no seu raciocínio, diferenciam-se dois grupos distintos: os que resolvem o problema de forma organizada e sistemática (três pares) e os que o resolvem de forma errática (sete pares), como mostra a Tabela 2.

Tabela 2. Raciocínio utilizado pelos alunos na resolução da tarefa

Raciocínio utilizado	Alunos
Resolução errática	Patrício e Sandro Guida e Júlio Joaquim e Francisco Vanessa e Eloísa Maria e Tiago Bruna Daniel e Núria
Resolução organizada e sistemática	Renata e Rui Ernesto e Patrick Dário e Kátia

Vejamos primeiro os pares que usaram raciocínios sistemáticos e organizados. Por exemplo, Renata e Rui percebem de imediato que têm que utilizar os dois animais:

> Renata: Nós desenhámos um pato e um coelho e desenhámos outro pato e outro coelho… Fomos fazendo assim…
>
> Professora: Foram desenhando um pato, um coelho, um pato, um coelho, um pato, um coelho… Sempre…
>
> Renata: Sim… E depois… Parávamos um bocadinho, contávamos… Contávamos as patas e quantos animais tínhamos que fazer e… Contávamos as patas para ver se tínhamos que apagar ou acrescentar mais, ou apagar e ficar assim.

Figura 3. Representação utilizada por Renata e Rui

Durante a discussão, os alunos explicam à turma que, para obterem os animais pretendidos, começaram por desenhar a cabeças intercaladamente, “um coelho e um pato” (Figura 3), partindo do pressuposto que o número de animais deve ser semelhante.

A certa altura, como explicam à professora, avaliaram o seu trabalho, apercebendo-se que, apesar do número de patas ser elevado, o seu número de animais era claramente inferior ao número de animais indicado na tarefa:

> Renata: Temos… Dezasseis [animais]!

Professora: Então filha, mas eu preciso de vinte e um!

Renata: Então… Nós estávamos quase a chegar aos cinquenta [patas] e ele [Rui] diz: “Ai que horror já vamos nos cinquenta!”… Apagámos um coelho e pusemos um pato!

Professora: Então e agora ias apagar o quê? Vais substituir…

Renata: Os coelhos por patos!

Assim, substituem alguns coelhos e começam a desenhar patos, de forma a obter os 21 animais. Com esta estratégia, acabam por desenhar os 21 animais pretendidos, mas são surpreendidos com o número de patas que se revela insuficiente. Ficam um pouco atrapalhados, mas, com a ajuda da professora, conseguem perceber que têm que substituir alguns patos por coelhos.

Professora: Tens vinte e um animais, mas tens patas a menos… E agora?

Renata: Tenho que pôr uns coelhos e…

Professora: E fazer o quê?

Renata: E…

Professora: Pões mais coelhos? Mas se te pões a desenhar mais coelhos, vão ficar mais de vinte e um animais, ou não? Como é que nós vamos fazer isso?

Rui: Apagando…

Professora: Apagando? Apagando o quê?

Renata: Apago dois patos e desenho um coelho!

Professora: Humm… Substituis dois patos por um coelho… OK… Então vamos lá a tentar…

Levados pela sua intuição, os alunos percebem que não são precisas grandes alterações e substituem 4 patos por 2 coelhos. A professora ajuda-os a fazer o ponto da situação e os alunos rapidamente concluem quais os animais que devem ainda desenhar para resolver o problema:

Professora: Então?

Renata: Apagámos quatro patos e fizemos dois coelhos!

Professora: Sim, senhora… E agora? Quantas patas há e quantos animais há? Rui?

Rui: Agora temos… Um, dois, seis (conta as patas de um em um) Cinquenta!

Professora: Cinquenta patas… Eu quero cinquenta e quatro! Estamos quase lá! E quantos animais temos?

(os alunos contam um a um)

R: Dezanove?

Professora: E quantos animais temos que ter?

Renata: Vinte e um…

Professora: Tens dezanove animais… Certo? Quantos precisa para os vinte e um? Quantos animais faltam?

Renata: Faltam dois animais!

Professora: E quantas patas?

Renata: Cinquenta… Cinquenta e quatro, por isso precisamos desenhar dois patos!!

Professora: Porquê?

Renata: Porque… Dois mais dois é quatro e nós como temos cinquenta [patas] e precisamos de mais dois animais e os patos têm duas patas… Acho que vai funcionar!

Ernesto e Patrick também apresentam um raciocínio mais elaborado, mostrando, desde o início da resolução do problema, que compreendem a relação entre o número patas e animais (figura 4). Estes alunos representam os animais por tracinhos, contabilizando simultaneamente o número de patas e o número de animais, como explicam depois na discussão com a turma:

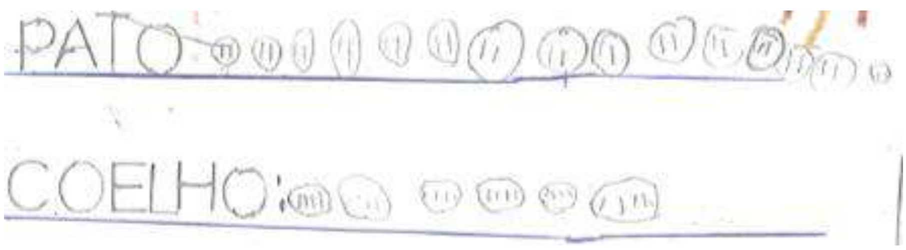


Figura 4. Representação utilizada por Ernesto e Patrick

Ernesto: Nós fizemos 6 coelhos e 15 patos, o que nos deu 21 animais e 54 patas. Nós começámos aqui a fazer por esquemas…

Professora: (…) Mas como é que vocês pensaram para chegar ao resultado? A única coisa que vocês me disseram foi o resultado…

Patrick: Nós fizemos por esquemas e tentativas… (…) Nós pensámos 10 patos e 11 coelhos. Mas depois vimos que não dá 54 patas e fizemos de novo.

Professora: E tiveram o quê sempre em conta? O número de…

Ernesto: Patas… Em relação ao número de animais!

Um terceiro par que utiliza um raciocínio sistemático é formado por Dário e Kátia, que, no início do trabalho, interpreta assim o problema:

Dário: Hum… 54 [patas]: 2, 4… (desenha tracinhos 2 a 2 a simbolizar os patos)

Kátia: Só patos?

Dário: Não, primeiro temos que ver quantos são. Quantos coelhos são… E patos?

Kátia: São 21…

Dário: 21 quê?

Kátia: Patos?

Dário: Na, na, não… São 21 patos… E coelhos!! Temos que saber quantos patos há e quantos coelhos há, de maneira a ter os doooois! Percebes?

Outros alunos seguem uma estratégia diferente. Inicialmente, começam por desenhar apenas coelhos ou patos até obterem os 21 animais. Por exemplo, Vanessa e Eloísa começam por desenhar apenas coelhos e a certa altura apercebem-se que ultrapassaram em muito o número de patas permitido. Apagam vários coelhos, ao acaso, e desenham patos. Fazem isto várias vezes até obterem as 54 patas. Nesta altura, constatam que têm 20 animais e, com a ajuda da professora, encontram a solução correta.

Professora: Então? Já chegaram à solução?

Vanessa: Estamos quase lá! Só falta mais um bocado!

Professora: (conta os animais um a um com os dedos) Dezanove! Deixa lá ver se eu contei bem… (conta de novo um a um) Dezanove! Dezanove animais! Mas vocês têm que ter vinte e um! E as cinquenta e quatro patas?

(os alunos acenam afirmativamente com a cabeça)

Professora: O que é que vão fazer?

Vanessa: Temos que substituir…

Professora: Substituir porquê? E pelo quê?

Eloísa: Os coelhos por patos…

Professora: Huummm… Quantos coelhos por quantos patos?

Vanessa: Vou tirar… Vou tirar um coelho e depois vou pôr… (olha para os patos) Vou pôr dois, porque têm duas patas!

De modo semelhante, Guida e Júlio também começam por desenhar só um tipo de animal (patos):

Guida: Nós estávamos a fazer… 2 [Duas patas – um pato] até 19 [animais], mas depois não dá 54 patas!

Rapidamente concluem que se continuarem a desenhar apenas patos, ultrapassarão o número de animais e ao compreender que um coelho equivale a dois patos chegam facilmente à solução do problema. Desta forma começam a fazer substituições calculadas (substituem dois patos por um coelho ou vice-versa) até terem o número de animais e de patas correto. Assim, tanto Guida e Júlio como Vanessa e Eloísa começam por representar um só tipo de animal, mas, a certa altura, fazendo uma avaliação, percebem que precisam de combinar os dois tipos de animal e usam uma estratégia sistemática de substituição de animais já desenhado pelo outro animal até chegarem à solução correta.

Há outros pares de alunos que resolvem erraticamente o problema, sem nunca terem uma estratégia definida. Por exemplo, Núria e Daniel desenham patos e coelhos indefinidamente. Inicialmente, parecem confundir patas e animais, mostrando algum desânimo. Com a ajuda da professora, procuraram a solução por tentativa-erro, mas de modo errático. Assim, contam sucessivamente o número de animais e de patas até acertarem, por acaso, no número definido inicialmente no problema. No entanto, apesar disso, não mostram sinais de compreender a relação entre o número de animais e de patas.

As estratégias de raciocínio utilizadas pelos diferentes pares diferem bastante, conforme o modo sequencial ou errático como que resolvem o problema. Os pares que definem logo à partida uma estratégia sistemática ou que a meio do percurso fazem uma avaliação e tentam encontrar uma relação entre os diferentes elementos, resolvem a tarefa com maior facilidade.

Representações como apoio à comunicação

Alguns dos pares usam uma representação para comunicar aos colegas os resultados obtidos que difere da que usaram na resolução do problema (Tabela 3).

Tabela 3. Representação dos alunos durante a resolução e na comunicação de resultados.

Alunos	Representação na resolução	Representação na comunicação
Renata e Rui	Desenhos	Desenhos e cálculo horizontal
Patrício e Sandro	Esquema	Esquema
Ernesto e Patríck	Esquema	Esquema
Guida e Júlio	Esquema	Esquema
Joaquim e Francisco	Desenhos	Desenhos
Vanessa e Eloísa	Desenhos	Desenhos
Tiago e Maria	Desenhos	Desenhos
Bruna	Desenhos	Esquema
Dário e Kátia	Esquema	Desenhos
Núria e Daniel	Esquema simbólico	Esquema simbólico

Renata e Rui e Bruna recorrem a representações informais e pré-formais para resolver o problema mas, na sua resposta escrita, sentem necessidade de formalizar um pouco mais a representação. Bruna, depois de descobrir a solução correta, apaga todos os desenhos que fez e substitui-os por tracinhos (figura 5).

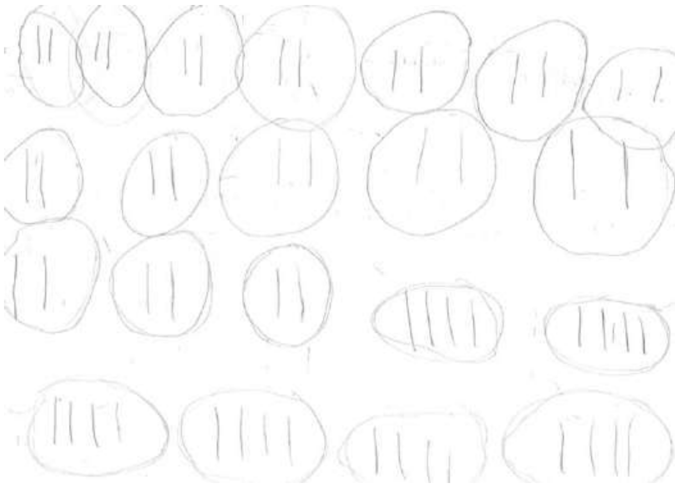


Figura 5. Representação utilizada por Bruna

Por sua vez, Renata e Rui, depois de descobrirem a solução correta, tendo por base os desenhos das cabeças dos animais, fazem uma representação formal, através do cálculo vertical, para mostrar que a sua resposta está correta (figura 6).

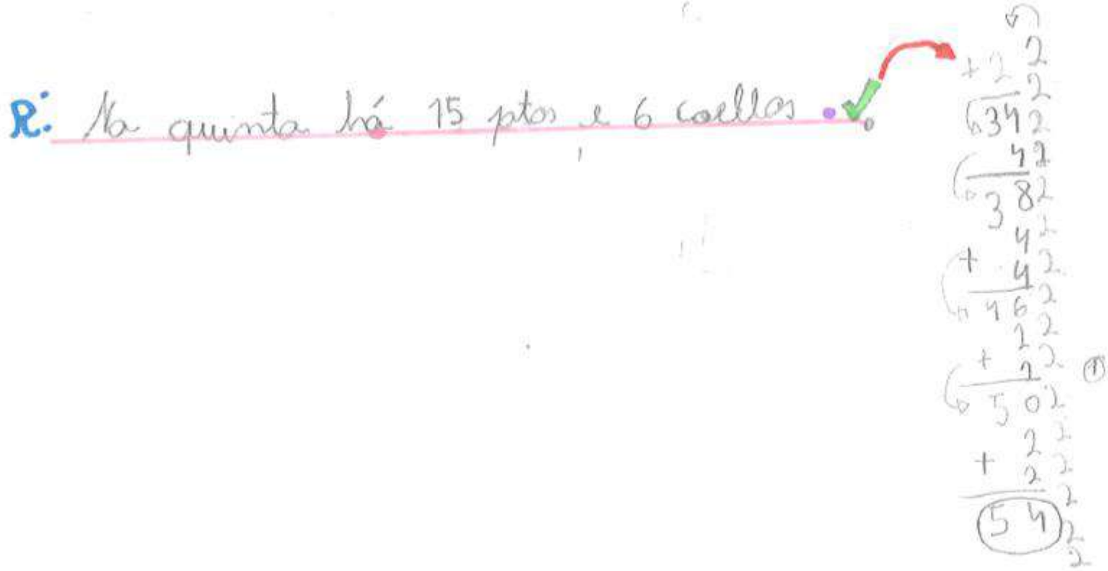


Figura 6. Representação utilizada por Renata e Rui

Na discussão final, Renata refere: "Depois fomos fazendo a conta, fomos fazendo a conta… E o resultado deu 54 [patas]… Por isso estava certo!"

Assim, verificamos que os alunos modificam a sua representação para partilhar com os colegas os resultados obtidos. No processo de resolução, recorrem a uma representação mais informal, mas quando pretenderam verificar e comunicar o resultado obtido, recorrem a uma representação mais formal.

Curiosamente, com o mesmo objetivo, Dário e Kátia fazem precisamente o contrário. Recorrem a uma folha de rascunho para resolver o problema através de tracinhos, mas, quando registam a solução na folha A3 dada pela professora, desenham um coelho e um pato e fazem uma pequena legenda com a resposta correta (figura 7). Para apoiar o seu raciocínio utilizam os tracinhos, mas para comunicar aos colegas a resposta correta, consideram que são mais adequados os desenhos. Só depois da intervenção da professora, compreendem que podem utilizar a representação que fizeram em papel de rascunho e que passaram para a folha da resposta definitiva. No entanto, mesmo recorrendo ao esquema que utilizaram, demonstram grande dificuldade em explicar a forma como chegaram ao resultado correto

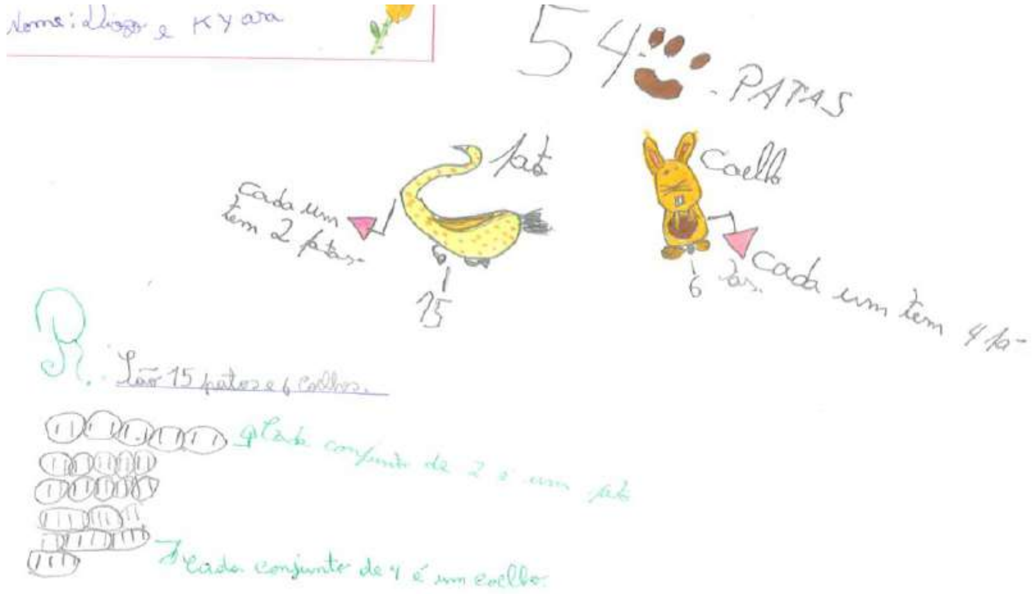


Figura 7. Representações utilizadas por Dário e Kátia

Conclusão

A resolução do problema envolve três momentos cruciais: (i) a compreensão e representação dos dados, (ii) a definição de uma estratégia de resolução e (iii) a aplicação/monitorização dessa estratégia. No primeiro momento, os alunos têm de perceber o que é dado e que é pedido e fazer uma representação adequada. Alguns alunos recorrem a representações informais muito pormenorizadas, de cunho figurativo, desenhando os animais em detalhe, o que torna o processo de representação muito moroso e os distrai com aspetos irrelevantes. Outros optam por representações pré-formais como traços e patas, sem perder tempo com pormenores, o que torna a resolução mais célere e permite concentrar a atenção nos aspetos importantes do problema. Entre estes, alguns representam os patos e coelhos em linhas separadas ou blocos distintos, o que lhes permite maior facilidade de contagem. Há ainda os que utilizam representações formais, seja para resolver o problema (caso em que não conseguem ter êxito), seja para comunicar aos colegas os resultados obtidos (pensando talvez que desse modo são mais convincentes). Num segundo momento, com base na sua representação realizada, é possível definir uma estratégia de resolução. Para estes alunos, a estratégia mais frutuosa é a tentativa-erro organizada e sistemática. Num terceiro momento, a aplicação desta estratégia requer que os alunos monitorizem os resultados que vão obtendo, de modo a caminharem efetivamente para a solução.

Os alunos que usam representações figurativas tendem a usar uma estratégia de resolução errática, mostrando muita dificuldade em compreender o problema. Os alunos que usam representações simbólicas desde o início também não conseguem sucesso na resolução, pois as representações que escolhem não são apropriadas para traduzir as condições do problema. São os alunos que usam representações esquemáticas, de carácter pré-formal (Webb et al., 2008) onde se salientam os aspetos mais relevantes do problema (número de patas de cada animal) e se omitem caraterísticas irrelevantes (como aspeto físico de cada animal), que conseguem formular as estratégias mais eficientes de resolução. A realização de representações de natureza muito diversa por parte dos alunos, com potencialidades bem distintas para a resolução do problema, mostra a importância do papel do professor. Investigar o modo como este pode apoiar os alunos na aprendizagem do uso de representações progressivamente mais sofisticadas e que sejam capazes de usar com pleno significado, como ferramentas intelectuais poderosas para a resolução de problemas, poderá ser assim o foco de futuras investigações.

Referências

Bishop, A., & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel.

Bruner, J. (1999). *Para uma teoria da educação*. Lisboa: Relógio d'Água.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação. Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Goldin, G. A. (2000). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(2), 137-165.

Goldin, G. (2008). Perpectives on representattion in mathematical learning and problem solving. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 178-203). New York, NY; Routledge.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa, APM.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2000). *Didáctica da matemática para o 1º ciclo do ensino básico*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P., & Velez, I. (2011). As representações matemáticas nas conceções dos professores do 1.º ciclo do ensino básico: Um estudo exploratório. *Atas do EIEM* (pp. 117-194). Póvoa do Varzim.

Webb, D. C., Boswinkel, N., & Dekker, T. (2008). Beneath the tip of the iceberg. *Mathematics Teaching in the Middle School, 14*(2), 110-113.

Stylianou, D. A. (2011). The process of abstracting in students' representations. *Mathematics Teaching in the Middle School, 17*(1), 8-12.

LITERACIA TECNO-MATEMÁTICA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM TECNOLOGIAS[37]

Hélia Jacinto

Escola Básica José Saramago, Poceirão & Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

helia_jacinto@hotmail.com

Susana Carreira

FCT, Universidade do Algarve & Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

scarrei@ualg.pt

Resumo

O trabalho de investigação aqui reportado centra-se na atividade de resolução de problemas de matemática com tecnologias no âmbito de uma competição extraescolar, que decorre online – o SUB14. Seguindo uma perspetiva interpretativa, procura-se compreender de que forma os concorrentes põem em ação a sua fluência matemática e a sua fluência tecnológica na resolução de um dado problema de geometria. Os dados sugerem que, apesar de os 4 participantes recorrerem à mesma ferramenta – o GeoGebra, e terem obtido uma solução idêntica e correta, as suas abordagens ao problema diferem em termos da literacia tecno-matemática que revelam.

Palavras-chave: resolução de problemas, tecnologias, mediação, fluência tecno-matemática.

Competições matemáticas online: o contexto

O desenvolvimento de capacidades de resolução de problemas de matemática tem sido alvo de grande atenção por parte de pais, professores e investigadores, tal como revelou o 16th ICMI Study (Barbeau & Taylor, 2009). Em linha com recomendações internacionais, o Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve tem vindo a dinamizar Campeonatos de Matemática, de natureza competitiva, inclusiva e extraescolar, que pretendem estimular o gosto pela resolução de problemas.

O Campeonato de Matemática SUB14® destina-se aos alunos do 7.º e do 8.º ano de escolaridade do Algarve e Alentejo. A fase de apuramento desenrola-se integralmente a distância, pelo que os concorrentes são convidados a resolver 10 problemas entre

[37] Este trabalho foi parcialmente financiado pelo projeto PTDC/CPE-CED/101635/2008 - Resolução de Problemas de Matemática: perspectivas sobre uma competição interactiva na web - Sub12 & Sub14, e pela Bolsa de Doutoramento SFRH/BD/73363/2010, da Fundação para a Ciência e Tecnologia.

janeiro e junho de cada ano, enviando a sua resolução através de correio eletrónico. Podem competir individualmente ou em pequenos grupos, no máximo de três elementos. Os concorrentes digitam a sua resolução diretamente no corpo da mensagem que enviam ou anexam um ficheiro, em qualquer formato. A resposta a cada problema só é considerada correta se o concorrente apresentar uma explicação detalhada do seu raciocínio, justificando convenientemente todos os passos da sua estratégia. A comissão organizadora devolve uma apreciação do trabalho a cada concorrente, podendo conter pistas que os ajudem a corrigir ou a completar a sua resolução. É-lhes permitido que o façam dentro do prazo estipulado e é, também, possível solicitar ajuda para resolver os problemas, seja a professores ou a familiares.

Os problemas do Campeonato podem ser considerados "problemas de palavras" no sentido que Borasi (1986) lhes atribui: o seu contexto está totalmente expresso no enunciado; a formulação do problema é única e explícita; a solução pretendida é, quase sempre, única e/ou exata; e a estratégia de abordagem envolve a combinação de diversos algoritmos ou técnicas conhecidas (p. 134).

Este trabalho reporta parte de uma investigação que pretende compreender a atividade de resolução de problemas de matemática com tecnologias em contextos extraescolares, de que o SUB14 é exemplo. Em particular, neste artigo, procuramos compreender como é que estes jovens participantes colocam em ação os seus conhecimentos matemáticos e a sua fluência tecnológica para resolver um problema do campeonato.

Resolução de problemas e literacia matemática

A discussão em torno da "resolução de problemas" surgiu nas últimas décadas a par com o reconhecimento da utilidade dessa capacidade bem como da sua importância na aprendizagem da matemática. Em Portugal, e acompanhando tendências internacionais, a resolução de problemas tem sido encarada como o "tipo privilegiado das atividades em Matemática" (APM, 1988/2009, p. 42) que poderá servir para "os alunos consolidarem, ampliarem e aprofundarem o seu conhecimento matemático" (ME, 2007, p. 6).

Polya (1978) descreveu a resolução de problemas como a arte da descoberta. Considerava que um aluno está a "fazer matemática" quando está a resolver um problema que "desafie a curiosidade e ponha em jogo as suas faculdades inventivas" (p. V). O seu modelo, sobejamente conhecido, sublinha a importância de procurar ou descortinar uma ideia brilhante, possível através de um posicionamento crítico que permita observar o problema de diferentes pontos de vista.

Analisando as perspetivas de diversos autores que procuraram clarificar conceitos neste campo, consideramos que um “problema” é uma situação que desafia intelectualmente um indivíduo que se dispõe a procurar uma solução, embora não disponha de um algoritmo ou um procedimento imediato que o conduza, com certeza, a essa solução (Blum & Niss, 1991; Kantowski, 1977; Lester, 1983). Todavia, entendemos que a noção apresentada por Lesh e Zawojewski (2007) salienta dois aspetos essenciais a este trabalho: “uma tarefa ou uma atividade dirigida para um objetivo torna-se um problema quando o indivíduo tem necessidade de *desenvolver uma forma mais produtiva de pensar* acerca dessa situação” (p. 782). Os autores colocam, portanto, uma forte ênfase na necessidade de *desenvolver um pensamento produtivo* sobre a situação apresentada e ainda na necessidade de *desenvolver uma ação*.

Essa visão, que partilhamos, implica uma conceção do conhecimento matemático que não se esgota na proficiência e no domínio de factos, regras, técnicas e destrezas de cálculo, teoremas ou estruturas. Trata-se de um conceito que roça a noção de competência matemática (Abrantes, 2001) e que se aproxima do de literacia matemática, na medida em que encara a resolução de problemas como uma fonte do próprio conhecimento matemático. Ao resolver um problema há um conjunto de processos que são *postos em ação*, em separado ou em simultâneo, com objetivos muito concretos: compreender, analisar, representar, resolver, refletir e comunicar (GAVE, 2004).

A fluência tecnológica em relação com a fluência matemática

Diversos autores têm sublinhado algumas ideias chave que visam descrever e explicar o impacto das ferramentas tecnológicas na nossa sociedade: *changing (modificar), reshaping (transformar)* e *affording* são três desses conceitos que surgem na literatura inglesa e nem sempre encontram tradução precisa. Contudo, estas ideias fazem-se sentir numa grande diversidade de contextos profissionais e culturais, repercutindo-se, inevitavelmente, nos processos de ensino e de aprendizagem que envolvem atividade matemática.

Noss (2001) refere-se à *transformação* das representações como um aspeto central e nuclear nas “sociedades pós-industriais” e discute a forma sob a qual as representações digitais estão a *modificar* a própria natureza do conhecimento matemático. A capacidade de compreender essa transformação da informação em conhecimento, onde Noss (2001) inclui o ser capaz de analisar e criticar representações ou ainda desenvolver uma aptidão para modelar situações, será uma faceta fundamental e indispensável ao "funcionamento" pleno de um indivíduo no século XXI.

Apesar de se observar que a matemática desempenha um papel cada vez mais significativo nos mais variados espetros da sociedade, o autor alerta para o facto desse desenvolvimento das ferramentas estar a camuflar ou a impedir o acesso direto a conceitos e processos matemáticos. Um dos efeitos desta revolução tecnológica consiste precisamente no facto de que a tecnologia convida cada vez menos à sua inspeção e compreensão: já não é possível descobrir como funciona um relógio digital simplesmente ao abri-lo. As tecnologias que, em tempos, foram perscrutáveis por crianças curiosas estão-lhes, hoje, vedadas (Noss, 2001). É nesse sentido que diversos autores optam pela expressão *affordance* para se referirem às características de uma ferramenta tecnológica que *convidam* o indivíduo a executar uma determinada ação (Noss, 2001; Artigue, 2007). Da psicologia, o termo *affordance* refere-se a todas as *possibilidades de ação* sobre um dado objeto (Gibson, 1979) que o sujeito tem à sua disposição.

Vários investigadores têm procurado desenvolver, do ponto de vista teórico, a faceta representacional da atividade matemática baseada no uso de ferramentas tecnológicas, centrando-se nas formas como os alunos e os professores reconhecem o *convite à ação* dessas mesmas tecnologias, para gerar conhecimento matemático. A dimensão semiótica do conhecimento e dos processos matemáticos tem sido fortemente relacionada com a crescente perceção do papel mediador das representações tecnológico-matemáticas, pelo que a introdução de tecnologias digitais que *convidam à ação* parece provocar modificações nesses sistemas semióticos (Artigue, 2007). Uma conclusão emergente é a de que não se deve olhar para a matemática e para a tecnologia como domínios disjuntos e, portanto, o papel da tecnologia não deve ser reduzido a simples conversões entre os diferentes sistemas de representação (Artigue & Bardini, 2010).

Na mesma linha, Borba e Villarreal (2005) argumentam que os processos mediados pelas tecnologias conduzem a uma reorganização da mente humana e defendem que o conhecimento é resultado de uma simbiose entre os seres humanos e a tecnologia que usam. Essa estreita relação origina uma nova entidade, que os autores denominam "humanos-com-media". Esta ideia da indivisibilidade tem surgido em vários projetos de investigação, cujo foco se centrou na compreensão do desenvolvimento simultâneo da fluência matemática e tecnológica. Hoyles, Noss, Kent, e Bakker (2010, citados por Clark-Wilson, Oldknow, & Sutherland, 2011) escolheram o termo literacias tecno-matemáticas (*techno-mathematical literacies*, no original) para enfatizar a necessidade de se ser fluente numa linguagem que envolve capacidades tecnológicas e matemáticas, ou seja, capacidades que promovem o uso expedito de ferramentas digitais bem como a interpretação e a comunicação eficaz de resultados matemáticos. Os contextos descritos pelos autores diferem em muitos aspetos das características das competições abordadas neste estudo, mas o conceito de literacia tecno-matemática abrange os tipos de fluência que os jovens concorrentes revelam na sua atividade de resolução de problemas de matemática.

Em síntese, torna-se particularmente importante observar as características do indivíduo que responde ao convite à ação de uma dada ferramenta tecnológica quando se assume que o conhecimento brota de uma simbiose entre seres humanos e tecnologias. Apesar de parecer consensual que as tecnologias são poderosas ferramentas de mediação da atividade de resolução de problemas reveste-se, ainda, de grande interesse perceber que competência matemática e tecnológica, i.e., que literacia tecno-matemática é importante desenvolver para enfrentar com eficácia os desafios do século XXI.

O estudo: aspetos metodológicos

Integrado numa investigação de natureza interpretativa, este estudo envolveu técnicas qualitativas de recolha e de análise de dados (Quivy & Campenhoudt, 2008).

Assim, recolheram-se todas as resoluções enviadas pelos concorrentes de 7.º ano de escolaridade ao Problema 6 da edição 2010/2011 do SUB14. Dessas, selecionaram-se as produções dos quatro participantes que mostravam ter usado o GeoGebra em alguma das fases de resolução do problema, o que implicou a recolha das mensagens eletrónicas que enviaram e os anexos nelas contidos, e ainda o feedback devolvido a cada participante pela comissão organizadora.

Conduzimos uma análise interpretativa, considerando o ponto de vista da literacia tecno-matemática em termos do uso efetivo de ferramentas digitais para estruturar, sustentar e ampliar o pensamento matemático, o significado e o conhecimento na resolução de problemas dos participantes.

Os dados: quatro resoluções no GeoGebra

Nesta seção analisamos quatro resoluções de um problema de geometria, com recurso ao GeoGebra, para enfatizar diferentes características de mediação que as representações tecno-matemáticas potenciam, nomeadamente, para: 1) obter a solução; 2) interpretar a solução; 3) confirmar a solução; e 4) explorar a solução.

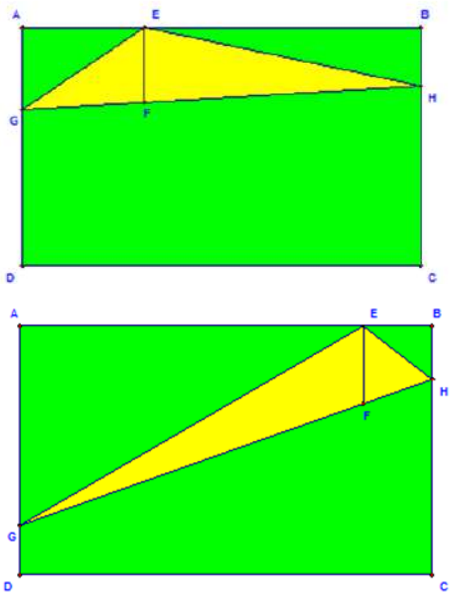
O problema proposto

A grande percentagem de participantes que não responderam ao Problema 6, a dispersão temporal com que as resoluções chegaram e o feedback devolvido a solicitar a explicação detalhada da estratégia ou a justificação da solução obtida, são indicadores das dificuldades sentidas pelos concorrentes na resolução deste problema.

SUB14 - Problema 6
A marcação do canteiro

A Rosa explicou ao seu jardineiro que queria colocar uma zona de flores triangular no seu jardim de relva retangular. E acrescentou que a área do triângulo ficaria ao critério do jardineiro. O bom do empregado pegou numa vara de 2 metros, estendeu-a perpendicularmente a um dos bordos do jardim, num ponto ao acaso (E). Depois, com um fio, traçou uma linha que passava pela extremidade da vara (F) e que unia os dois lados opostos do retângulo, obtendo o triângulo amarelo [EGH].

No dia seguinte, a Rosa olhou para o triângulo e não gostou, mudou a mesma vara para outro ponto ao acaso da borda do jardim e traçou outra linha que passava pela extremidade da vara e unia os dois lados opostos do retângulo (obtendo outro triângulo amarelo [EGH]).



Quando lá chegou, o jardineiro protestou, dizendo que a área para as flores tinha diminuído. Mas a Rosa garantiu-lhe que não. Quem tem razão e porquê?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução!

Figura 1 – Enunciado do Problema 6 da edição 2010/2011 do SUB14

A utilização do GeoGebra para obter a solução

A Marta e o Miguel estudam em Portalegre. À sua primeira tentativa de resposta ao problema, a Equipa do SUB14 devolveu uma apreciação que remetia para a análise dos triângulos que se obtêm ao dividir o canteiro triangular através da vara. A segunda proposta de resolução enviada pela equipa de concorrentes continha um anexo em formato GeoGebra (Figura 2.1).

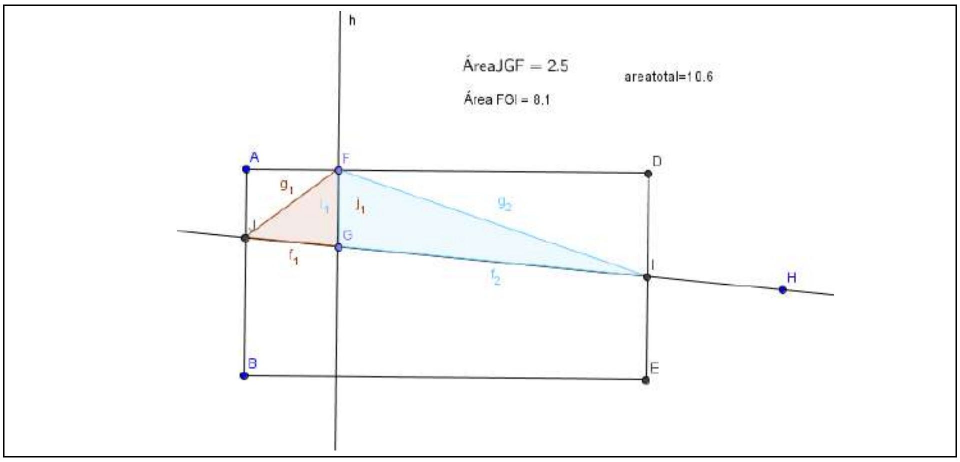


Figura 2.1 – Construção em GeoGebra, enviada pela Marta e o Miguel

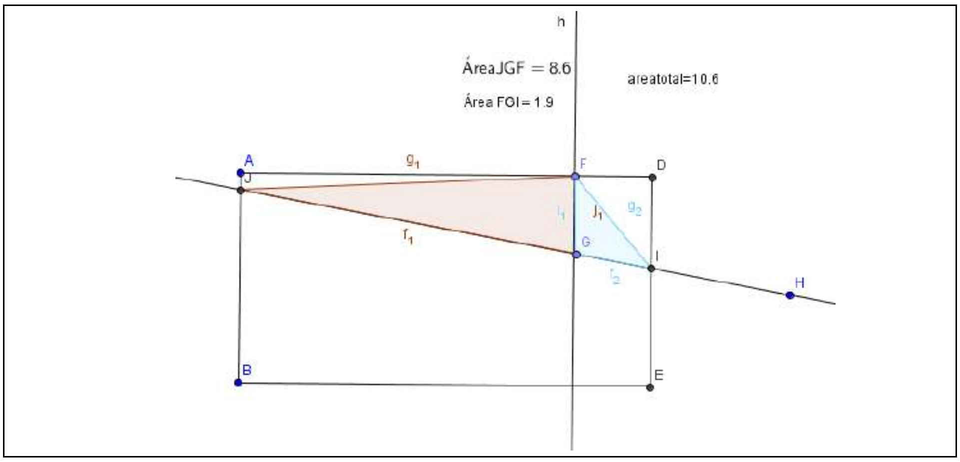


Figura 2.2 – A mesma construção, após a manipulação dos pontos I, J e F

Os concorrentes representam o relvado retangular bem como as três condições do enunciado: a vara com comprimento 2 (segmento FG) é perpendicular ao lado AD do retângulo e o "fio" – o segmento JI, passa pela extremidade da vara, intersetando-a no ponto G. Seguidamente, determinam as áreas dos dois triângulos que se obtêm da decomposição do triângulo FJI pela vara (o segmento FG). Ao arrastar o vértice F verificam que a área total não sofre alterações e concluem que a Rosa tinha razão.

A resolução destes concorrentes revela a sua fluência tecnológica, nomeadamente, na manipulação do GeoGebra: efetuam construções rigorosas que obedecem às condições estipuladas e determinam áreas usando as ferramentas de medida do programa. Já sobre a sua fluência matemática, e analisando o protocolo de construção do ficheiro enviado, é possível perceber que conhecem alguns conceitos geométricos como, por exemplo, o de reta perpendicular e reta paralela (usados na construção do retângulo), polígono e área de um polígono. A não apresentação de qualquer justificação matemática para a conclusão obtida poderá ser indício de que se conformam com a "indubitável certeza" que as experimentações realizadas ao arrastar o vértice F lhes permitem.

A utilização do GeoGebra para interpretar a solução

A Andreia, o Lucas e o José frequentam uma escola em Portimão. A sua resposta ao problema 6 contém uma construção em GeoGebra e um breve texto que pretende justificar a conclusão obtida através da manipulação da construção (Figura 3.1).

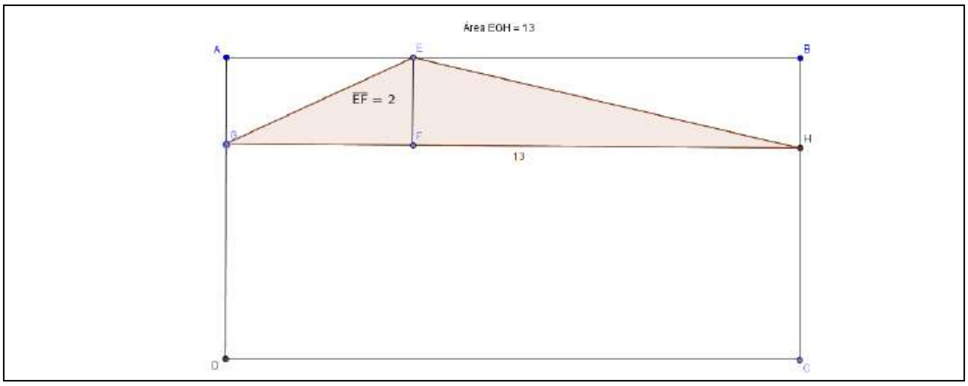


Figura 3.1 – Construção em GeoGebra enviada por Andreia, Lucas e José

À construção, que é rigorosa, robusta e fiel às três condições do enunciado, acrescentaram a determinação de duas medidas através das ferramentas do programa: o comprimento do segmento GH e a área do triângulo EGH. A manipulação dos pontos móveis, G e E, e a observação da invariância da medida de área e do comprimento do lado inferior do triângulo, parecem convencê-los de que as áreas não se alteram para qualquer triângulo que se represente naquelas condições.

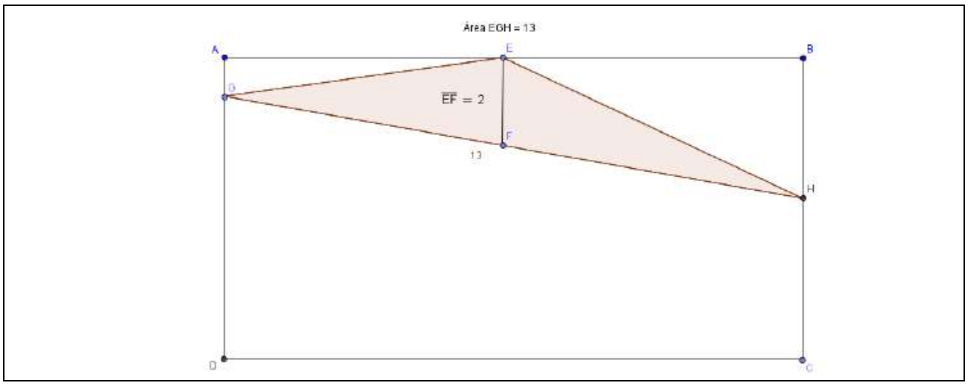


Figura 3.2 – A mesma construção, após manipulação dos pontos G, E e H.

Como sugere o texto enviado (Figura 4), os concorrentes tentam ainda justificar a invariância da área: "triângulos com a mesma base e a mesma altura têm áreas iguais". Essa conclusão surge da manipulação dos vértices "E e G para as situações descritas no problema".

Resposta:
Triângulos com a mesma base e a mesma altura têm áreas iguais.
No seguinte ficheiro geogebra movendo unicamente os pontos E e G para as situações descritas no problema, facilmente se constata que o valor da área se mantém inalterável. Por isso o jardineiro não tem razão quando diz que a área diminuiu, pois a área mantém-se igual.

ANEXO (ABRIR NO PROGRAMA GEOGEBRA)

Figura 4 – Resposta enviada por Andreia, Lucas e José

Contudo, ao mover os pontos E e G é possível observar que o segmento GH pode deixar de ser paralelo ao lado AB do retângulo mas a medida que o GeoGebra devolve para comprimento desse segmento parece manter-se. Isso pode dever-se ao tipo de arredondamento definido – à unidade neste caso e, portanto, é provável que não tenha sido ponderado pelos concorrentes.

A equipa revelou a sua fluência tecnológica através do uso do GeoGebra com relativa destreza, não só para representar a situação colocada, como para obter a solução e, ainda, para tentar interpretar o resultado observado. No entanto, não são igualmente fluentes em termos de utilização de conhecimentos matemáticos pois parecem estar convencidos de que o comprimento do segmento GH é também invariante.

A utilização do GeoGebra para confirmar a solução

A Sara reside e estuda em Lagos. Como a própria reconhece, sentiu alguma dificuldade em "explicar por palavras" a sua resolução, pelo que optou por completar a justificação com o envio de um *print screen* com a sua construção em GeoGebra.

Tal como explica (Figura 5), a Sara começa por "imaginar" que o retângulo teria um comprimento de 12cm (que ela denomina por largura) e constrói uma representação de um jardim e de um canteiro, cumprindo as demais condições do enunciado.

Resposta: A senhora Rosa é quem tem razão a area dos triangulos é a mesma.

para explicar também enviei em anexo.

fui imaginar que o rectangulo tinha 12 cm de largura, a formula da area de um triangulo é base x altura a dividir por dois.

No primeiro triangulo a area é 12, porque a sua base é 12, 12x2= 24 e 24 a dividir por 2 vai dar 12. Area=12

no segundo dividi-o em dois triangulos,onde calculei a area de cada um e depois somei e voltaria a dar 12, a area de cada parte desenhei uma linha recta com a area de cada parte do triangulo que dividi em dois, depois juntando as duas rectas, com uma regua medi e dá va 12, concluindo assim que era verdade.

também usei o geogebra para resolver, como era dificil explicar por palavras reduzi a este pequeno texto e enviei um anexo com mais das explicaçoes.

Figura 5 – Excerto da resolução enviada pela Sara, por e-mail

A partir da primeira construção (à esquerda na Figura 6) e dos cálculos que efetua para determinar a área do triângulo aí representado, a Sara observa que esse valor coincide com o que inicialmente atribuiu ao comprimento do lado do retângulo.

Ao fazer uma segunda construção (à direita) a concorrente já revela intenção em justificar o resultado obtido anteriormente, pois divide o canteiro triangular em dois triângulos interiores, ONM e OMK. Apesar de ter registado no texto e no seu documento GeoGebra que determinou essas duas áreas, a imagem enviada não contém a sua determinação explícita recorrendo às “Ferramentas de medida” do programa, nem o seu resultado.

Todavia, a concorrente explica que a vara de 2m corresponderia à base de cada um desses triângulos, ONM e OMK, e representa as suas alturas por dois segmentos, que denomina por a_1 e b_1, respetivamente. Por fim, a Sara regista que “juntando” os dois segmentos, ou seja, as alturas dos dois triângulos interiores, obtém o comprimento do lado do jardim retangular, 12cm.

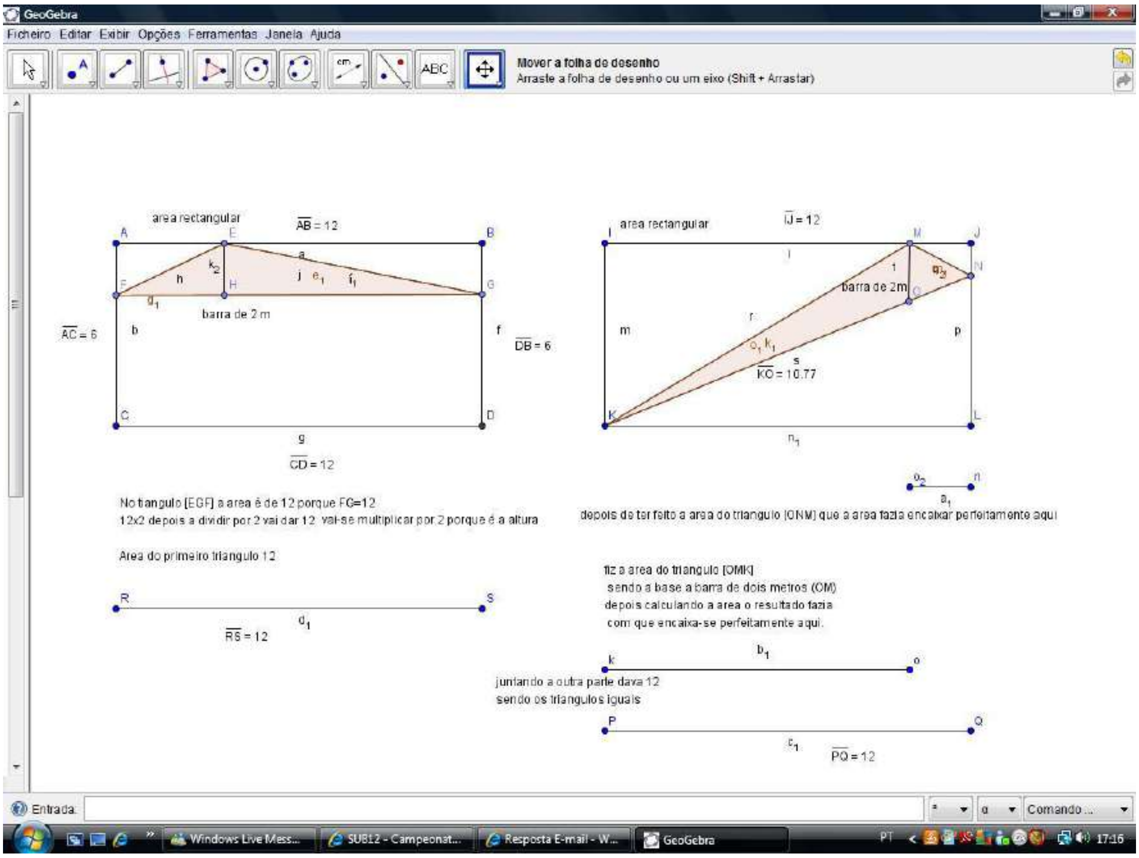


Figura 6 – Imagem enviado pela Sara

Um olhar mais atento identifica a elevada fluência tecnológica da Sara, não só em termos da utilização eficaz do GeoGebra, mas também porque é possível perceber a diversidade de tarefas a que se dedica enquanto resolve o problema do SUB14. Na verdade, a barra de tarefas do seu ambiente de trabalho é bastante revelador: enquanto resolve o problema, a Sara "está online" no Messenger, está a consultar a página do SUB12 (campeonato idêntico ao SUB14, dirigido ao 2º ciclo) e, simultaneamente, está já a redigir a sua resposta no e-mail. Do ponto de vista da sua fluência matemática, salienta-se a linguagem que utiliza. Aparte de todas as limitações que a escrita simbólica no corpo do e-mail possa ter, a concorrente revela uma clara preocupação em fazer-se entender, apresentando fórmulas e cálculos de forma correta. Observa-se, todavia, que a Sara não faz um uso consciente das unidades de medida: considera que o lado AB do retângulo tem um comprimento de 12 *centímetros* e que a vara, o segmento EH, tem um comprimento de 2 *metros*, sem que daí resulte prejuízo para a compreensão ou a resolução do problema.

A utilização do GeoGebra para explorar a solução

A Jéssica estuda em Santiago do Cacém. Também recorreu ao GeoGebra para simular a construção do relvado retangular e do canteiro triangular mas o texto que a concorrente enviou no corpo do e-mail permite compreender na íntegra o seu raciocínio (Figura 7).

> Resposta:
> O triângulo amarelo (zona de flores) está dividido em dois triângulos pela vara de 2 metros que o jardineiro colocou. Sabemos que a base desses dois triângulos mede 2 metros _ o comprimento da vara.
>
> Para medir a área de um triângulo, fazemos a seguinte conta: altura x base / 2
>
> Para medir a área desses dois triângulos, será então: altura x 2 / 2. Ora, está claro que 2 / 2 = 1, portanto, a área desses dois triângulos é igual à sua altura.
>
> Podemos afirmar que a soma das alturas dos dois triângulos é igual ao comprimento do rectângulo (jardim de relva). Portanto, a área da zona das flores é igual ao comprimento do jardim de relva rectângular.
>
> Se o comprimento do rectângulo (jardim de relva) não muda, então a área do triângulo (zona de flores) também se mantém. Por outras palavras, a Rosa tem razão.

Figura 7 - Excerto da resolução enviada pela Jéssica, por e-mail

Esta concorrente, à semelhança da Sara, reconhece que a área do canteiro triangular coincide com o valor escolhido para comprimento do lado do retângulo. No entanto, chega a essa conclusão manipulando a variável "altura" de cada um dos triângulos obtidos da decomposição do canteiro triangular pelo segmento que representa a vara.

A construção enviada, embora obedeça às três condições definidas pelo enunciado – tal como os anteriores concorrentes, revela traços muito distintos da sua manipulação (Figura 8). Poder-se-á mesmo dizer que essa diferença revela que o seu modo de pensar é, também, distinto.

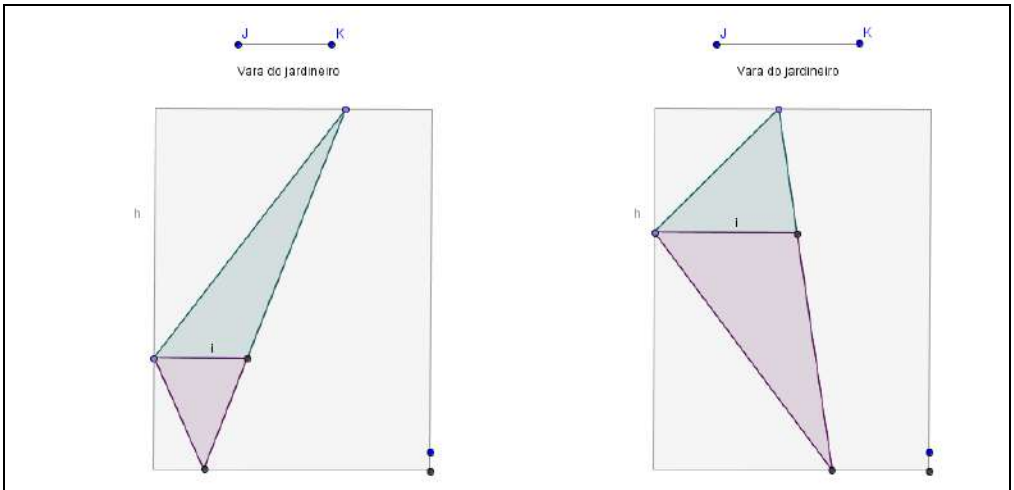


Figura 8 – Construção em GeoGebra (à esquerda) e sua manipulação (à direita)

Na construção sobressai a ausência de medidas e de cálculos e destaca-se a construção de um seletor que permite regular a dimensão da vara, bem como a existência de um ponto móvel, localizado próximo do vértice inferior direito do retângulo, que permite regular as dimensões do quadrilátero.

Este ficheiro revela a elevada literacia tecno-matemática da Jéssica, na medida em que a construção com o GeoGebra é feita com a perspetiva das propriedades geométricas e das relações que as condições do enunciado impõem, mais do que com o intuito de medir ou calcular. A relação quantitativa que a concorrente explica no seu texto surge agora numa representação geométrica, extremamente poderosa devido ao seu convite à manipulação e, consequentemente, à generalização. A inserção do seletor permite alterar a dimensão da vara, o que envolve a análise de uma variável que não surge no enunciado do problema, pelo que a exploração da Jéssica vai além do que é solicitado.

Considerações finais

Até ao momento, tem-se verificado que um grande número de concorrentes revela uma fluência tecnológica bastante sofisticada no que se refere à comunicação dos seus processos de resolução. Em particular, os dados aqui apresentados e analisados ilustram a diversidade de modos de pensar e de modos de agir: quatro grupos de resolvedores, certamente com experiências de aprendizagem muito díspares, em locais diferentes, percebem a pertinência e reconhecem as potencialidades de uma mesma ferramenta – o GeoGebra – para resolver o problema proposto. Estas 4 resoluções exemplificam o tipo de simbiose descrita por Borba e Villarreal (2005) uma vez que as estratégias de resolução de problemas usadas revelam sujeitos em ação com uma ferramenta tecnológica, pelo que se podem identificar como “seres humanos-com-media”.

Contudo, é possível identificar traços comuns na sua atividade de resolução do problema: todos representam o relvado retangular e o canteiro triangular, todos usam o “arrastamento” para verificar ou comprovar, todos analisam e todos concluem. Mas, aquilo que cada um retira desse manusear não é, necessariamente, o mesmo, e parece estar estreitamente relacionado com a sua capacidade de colocar em ação, simultaneamente, a sua literacia matemática e a sua literacia tecnológica.

Constata-se, também, que o GeoGebra *convida* todos os concorrentes a um mesmo conjunto de *possibilidades de ação*. Contudo, parece ser a literacia tecno-matemática de cada um que lhes permite empreender uma atividade mais sofisticada do ponto de vista matemático e tecnológico ou, ao invés, ficar-se por uma utilização elementar e menos poderosa.

Os dados sugerem ainda que as diferenças identificadas estão fortemente relacionadas com a natureza dinâmica das representações matemáticas proporcionadas pela ferramenta na compreensão das condições do problema. Por exemplo, a livre inserção de outros elementos na construção conduziu a compreensões poderosas do problema, levando à generalização. Num outro caso, a invariância da área não só é reconhecida, como é geometricamente explicada. Noutra solução, os elementos adicionais permitem percecionar a solução como um caso particular de uma afirmação mais geral; enquanto na última situação, transformam o problema num outro ainda mais abrangente ao estender as várias condições e permitindo a sua exploração.

A ideia de "invisibilidade" da matemática (Noss, 2001) ficou também patente na 2.ª resolução discutida. Os concorrentes, cedendo ingenuamente à medida que o GeoGebra devolveu, limitam-se a usar esse resultado na sua apreciação sem procurar uma justificação matemática. Falta-lhes o sentido de análise e de crítica das representações digitais, referido por Noss (2001), o que influencia a sua capacidade de *transformar* a informação em conhecimento.

Estes são fortes indícios de como o uso espontâneo das tecnologias *modifica* e *transforma* a atividade de resolução de problemas de matemática. O conjunto de soluções mostra a eficácia do uso de ferramentas digitais para estruturar, dar suporte e ampliar o pensamento, o significado e o conhecimento matemáticos na atividade de resolução de problemas destes jovens.

Referências

Abrantes, P. (2001). *Reorganização Curricular no Ensino Básico. Princípios, Medidas e Implicações. Decreto-Lei 6/2001*. Lisboa: Ministério da Educação, DEB.

APM (1988/2009). *A renovação do currículo de matemática*. Lisboa: APM.

Artigue, M. (2007). Digital technologies: a window on theoretical issues in mathematics education. Em D. Pitta-Oantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of CERME 5*, (pp. 68-82). Cyprus: Cyprus University Editions.

Artigue, M. & Bardini, C. (2010). New didactical phenomena prompted by TI-nspire specificities – The mathematical component of the instrumentation process. Em V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.). *Proceedings of CERME 6*, (pp. 1171-1180). Lyon, France: INRP.

Barbeau, E. & Taylor, P. (2009). *Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom: The 16th ICMI Study*. New York, NY: Springer.

Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to the other subjects - state, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 37-68.

Borasi, R. (1986). On the nature of problems. *Educational Studies in Mathematics* , 17, pp. 125-141.

Borba, M., & Villarreal, M. (2005). *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: Information and Communication Technologies, Modeling, Experimentation and Visualization*. New York, NY: Springer.

Clark-Wilson, A., Oldknow, A., & Sutherland, R. (2011). Digital technologies and mathematics education [Report]. *Joint Mathematical Council of the United Kingdom*. [Disponível em http://cme.open.ac.uk/cme/JMC/Digital%20Technologies%20files/JMC_Digital_Technologies_Report_2011.pdf].

GAVE (2004). *Resultados do estudo internacional PISA 2003*. Ministério da Educação.

Gibson, J. (1979). The Theory of Affordances. Em R. Shaw & J. Bransford (Eds.) *Perceiving, Acting, and Knowing: Toward an ecological psychology* (pp. 67-82). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kantowski, M. (1977). Processes involved in mathematical problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education*, *8*(3), 163-180.

Lesh, R., & Zawojewski, J. S. (2007). Problem solving and modeling. In F. Lester (Ed.). *The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* (pp. 763-804). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Lester, F. (1983). Trends and Issues in Mathematical Problem-Solving. In R. Lesh, & M. Landau, *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 229-261). Academic Press Inc Harcourt Brace Jovanovich Publishers.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação – DGIDC.

Noss, R. (2001). For a Learnable Mathematics in the Digital Culture. *Educational Studies in Mathematics*, 48, pp. 21-46.

Quivy, R., & Campenhoudt, L. (2008). *Manual de Investigação em Ciências Sociais*. Lisboa: Gradiva.

AUTOAVALIAÇÃO EM MATEMÁTICA: O CASO DE UM ALUNO NO CONTEXTO DE UMA INTERVENÇÃO DE ENSINO

Sílvia Semana

Doutoranda do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa,

silviasemana@yahoo.com.br

Leonor Santos

Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

mlsantos@ie.ul.pt

Resumo

Esta comunicação reporta um estudo de caso que procura compreender como um aluno perspetiva e desenvolve a autoavaliação em Matemática, no contexto de uma intervenção de ensino intencional e em relação com as práticas avaliativas adotadas.

O aluno consolida uma perspetiva de autoavaliação enquanto forma de reflexão sobre o trabalho desenvolvido, com identificação de pontos fortes e limitações, tendo em vista a sua melhoria. Os resultados sugerem que ele efetiva a sua autoavaliação de forma intencional e fundamentada, formal e informalmente, tendo por base diferentes referências, entre as quais os critérios de avaliação partilhados. No entanto, a apropriação desses critérios apresenta-se como um percurso ainda incompleto e a autoavaliação como um processo que apenas inclui monitorização e não ação no sentido de melhorar o seu trabalho e a sua aprendizagem. Apesar das dificuldades/limitações identificadas, a intervenção de ensino, e em particular as práticas associadas à partilha dos critérios de avaliação e à solicitação de reflexões escritas, revelam potencialidades para o desenvolvimento da autoavaliação em Matemática.

Palavras-chave: autoavaliação em Matemática, critérios de avaliação, reflexões escritas

Introdução

No contexto da avaliação formativa (Wiliam, 2011), a autoavaliação é uma forma de regulação privilegiada (Santos, 2008), que contribui para uma maior responsabilidade dos alunos sobre a sua aprendizagem (Sadler, 1989) e conduz a melhorias significativas no seu desempenho (Fontana & Fernandes, 1994). Contudo, o desenvolvimento da autoavaliação não é simples (Black & William, 1998a) e requer várias condições (Andrade & Brook, 2010), que devem ser promovidas pelo professor. Em particular, é necessário que os alunos compreendam o que é esperado de si, para que possam avaliar o seu trabalho e agir no sentido de melhorar a sua aprendizagem (Black & William, 1998a).

Este estudo é parte de uma investigação mais ampla[38] cujo objetivo principal é compreender práticas avaliativas de professores de Matemática, integradas numa intervenção de ensino que visa a promoção da autorregulação dos alunos e é concebida num contexto de trabalho colaborativo. Nesta comunicação, debruçamo-nos sobre o caso de um aluno, Ivo. Procuramos compreender como perspetiva e desenvolve a sua capacidade de autoavaliação.

Fundamentação Teórica

A autoavaliação é um processo interno de regulação do próprio pensamento e aprendizagem (Nunziati, 1990), vital para uma efetiva aprendizagem (Black & Wiliam, 1998b). Inclui monitorização e ação: o aluno confronta aquilo que fez com o que é esperado que faça, percecionando diferenças entre essas duas situações, e age de forma a reduzir ou eliminar essa diferença (Sadler, 1989). O desenvolvimento desta capacidade requer um processo de aprendizagem, que deve ser suportado e encorajado pelo professor (Wiliam, 2011). Os alunos devem ser envolvidos diretamente em experiências de avaliação (Sadler, 1989) e chamados a refletir sobre o seu trabalho, a sua aprendizagem e o modo como os podem melhorar (Black & Wiliam, 1998b), por exemplo através da solicitação de reflexões escritas. Com tempo, apoio e prática, os alunos tendem a desenvolver atitudes positivas face à autoavaliação e a perspetivá-la como um processo formativo de monitorização do seu trabalho, revisão e reflexão, nomeadamente quando as expectativas relativamente ao seu desempenho são claras (Andrade & Du, 2007). O principal obstáculo parece advir precisamente do facto de os alunos apenas poderem autoavaliar-se se tiverem uma ideia clara dos objetivos a atingir e isso não é usual (Black & William, 1998a).

Os critérios de avaliação são uma referência para a autoavaliação e uma das suas condições necessárias, mas não são suficientes só por si. Eles devem ser legítimos da perspetiva dos alunos e permitir-lhes compreender o que de si é esperado (Hadji, 1994), ou seja, eles devem ser apropriados pelos alunos. No entanto, isto é relativamente raro e difícil, uma vez que o sentido dado pelos alunos aos critérios pode ser diferente daquele dado pelo professor (Sadler, 1989). Por isso, é necessário criar condições para que os alunos compreendam os critérios de avaliação no contexto do seu próprio trabalho.

[38] Investigação financiada pela FCT - Bolsa de Investigação SFRH / BD / 74620 / 2010

Metodologia

Este é um estudo interpretativo, com o design de estudo de caso (Yin, 2009). Em particular, estudamos o caso de um aluno, Ivo, dando especial atenção às questões do "como" e "porquê", principalmente no que se refere à perspetivação e ao desenvolvimento da autoavaliação no contexto de uma intervenção de ensino intencional, concebida num contexto de trabalho colaborativo.

O grupo colaborativo foi constituído, no âmbito do estudo mais amplo, por uma investigadora (primeira autora) e por quatro professores de Matemática. A intervenção de ensino foi concebida no seio desse grupo, em reuniões semanais, e é caraterizada por aulas organizadas nas modalidades de pequenos grupos, apresentações orais e discussões coletivas, e três práticas avaliativas principais: promoção de uma comunicação oral intencional em discussões matemáticas coletivas; investimento na apropriação dos critérios de avaliação pelos alunos; e solicitação de reflexões e autoavaliações escritas aos alunos. Foi partilhada e negociada com os alunos uma grelha de avaliação que contempla como critérios de avaliação: *Conceitos e procedimentos*, *Estratégias e processos de raciocínio* e *Comunicação (oral/escrita)*, e apresenta descritores que remetem para o desempenho que é esperado dos alunos (Anexo 1).

Ivo é aluno do 8.º ano de escolaridade, no ano letivo 2010/11, de uma professora de Matemática que integra o grupo colaborativo. Foi selecionado como aluno informante privilegiado, com base nos seguintes critérios: desempenho na disciplina (fraco, nível 2), participação oral na aula de Matemática (relativa facilidade de intervenção, quando solicitado) e perspetivas/hábitos de autoavaliação (reconhece-lhe mais-valias e afirma ter por hábito autoavaliar-se). Ivo tem uma retenção no 5.º ano e beneficia de adequações curriculares e adaptações no processo de avaliação, em virtude de apresentar dislexia. De acordo com a professora, no início do 3.º ciclo, "era um aluno bastante tímido, frequentemente alheado das atividades letivas e com baixa autoestima".

Os dados apresentados foram recolhidos de Setembro de 2010 a Outubro de 2011, principalmente através de: um questionário sobre perspetivas face à avaliação e perceção de hábitos de autorregulação em Matemática (preenchido por Ivo no início da recolha de dados (Q1) e novamente no final (Q2)); três entrevistas semiestruturadas com o intuito de aprofundar e clarificar a informação fornecida através do questionário, bem como identificar e compreender possíveis relações com a intervenção de ensino (E1 –

E3); cinco reflexões escritas do aluno sobre o seu desempenho e processo de aprendizagem numa aula ou conjunto de aulas (R1 – R5).

Neste estudo, teve-se em conta que a autoavaliação é um processo interno e altamente subjetivo, e por isso difícil de aceder. Assim, para a análise de dados consideraram-se quatro dimensões, que incidindo sobre aspetos observáveis permitem informar sobre o modo como o aluno perspetiva e desenvolve a autoavaliação ao longo da intervenção de ensino. São elas: perspetivas face à autoavaliação; perceção de hábitos de autoavaliação; capacidade de autoavaliação evidenciada nas reflexões escritas; e nível de apropriação dos critérios de avaliação.

Resultados

Perspetivas face à autoavaliação

No início do estudo, Ivo atribui à avaliação em Matemática o papel de informar os alunos sobre o seu nível de desempenho: "[Serve] Para sabermos o nosso nível em que estamos na disciplina" (Q1), e considera que os próprios alunos devem avaliar o seu trabalho para saberem os erros que cometeram: "Penso que isso é um trabalho esperado dos alunos para saberem onde erraram" (Q1).

Ao longo do estudo, o aluno altera ligeiramente as suas perspetivas face à avaliação e, em particular, à autoavaliação. Continua a destacar o papel da avaliação para informar os alunos, mas agora sobre os aspetos positivos e menos positivos do seu desempenho e sobre o que têm que melhorar: "[Serve] Para sabermos aquilo em que nós somos bons, e menos bons. E o quê que temos que melhorar e não" (E1). Ivo considera que a autoavaliação é exigente, pois requer que o aluno saiba comparar o que fez e o que era esperado que fizesse: "É mais complicado! (…) temos que estar atentos a como avaliamos, se estamos a fazer as coisas bem ou mal e às vezes estamos com dúvidas sobre se fizemos a coisa correta, ou a coisa menos correta" (E1).

Apesar das dificuldades associadas à autoavaliação, Ivo reconhece-lhe mais-valias, principalmente, para os alunos refletirem sobre os aspetos a melhorar: "pensamos mais naquilo em que temos que melhorar" (E1). Em particular, ele considera que as reflexões escritas são importantes para os alunos refletirem sobre o seu desempenho no grupo de trabalho e melhorarem: "Isto é bom para nós refletirmos sobre o nosso trabalho no grupo, em quê que… o quê que nós desempenhamos, bem ou mal, para melhorarmos" (E1).

Não obstante as mudanças identificadas, decorrido um ano, coexistem no aluno perspetivas distintas face à autoavaliação. Essa autoavaliação pode ser "injusta" ou vantajosa, dependendo se é ou não para ser partilhada com a professora, e poderá, portanto, ter implicações na classificação final da disciplina:

> … se for pensar para nós acho que é muito bem, se for dizer à professora é mau (…) porque… uma pessoa, há muita gente que pega e ah… não se avalia, principalmente na autoavaliação, não se avalia como, como é, mas sim como queria que fosse, então isso seria injusto. A professora ficaria com uma opinião errada e poderia influenciar as notas no final do período. (E3)

No que diz respeito, especificamente, às reflexões escritas, Ivo não vê entraves, uma vez que, na sua opinião, incidem preferencialmente sobre o desempenho dos alunos nos respetivos grupos, e não unicamente sobre o desempenho individual de cada elemento:

> Essas são boas, porque falamos muito pouquinho de nós e falamos mais daquilo que trabalhamos em grupo, acho que essas não contam para as notas. As que são más são aquelas em que dizemos à professora e falamos só sobre nós. (E3)

Perceção de hábitos de autoavaliação

Desde o início, Ivo afirma autoavaliar-se regularmente, refletindo sobre o que fez mal, para melhorar: "Sim, pensando naquilo que eu fiz mal para o poder alterar, de semana a semana" (Q1). No entanto, esta avaliação parece ser algo superficial e muito dependente das classificações que obtém: "Penso só nas disciplinas em que tenho negativas, que tenho que melhorar (...) e em que estou em risco de tirar negativa" (E1). Para melhorar, Ivo procura realizar os trabalhos de casa e estudar, mas reconhece que acaba por não o fazer com a frequência devida: "Uma coisa que eu não faço sempre, os tpc's. Estudar, raramente… e ainda por cima a Matemática…" (E1). Assim, Ivo não evidencia uma procura efetiva de melhoria, já que reconhece que não implementa, pelo menos como devia, estratégias nesse sentido.

Ao fim de um ano de implementação da intervenção de ensino, Ivo continua a ter por hábito avaliar o seu trabalho, identificando o que faz bem e o que faz mal: "Sim avalio o que faço de bem e o que faço de mal" (Q2), e procura melhorar, tendo ainda como referência as classificações que obtém: "Tento [melhorar], principalmente no terceiro período, caso esteja em riscos de reprovar, tento ao máximo ter melhor, melhor (…)

desempenho" (E3). Para melhorar, o aluno tem também em consideração o feedback dado pela professora:

> Penso nas vezes que a professora me chama à atenção… e às vezes que a professora diz, por exemplo, não estás a dar, não estás a ter o mesmo desempenho que tiveste no ano anterior, está a ser pior ou melhor, e eu depois, depende daquilo que ouvir, respondo, tento melhorar. (E3)

Ivo aponta as aulas da intervenção de ensino como oportunidades privilegiadas para refletir, mas reconhece que é complicado melhorar o seu desempenho e por vezes acaba por desistir do trabalho, nomeadamente quando a tarefa não o desafia ou é demasiado difícil para ele:

> Depende, por exemplo, naqueles trabalhos de grupo e apresentações que temos estado a fazer, costumo pensar, se for… Mas se não for, por exemplo, um trabalho assim que me chame à atenção, eu desisto quase do trabalho, então faço mais à balda. (...)
>
> Tento [mudar], o problema é que é muito complicado! É como o último trabalho que fizemos, eu… aquilo acho que é… o trabalho foi muito complicado, e eu baldei-me também para ele. (E3)

Capacidade de autoavaliação evidenciada nas reflexões escritas

Ivo aprecia o seu desempenho e/ou desempenho do seu grupo de trabalho em todas as reflexões, recorrendo a alguns indicadores de avaliação institucionalizados pela grelha de avaliação partilhada, sendo o mais frequente a terminologia usada: "Nas primeiras aulas o grupo não usou a terminologia adequada mas para as finais começamos a usá-la" (R1); "Declaro que não usei a terminologia adequada na exceção usada ao explicar aos meus colegas" (R4). Ivo recorre ainda a outros indicadores como: descrição/explicação do trabalho – "[Tivemos] algumas dificuldades na explicação dos mesmos exercícios" (R1); procedimentos – "retirando um exercício dado, procedemos de forma correta e ordenada, mesmo apresentando todos os cálculos" (R2); argumentos/justificações – "Não apresentámos para todas [as maneiras de resolução] argumentos válidos" (R4); e outros associados à reação às intervenções dos colegas: "Emendei muitas vezes o trabalho dos outros grupos" (R4); "não fiz questões aos meus colegas devido a não ter percebido bem a tarefa" (R5).

Além dos critérios de avaliação institucionalizados, Ivo tem em consideração outros aspetos, que considera relevantes, para apreciar o desempenho do grupo e o seu desempenho individual. O aluno manifesta a preocupação, em todas as reflexões, de fazer uma apreciação global do trabalho do grupo (aparentemente associada à dinâmica de trabalho ou ao funcionamento do grupo) e depois destaca, pela positiva ou pela negativa, alguns elementos do grupo com base no seu "nível" de contributo para o trabalho desenvolvido:

> Acho que em geral o grupo trabalhou bem com algumas dificuldades em entender-se. Não gostei de realizar esta tarefa com a Brigite porque depois de acabarmos ela decidiu brincar e não explicar como fizemos. (R3)

Ivo tem consciência que, por vezes, foca as suas reflexões em aspetos que não se relacionam diretamente com os critérios de avaliação institucionalizados, deixando transparecer uma ligeira tensão entre o uso dos critérios e a sujeição a algumas representações próprias do que considera importante contemplar nas reflexões:

> … se calhar, eu não uso sempre estas reflexões de forma adequada com… os critérios, o que devia escrever. Por exemplo, neste trabalho, quando estava a escrever esta reflexão [R3], pensava só, tenho de dizer que, que não gostei do que a Brigite fez, e não pensava como é que nós desempenhámos [o trabalho] (E1).

Ivo faz referência a aprendizagens apenas em duas reflexões: na segunda reflexão, apresenta o aprender mais sobre triângulos como um objetivo para a realização da tarefa em causa: "também esperei perceber mais sobre triângulos" (R2); e na terceira, menciona aprendizagens decorrentes da realização da tarefa, mas não é evidente a que se refere: "aprendi a usar aquilo que a professora falou na sala, estando bem ou mal" (R3). Contudo, em nenhuma reflexão ele explicita claramente as aprendizagens que realizou.

O aluno reconhece a existência de dificuldades, sentidas por si ou pelo seu grupo, em todas as reflexões (exceto na quarta), mas nem sempre as explicita de forma adequada: "[Tivemos] algumas dificuldades na explicação dos mesmos exercícios" (R1); "Senti dificuldades no exercício 2." (R3). Apenas na segunda reflexão o aluno refere ter ultrapassado as dificuldades e dá evidências disso, com recurso a exemplos concretos de terminologia que acabou por utilizar corretamente: "Tive dificuldades em ser explícito com a minha ideia, mas consegui ultrapassá-la explicando na língua matemática (congruentes e proporcionais)" (R2) Além disso, nessa mesma reflexão o aluno refere a discussão entre alunos e as explicações da professora como forma de o grupo esclarecer as suas dúvidas: "conseguimos cada um, em diversas aulas, retirar as nossas dúvidas em discussão ou na explicação da professora" (R2).

Em nenhuma das reflexões, o aluno se propõe melhorar o seu trabalho/desempenho e, consequentemente, não delineia estratégias nesse sentido.

A modalidade em que foi desenvolvido o trabalho (trabalho em pequenos grupos, apresentações e discussões coletivas) é mencionada e aparentemente valorizada em várias reflexões escritas. Em particular, logo na primeira reflexão o aluno valoriza especialmente as apresentações orais à turma, bem como, as questões colocadas pelos outros grupos: “Gostei de poder explicar aos outros grupos a forma que o grupo resolveu (…) achei algumas perguntas [dos outros grupos] adaptadas à discussão” (R1), importância que é também sugerida pelos próprios critérios de avaliação.

Além de evidentes limitações na expressão escrita associadas ao seu problema de dislexia, é notória nas reflexões a falta de contextualização e/ou fundamentação de certas afirmações, nomeadamente com recurso a exemplos concretos de efetivação na sala de aula.

Nível de apropriação dos critérios de avaliação

Ao longo do estudo, Ivo reconhece importância aos critérios de avaliação, quer para regular o seu desempenho durante as aulas, quer para orientar as suas reflexões:

> Tem [utilidade], para apresentarmos os trabalhos, como é que vamos ter… Por exemplo, temos isto (aponta para a grelha de autoavaliação), a primeira aula parece que não correu muito bem, mas depois fomos… aquela coisa da terminologia, foi aí que eu estive a pensar mais quando explicava para os outros colegas… (E1)

Inclusive, Ivo associa o facto de os alunos conhecerem e terem discutido os critérios de avaliação à melhoria das explicações apresentadas de uma primeira aula para a seguinte: “Acho que a nível das explicações, a segunda estava melhor que a primeira, se calhar porque já tínhamos visto e falado sobre os termos da avaliação” (E2).

O aluno parece valorizar de uma forma especial o critério da comunicação oral, em particular quando, tendo em conta aquilo que é esperado dos alunos nesse domínio, considera as apresentações orais dos grupos e a discussão coletiva como importantes para aprender a ouvir os outros, assim como para conhecer e compreender diferentes estratégias de resolução das tarefas propostas:

> Ajudaram-me a aprender a ouvir as opiniões dos outros e ajudaram-me também a aprender como… as outras formas de resolver aquele exercício. (E2)

> … ainda no último trabalho (…) só um dos grupos é que resolveu de maneira diferente e… e, por exemplo, o nosso grupo, não tinha pensado nessa maneira de resolver, então nós apresentamos a nossa maneira de resolver, eles apresentaram a deles e ficamos a lembrar-nos de duas maneiras. (E3)

Ivo faz uso efetivo dos critérios de avaliação para orientar as suas reflexões escritas. No entanto, a falta de fundamentação ou contextualização em alguns casos e o facto de vários indicadores não chegarem a ser considerados, pelo menos de forma explícita, parecem denunciar uma ainda deficiente apropriação dos critérios de avaliação e/ou questionar a profundidade da sua reflexão crítica.

Conclusões

Desde o início, Ivo revela uma atitude positiva face à autoavaliação, ao contrário do que é usual (Wiliam, 2011). Ao longo do estudo reforça uma visão da autoavaliação no sentido de um processo de avaliação formativa que envolve a identificação de pontos fortes e limitações e a revisão do trabalho em concordância (Andrade & Brook, 2010). No entanto, Ivo apresenta algumas resistências à autoavaliação quando prevê implicações para a avaliação sumativa. A importância que atribui à classificação final na disciplina parece criar-lhe um dilema com a mais-valia que reconhece da autoavaliação para a aprendizagem. Relativamente à forma como efetiva a autoavaliação, Ivo fá-lo de forma intencional e consciente, em múltiplos contextos e com base em diferentes referentes. Ele desenvolve a sua autoavaliação, tanto de modo formal, através das reflexões escritas solicitadas, como de modo informal, por iniciativa própria, em particular nas aulas da intervenção de ensino. Os critérios de avaliação são utilizados como referentes (Hadji, 1994) para regular o seu desempenho nas aulas e orientar as suas reflexões escritas.

No entanto, neste processo de autorregulação, o aluno defronta dificuldades que nem sempre consegue contornar. Quando a tarefa matemática proposta é demasiado difícil ou pouco apelativa, Ivo tende a desistir. O aluno atravessa um processo de apropriação dos critérios de avaliação ainda em desenvolvimento (Semana & Santos, 2010) e experiencia alguma tensão entre o uso desses critérios e o recurso a representações próprias do que considera importante focar nas reflexões escritas (Andrade & Du, 2007). Essas reflexões, ao não incluírem a identificação explícita de aprendizagens matemáticas, nem de aspetos a melhorar, restringem, nesse caso, a autoavaliação a um mero processo de monitorização, não sendo delineadas estratégias de intervenção no sentido de eliminar as diferenças entre o desempenho efetivo e o desejado (Semana & Santos, 2010).

Apesar de não ser possível estabelecer uma correspondência direta entre a intervenção de ensino e os resultados encontrados, este estudo ilumina um caminho possível para a promoção da autoavaliação dos alunos em Matemática e mais geralmente para a melhoria da sua aprendizagem. A partilha e a discussão dos critérios de avaliação como forma de ajudar a clarificar as expectativas face ao desempenho dos alunos e apoiar o desenvolvimento de uma autoavaliação concordante (Andrade & Du, 2007; Black & Wiliam, 1998a, 1998b); a solicitação de reflexões escritas como oportunidades privilegiadas para a concretização de uma autoavaliação mais intencional e focada em aspetos importantes; e as próprias apresentações orais e discussões coletivas contribuem para a reunião das três condições identificadas por Sadler (1989), como favorecedoras da melhoria das aprendizagens dos alunos: a partilha de uma ideia de qualidade similar à do professor, a monitorização contínua do trabalho e o acesso a um reportório de estratégias alternativas, passíveis de serem implementadas.

As limitações e dificuldades reveladas pelo estudo reforçam a complexidade do processo de autoavaliação e a necessidade de desenvolver um trabalho prolongado no tempo, sistemático e intencional, eventualmente reajustando as práticas avaliativas da responsabilidade do professor, em direção a uma efetiva autoavaliação (Black & Wiliam, 1998b; Sadler, 1989; Wiliam, 2011).

Referências bibliográficas

Andrade, H., & Brooke, G. (2010). Student self-assessment and learning to write. In N. Mertens (Ed.), *Writing: Processes, tools and techniques*. Hauppauge, NY: Nova Science Publishers.

Andrade, H. & Du, Y. (2007). Student responses to criteria-referenced self-assessment. *Assessment and Evaluation in Higher Education, 32(2),* 159-181.

Black, P., & William, D. (1998a). Inside the black box: Raising standards through classroom assessment. *Phi Delta Kappan, 80*(2), 139–144.

Black, P. & Wiliam, D. (1998b). Assessment and classroom learning. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice,* 5, *1*, pp. 7-74.

Hadji, C. (1994). *Avaliação, Regras do Jogo. Das intenções aos instrumentos*. Lisboa: Porto Editora.

Fontana, D., & Fernandes, M. (1994). Improvements in mathematics performance as a consequence of self-assessment in Portuguese primary school pupils. *British Journal of Educational Psychology*, 64(3), 407-417.

Nunziati, G. (1990). Pour construire un dispositif d´évaluation formatrice. *Cahiers Pedagogiques*, 280, pp. 47-62.

Sadler, D. R. (1989). Formative assessment and the design of instructional systems. *Instructional Science, 18,* 119–144.

Santos, L. (2008). Dilemas e desafios da avaliação reguladora. In L. Menezes; L. Santos; H. Gomes & C. Rodrigues (Eds.), *Avaliação em Matemática: Problemas e desafios* (pp. 11-35). Viseu: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação.

Semana, S. & Santos, L. (2010). Auto-avaliação em relatórios escritos. *PME 34. International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Belo Horizonte, Brasil. (18 a 23 de Julho de 2010).

Wiliam, D. (2011). *Embedded formative assessment*. Bloomington, IN: Solution Tree Press.

Yin, R. (2009). *Estudo de caso: Planejamento e métodos (4.ª ed.*). Porto Alegre: Artemed Editora S.A.

Anexo 1

Agora, devem reflectir sobre o vosso desempenho durante a discussão com toda a turma (durante a apresentação do vosso grupo e na reacção às apresentações dos restantes grupos). É importante que o façam com seriedade, assinalando com um X a opção, de 1 a 4, que melhor descreve o vosso desempenho em cada um dos parâmetros seguintes. A opção **1** corresponde a **totalmente mentira** e a opção **4** a **totalmente verdade**.

	Parâmetros de Avaliação	**1**	**2**	**3**	**4**
Conceitos e Procedimentos	Os conceitos e princípios matemáticos foram usados correctamente e mostrando compreensão.				
	A terminologia foi adequada.				
	Os procedimentos (cálculos, algoritmos, …) estavam completos e correctos.				
Estratégias e Processos de Raciocínio	Foi usada informação exterior à tarefa importante para a sua resolução.				
	Os elementos importantes da tarefa foram usados e relacionados, de forma adequada.				
	Foi apresentada uma estratégia adequada e sistemática.				
	Foi apresentado um processo de resolução completo.				
	Foi apresentada uma solução/conclusão completa, correcta e de acordo com a restante produção.				
Comunicação (Oral/Escrita)	Descrevemos de forma clara o trabalho do grupo.				
	Apresentamos argumentos/justificações válidos.				
	Fizemos intervenções adequadas, nos momentos certos.				
	Comentamos de forma adequada as intervenções dos colegas ou professor.				
	Relacionamos e fizemos comparações entre as várias intervenções de colegas ou professor.				
	Quando não estivemos de acordo com os colegas ou professor, explicamos porquê, apresentando contra-argumentos.				

SIMPÓSIO 6

FORMAÇÃO DE PROFESSORES E IDENTIDADE PROFISSIONAL

FORMAÇÃO DE PROFESSORES E IDENTIDADE PROFISSIONAL

Nélia Amado
Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve
Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
namado@ualg.pt

Maria Helena Martinho
Centro de Investigação em Educação - Universidade do Minho
mhm@ie.uminho.pt

Ao longo das últimas décadas, a formação de professores tem merecido um lugar de destaque na investigação nacional e internacional. Os novos desafios que se colocam à educação no Século XXI exigem uma atenção redobrada e um contínuo investimento na formação de professores e na investigação nesta área.

Com as novas orientações decorrentes do processo de Bolonha, a formação inicial de professores sofreu profundas alterações que exigem uma investigação profunda sobre o processo em si mesmo. Por outro lado, estas mudanças exigem também novas formas de encarar a formação contínua do professor.

Apesar do processo de formação do professor se iniciar com a formação inicial, este é apenas o princípio de um longo caminho. Na verdade, a formação inicial deve ser encarada como o ponto de partida para uma formação que se desenrola ao longo de todo o percurso profissional do professor. Contudo, não devemos nem podemos descurar a formação inicial pelo impacto que esta pode ter na construção da identidade profissional do professor.

Os estudos realizados por Oliveira (2004) e Amado (2007) retiram como evidência que a formação inicial e os contextos em que se desenrolam nas práticas dos futuros professores têm um papel interativo na construção do *ser professor*. O que vem reforçar a importância de investigar a formação inicial e contínua de professores em diferentes contextos.

Encontramo-nos assim, perante a necessidade de mais e diversificada, investigação que reflita sobre a realidade que vivemos e os múltiplos planos que se articulam na formação de professores.

O conjunto de comunicações que constituem o Simpósio "Formação de Professores e Identidade Profissional" retratam algumas direções de trabalho corrente neste âmbito, focado na formação inicial e contínua de professores de Matemática de diferentes níveis de ensino, em Portugal e no Brasil.

Quando se fala na formação de professores vários são os aspetos a considerar, tendo em conta a exigência do papel do professor nos diferentes contextos profissionais. Esta envolve, em verdade, fatores tão diversificados como, por exemplo

- O conhecimento matemático do professo;
- O conhecimento do papel do professor e do aluno no processo de ensino/aprendizagem;
- O conhecimento das orientações curriculares;
- A capacidade para planificar e construir recursos para o processo de ensino/aprendizagem;
- Conhecimento dos processos de aprendizagem;
- O desenvolvimento da capacidade para a resolução de problemas, construção de projetos, desenvolvimento dos projetos;
- A capacidade de refletir sobre a sua prática;
- …

Todos eles contribuem para a formação do conhecimento didático do professor. Para além dos conhecimentos referidos é ainda necessário saber adequar os processos de aprendizagem e os modos de trabalho em sala de aula mais adequados aos alunos. Em suma, embora o domínio conhecimento matemático seja indispensável, ele é manifestamente ineficaz se desprovido de outros conhecimentos complementares. Os múltiplos aspectos do conhecimento referidos acima articulam-se e complementam-se (Ponte & Oliveira, 2002).

Tal articulação não é estabelecida de uma vez para sempre, mas desenvolve-se e aperfeiçoa-se ao longo da vida profissional. De facto, não é demais sublinhar o papel da prática profissional na formação continuada dos professores.

A esta associa-se um outro aspeto atualmente presente nas dimensões da profissão docente que é a necessidade do professor investigar sobre a sua própria prática. Parece, de facto, consensual que o desenvolvimento do professor se estrutura pela capacidade de reconhecimento e avaliação crítica das suas práticas na sala de aula e na escola. De uma forma ainda mais geral, a investigação tem chamado a atenção para a relevância da participação do professor em processos formativos que ofereçam oportunidades de reflexão, assim como em práticas sociais, com um forte envolvimento pessoal e suporte de grupo.

Torna-se, pois, clara a afirmação de que a formação do professor é sempre um processo tecido de interações diversas e, nesse sentido, eminentemente social. Entre os artigos deste Simpósio é referida a importância do trabalho colaborativo nos processos formativos. O seu potencial nasce do facto de, independentemente dos objectivos que prossiga e das formas diferenciadas que possa assumir, envolver sempre uma adesão voluntária, uma relação próxima entre os participantes e, por isso mesmo, um espaço de crítica e maturação essencial.

A interação entre formação e identidade profissional, que é tema e contexto deste Simpósio, constitui pois um campo de investigação aberto, no qual um longo percurso ainda há a fazer. Esperamos que este Simpósio constitua um marco nesse sentido, motivando, professores e investigadores.

Neste Simpósio contamos com sete contribuições, das quais três são apresentadas através de comunicações apoiadas em artigos completos e quatro comunicações apoiadas em posters. Este conjunto de propostas resulta de diversos trabalhos de investigação em desenvolvimento, de projetos de investigação ou de teses de mestrado desenvolvidas por investigadores portugueses e brasileiros.

Maria Cecilia Fantinato e Darlinda Moreira apresentam uma comunicação intitulada Desafios de formadores de "matemática para a vida" do processo RVCC, cujo trabalho é fruto de um projeto de pós-doutoramento da primeira autora. O tema da comunicação prende-se com a Educação de Adultos e debruça-se o processo de Reconhecimento, Validação e Certificação de Competências (RVCC) que teve lugar nos últimos anos em Portugal.

Inês Bernardo Oliveira e José António Fernandes apresentam uma comunicação intitulada: Implicações do PM II no desenvolvimento profissional docente: da reflexão à prática. O estudo realizado apresenta um estudo de caso realizado sobre um projeto promovido pelo Ministério da Educação que envolveu a quase totalidade das Escolas Básicas de Portugal Continental ao longo dos últimos seis anos.

O trabalho de Josimar de Sousa, intitulado O investimento na profissão e a construção da identidade profissional – estudo de caso, relata-nos o caso de uma professora de matemática portuguesa.

Os quatro posters que completam o programa deste Simpósio, mostram o trabalho que vem sendo desenvolvido por diversas equipas de investigadores em vários projetos de investigação.

A equipa do Projeto Práticas Profissionais dos Professores de Matemática dá-nos a conhecer as linhas gerais do projeto através de um Poster intitulado: Práticas profissionais dos professores de matemática: o projeto P3M.

Inocêncio Fernandes Balieiro Filho apresenta o Poster intitulado: Formação inicial do professor de matemática – contribuições para um processo de incentivo à docência, que relata uma experiência realizada no Brasil.

Marli Teresinha Quartieri apresenta um Poster elaborado por um grupo de investigadores brasileiros envolvidos num projeto de formação contínua. Cursos de formação contínua de professores: alternativa para a inserção de recursos computacionais no ensino de matemática é o título do Poster apresentado.

Por fim, Lurdes Serrazina apresenta o Poster intitulado: O conhecimento matemático dos futuros docentes no início da licenciatura em educação básica: um projeto envolvendo três Escolas Superiores de Educação,

Todos os contributos presentes neste Simpósio apresentam como denominador comum uma forte relação com a prática, apesar da diversidade de contextos em que decorrem.

A diversidade de desafios que se colocam atualmente à profissão docente torna-a cada vez mais exigente. Como consequência são cada vez maiores as exigências na formação inicial e contínua do professor.

Esperamos, neste simpósio, promover discussão em torno das questões apresentadas que possam dar novas pistas para a continuação do desenvolvimento da investigação neste domínio.

Referências

Amado, N. (2007). O professor estagiário de matemática e a integração das tecnologias na sala de aula – Relações de mentoring numa constelação de prática. (Tese de Doutoramento). Lisboa: APM.

Oliveira, H. (2004). Ser professor de matemática: percursos de identidade no início da carreira. In C. Alves et al (Orgs), Atas do XV Seminário de Investigação em Educação Matemática, pp. 65-92. Lisboa: APM.

Ponte, J. P., e Oliveira, H. (2002). Remar contra a maré: A construção do conhecimento e da identidade profissional na formação inicial. Revista de Educação, 11(2), 145 – 163.

IMPLICAÇÕES DO PM II NO DESENVOLVIMENTO PROFISSIONAL DOCENTE: DA REFLEXÃO À PRÁTICA

Inês Bernardo Oliveira
Escola Básica de Leça da Palmeira
inesmbernardo@gmail.com

José António Fernandes
Universidade do Minho
jfernandes@ie.uminho.pt

Resumo

O Plano da Matemática tem constituído um desafio e uma oportunidade: o desafio de melhorar os resultados dos alunos e uma oportunidade para o desenvolvimento profissional dos docentes de Matemática. Nesta comunicação relata-se uma parte de um estudo realizado numa escola secundária com 3.º ciclo do ensino básico, junto dos professores envolvidos no projeto Plano da Matemática II (PM II), onde se procurou compreender quais os contributos desse projeto de escola nas práticas reflexivas dos professores e consequentemente na mudança de práticas. Recorrendo a uma investigação qualitativa, procurou-se descrever e interpretar o trabalho desenvolvido pelos professores, nomeadamente da professora Mariana, a partir dos dados recolhidos nas sessões de trabalho semanais realizadas ao longo de sete meses e nas entrevistas à professora Mariana. Os resultados sugerem que o trabalho desenvolvido pelos professores, mais concretamente da professora Mariana, tem as características de uma "comunidade" de docentes onde a reflexão foi potenciada, conduzindo à mudança de práticas e naturalmente ao seu desenvolvimento profissional.

Palavras-chave: Desenvolvimento profissional; Reflexão; Plano da Matemática II.

Introdução

O interesse em realizar esta investigação surgiu no final do triénio 2006-2009, aquando do término da operacionalização do Plano da Matemática I (PM I), e em pleno desenvolvimento do PM II, pois tratando-se o PM de uma "medida totalmente pioneira em Portugal, dado que, respeitando o princípio de autonomia das escolas, teve como ponto de partida o projeto definido em cada escola, marcado pela sua especificidade" (Relatório Final do Plano da Matemática 2006-2009 [RFPM], 2006-2009, p. 115), urgia um estudo acerca do seu impacto nas escolas. De facto, os efeitos do PM I nas escolas foram sentidos a vários níveis, salientando-se as "oportunidades de desenvolvimento profissional" (RFPM, 2006-2009, p. 4) dos professores. Assim, com a investigação realizada pretendeu-se compreender o impacto do PM II no desenvolvimento profissional dos professores de Matemática, sobretudo no que diz respeito aos contributos do PM II para uma cultura de reflexão sobre a prática e para melhorar as práticas de sala de aula dos professores, mais concretamente da professora Mariana.

Desenvolvimento profissional

Vários são os autores que reconhecem a necessidade de se promover o desenvolvimento profissional. Day (2001), por exemplo, reconhece a necessidade de se promover um desenvolvimento profissional contínuo dos professores, que lhes permita "acompanhar a mudança, rever e renovar os seus próprios conhecimentos" (p. 16). O NCTM (1994) refere dois aspetos relevantes para o crescimento e o desenvolvimento profissional do professor: a reflexão e a participação em momentos de formação.

No que se refere ao desenvolvimento profissional docente, Guskey (2002) defende um modelo que tenha em conta a sequência em que ocorrem os três grandes objetivos dos programas de desenvolvimento profissional: alterar as práticas de sala de aula dos professores, os resultados de aprendizagem dos alunos e as atitudes e crenças dos docentes.

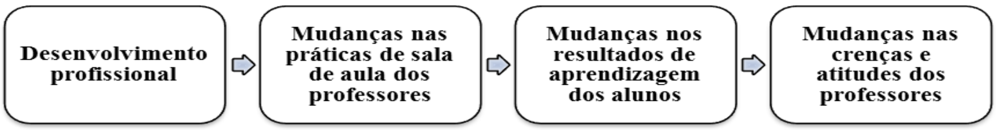


Figura 1 – Um modelo para provocar a mudança nos professores (Guskey, 2002, p. 383)

Conforme se pode observar, para Guskey só existe uma mudança significativa nas atitudes e crenças dos professores após se terem comprovado melhorias na aprendizagem dos seus alunos, as quais resultam de alterações nas suas práticas de sala de aula, considerando que aquelas que são úteis para ajudar os seus alunos na aprendizagem são retidas e repetidas e as que não resultam são abandonadas. Deste modo, Guskey (2002) defende que o "ponto crucial não é o desenvolvimento profissional *per se*, mas a experiência de implementação bem-sucedida que provoca mudanças nas crenças e atitudes dos professores" (p. 383).

Também Ponte, Zaslavsky, Silver, Borba, Heuvel-Panhuizen, Gal et al. (2009) consideram que o desenvolvimento profissional do professor, neste caso do professor de Matemática, pode ser visto como um processo de aprendizagem em si mesmo. A seu ver, os docentes aprendem na, para e da prática, centrando-se, assim, o desenvolvimento profissional do professor na prática docente.

Ponte et al. (2009) defendem que o processo de desenvolvimento será mais eficaz quando for realizado em grupo e introduzem o conceito de comunidade de aprendizagem que se traduz, por exemplo, num grupo de professores que tenta desenvolver hábitos de trabalhar em conjunto ou qualquer grupo constituído com o objetivo de aprender e de se desenvolver. Para estes autores, as comunidades de aprendizagem podem ser homogéneas ou heterogéneas, pois no seu entender tanto pode tratar-se de um grupo de professores pertencente a uma só escola, do mesmo grupo disciplinar ou até com experiências profissionais semelhantes (por exemplo, um grupo de professores de Matemática do 5.º ano da mesma escola), como pode tratar-se de um grupo que inclua professores de vários ciclos, com experiências profissionais diferentes ou vindos de escolas diferentes.

O professor como prático reflexivo

Schön (2000) considera três tipos de reflexão: reflexão na ação, reflexão sobre a ação e reflexão sobre a reflexão na ação. A reflexão na ação surge no decurso da própria ação, remetendo a tomada de decisões enquanto os professores estão ativamente envolvidos no ensino, isto é, reformula-se o que se está a fazer enquanto se faz. Para Schön (2000), a reflexão na ação é consciente, tem uma função crítica, pois, pensando criticamente, reestruturamos estratégias de ação e dá lugar à experiência na medida em que "pensamos um pouco e experimentamos novas ações com o objetivo de explorar os fenómenos recém-observados, testar as nossas compreensões experimentais acerca deles, ou afirmar as ações que tenhamos inventado para mudar as coisas para melhor" (p. 34). Para Day (2001) há fatores – a dimensão, a composição e o comportamento da turma, as estratégias de ensino e os objetivos da aula – que influenciam a reflexão na ação, donde a profundidade da reflexão depende da disposição e capacidade do professor em analisar a sua prática, tendo em conta o contexto.

A reflexão sobre a ação pressupõe a reconstrução mental retrospetiva da ação, isto é, refere-se à reflexão que acontece fora da prática (Schön, 2000). Day (2001) considera que pode ocorrer antes ou depois da ação, tratando-se de um processo mais pensado e sistemático que permite a análise, reconstrução e a reformulação da prática. A reflexão sobre ação proporciona, ao contrário da reflexão na ação, a troca de opiniões com outros sobre questões relacionadas com o ensino. Day (2001) considera que este tipo de reflexão se ajusta aos momentos de planificação em colaboração.

Por último, a reflexão sobre a reflexão na ação é proactiva, é um revisitar da ação passada visando delinear a ação futura, com vista ao melhoramento. Day (2001) denomina este processo de reflexão acerca da ação, considerando que este "tipo de reflexão representa uma postura mais ampla e crítica que envolve a investigação sobre questões de natureza moral, ética, política e instrumental, implícitas no pensamento e na prática quotidiana dos professores" (p. 57).

O professor enquanto profissional reflexivo, isto é, um profissional que reflita "na ação" para otimizar o seu desempenho e que reflita "sobre a ação" para responder à "evolução permanente dos conhecimentos e competências" (Perrenoud, 2003, pp. 110-111), encontra-se em constante evolução. Todavia, esta reflexão não é solitária (Perrenoud, 1999), pelo contrário exige "que o professor questione e reflita sobre situações de sala de aula e que o faça no contexto da sua equipa" (Oliveira & Serrazina, 2002, p. 36). Assim, segundo Nóvoa (2001), é prioritário

> criar um conjunto de condições, um conjunto de regras, um conjunto de lógicas de trabalho e, em particular, e eu insisto neste ponto, criar lógicas de trabalho coletivo dentro das escolas, a partir das quais – através da reflexão, através da troca de experiências, através da partilha – seja possível dar origem a uma atitude reflexiva da parte dos professores. (s.p.)

Neste estudo assume-se a colaboração como uma dinâmica de trabalho conjunto em que todos os envolvidos estão interessados no seu crescimento profissional, trabalham tendo em vista objetivos comuns e o questionamento e a reflexão individual e coletiva é uma realidade, tendo por base a confiança, responsabilidade, empenhamento e o respeito mútuo em que os intervenientes, de espírito aberto, se sentem à vontade para expressar as suas ideias, ouvir críticas e aceitar a mudança (Little, 1990; Day, 2001; & Hargreaves, 1998).

No mesmo sentido, o NCTM (1994) afirma que os docentes devem ter um papel ativo, "aceitando a responsabilidade de (…) refletir sobre as aprendizagens e o ensino, quer individualmente, quer com os colegas; (…) discutir com colegas questões relativas à matemática e ao seu ensino e aprendizagem" (p. 175). Citando Stigler e Hiebert (1999), reafirma-se que "colaborar regularmente com os colegas para observar, analisar e discutir o ensino e o pensamento dos alunos, ou fazer o «estudo» da aula, é um meio poderoso ainda negligenciado em muitas escolas" (NCTM, 2007, p. 20).

O professor deve "envolver-se num contínuo desenvolvimento profissional e de auto-reflexão" e embora a reflexão e a análise se possam encetar individualmente, elas podem ser "fortemente motivadas através do trabalho de grupo" (NCTM, 2007, p. 20).

Metodologia

O objetivo deste estudo é compreender o impacto do PM II na reflexão sobre a prática dos professores de Matemática que participaram neste projeto e constatar as repercussões na melhoria de práticas de sala de aula, tendo como contexto o trabalho colaborativo entre professores.

Optou-se por uma investigação qualitativa, numa lógica de estudo de caso, com uma abordagem metodológica de cariz interpretativo. O presente estudo desenvolveu-se numa escola secundária com 3.º ciclo do distrito do Porto que tinha participado no PM I, estava a implementar o projeto PM II e participava na 1.ª fase de generalização do novo Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB).

Participaram neste estudo 10 professores de Matemática do ensino básico e secundário que faziam assessorias em turmas do 3.º ciclo e participavam nas sessões de trabalho conjunto no âmbito do PM II. Entre estes, estava a professora Mariana, com 43 anos de idade, 20 anos de tempo de serviço e coordenadora do PM II, que constitui o nosso estudo de caso. Note-se que as sessões de trabalho conjunto (reuniões com os vários professores envolvidos no projeto) e o trabalho em assessorias eram as duas principais estratégias de implementação do PM II.

O processo de recolha de dados decorreu no ano letivo de 2010/2011, entre setembro de 2010 e abril de 2011.Os métodos de recolha de dados utilizados no estudo foram essencialmente a observação e a entrevista.

A coautora deste artigo, sempre que possível, observou as sessões de trabalho conjunto, realizadas nas tardes de terça-feira, adotando uma postura não participante. As sessões tinham periodicidade semanal, exceto quando havia reuniões de acompanhamento e/ou outras atividades na escola, e tinham, em média, a duração de duas horas. Foram objeto de análise 17 sessões de trabalho, registadas em áudio, bem como quatro aulas observadas de trabalho em assessoria que envolveram a professora Mariana.

Analisaram-se ainda duas entrevistas realizadas à professora Mariana, a primeira (E1) realizada no decorrer do 1.º período e a segunda (E2) no final do 2.º período.

A análise e interpretação dos dados qualitativos usados no estudo – obtidos através das entrevistas, da observação das aulas em assessoria e das sessões de trabalho conjunto – assentou na análise de conteúdo de acordo com dimensões criadas e definidas *a posteriori* e tendo como *background* a literatura revista.

O caso da professora Mariana

Reflexão sobre a prática

Foram vários os temas abordados ao longo das dezassete sessões de trabalho conjunto, tendo sido classificados em várias dimensões. A dimensão "práticas reflexivas" assume um particular interesse, pois nela se incluem as reflexões acerca das aulas em assessoria, da implementação de tarefas em sala de aula, do papel do professor em sala de aula, da implementação do novo PMEB, da análise de produções dos alunos e dos seus resultados e das estratégias a adotar para melhorar as aprendizagens.

Destas categorias, a mais presente, por se tratar de uma preocupação comum de Mariana e seus colegas, foi a reflexão sobre o novo PMEB do 7.º e 8.º anos, que se encontravam a lecionar, pois sentiam dificuldades devido à falta de tempo para o implementar seguindo as orientações metodológicas. Mariana assumiu uma postura de abertura, falando da sua prática de sala de aula, expondo as suas dificuldades e problemas para que, em conjunto, refletissem e se pudessem ajudar mutuamente. Exemplo disso foi a apresentação do "problema gravíssimo" (Sessão de Trabalho Conjunto [STC] 8, 4/01/2011): o atraso em relação à planificação que tinham previsto. Para além de quererem usar as tarefas implementadas no 7.º ano no ano letivo anterior (as da DGIDC e as do Projeto 1001 Itens), também quiseram usar as do manual, ultrapassando o número de aulas previstas. Perante esta dificuldade, os colegas que lecionavam ao ensino secundário, em particular, a Anabela, procuraram mostrar a importância de se selecionarem as melhores tarefas em vez de se tentar fazer tudo, as tarefas apresentadas nos manuais e as disponibilizadas pela DGIDC.

Uma outra dificuldade teve a ver com as aulas em que foram implementadas tarefas exploratórias, nomeadamente na fase de discussão. No extrato abaixo constata-se a dificuldade sentida na gestão da discussão ocorrida numa tarefa exploratória sobre "sequências e regularidades":

> *Mariana:* (…) continuo a ter muitas dificuldades, (…) com o ensino exploratório, a metodologia do ensino exploratório …
>
> *Catarina*: Eu estou a abandonar devagarinho, devagarinho...
>
> *Mariana*: Eles têm dificuldade… depois na discussão, perco muito tempo porque eu tenho que justificar a todos os alunos porque é que aquilo que eles estão a dizer está errado (…) os outros, entretanto, desligam porque não é a conclusão deles, a predisposição deles para ouvirem os outros até lhes faz confusão. (...) Tive muitas dificuldades e, depois, por causa das conclusões. Porque uns chegavam ao termo geral, chegavam a um determinado termo geral, não é? E eu tive que explicar porque é que aquilo não dava, porque não havia uma regularidade. E depois outro, outro grupo chegou a outro termo geral e eu perdi imenso tempo. (…) Depois penso que (…) esse diálogo até pode ser, a longo prazo, (…) benéfico. Só que a curto prazo não tenho tempo depois para a consolidação, é que eu ainda estou muito agarrada à consolidação e não fico bem comigo própria se não fizer 4 ou 5 exercícios na aula, e não estou a ter tempo para conjugar as duas coisas e está a ser assim um conflito interior muito grande... (STC 10, 18/01/2011)

A reflexão sobre a implementação de tarefas aconteceu nalgumas reuniões de forma superficial e noutras de forma mais profunda. Após a reunião de acompanhamento do PM II/novo PMEB de novembro, Mariana e a coordenadora do novo PMEB da escola propuseram uma "nova" forma de reflexão, a reflexão escrita. Optaram, então, por registar nos enunciados das próprias tarefas/fichas, em suporte digital, sob a forma de "comentário", a reflexão sobretudo no que se refere à tarefa, à metodologia da aula e à adesão dos alunos. Na STC 8 ficou evidente que todos consideravam importante a reflexão sobre a implementação das tarefas, referindo Mariana: "escrever as reflexões por escrito nas tarefas é importante, mas discutir com os colegas aqui é muito melhor" (STC 8, 4/01/2011). Assim decidiram aproveitar as sessões em que estivessem professores titulares e assessores para refletirem sobre as tarefas implementadas.

Mariana considera importante a reflexão sobre a prática porque permite fazer a reconstrução de todo o processo com o objetivo de melhorar como profissional. Destaca a reflexão escrita por ser mais profunda e reconhece que a reflexão em equipa é importantíssima, pois "impulsiona a mudança de práticas, desafia o professor a experimentar outras didáticas, outros recursos. Em síntese, dá-lhe segurança" (Email de 1/07/2011). Na sua opinião, a reflexão informal é feita na ação e na pós-ação. As curtas conversas durante as aulas, sobretudo entre Catarina e Mariana, no sentido de tomarem decisões em conjunto, conforme se constata da análise das aulas em assessoria, comprovam a reflexão na ação. A reflexão pós-aula de assessoria ocorria logo a seguir e com consequências imediatas, pois quando algo era considerado menos conseguido, isso era partilhado com os colegas para procederem às devidas adaptações. Relativamente à reflexão formal, Mariana reconheceu que não era feita porque nunca foi pedida e, consequentemente, não havia essa rotina, destacando todavia a experiência do parecer escrito acerca da implementação das tarefas.

Mudanças de atitudes e práticas de ensino

Mariana foi a grande impulsionadora de práticas inovadoras em contexto de sala de aula, talvez pelo facto do grupo acolher as suas ideias, como aconteceu no caso dos portefólios, composições matemáticas, tarefas de nível, entre outras. A este respeito, recorde-se a proposta que Mariana apresentou ao seu colega Francisco aquando da planificação das aulas de "Tratamento de dados", à qual todos os professores aderiram.

> Agora vou fazer uma proposta, se tu concordares, Francisco. Na 2.ª aula – eu já estou a inventar – requisitávamos a biblioteca e a sala de estudo e os alunos participam no concurso que é promovido pelo *Alea*, que é a leitura e interpretação de gráficos on-line. Vão lá, inscrevem-se e mandam as respostas. (…) Que dizes? Concordas? Acho que é interessante! (STC 7, 22/12/2010)

Mariana revelou que a participação no PM desencadeou em si mudanças no ensino da Matemática, pois "obrigou de facto ao trabalho em equipa, ao trabalho colaborativo" (E1, dez/2010) e à produção conjunta de materiais. Mariana considerou que o trabalho colaborativo e as assessorias foram os dois aspetos que mais contribuíram para a mudança da sua postura no ensino.

> As assessorias ajudam muito na nossa mudança porque estás a ver o outro a fazer e estás a ver aquilo que tu, às vezes, fazes e quando vês o outro e, de facto, até nem [concordas] … em termos de reações com os alunos isto até nem funciona, ajuda-te a evoluir nesse sentido, em termos de mudanças a nível profissional. (E1, dez/2010)

Relativamente à planificação das aulas, reconheceu que antes do PM não tinha a preocupação de propor diferentes tipos de tarefa na sala de aula, seguia o manual, propondo todos os seus exercícios, "quantos mais fizesse, eram sempre os mesmos" (E1, dez/2010), e ainda algumas tarefas do projeto 1001 itens. Com o PM, Mariana e seus colegas passaram a planificar em conjunto cada tópico, passando a propor uma maior diversidade de tarefas e procurando ter em conta as diferentes capacidades transversais.

Uma mudança que admite ter ocorrido nas suas aulas teve a ver com a metodologia de ensino exploratório. Mariana reconhece que não tinha o hábito de dar espaço para que os alunos apresentassem as suas ideias e argumentassem. Esse aspeto, com a implementação do novo programa, mudou, permitindo aos alunos comunicarem as suas ideias e constatando o seu gosto em exporem as suas resoluções.

Mariana fez notar que as temáticas das reuniões de acompanhamento do PM II/novo PMEB contribuíram para a sua auto-reflexão e consequente mudança, dando como exemplo a visualização de um filme sobre comunicação matemática na sala de aula fornecido pela Comissão de Acompanhamento. Essa sessão fê-la refletir e tomar consciência de que não procedia da melhor forma quando um aluno explicava a sua resolução de uma tarefa e outro aluno não a entendia. Nessa altura, Mariana esclarecia de imediato o aluno, não dando oportunidade a que se desenvolvesse uma interação aluno-aluno.

Outra das mudanças evidenciadas prende-se com a implementação de novos instrumentos de avaliação. Desde o ano letivo anterior que Mariana e os seus colegas têm vindo a propor questões de aula e a dar feedback escrito na resolução de problemas. No ano letivo 2010/2011 iniciaram o recurso a portefólios, composições matemáticas (em que uma delas foi realizada em duas fases) e questões de nível.

Mariana reconhece que a sua participação no PM II "tem sido gratificante. Pelo menos no meu ponto de vista, tenho aprendido muito, tem contribuído para o meu desenvolvimento profissional" (E2, abr/2011), admitindo, contudo, ter ainda muito para melhorar.

Considerações finais

Reflexão sobre a prática. A análise dos resultados permite reconhecer que se está perante uma "comunidade" de professores de Matemática, na qual se inclui Mariana, que reflete na ação, sobre a ação e sobre a reflexão na ação (Schön, 2000). Ficou claro que as docentes, quando envolvidas em aulas de assessoria, refletiam na ação ao tomar decisões de forma ativa durante o processo de ensino-aprendizagem, ou seja, reformulando o que se faz enquanto se está a fazer.

O trabalho em assessoria potenciou ainda a reflexão sobre a ação (Schön, 2000) na medida em que esta acontecia após a ação, ou seja, fora da prática, remetendo para uma análise retrospetiva do sucedido e permitindo a troca de opiniões com outros colegas (Day, 2001). Essa reflexão ocorreu, sobretudo, nas STC (9 vezes), umas vezes de uma forma mais profunda e outras mais superficialmente, e incidia sobre a implementação das tarefas e as dificuldades dos alunos. A reflexão acerca do papel do professor em sala de aula, na maioria das vezes, era feita por Mariana. Para além das assessorias, no contexto das STC, houve 35 ocorrências onde os professores questionaram e refletiram sobre situações de sala de aula (Oliveira & Serrazina, 2002), sobre as planificações, sobre questões relacionadas com o ensino (Day, 2001) e sobre aspetos relativos ao projeto PM II.

Por último, podemos encontrar nesta "comunidade" docente traços que evidenciam reflexão sobre a reflexão na ação (Schön, 2000), no sentido em que se trata de revisitar o passado para preparar o futuro, isto é, refletir em ordem à melhoria. Mariana expressou este tipo de reflexão quando referiu ser comum refletir no dia-a-dia sobre a prática de sala de aula com os seus colegas, acontecendo fazerem adaptações às planificações por não resultarem em sala de aula. Mariana destacou, na segunda entrevista, que as várias reflexões feitas sobre a prática estiveram presentes aquando da planificação das aulas.

No estudo realizado pode inferir-se que os professores desenvolveram a sua capacidade de reflexão, pois esta esteve presente ao longo de várias STC de um modo sistemático e continuado. Salienta-se o envolvimento, quer individual quer coletivo dos docentes na reflexão (NCTM, 2007), transformando a sua experiência em conhecimento (Nóvoa, 2001) e produzindo melhorias na sua prática (Schön, 2000). Para isso muito contribuiu a existência de um conjunto de condições, um conjunto de lógicas de trabalho, em particular o trabalho colaborativo (Nóvoa, 2001).

Em suma, parece que a maioria dos docentes do grupo de trabalho adotou a prática reflexiva como parte integrante da sua vida profissional. A existência de tempos comuns de trabalho (Serrazina, 2008; Santos, 2000), proporcionado pelo PM II, potenciou, a vários níveis, essa reflexão entre os docentes.

Mudança de práticas. Enquanto projeto, o PM II constitui-se como uma estratégia essencial para a melhoria do processo de ensino-aprendizagem e o desenvolvimento de práticas colaborativas na escola (Nunes & Ponte, 2008). Nesse sentido, com este estudo pretendeu-se compreender se existiram de facto mudanças nas práticas de sala de aula e, se sim, em que se traduziram.

Para ancorar esta análise, adotou-se o modelo de desenvolvimento profissional proposto por Guskey (2002). Durante o estudo vários são os episódios que se podem evocar e que se conformam com o modelo de Guskey (2002). Por exemplo, no caso do portefólio, Mariana não desistiu e impulsionou, com o seu entusiasmo, os seus colegas a continuarem com esta nova prática no 3.º período, mas também no caso das composições matemáticas, das tarefas de nível, entre outras. Os diálogos que ocorreram nas STC, através das questões colocadas e das dificuldades que foram emergindo, sobretudo no que se refere às novas práticas avaliativas, proporcionaram momentos de discussão ricos e potenciadores de mudanças da prática e da aquisição de novos saberes. Mariana sustentou que algumas das mudanças e inovações que os vários professores introduziram na sua prática letiva decorreram da colaboração entre colegas com experiências, competências e perspetivas diferentes, permitindo que avançassem com mais segurança (Boavida & Ponte, 2002).

Pôde constatar-se que os vários professores, sobretudo os mais implicados – os do 3.º ciclo – estavam predispostos para a mudança de práticas, como aconteceu no caso da experimentação de novas formas de avaliação. Sublinhe-se, ainda, que os professores, ao implementarem um novo programa num contexto de colaboração, se sentiam mais confiantes e seguros em experienciar situações novas (Hargreaves, 1998).

Foi sobretudo no trabalho em assessorias que se percebeu de forma mais evidente a mudança de práticas. Não uma mudança pontual, mas uma mudança sustentada naquilo a que Guskey (2002) denomina de ponto crucial: a experiência de implementação bem-sucedida.

> Vejo o outro a fazer, com a minha colaboração, aquilo que eu também planifiquei para fazer noutro contexto. Isso é riquíssimo! Ver o outro a aplicar, com a minha colaboração, uma tarefa que eu também vou aplicar com outro colega. Quando vou aplicar já vou com outro background" (E2, abr/2011).

A experiência de implementação permite que se retenham as práticas que são úteis para ajudar os alunos na aprendizagem e se abandone as que não resultam (Guskey, 2002).

Em síntese, conclui-se que o trabalho colaborativo desenvolvido na escola em estudo proporcionou um crescimento profissional dos professores ao nível da melhoria das competências reflexivas e do enriquecimento do conhecimento didático, levando a mudanças de práticas dentro e fora da sala de aula.

Referências bibliográficas

Boavida, A. M. & Ponte, J. P. (2002). Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas. In GTI (Org.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 43-55). Lisboa: APM.

Day, C. (2001). *Desenvolvimento profissional de professores: Os desafios da aprendizagem permanente.* Porto: Porto Editora.

Guskey, T. (2002). Professional Development and Teacher Change. *Teachers and Teaching: theory and practice, 8,* 3/4, 381-391.

Hargreaves, A. (1998). *Os professores em tempos de mudança*: *O trabalho e a cultura dos professores na Idades Pós-Moderna.* Amadora: Mc Graw-Hill.

Little, J. W. (1990). The persistence of privacy: autonomy and iniciative in teachers' professional relations. *Teachers College Record, 91* (4), 509-536.

NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: IIE e APM.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.

Nóvoa, A. (2001). *O professor pesquisador e reflexivo*. Acedido em Janeiro 2, 2010, em: http://www.tvebrasil.com.br/salto/entrevistas/antonio_novoa.htm

Nunes, C. & Ponte, J. (2008). Os projectos de escola e a sua liderança. In GTI (org.), *O professor de Matemática e os projectos de escola* (pp. 11-37). Lisboa: APM.

Oliveira, I. &. Serrazina, L. (2002). A reflexão e o professor como investigador. In GTI (org.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 29-42). Lisboa: APM.

Perrenoud, P. (1999). Formar professores em contextos sociais em mudança. Prática reflexiva e participação crítica. *Revista brasileira de educação 12*, 5-21.

Perrenoud, P. (2003b). Dez princípios para tornar o sistema educativo mais eficaz. In J. Azevedo (Org.), *Avaliação dos resultados escolares – medidas para tornar o sistema mais eficaz* (pp. 103-126). Porto: Edições Asa.

Ponte, J. P., Zaslavsky, O., Silver, E., Borba, M., Heuvel-Panhuizen, M., Gal, H. et al. (2009).Tools and settings supporting mathematics teachers' learning in and from practice. In R. Even & D. Ball (Eds.), *The professional education and development of teachers of mathematics.* (pp. 185-209). New York: Springer.

Relatório Final do Plano da Matemática, 2006-2009 (RFPM, 2006-2009).

Santos, L. (2000). *A prática letiva como atividade de resolução de problemas: Um estudo com três professoras do ensino secundário* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: Associação de Professores de Matemática, Coleção Teses.

Santos, L.; Pinheiro, A.; Santos, E.; Amado, N.; Ferreira, R.; Canelas; R. (2009). *Relatório Final do Plano da Matemática 2006-2009*. Direcção-Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular, Ministério da Educação. Disponível em: http://www.dgidc.min-edu.pt/outrosprojetos/index.php?s=directorio&pid=104#i

Schön, D. (2000). *Educando o profissional reflexivo: um novo design para o ensino e a aprendizagem.* Porto Alegre: Artmed.

Serrazina, M. (2008). Projectos de escola: uma realidade imperativa e possível. In Grupo de Trabalho de Investigação (Org.), *O professor de Matemática e os projetos de escola* (pp. 298-306). Lisboa: APM.

O INVESTIMENTO NA PROFISSÃO E A CONSTRUÇÃO DA IDENTIDADE PROFISSIONAL – ESTUDO DE CASO[39]

Josimar de Sousa[40]

Universidade do Estado do Mato Grosso - Brasil

jsousa.mt@unemat.br

Resumo

Este estudo trata da construção da identidade profissional docente, a partir dos contributos do mestrado e doutoramento, de uma professora de Matemática do ensino básico e secundário em Portugal e que investiu na profissão. A metodologia é baseada no modelo interpretativo e adotou-se o estudo de caso como designer. A entrevista é a única fonte de dados. O estudo indicou que o investimento na profissão contribui para (re)construção da identidade profissional docente, reorientando e reorganizando o trabalho na escola e fortaleceu o sentimento de pertença profissional, baseado no gosto pela Matemática, no prazer pelo ensino, na satisfação profissional e na conquista da autonomia e promoção da segurança e maturidade profissional.

Palavras-chave: professor de Matemática, investimento e identidade.

Problemática do estudo

Novos contextos da Contemporaneidade sinalizam mudanças significativas na sociedade e, por conseguinte, no espaço de formação e de trabalho. São mudanças que marcam o ser professor e, portanto, os processos de construção da identidade (HALL, 2006) e, de modo particular, a do profissional docente.

Compreender as contribuições do investimento na profissão se faz necessário porque situar-se aí, também, o espaço de objetivação do processo de constituição da identidade profissional do professor. A formação é essencial à constituição da identidade. Investir na profissão influencia os processos de constituição da identidade profissional docente.

Por isso, considera-se em estudo que Dubar (2005) fornece o apoio teórico para compreender o processo de constituição identitária profissional docente que não se encerra na formação inicial. Com isso, vale perguntar: Quais os contributos da pós-graduação no processo de configuração identitária do professor que ensina Matemática na escola básica? O que foi mais marcante? Quais experiências foram mais

[39] Este estudo foi realizado durante pós-doutoramento na Universidade Lisboa- Portugal, entre setembro de 2011 a março de 2012.

[40] Grupo de Pesquisa Observatório do Professor de Ciências e Matemática: saberes, formação e identidade.

transformadoras? Objetiva-se conhecer melhor como a formação continuada contribuiu para a (re)construção da identidade profissional do professora de Matemática Maria Simões.

Quadro teórico

A construção das identidades (social e profissional) é movimento, acontece no coletivo, na relação EU-OUTRO, em dois processos definidos por Dubar (2005) como biográfico (relações familiares) e relacional (em ambientes de trabalho). De modo específico, a identidade profissional está no sentido que há em pertencer a uma classe profissional, cujos membros se reconhecem na especificidade do fazer e do ser, configurando características que os ligam a uma profissão.

Para ser professor, hoje, carece de mais investimento na profissão e o professor busca cursos de atualização, aperfeiçoamento ou especialização. Mais recentemente percebe-se a busca por estudos mais complexos (mestrado e doutoramento) como é o caso da professora deste estudo. Será uma necessidade do professor?

Nessa direção, Sousa (2009) estudou as trajetórias profissionais de cinco professores de Matemática não habilitados que investiram na profissão de docente. O estudou indicou que o investir na profissão (a formação) trouxe contributos à (re)construção da identidade profissional daqueles professores, nomeadamente maior domínio dos conteúdos específicos, métodos de ensino, melhor organização das práticas de sala de aula e a conquista da autonomia, marcando a identidade profissional dos professores pesquisados.

Dubar (2005) refere que a formação é uma necessidade do trabalhador e é ele quem sente esta necessidade transforma, por conseguinte, sua identidade profissional. Para ele, a formação é essencial à constituição da identidade, pois pode facilitar a incorporação de saberes essenciais ao efetivo exercício profissional.

Já em seu estudo de 1997, Dubar define em seu estudo quatro configurações identitárias que resultaram do investimento: **I - as identidades de fora do trabalho** - a formação está relacionada diretamente ao trabalho e aos saberes práticos; **II- as identidades de categorias -** a formação é concebida pelo profissional como um aperfeiçoamento de sua especialidade e os saberes técnicos; **III – as identidades de rede -** a formação mais procurada é a que mais se aproxima da forma acadêmica e os saberes são os teóricos e os gerais; **IV – as identidades de empresa** - a formação é como um conjunto de saberes práticos, teóricos e especializados que contribuem para o desenvolvimento de competências e o aperfeiçoamento permanente das capacidades diretamente operatórias.

Na perspectiva de Dubar (2005), ao investir na profissão, o individuo vai assumindo como suas as maneiras de ser de uma profissão dentro, de um processo de formação que conjuga momentos e lugares de interações que oferecem modos de ser na profissão, ou seja, passa a definir a identidade profissional.

Dentre as tipologias definidas por Dubar (1997), aquelas que estão mais relacionadas aos objetivos deste estudo são as formas identidades de empresa, centradas no trabalho que, adaptadas às questões da educação, são formas identitárias de escola.

Portanto, a formação e o investimento na profissão marcam os processos de construção das identidades profissionais, pois facilitam a incorporação de saberes importantes na estruturação da carreira profissional e sua relação com o mundo do trabalho.

A identidade profissional do professor de Matemática – alguns estudos

Há estudos que tratam da construção da identidade profissional do professor de Matemática em cursos de formação continuada (grupos de trabalho colaborativos e comunidades virtuais de práticas) e outros contextos (formação inicial, situações de trabalho em sala de aula).

Paiva (2006) discute uma proposta de formação inicial de professores de Matemática centrada nas questões de promoção da identidade profissional. Como constata a autora, há necessidade de que os cursos de formação inicial estabeleça uma maior proximidade com o espaço de trabalho como forma para o formando conhecer e refletir o significado de ser professor, vivido por quem já é professor.

Gama e Fiorentini (2008) revelam como a participação em grupos de trabalho colaborativos pode contribuir para o professor de Matemática refletir suas práticas pedagógicas, superar anseios e insegurança na sala de aula, ou seja, a participação nos grupos colaborativos contribui para (re)construção da identidade profissional, na medida em que pode possibilitar meios para o professor refletir sobre seu ser docente.

O estudo de Grootenboer e Zevenbergen (2006) mostra como o professor em situação como que ensina Matemática, comunica formas de ser professor (prazer, gosto, empenho, interesse etc.), que servem de referências para os alunos se aproximarem da Matemática e para o próprio professor perceber como é visto pelo aluno. São modos de ser na aula que remetem ao ser docente. Essa situação é definida por Dubar (2005) como processo relacional Eu – Outro, de construção da identidade profissional. É o outro que me diz quem sou no trabalho.

Goos (2008) revela como uma comunidade prática virtual para professores de Matemática pode contribuir com a constituição da identidade profissional. Os registros deixados na comunidade virtual revelam assunto de interesses do participante, formas de perguntas e consulta aos membros da comunidade, compartilhamentos de saberes e disponibilidade para participar e querer colaborar com outro colega. Além disso, querer participar é uma questão de atitude do professor e revela interesse e senso de responsabilidade ao assumir-se como professor e como parte da comunidade virtual de práticas.

Assim, pode-se dizer que o desenvolvimento profissional dos professores não se apóia somente na aquisição de saberes para docência, (Tardif, 2002), da formação inicial, mas, também, na formação continuada, mas, uma formação como sinônimo de movimento na construção de identidade profissional (Therrien, 2002).

Desse modo, uma das condições para o desenvolvimento profissional do professor é dotá-lo de condições para se movimentar melhor na profissão, (re)construindo sua identidade profissional, ao exemplo das comunidades de práticas onde pode refletir sobre suas próprias práticas, *permitindo separar o que importa do que não, o que contribui para sua nossa identidade, do que não contribui com ela* (Wenger, 2001, p. 194).

De certa forma, estes estudos revelam como a formação continuada e os investimentos na profissão contribuem para a construção da identidade profissional docente para o professor de Matemática.

Metodologia do estudo

Este trabalho enquadra-se no paradigma qualitativo-interpretativo, levando-se em conta a natureza do objeto de investigado que não pode ser compreendido e revelado em quantidade, mas no sentido que passam a ter os dizeres da professora acerca do significado do investimento na profissão à constituição de sua identidade docente. Tomou-se o estudo de caso como *desing,* já que cada um constrói o significado dos saberes e das experiências para sua vida profissional.

Esta pesquisa objetiva compreender os significados que a professora participante atribui às coisas e à sua vida social e profissional, notadamente a partir dos contributos do investimento na profissão (mestrado e doutoramento), buscando enxergar aí como (re)constrói sua identidade profissional e dá sentido ao seu trabalho e vive suas experiências na escola.

Os critérios de seleção dos sujeitos são: ser professora de Matemática no Ensino Básico; investir na formação profissional (Mestrado e Doutoramento). Maria Simões[41] é mestre, doutora e professora de Matemática no ensino básico há trinta anos. A entrevista foi gravada na escola onde a professora trabalha na cidade de Vila Nova de Gaia – Portugal, em 06 de dezembro de 2011.

A entrevista foi a única fonte de dados e foi transcrita na totalidade, mas, para momento, serão usadas partes da transcrição. Seu roteiro teve por base o quadro teórico, os objetivos do estudo e a natureza da investigação (LUDKE; ANDRE, 1986).

A análise do conteúdo foi feita em três fases: na primeira foi feita pré-análise para o reconhecimento do material a ser estudado; na segunda fase, procedeu-se sua exploração e elaboração das categorias para análise e, por fim, a interpretação dos sentidos dos dizeres para a professora e como eles mantêm uma relação de significados apoiada na fundamentação teórica.

As contribuições do investimento profissional à identidade docente

O investimento na profissão já se sabe que é necessário. Para os professores parece ser ainda mais, pois seu trabalho é exigente e desafiador. A Busca pela atualização pode transformar o trabalho do professor e a própria identidade profissional a partir de novos sentidos e significados de seu papel como educador, como professor de Matemática. Maria Simões recorre ao uso das tecnologias das informações para justificar a necessidade de atualização profissional de novas maneiras para desenvolver as aulas.

> Eu dava as aulas como aprendi: o mais tradicional possível e tinha alguma insatisfação. O que era preciso mudar? (MS)

Esta percepção de si sobre seu trabalho indica que a professora sentia necessidade de mais formação e de investir na profissão, o que configura uma situação referida por Dubar (2005, 1997) para o profissional na atualidade. Maria Simões decidiu fazer o

[41] Nome real da professora entrevistada que concordou em mostrar a sua identidade.

mestrado a partir de sua própria necessidade de uma outra visão de metodologia de ensino:

> Uma colega minha que ia fazer o mestrado e mostrou-me seu projeto: "Ah, tecnologia e metodologias novas centradas no aluno. É isto mesmo que eu quero". (MS)

O mestrado representou a possibilidade de aprender a organizar uma investigação; aprender novas maneiras de ensinar:

> No mestrado eu tive a oportunidade de sistematizar, de organizar o pensamento e sistematizar o conhecimento que fica para toda a vida. Eu acompanhei uma professora. Fazíamos avaliação sobre o que tinha passado e preparávamos o passo seguinte. Esta foi a primeira vez que eu trabalhei com um professor em aula. Até aí a aula era um sítio onde eu estava isolada. Adorei isto e ganhei vício. Nós fazemos assessoria uns aos outros. Eu vou às aulas de colegas meus e ele vão às minhas. (MS)

Assim, a responsabilidade pelo desenvolvimento de boas práticas pedagógicas passou a ser discutida por todos os professores e de modo colaborativo, além de aprenderem formas de usar a internet. Gama e Fiorentini (2008) discute como o compartilhamento das experiências na escola contribui para o professores melhorar suas práticas, (re)construindo sua identidade profissional.

O mestrado possibilitou novo aprendizado do uso da internet no ensino da Matemática:

> Eu aprendi e construi uma página na internet para a escola, onde fui pondo vários materiais que utilizamos no mestrado. Meu retorno à escola foi bom porque eu podia experimentar, aquilo que eu tinha aprendido, com meus alunos e adaptar ao meu contexto específico o que sou capaz de fazer, o que tenho que aprender. (MS)

As novas tecnologias na escola significa novas possibilidades de ensino e de trabalho para o professor, além disso, como indica Goos (2008) e Walshaw (2004), também, revela-se com potencial para construção da identidade profissional do professor.

Maria Simões tem uma visão crítica a respeito do uso da informática na escola. Sabe que equipar a escola tem seus benefícios, mas, também tem a consciência que isto não é tudo. O mestrado contribuiu para transformar seu trabalho e sua visão de aula por meio das novas tecnologias e alimentar um sonho que pode envolver ou não este uso nas aulas de Matemática:

> Qual é meu sonho com ou sem computador? Tenho uma proposta ao aluno e ele vai construir uma certa ideia e, no final, consegue transmitir conclusões, conjecturas e até construir argumentos sobre o que conjecturou. No final expõe um ao outro, discutem e há uma síntese no

> final da aula. Isso para mim é aula de sonho. Se for feita com computador, óptimo. Se for feita com materiais manipuláveis, óptimo. (MS)

Contudo, Maria Simões compreende que este seu sonho envolva dificuldade: *Nisso há uma dificuldade. O aluno não encara o computador como uma ferramenta de trabalho, mas de diversão* (MS, p. 9). Isto revela limitações e não bastam boas intenções e objetivos bem traçados para trabalhar com Matemática:

> O trabalho com Matemática é como a alimentação saudável que varia bastante. Se variar muito tem maior possibilidade de ter uma alimentação equilibrada. Numa situação, os alunos tinham uma tarefa com o Geogebra. O objetivo era relacionar uma parábola com seu vértice, raízes e como essas coisas todas se relacionavam todas. Quando foi para relacionar com questões de Matemática, aí não eram capazes. Se for para o computador e não for para aprender Matemática, então o computador não se usa. (MS)

Para Maria Simões, o mestrado trouxe importantes contribuições para melhorar as condições de trabalho na escola, mas não lhe deu todas as respostas. O mestrado possibilitou mudanças em seu trabalho e questionamentos sobre o uso da informática e forma de trabalho. Isto reflete em sua identidade, marcadamente porque não a deixou acomodada, condição típica na Contemporaneidade como discute Hall (2006):

> O trabalho com a informática para a sala da aula foi assunto no mestrado. Nossa obrigação é refletir sobre cada proposta, o que elas trazem de conhecimento e qual a forma de torná-las ricas, mudando nossa prática. Como posso expandir meu trabalho para além da sala de aula? **Estou a procura deste tipo de coisas.** (MS)

A procura de respostas a estas perguntas continua no doutoramento. Continuar a busca por mais qualificação marca a condição profissional do trabalhador de hoje, como, também, indica Hall (2006):

> O doutoramento foi um bocado a ampliação ligada à internet que eu tinha feito no mestrado. No doutoramento era internet como seu conjunto mais alargado, estar mais disponível para ajudar o professor no trabalho com seus alunos, pode ajudar o professor no seu trabalho dentro da própria profissão, na comunicação com seus pares. (MS)

Para esta professora, os destaques do doutoramento são estes:

> O destaqus que eu faço, são os contatos que tive. Eram professores experientes; deram opiniões que me ajudaram a direccionar as coisas, mas, **eles me consideravam uma autónoma** e me deixavam, às vezes, um bocado sozinha, mas **não me arrependo**. [...] Agora, quando eu falo as pessoas me ouvem. Antes eu achava que ninguém estava interessado

> nas minhas ideias. Fui crescendo e ganhando maturidade. Dá-me alguma segurança. Sento-me a vontade para dizer o que penso. (MS)

Investir na profissão promove conquista de autonomia. O doutoramento representou o meio de afirmar a autonomia e adquirir maturidade para melhor atuar na profissão (Sousa, 2009; Freire, 2004). Contribuiu, também, para sua realização profissional, embora viva uma frustração:

> **Em termos profissionais sinto-me realizada.** Dou aulas de Matemática para jovens; acompanho professores em formação inicial, embora, não seja uma preparação em Matemática que eu como gostava que fosse. (M)

Contudo, Maria Simões sente-se bem como professora, sente-se bem mais segura e melhor preparada para trabalhar na escola ensinando Matemática para jovens e cooperando com os colegas de profissão.

> Sinto-me segura como supervisora, formadora, de ajudar professores iniciantes. Este é um papel para o qual sinto-me preparada para desenvolver. Ser pesquisadora, se fosse possível não virava as costas. Mas, estar com meus alunos eu gosto e gosto muito. (MS)

A formação continuada, investindo na profissão, promove o desenvimento de segurança para o professor melhor atuar na profissão como refere Gama e Fiorentini (2008). Com relação a ser pesquisadora, sua fala parece indicar que sua identidade profissional tem uma forte relação com o ser professora, que se sente ser e gosta disso. Como refere Dubar (2005), a identidade é um encontro de trajetórias, uma soma do que foi no quê sente que passa a ser. As experiências do passado não deixadas de fora na construção do vir-a-ser.

Maria Simões compreende como cada formação contribuiu para seu desenvolvimento profissional, marcando sua identidade docente:

> **O mestrado foi uma fase muito inicial de deslumbramento** de tudo há para eu aprender. Pude perceber que poderia dar aulas de outra maneira, ser uma professora diferente. [...] **O doutoramento foi uma fase mais madura** em que já não há tanto fascínio, mas, que há muito **vontade em continuar a aprender, investir** numa área que sempre me interessou que é a área da internet. **Eu evolui.** (MS)

Maria Simões sente que evoluiu, também, em termos de segurança e em suas opiniões. Neste aspecto, faz uma comparação entre a segurança que tinha e passou a ter e entre a recepção de suas posições junto os colegas na escola. Compreende que, na atualidade, seu papel passou a ser outro, mas continua sendo a professora de Matemática para jovens adolescentes na escola pública. Maria Simões demonstra que seu ser professor foi sendo transformado ao longo da vida.

Com a conclusão do doutoramento abrem-se outras possibilidades de trabalho, tendo em vista sua natureza e objetivos. A formação é para ser pesquisador e não parece comum que o doutor faça opção pelo trabalho em nível escolar, embora, nada impeça que neste lugar, a pesquisa possa vir a ser desenvolvida. Maria Simões revela-se confortrável no lugar de trabalho e tem consciência do papel a desempenhar nele e afirma:

> Não viro as costas . Estou muito feliz assim porque estou a fazer as coisas que gosto.. Fiz doutoramento pelo prazer de fazer mais um projeto de investigação. Sinto-me realizada também como professora. (MS)

A identidade profissional de Maria Simões é marcada pelo investimento e empenho na profissão, pela felicidade no trabalho e pela satisfação alcançada pelo amadurecimento profissional. A formação continuada desempenhou um papel central em seu desenvolvimento profissional quando pode, na medida em que ia vivenciando novos processos de formação, percebe que já não era mais a mesma professora. Essa situação, Dubar (2005) identifica como processo biográfico de construção de identidade, examinando como era seu SER professor e percebe que houve mudança daquele SER professor. Houve mudança de identidade.

Considerações finais

A construção da identidade profissional é um fazer que acontece ao longo da vida. O depoimento da professora Maria Simões revela o caminho profissional percorrido e como a formação continuada e o investimento da profissão (mestrado e doutoramento) contribuíram para a construção de sua identidade profissional docente. Como refere Dubar (2006, 2005), a formação é essencial à organização do trabalho, pois promove a incorporação de saberes necessários ao exercício das profissões, contribui para a construção e afirmação da identidade profissional. No caso de Maria Simões, trata-se de uma identidade profissional (re)construída entre o lugar de trabalho e o investimento na formação profissional (Dubar, 1997), renovando seu sentido e sentimento de ser professora, no gosto pelo conhecimento matemático (Sousa, 2009), no compartilhando de saberes nos grupos de estudo (Gama e Fiorentini, 2008; Goos, 2008), no trabalho na escola e no gosto pelo ensino da Matemática na Educação Básica (Grootenboer e Zevenbergen, 2006).

A condição provisória da identidade (HalL, 2006), desafia os professores a investir na profissão e a consciência de sua necessidade contribui com a construção da identidade profissional e a conquista de autonomia para ser professor na sala de aula (SOUSA, 2009), uma vez que possibilitou uma melhor compreensão do papel de ser professora, melhores condições de práticas e poder de escolha sobre o quê e como fazer para ajudar os alunos a aprender Matemática.

Este estudo indicou que o investimento na profissão renova o sentido de ser professor em termos contribuir na reorganização do trabalho na escola,superação de dificuldades e, sobretudo, na promoção da satisfação profissional, fortalecendo a identidade docente, contribuindo de forma significativa para o desenvolvimento profissional docente.

Bibliografia

Dubar, C. (2005). *A socialização: construção das identidades sociais e profissionais*. – São Paulo: Martins Fontes.

________. (1997). Formação, trabalho e identidade profissionais. In: Canário, R (org.) *Formação e situações de trabalho.* Porto; Porto editora. pp. 43-52.

Freire, P. (2004). *Pedagogia da autonomia*. – Petrópolis, RJ: Terra e Paz.

Gama, R. P.; Fiorentini, D. (2008). Identidades de professores iniciantes em matemática que participam de grupos colaborativos. In: Horizontes, v. 26, n.2, p. 31-46, jul/dez.

Grootenboer, P; Zevenbergen, R. (2006). *Identity as a lens to understand learning mathematics: developing a model.* In: www.merga.net.au/documents/rp262008.pdf. Acesso: 09 de dezembro de 2011.

Goos, M.; Benninon, a. (2008). *Developing a communal identity as beginning teachers of mathematics: emergence of an online community of practice.* Journal of Mathematics Teacher Education, 11, pp. 41-60.

Hall, S. (2006). *A identidade cultural na pós-modernidade.* – Rio de Janeiro: DP & A, 2006.

Ludke, M; Andre, M. E. D. A. (1986). *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas*. – São Paulo, SP: EPU.

Nóvoa, A. (org.). (1999). *Profissão professor. Porto*: Porto Editora.

Paiva, M. A. V. (2006). O professor de matemática e sua formação: a busca da identidade profissional. In: Nacarato, A. M; Paiva, M. A. V. (orgs) *a formação do professor que ensina matemática: perspectivas e pesquisas.* Belo Horizonte: Autêntica.

Sousa, J. (2009). *O professor de matemática: formação e identidade profissional – a experiência do projeto parceladas.* (tese de doutoramento). São Paulo: Faculdade de Ciências Exatas, PUC/SP.

Tardif, M. (2002). *Saberes docentes e formação profissional.* Petrópolis: Vozes.

Therrien, J. (2002). O saber do trabalho docente e a formação do professor. In*: reflexões sobre a formação de professores.* (org.) Alexandre shigunov neto; lizete bomura maciel (orgs.) – São Paulo: Papirus, pp. 103-114.

Walshaw, M. (2004). *Pre-service mathematics teaching in the context of schools: an exploration into the constitution of identity.* Journal of Mathematics Teacher Education, 7(1), 63-86.

Wenger, T. (1998). *Communities of practice: learning, meaning and identity.* Cambridge: Cambridge University Press, 1998.

DESAFIOS DE FORMADORES DE “MATEMÁTICA PARA A VIDA” DO PROCESSO RVCC[42]

Maria Cecilia Fantinato
Universidade Federal Fluminense, Brasil
mcfantinato@gmail.com

Darlinda Moreira
Universidade Aberta, Portugal
darmore@uab.pt

Resumo

Este texto tem por objetivo problematizar os desafios enfrentados pelos formadores da área “Matemática para a Vida” (MV), integrada no processo RVCC, e cuja atividade profissional assume um conjunto diversificado de funções. Partindo de um quadro teórico que concilia a literatura de educação de adultos com a literatura etnomatemática e através da análise de conteúdos das entrevistas realizadas foram caraterizados dilemas que se colocam aos formadores, e que emergem das novas práticas pedagógicas que têm de desenvolver, tanto para lidar com as diferenças, de várias naturezas, existentes entre os adultos que recorrem ao processo RVCC como para descodificar e adaptar os documentos oficiais na área da Matemática para a Vida.

Palavras-chave: educação de adultos; processo RVCC; práticas profissionais de formadores de “Matemática para a Vida”.

Introdução

O termo "educação de adultos" abrange um conjunto de percursos educativos variados que pretendem dar resposta às diferentes situações educativas que podem ser encontradas nas pessoas adultas, nomeadamente, conforme o adulto é anafabelto, tem um baixo nível de educação formal, ou mais recentemente, pretende seguir um percurso formal de atualização profissional ou simplesmente aumentar o nível de escolaridade, enveredando por cursos de aprendizagem ao longo da vida. A educação de adultos pretende, portanto, dar resposta às necessidades de formação e educação do mundo adulto, as quais são extremamente variáveis e dependentes de circunstâncias específicas de cada adulto.

[42] Este trabalho é fruto de um projeto de pós-doutoramento desenvolvido junto ao Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, sob a supervisão de João Pedro da Ponte e Darlinda Moreira, com bolsa da Fundação para Ciência e a Tecnologia (SFRH/BPD7815/2011).

Dentre as políticas de educação de adultos, implementadas na última década em Portugal, temos o chamado processo de Reconhecimento, Validação e Certificação de Competências (RVCC) que geralmente é realizado nos Centros Novas Oportunidades (CNO). Trata-se de uma prática de reconhecimento de adquiridos experienciais, que – por ser recente, desconhecida para os vários intervenientes, tanto dos profissionais envolvidos como dos adultos que recorrem a este processo, baseada em metodologias inovadoras e muito complexas – origina uma série de dificuldades na sua implementação (Cavaco, 2009). O dispositivo de nível básico do processo RVCC – ou seja, aquele que permite o reconhecimento, a validação e a certificação até o 9.º ano de escolaridade – apresenta quatro áreas de competências-chave, sendo uma delas a denominada “Matemática para a vida" (MV). Este artigo tem por objetivo problematizar os desafios enfrentados pelos formadores da área “Matemática para a Vida”, assim como apresentar alguns dilemas da sua concretização.

Quadro teórico

O processo de Reconhecimento, Validação e Certificação de Competências, geralmente referido RVCC, trabalha com o princípio do reconhecimento de competências. Uma abordagem por competências implica reconhecer e valorizar os saberes adquiridos, sobretudo em contextos informais e não-formais, como reflexo das aprendizagens de vida dos adultos, diferenciando-se, assim, de abordagens que privilegiam a aquisição de conteúdos disciplinares em contextos formais de aprendizagem. Trata-se de competências de vida que permitam aos adultos “compreender e participar na sociedade do conhecimento, mobilizando através delas o saber, o ser e o saber resolver os problemas com que o mundo actual em mudança as confronta constantemente” (ANEFA, 2002, p. 9). Nesta perspectiva, no processo RVCC as competências aparecem “como emergentes da acção, o que lhes confere um carácter finalizado, contextual e contingente” (Canário, 2006, p. 41).

O processo RVCC é uma prática de reconhecimento de adquiridos experienciais, e como tal, segundo Canário (2006), traz duas ideias constituindo seus fundamentos essenciais: a ideia de que a pessoa aprende com a experiência e o princípio segundo o qual não se deve ensinar às pessoas aquilo que elas já sabem. Pressupõe que “as pessoas são produtoras do seu conhecimento, ao longo da vida, e de que esse conhecimento, resultante de processos de formação experiencial, pode ser objecto de reconhecimento, validação e certificação" (Cavaco, 2009, p. 150).

A linha de pesquisa da Etnomatemática (D´Ambrosio, 2001) tem igualmente abordado a temática dos saberes construídos em contextos de vida, mais especificamente, dos conhecimentos matemáticos construídos por diferentes culturas, ou seja, da "forma como os grupos sociais têm consciência de suas necessidades e em que condições usam a sua matemática local para os abordar" (Moreira, 2009, p. 66). Consideramos que esta abordagem teórica, compartihada pelas autoras, pode proporcionar uma análise diferenciada de alguns princípios da componente MV do processo RVCC e um novo olhar sobre os saberes (matemáticos) experienciais dos adultos a serem certificados, pois,

> tem sido pioneira nos estudos e pesquisas que buscam compreender os diferentes modos de raciocinar matematicamente de jovens e adultos, fruto de uma bagagem cultural construída predominantemente em contextos da vida doméstica e profissional, sem excluir as experiências escolares anteriores. (Fantinato & De Vargas, 2010, p. 37).

Metodologia

Uma vez que a pesquisa pretendia entender a perspectiva pedagógica dos formadores de MV sobre o processo de RVCC, bem como os seus principais dilemas e problemas, desafios e necessidades de formação, a metodologia utilizada no estudo seguiu uma abordagem qualitativa, do tipo "indução analítica modificada" (Bogdan & Bliklen, 1994).

Optou-se pela realização de um trabalho de campo, desenvolvido ao longo de cinco meses (de novembro de 2011 a março de 2012), visando conhecer a dinâmica dos CNOs, os papéis dos diversos profissionais envolvidos e especificamente o trabalho desenvolvido na área de Matemática. Pelo fato deste ter sido desenvolvido em vários CNOs, a abordagem da investigação pode ser considerada como multissituada. Foram utilizados diferentes instrumentos de coleta de dados – análise documental, observação participante e principalmente entrevistas semi-estruturadas. Selecionaram-se os sujeitos, aplicando a "técnica de amostragem de bola de neve" (Bogdan & Bliklen, 1994, p. 99), ou seja, solicitando à primeira pessoa entrevistada que indicasse outras, e a estas que por sua vez indicassem outras, e assim sucessivamente, tendo cada entrevista contribuído para o aprofundamento e a redefinição das questões da pesquisa. Foram realizadas entrevistas com diretores de CNOs, coordenadores e formadores.

Este texto analisa prioritariamente os depoimentos de quatro formadores de MV, dois homens e duas mulheres, de quatro CNOs localizados na região metropolitana de Lisboa ou em municípios próximos. Quanto à formação inicial, três têm licenciatura em Matemática e um em Engenharia. Todos já trabalharam ou trabalham no ensino regular, como professores de matemática durante mais de dez anos e têm de um a cinco anos de experiência de trabalho com adultos. As entrevistas foram realizadas no local de trabalho, em horários combinados entre a entrevistadora e os entrevistados. Foram posteriormente transcritas e analisadas, a partir de categorias que emergiram do processo. A análise priorizou os desafios e dilemas vivenciados por esses formadores no seu exercício profissional, ao trabalhar com a "Matemática para a Vida" no processo RVCC.

Desafios de formadores de "Matemática para a Vida" no processo RVCC

A análise das entrevistas com os formadores de MV, que fizeram parte deste estudo, apontaram para diversos aspectos da complexidade inerente à realização do processo RVCC de candidatos adultos. Neste tópico serão apresentados alguns dos desafios vividos por esses profissionais.

Diferenças entre os adultos

Um dos principais desafios enfrentados pelos formadores de MV é lidar com as diferenças, de várias naturezas, existentes entre os adultos que recorrem ao processo RVCC.

Em primeiro lugar, existem diferenças quanto à motivação para realizar o processo. Um grupo de adultos, geralmente mais velhos, procura os Centros sobretudo para estar à altura do agregado familiar. Leandro[43] relata o caso de um senhor que dizia não necessitar da certificação, por já estar no topo de sua empresa, apesar de só ter o diploma de quarta classe, mas que procurou o CNO porque antes não se sentia à altura da esposa e da filha, mais escolarizadas, e nem capaz de conversar com elas. Outros reconhecem que aprendem no processo e gostam tanto, que continuam frequentando o Centro mesmo depois de terem sido validados, porque "perceberam que aquilo tinha a ver com a vida deles (...) que aquilo que estão a aprender lhes poderia ser útil" (Rodrigo).

[43] Todos os nomes apresentados são fictícios, para preservar a privacidade dos depoentes.

Alguns adultos buscam o CNO por vontade própria, mas outros vêm por serem encaminhados. Muitas vezes são as próprias empresas onde os adultos trabalham que procuram os CNOs, em busca de parcerias para a realização do processo RVCC para seus empregados de baixo nível de escolaridade. Já os desempregados procuram o processo por obrigação, para não correrem o risco de terem os subsídios do governo cortados.

A ideia pré-concebida de que o processo é fácil e rápido leva a uma queda de motivação entre os adultos que são encaminhados para a formação complementar, trabalho mais individualizado com os formadores, indicado para aqueles que necessitam de mais apoio na escrita do relato de vida. Mariana diz que, "às vezes, não conseguem perceber a necessidade de terem formação (…) em termos de motivação, ficam um cadinho abaixo, mas depois gostam muito".

Também existem diferenças entre os adultos quanto ao tempo de conclusão do processo RVCC. Em média, o processo demora quatro ou cinco meses, para os formandos assíduos e com disponibilidade. Mas, segundo Leandro, há casos de pessoas que passam um ano, um ano e meio no processo, porque desistem e depois retornam. Desistem por motivo de doença ou por terem recebido uma proposta de trabalho e não poderem continuar vindo ao Centro. Um exemplo específico de demora maior do processo RVCC, e que representa um grande desafio para os profissionais envolvidos, é o trabalho com adultos com incapacidade intelectual. Neste caso, de acordo com Rodrigo, "a parte de reconhecimento é mínima, praticamente o reconhecimento e a formação são quase a mesma coisa" e o tempo é obrigatoriamente mais longo.

Uma outra forma pela qual se manifestam as diferenças entre os adultos é quanto aos saberes construídos nas experiências. Alguns formadores reconhecem um raciocínio mais organizado e o domínio de mais conceitos matemáticos em adultos com experiências de trabalho na indústria ou em áreas como construção civil, canalização e eletricidade. Rodrigo, que já trabalhou como engenheiro, relaciona os saberes dos adultos que trabalham em empresas com seus próprios saberes prévios, na sua atuação como formador de MV. Diz ele: "quando as pessoas se põem a descrever os processos, fica mais simples de eu perceber o quê que as pessoas estão a dizer, porque eu próprio vivi essas experiências".

Um outro aspecto interessante ressaltado pelos formadores é que não existe uma relação direta entre os anos de escolaridade cumpridos pelos adultos e as competências adquiridas pelos mesmos na área da Matemática. A fala de Leandro mostra essa contradição:

> Eu tenho aqui um senhor que é quase diretor de uma empresa de transporte, escreve muito bem, fala muito bem, e só tem a quarta classe. E depois eu tenho outro com frequência do oitavo, e curiosamente este senhor [que tem a quarta classe] tem muito mais competência na área de Matemática do que o outro. (Leandro)

A situação apresentada vem corroborar as ideias de Cavaco (2002, p. 76-77), de que a aprendizagem proveniente da formação experiencial, "apesar de estar muito relacionada com a riqueza de situações vividas e da diversidade de desafios e exigências colocadas aos indivíduos" nos diferentes contextos de vida, também depende muito de fatores individuais, do que decorre que nem toda experiência de vida é formadora.

Novos termos, novas práticas

Ao iniciar o seu trabalho nos CNOs, os profissionais de MV enfrentaram o desafio de desenvolver um trabalho que lhes era inteiramente novo e para o qual não estavam preparados. A formadora Fernanda diz ter sido "um choque". Entretanto, vários disseram ter participado de uma ação formativa de três fins-de-semana no Algarve, proposta pela Agência Nacional para a Qualificação em 2008, destinada a todos os profissionais que iriam atuar nos CNOs e utilizar o processo RVCC, onde lhes foram transmitidos alguns princípios desta nova metodologia. Esta formação representou sobretudo um aprendizado de novas terminologias e novos papéis. *Processo RVCC*, *sessões de descodificação* e *júri de validação de competências* estão entre os termos que de início eram pouco familiares para a equipa. Quanto às novas profissões, temos, por exemplo, o *técnico de diagnóstico e encaminhamento* que recebe e dá as orientações iniciais ao adulto que procura o CNO, o *profissional de RVCC* que acompanha o processo todo de reconhecimento de competências dos adultos e os *formadores* das quatro áreas de competências-chave.

Mas também para o profissional da área de Matemática há uma mudança de termo que corresponde a uma mudança de função. A fala de Leandro explicita bem as diferenças entre o *professor* e o *formador*:

> Na área de RVCC sou formador. Sou professor de Matemática da escola. Sim, porque há uma terminologia diferente. Por exemplo, no RVCC não

> se dão aulas, são sessões, não é o professor, é o formador, mais na perspectiva de orientar. E no curso diurno é a metodologia habitual: aulas (...) A metodologia é completamente diferente. No curso diurno o aluno aprende, no curso noturno, nomeadamente no RVCC, o aluno já traz os conhecimentos, ele vai mostrar as competências que tem. (Leandro)

Os formadores de MV passam então a assumir um conjunto diversificado de funções, ligadas ao reconhecimento e à validação de adquiridos experienciais e competências, distanciando-se da função que lhes é habitual enquanto professores do ensino regular. Como afirma Cavaco, para "assegurarem um desempenho adequado têm que desenvolver competências específicas, bastante distintas das que lhes eram solicitadas quando exerciam as suas funções como professores do ensino regular" (2009, p. 700-701).

Oriundos da educação regular, destinada a crianças e adolescentes, declararam ter aprendido a trabalhar no processo RVCC no próprio exercício deste tipo de trabalho, construindo seus próprios documentos, compartilhando com as demais pessoas da equipe do CNO e, sobretudo, observando os adultos. Esta adaptação implicou mudanças na forma de estar, na forma de falar, no nível de rigor em relação à linguagem matemática, se comparados em relação aos parâmetros do ensino regular. Foi preciso ser flexível, "tipo bambu", nas palavras da formadora Mariana.

Tantas mudanças nas práticas e nos papéis não são simples de serem concretizadas sem uma formação contínua. Segundo João, diretor de CNO, que também já trabalhou nesta área, "os que mais reclamam por formação são os de Matemática para a Vida". Ele complementa:

> Somos formados em Matemática, estamos preparados para ensinar Matemática, mas reconhecer no adulto que ele aprendeu Matemática não é bem a mesma coisa. (...) Claro que há formadores que conseguem adaptar-se à realidade e desconstruir as suas aprendizagens e tentar ver a Matemática sob um outro prisma, mas não é fácil. (João)

Este profissional sinaliza para um outro aspecto importante que resulta dessas novas práticas, bastante específico dos formadores da área de Matemática: a desconstrução de uma visão hegemônica de Matemática como um conhecimento único e atemporal, levando ao reconhecimento de maneiras menos formais de aprender e utilizar saberes matemáticos. Fernanda, por exemplo, declara que as experiências trazidas pelos adultos fizeram-na "ver a Matemática de uma outra perspectiva".

Nesse sentido, pode-se perceber, na orientação do trabalho destes formadores, uma aproximação com as ideias da Etnomatemática, área que tem atuado como uma fonte de crítica à forma como o conhecimento acadêmico matemático tem sido transferido para as escolas, "já que a instituição escolar tem adoptado a Matemática, de tal forma que, apesar de existir actividade matemática nos diferentes grupos sociais, esta, em face da Matemática, é apagada ou mesmo ignorada pela escola" (Moreira, 2009, p. 63).

Descodificando e adaptando o Referencial

Uma das primeiras aprendizagens do formador de MV é o manejo das etapas do processo RVCC. Após os adultos já terem sido recebidos pelo técnico de diagnóstico e encaminhamento, que avaliou a possibilidade dos adultos realizarem o processo RVCC e indicou o nível em que deverá de ser integrado, e após o profissional de RVCC ter ouvido os adultos, em entrevistas individuais, eles passam para a fase dos formadores, entre eles, o de Matemática para a Vida. Acontecem então as *sessões de descodificação*, onde o trabalho do formador é procurar mostrar aos adultos quais os assuntos que podem indicar em termos da sua experiência de vida e do ponto de vista matemático, para que consigam, posteriormente, articular na forma escrita a sua história de vida, onde as situações descritas demonstrem as competências que possam ser validadas de acordo com o Referencial "Matemática para a Vida" (ANEFA, 2002).

A dinâmica dessas sessões fica a critério do formador, que procura criar um clima favorável para os adultos, que por vezes chegam "embaralhados" (Rodrigo). Afinal, o processo RVCC também é novo para os adultos em muitos aspectos. Leandro tem como costume passar um filme onde jornalistas entrevistam feirantes sobre seus conhecimentos matemáticos do cotidiano. Ele diz que é um filme "que desmonta tudo", e que ajuda os adultos a perceberem que o seu papel, enquanto formador, é idêntico ao papel daqueles jornalistas, que vão identificando nas práticas diárias dos feirantes alguns conteúdos matemáticos: regra de três simples, sequência de série, "conteúdos que são lecionados aqui no décimo primeiro ano" (Leandro). Nas demais sessões, Leandro apresenta situações-problemas e estimula os adultos a resolverem do jeito que conseguirem, isto é, na sua "matemática do dia-a-dia", para depois apresentar a forma como a matemática escolar resolve aquele mesmo problema.

Uma das tarefas iniciais das sessões de descodificação é mostrar para os adultos as competências do Referencial. Por se tratar de um documento oficial, escrito em linguagem formal, os formadores de MV sentem necessidade de adaptar esta linguagem, de modo a torná-la mais compreensível para os adultos. Mariana, em conjunto com a equipe do CNO, elaborou uma ficha com perguntas mais acessíveis e contextualizadas, consoante os conceitos que estão no Referencial, já que, como afirma, "se formos colocar naquela linguagem, não vale a pena" (Mariana). Uma das perguntas desta ficha, por exemplo, é: "Verifica extratos bancários, talões de supermercado, faturas ou recibos?". O adulto deve responder e indicar por escrito situações ou experiências de vida onde utiliza habitualmente esta competência matemática.

Matemática oral versus um processo escrito

O processo RVCC supõe escritas sucessivas da autobiografia, que são avaliadas pelos formadores e devolvidas aos adultos com as suas observações sobre as competências atingidas e as que necessitam de ser desenvolvidas, até alcançar uma versão final que comprove as competências necessárias para a validação na área de MV. Este processo, por ser escrito, representa uma dificuldade para os adultos e um desafio para os formadores de MV:

> As pessoas, quando começam este processo, normalmente nunca escreveram sua autobiografia, pela dificuldade que eles têm. Agora, se você disser a eles: "Agora você tem que demonstrar que tem capacidades de Matemática. Mostre-me aí no papel, como é que você sabe fazer porcentagens". Eu bato muito que é uma coisa que no dia-a-dia as pessoas são muito confrontadas. (Rodrigo)

Entre os adultos pouco escolarizados, é comum a presença de competências de cálculo mental, da chamada "matemática oral" (Carraher, Carraher & Schliemann, 1988). Entretanto, para serem validados, a prova em que eles têm que mostrar esses saberes adquiridos ao longo da vida precisa ser escrita. Como diz Mariana: "Há uma fase em que dizem: 'Ah, mas eu faço isso de cabeça!', e eu respondo: 'Sim, mas aquilo que fazem de cabeça, escrevam, coloquem, mostrem, para que seja uma prova'".

Para o formador Rodrigo, o cálculo mental normalmente revela-se junto a outros cálculos, e ele percebe que "pessoas que têm essa facilidade chegam ao resultado mais cedo do que as outras". Entretanto, apesar de reconhecer esta habilidade entre os adultos, que indica "alguma facilidade nas Matemáticas", ele adverte: "eu não posso validar só porque a pessoa sabe fazer o cálculo mental bem".

A aprendizagem do cálculo mental, entre adultos pouco escolarizados, deu-se pela via da formação experiencial, resultando de atividades e estratégias de sobrevivência, o que dificulta a sua explicitação por escrito. A forma como construíram os saberes experienciais, incluindo-se aí as habilidades de cálculo mental, muitas vezes foi pela observação de pessoas mais experientes, geralmente um parente, ou por processos de tentativa e erro. Em sua pesquisa desenvolvida com jovens e adultos de uma comunidade de baixa renda no Brasil, Fantinato (2003) constatou a característica de marca cultural associada ao cálculo mental, com base na forma como essas estratégias tinham sido aprendidas, geralmente com um parente mais velho, que assumia o papel de "mestre".

Por outro lado, "a capacidade de construção do discurso sobre acção, ou seja a formalização da acção, é uma competência que se desenvolve e aperfeiçoa na escola, o que permite compreender as dificuldades que os adultos pouco escolarizados têm neste domínio" (Cavaco, 2009, p. 763). O processo RVCC exige uma explicitação por escrito e a elaboração de um discurso sobre o que realizam. Este constraste certamente representa um desafio para os candidatos adultos e formadores de MV.

Considerações finais

Os formadores da área "Matemática para a Vida", que integra o processo RVCC, enfrentam muitos desafios, entre os quais, o grande leque de diferenças existentes entre os adultos, a aprendizagem de novas metodologias e o exercício de funções não familiares, "distintas das habitualmente desempenhadas pelos tradicionais formadores de adultos" (Cavaco, 2009, p. 780). Sem terem recebido formação adequada para trabalhar nos moldes de um processo de reconhecimento e validação de adquiridos, os formadores constroem suas práticas profissionais na experiência do trabalho cotidiano com os adultos e na troca com os colegas das equipas dos CNOs.

Devido a seu caráter inovador, a vivência do processo RVCC proporciona novas aprendizagens, tanto para os adultos certificados quanto para os profissionais envolvidos. Em particular, os formadores de MV aprendem a ver a Matemática sob outra perspectiva, chegando a questionar o próprio nome "Matemática para a Vida". As palavras de Fernanda sintetizam a contradição existente: "Parece que estamos a dar a Matemática, para depois as pessoas a aplicarem. Não é isso que fazemos cá. A vida, que já tem Matemática, é que nós vamos buscar".

Referências bibliográficas

ANEFA (2002). *Referencial de competências-chave – Educação e Formação de Adultos*. Lisboa: ANEFA. Acedido em 18 de Outubro de 2011, em http://www.anq.gov.pt/default.aspx.

Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Canário, R. (2006). Formação de Adquiridos Experienciais: entre a Pessoa e o Indivíduo. In G. Figari, P. Rodrigues, M. P. Alves & P. Valois (Eds.). *Avaliação de competências e aprendizagens experienciais: saberes, modelos e métodos* (pp. 35-46) Lisboa: Educa.

Carraher, T. Carraher, D. & Schliemann, A. (1988). *Na vida dez, na escola zero*. São Paulo: Cortez Editora.

Cavaco, C. (2002). *Aprender fora da escola: percursos de formação experiencial*. Lisboa: Educa.

Cavaco, C. (2009). *Adultos pouco escolarizados: políticas e práticas de formação*. Lisboa: Educa.

D'Ambrosio, U. (2001). *Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade*. Belo Horizonte: Autêntica.

Fantinato, M. C. C. B. (2003). *Identidade e sobrevivência no morro de São Carlos: representações quantitativas e espaciais entre jovens e adultos*. São Paulo: Faculdade de Educação da USP, Tese de Doutorado.

Fantinato, M. C. C. B. & De Vargas, S. M. (2010) Saberes matemáticos do campo e da escola: processos de aprendizagem e educação de jovens e adultos. *Quadrante*, Vol. XIX No1, 29-47.

Moreira, D. (2009). Etnomatemática e mediação de saberes matemáticos na sociedade global e multicultural. In M.C.C.B. Fantinato (Org.), *Etnomatemática: novos desafios teóricos e pedagógicos* (pp. 59-68). Niterói: Editora da UFF.

POSTERS

DESENVOLVIMENTO DE SENTIDO DE NÚMERO NA EDUCAÇÃO PRÉ-ESCOLAR

Teresa Vilar e Lina Fonseca
Escola Superior de Educação de Viana do Castelo
tetievilar@hotmail.com e linafonseca@ese.ipvc.pt

Resumo

Partindo da experiência da criança o educador deve proporcionar momentos de aprendizagem significativos, carregados de boas experiências e, desta forma, desenvolver nela o sentido de número. Este estudo pretendeu responder à questão: Como se pode desenvolver o sentido de número no âmbito da educação pré-escolar?

Desenvolveu-se uma investigação-ação e recorreu-se a tarefas, observações, gravações áudio e vídeo e registos fotográficos para recolher os dados. O estudo desenvolveu-se com um grupo de 14 crianças do JI. Notou-se uma evolução geral do grupo, nas capacidades de visualização, (subitizing) e no estabelecimento de relações numéricas, o que pressupõe já alguma compreensão da sequência numérica.

Palavras- Chave: Educação Pré-escolar; Matemática; Sentido de Número; Contagem; Subitizing.

Introdução

Numa turma do 1.ºano de escolaridade verificou-se que alguns alunos tinham o sentido de número ainda pouco desenvolvido, mesmo para esta idade, mostrando dificuldades em operações simples, e os que já manifestavam algumas capacidades ainda não conseguiam reconhecer o número de elementos de um conjunto sem proceder à contagem. Segundo Castro e Rodrigues (2008) este é um aspeto importante no desenvolvimento do sentido de número, porque permite a construção de relações mentais entre números. Desta forma, ganha pertinência a questão: *Como se pode desenvolver o sentido de número no âmbito da educação pré-escolar?* Para responder à questão foram formulados os seguintes objetivos: (I) Criar e dinamizar uma área de matemática na sala de atividades (Matemática Divertida); (II) Conceber materiais que permitam desenvolver competências de contagem, de visualização (*subitizing*) e também o estabelecimento de relações numéricas; (III) Utilizar histórias, atividades plásticas e tarefas matemáticas como estímulo para o desenvolvimento do sentido de número.

Sentido de Número

Castro e Rodrigues (2008) consideram que sentido de número se refere à compreensão global e flexível dos números e das operações. Howden (1989) define sentido de número como boa intuição sobre os números e suas relações. Estudos provam que para desenvolver o sentido de número é necessário estímulo do pensamento matemático, uma vez que, o sentido de número não é uma entidade finita que a criança possui ou não, mas sim um processo que se desenvolve e amadurece com experiência e conhecimento. Segundo o NCTM (2007) a contagem constitui a base para o trabalho com números. Desta forma, é importante que a criança desde cedo comece a dispor de experiências de contagem. Outro aspeto a desenvolver é a estimativa. A criança desde cedo consegue fazer estimativas sobre conjuntos e sabe referir se um dado conjunto, tem mais ou menos elementos do que outro, devendo organizar-se momentos onde a criança possa estimar quantidades. Outra componente do sentido de número abordada, é relativa aos padrões de número. Segundo Brocardo, Serrazina e Rocha (2008) as crianças vão construindo padrões em determinados segmentos da sequência numérica e desenvolvem capacidades que lhe possibilitam o estabelecimento de relações entre os termos dos variados segmentos, para finalmente essas relações se estabilizarem e a sequência começar a ser compreendida na sua totalidade.

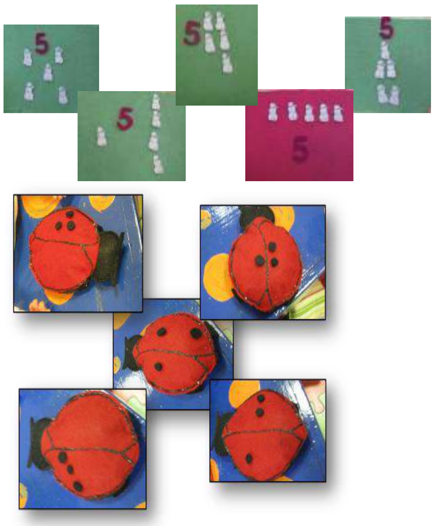
Metodologia

O estudo desenvolvido assumiu o *design* de investigação-ação. Na 1.ª fase, os participantes foram todo o grupo e na 2ª fase foram selecionadas 14 crianças de 4 e 5 anos, tendo em conta a idade e o conhecimento de número que possuíam. Neste sentido, os dados foram recolhidos através de: tarefas, observações, registos diários, notas de campo, gravações áudio e vídeo, registo fotográfico e registos das crianças.

Tratando-se de uma investigação-acção, a análise dos dados foi realizada ao longo da implementação das tarefas. No final de cada tarefa eram revistas as gravações de vídeo e comparadas com os registos realizados pela educadora. De seguida eram identificados os pontos em que a criança revelava aprendizagem e aqueles em que ainda apresentava dificuldades. Perante esta análise, era preparada a tarefa seguinte, que pretendia intervir nas dificuldades manifestadas.

Conclusões

A área "Matemática Divertida" foi dinamizada ao longo do estudo. Houve preocupação de ligar a matemática a outras áreas de conteúdo, nomeadamente domínio da comunicação oral e abordagem à escrita, e da expressão plástica, tanto na leitura de histórias como na construção de materiais. Após a realização das várias atividades pode afirmar-se que grande parte do grupo domina a sequência oral até 10, algumas crianças conseguem contar até 20 e duas ou três até 25, deste modo, crianças que não sabiam contar iniciaram o processo de aquisição da contagem. No que respeita ao desenvolvimento do *subitizing* no grupo, todas as crianças conseguem realizar *subitizing* percetual, e grande parte do grupo reconhece conjuntos com até quatro elementos; no entanto, apenas algumas crianças reconhecem conjuntos com mais elementos. A maioria das crianças já consegue estabelecer relações de mais 1 e menos 1 e algumas conseguem de mais 2 e menos 2. O desenvolvimento do sentido de número pode ser uma realidade no pré-escolar, desde que organizado o ambiente com esse objetivo.



Referências bibliográficas

Castro, J. P., & Rodrigues, M. (2008). *Sentido de número e Organização de dados.* Lisboa: ME: DGIDC

Castro, J., & Rodrigues, M. (2008). O Sentido de Número no Início da Aprendizagem. In J. Brocado, L. Serrazina, & I. Rocha, *O Sentido de Número - Reflexões que entrecruzam teoria e prática* (pp. 117-131). Lisboa: Escolar Editora.

Howden, H. (1989). Teaching Number Sense. *Arithmetic Teacher*, *36*(6), pp. 6-11.

NCTM. (2007). *Príncipios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

CONHECIMENTO DOS ALUNOS SOBRE GEOMETRIA NO INÍCIO DO 3º CICLO: IDENTIFICAÇÃO E DEFINIÇÃO DE TRIÂNGULOS E DE PARALELOGRAMOS

Conceição Tavares
Escola "Ave-Maria", Lisboa/ Escola Superior de Educação de Lisboa
ctavares.am@gmail.com

Cecília Monteiro
Escola Superior de Educação de Lisboa

Resumo

Este poster apresenta alguns dos resultados de um estudo em curso que visa avaliar os conhecimentos dos alunos sobre geometria, no início do 3º ciclo, em particular sobre as noções de ângulo, triângulo e quadrilátero. A investigação segue uma abordagem metodológica mista: qualitativa e quantitativa. A recolha de dados teve por base a aplicação de um questionário a alunos do 7º ano de escolaridade. Este poster, foca, além do objetivo e das respetivas questões orientadoras, resultados da identificação de triângulos e de quadriláteros que sugerem existir mal-entendidos na identificação destes polígonos. É ainda apresentada uma breve análise das respostas dos alunos baseada na literatura.

Palavras-chave: Conhecimento dos alunos, geometria, 2º e 3º ciclos.

Introdução

A importância da geometria e do desenvolvimento do sentido espacial, assente na visualização e na compreensão das relações espaciais, desde os primeiros anos, tem sido reconhecida por diversos autores (Clements e Sarama, 2000; Matos e Serrazina, 1996), assim como pelos documentos orientadores do ensino da Matemática (ME, 2007; NCTM, 2008). Contudo, alguns autores como por exemplo Battista (2007) consideram que, apesar dos esforços para promover uma aprendizagem consistente dos conceitos geométricos, os alunos continuam a revelar mal-entendidos, não dominando noções básicas de geometria à saída do ensino básico comprometendo assim a aprendizagem da geometria no ensino secundário Considera-se pois importante compreender que conhecimentos os alunos possuem quando transitam de ciclo, nomeadamente, quando iniciam o 3º ciclo, e que compreensão dos conceitos geométricos desenvolveram no ciclo anterior.

O estudo

O presente estudo visa avaliar os conhecimentos dos alunos sobre geometria, no início do 3º ciclo, em particular sobre as noções de ângulo, triângulo e quadrilátero. A recolha de dados foi realizada com 25 alunos de uma turma do 7º ano de escolaridade, através da aplicação de um questionário, englobando três tópicos: “triângulos”, “quadriláteros” e “ângulos”. Neste *poster* serão analisadas as respostas correspondentes às questões sobre identificação e definição de triângulos (figuras 1 e 3) e de paralelogramos (figuras 2 e 4).

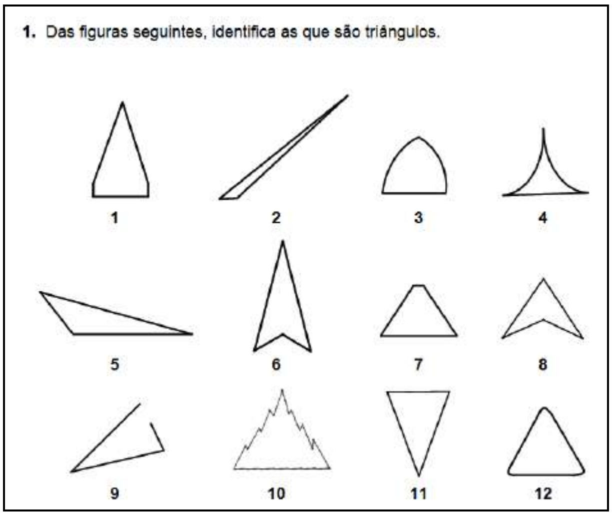


Figura 1 – Questão sobre identificação de triângulos

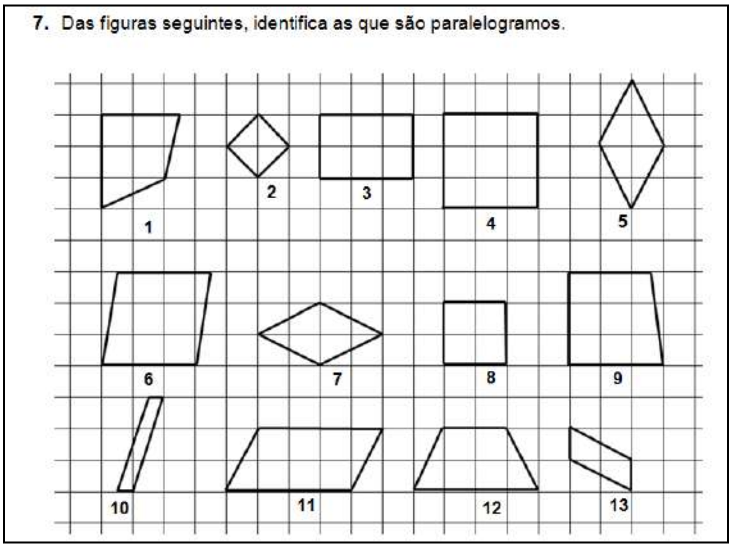


Figura 2 – Questão sobre identificação de paralelogramos

2. Descreve, por palavras, o que é um triângulo.

Resposta: *Um triângulo é*

Figura 3 – Questão sobre definição de triângulo

8. Descreve, por palavras, o que é um paralelogramo.

Resposta: *Um paralelogramo é*

Figura 4 – Questão sobre definição de paralelogramo

Resultados

No que diz respeito à identificação de triângulos e de paralelogramos é possível verificar que uma elevada percentagem de alunos identificam incorretamente estes polígonos. Os alunos admitem como sendo triângulos figuras formadas por uma linha curva fechada (Clements & Sarama, 2000) e figuras compostas por um segmento de reta e duas linhas curvas (Clements, et. al, 1999). Quanto à identificação de paralelogramos, as figuras mais selecionadas foram os paralelogramos obliquângulos. Estes dados sugerem que a noção de paralelogramo destes alunos se centra apenas no paralelogramo obliquângulo e não em todos os quadriláteros com dois pares de lados paralelos. A classificação hierárquica dos quadriláteros apresenta dificuldades como é referido por exemplo por Fujita e Jones (2007).

A análise dos dados mostra que os alunos tiveram um melhor desempenho na definição de triângulo do que na definição de paralelogramo. Verificam-se mal-entendidos relacionados com os lados, ângulos, e com a linguagem. Os alunos descrevem casos particulares destes polígonos como o triângulo isósceles (*"uma figura geométrica com dois lados iguais e um diferente")* e o paralelogramo obliquângulo (*"um género de retângulo mas mais inclinado").*

Dos resultados deste estudo, ressalta a importância de os alunos desde cedo serem confrontados com diferentes polígonos em diversas posições e com vários tamanhos. Recomenda-se ainda que o ensino dos triângulos e quadriláteros não se restrinja à apresentação de casos particulares e incentive classificações a partir das suas propriedades e com recurso à linguagem geométrica.

Referências bibliográficas

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 2, Cap. 19, pp. 843-908). Charlotte, NC: Information Age & National Council of Teachers of Mathematics.

Clements, D., & Sarama, J. (2000). Young children's ideas about geometric shapes. *Teaching Children Mathematics*, 6(8), 482-488.

Clements, et al (1999). Young Children's Concepts of Shape. *Journal for Research in Mathematics Education,* 30(2).

Fujita, T. & Jones, K. (2007). Learners' understanding of the definitions and hierarchical classification of quadrilaterals: towards a theoretical framing. *Research in Mathematics Education,*(Vol. 9, iss.1).

Matos, J. M., & Serrazina, L. (1996). *Didáctica da matemática.* Lisboa: Universidade Aberta

Ministério da Educação (2007). *Programa de matemática do ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação. Direcção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.

National Council of Teachers of Mathematics (2008). *Princípios e normas para a matemática escolar* (2.ª edição) (APM, Trad.). Lisboa: APM (Obra original publicada em 2000).

TAREFAS EM GEOMETRIA – DA SALA DE AULA PARA A FORMAÇÃO DE PROFESSORES.

DESCRIÇÃO DE UM PROJETO

Alexandra Gomes[a], C. Miguel Ribeiro[b], Fernando Martins[c], Hélia Pinto[d], Ana Paula Aires[e], Helena B. Campos[e], Ana Caseiro[f], Cristina Alves[g], Paula Rebelo[h], Helena Gomes[i], Cátia Rodrigues[i] e Ricardo Poças[j]

[a]CIEC/IE – Universidade do Minho; [b]Universidade do Algarve; [c]Instituto de Telecomunicações – ESE de Coimbra; [d]ESECS do Instituto Politécnico de Leiria; [e]CM-UTAD; [f]ESE de Lisboa; [g] Agrupamento de Vila Cova; [h] Agrupamento Abel Varzim; [i]ESE de Viseu; [j]Agrupamento de Escolas Mosteiro e Cávado

magomes@ie.uminho.pt; cmribeiro@ualg.pt; fmlmartins@esec.pt; helia.pinto@ipleiria.pt; aaires@utad.pt; hcampos@utad.pt; anac@eselx.ipl.pt; cristinalves8@gmail.com; paulaaspra@gmail.com; hgomes@esev.ipv.pt; catiasofia@esev.ipv.pt; ricardopocas77@gmail.com

Resumo

Neste poster, apresentamos um projeto que pretende abordar de forma conglomerada conhecimentos, raciocínios, argumentação e representações de alunos e professores dos primeiros anos. Perspetiva-se como uma das formas de contribuir para uma melhoria dos conhecimentos geométricos de alunos e professores bem como para uma possível mudança de foco na prática e na formação geométrica de professores.

Palavras-chave: tarefas matemáticas; geometria; práticas letivas; formação de professores.

A formação matemática dos professores dos Primeiros Anos reveste-se de extrema importância pois estes são responsáveis pelo início formal do percurso matemático dos indivíduos. Deste modo, o conhecimento que detêm, ou assumem deter, influenciará as tarefas que preparam e como as implementam (Charalambous, 2008), potenciando ou limitando as aprendizagens matemáticas dos seus alunos.

O caso da geometria é um dos vários que se poderiam referir. Os resultados do PISA, das provas de aferição e exames nacionais (GAVE, 2010) mostram que este é um campo onde os alunos revelam variadas dificuldades. Por outro lado, alguns estudos (e.g. Gomes e Ralha, 2006; Ribeiro e Gomes, 2010) revelam carências no conhecimento geométrico dos professores – atuais ou futuros, o que se poderá relacionar, também, com as dificuldades evidenciadas pelos alunos, e que urge colmatar. Este conhecimento (do professor) é encarado, aqui, na perspetiva do mathematical knowledge for teaching (MKT) (Ball, Thames & Phelps, 2008).

Embora se reconheça que o estudo da geometria é muito importante por contribuir, entre outros, para o desenvolvimento da capacidade de visualização, da intuição e da resolução de problemas (e.g., Jones, 2002), a investigação focada no ensino e aprendizagem da geometria é ainda escassa, quando comparada com a realizada noutros tópicos (e.g., números). É, assim, essencial uma mais ampla compreensão de como podem os professores ser ajudados/auxiliados a incrementar o seu MKT (particularmente) em aspetos de Geometria.

Com a pretensão de contribuir para uma melhoria das aprendizagens matemáticas/geométricas dos alunos, e de forma conglomerada, do MKT dos professores, elaborámos um projeto de investigação que pretende abordar estas duas dimensões de forma simultânea (na e para a sala de aula e na/para a formação de professores). Recorreremos a uma metodologia mista envolvendo métodos qualitativos e quantitativos, conjugados com um estudo de caso instrumental. Assumindo que o que os alunos aprendem é em grande parte definido pelas tarefas que lhes são dadas (Hiebert & Wearne, 1993), pretendemos concetualizar tarefas para ambos os contextos que sejam matematicamente significativas e permitam desenvolver um conhecimento geométrico amplo e um MKT sustentado.

Este projecto, concentrando-se sobre esses dois contextos, procura dar resposta a várias questões, das quais destacamos:

- Como podemos caracterizar as estratégias (e justificações) dos alunos na (para a) resolução de tarefas geométricas de modo a conceber tarefas para desenvolver o conhecimento matemático (geométrico) dos alunos dos Primeiros Anos?
- Que MKT revelam (futuros) professores dos Primeiros Anos na resolução de tarefas geométricas preparadas para os alunos, quais os aspetos mais críticos de tal conhecimento, que caracterização pode efetuar-se das suas estratégias, justificações e representações na (para a) resolução de tarefas geométricas de modo a conceber tarefas para desenvolver o conhecimento matemático/geométrico dos (futuros) professores dos Primeiros Anos?

Esta abordagem conjunta pretende obter uma noção aprofundada das características (e.g., pontos fortes e fragilidades) do conhecimento geométrico dos (futuros) professores e dos alunos, bem como dos possíveis motivos que as sustentam. Isto permitir-nos-á concetualizar tarefas que permitam colmatar as dificuldades encontradas, desenvolver o conhecimento dos alunos e o MKT dos professores, proporcionando, também aos professores ferramentas que lhes permitam preparar e implementar tarefas matematicamente relevantes.

Referências

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59(5),* 389-407

Charalambous, C. Y. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the unfolding of tasks in mathematics lessons: Integrating two lines of research. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepulveda (Eds.), *Proc. 32rd Conf. Int. Group for the PME* (Vol. 2, pp. 281-288). Morelia, México: PME.

GAVE (2010). Relatórios nacionais. Ministério da Educação e Ciência. Consultado em 02 de junho de 2012 em: http://www.gave.min-edu.pt/np3/24.html

Gomes, A. & Ralha, E. (2006). O conceito de ângulo: experiências e reflexões sobre o conhecimento matemático de (futuros) professores do 1.º ciclo. *Quadrante*, vol. XIV, 1, 109-131.

Hiebert, J. & Wearne, D. (1993). Instructional task, Classroom discourse and Students' learning in second grade. *American Educational Research Journal, 30*, 393-425.

Jones, K. (2002). Issues in the teaching and learning of geometry. In L. Haggarty (Ed.), *Aspects of Teaching Secondary Mathematics* (pp. 121-139). London: Routledge Falmer.

Ribeiro, C. M., & Gomes, H. (2010). O que necessitamos saber para “ensinar” geometria? O caso dos rectângulos. In atas ProfMat 2010, Aveiro: APM.

CONSTRUÇÃO DAS SECÇÕES PLANAS DE UM CUBO E SUA REPRESENTAÇÃO EM AMBIENTE 2D DO GEOGEBRA

Ilda Reis

ESTIG – Instituto Politécnico de Bragança

ildareis@ipb.pt

Edite Cordeiro

ESTIG – Instituto Politécnico de Bragança

emc@ipb.pt

Resumo

A dimensão gráfica constitui uma componente fundamental do estudo da geometria, pelo que o recurso a tecnologias com características pedagógicas adequadas seja importante. O GeoGebra 4.0 por ser um software educacional livre que agrega simultaneamente um sistema de álgebra computacional, um sistema geométrico interativo e um sistema de cálculo é o exemplo de uma ferramenta facilitadora do processo ensino-aprendizagem dos conteúdos desta área.

Neste trabalho simulamos um sistema de coordenadas tridimensional representado em ambiente bidimensional a fim de visualizar e manipular objetos geométricos 3D. Utilizando este sistema de coordenadas representamos um cubo e descrevemos um procedimento para a construção da secção determinada por um plano definido por três pontos móveis, não colineares, sobre as suas arestas. A visualização e manipulação de tal construção permitem observar, conjeturar e demonstrar relações entre a geometria de uma secção e a posição do plano de corte. A compreensão e a capacidade de representação de um tal procedimento por parte dos alunos respondem positivamente às indicações metodológicas dos programas do Ensino Secundário. Com efeito, em (DES, 2001, p.25) pode ler-se

> "É conveniente que o estudante fique a saber desenhar representações planas dos sólidos com que trabalha, a descrever a intersecção do cubo com um plano dado, a saber construir e a desenhar uma representação da intersecção obtida".

Palavras-chave: GeoGebra, geometria, cubo, secções planas, ambiente dinâmico.

Representação de um cubo em GeoGebra

A utilização de conceitos de Álgebra Linear permite acrescentar funcionalidades ao software GeoGebra 4.0 para visualizar e manipular objetos tridimensionais em ambiente bidimensional. A projeção de um objeto tridimensional sujeito a rotações específicas (definidas por coeficientes angulares α, β e γ) em torno de cada um dos eixos coordenados tridimensionais, num plano, determina uma perspetiva do mesmo. Assim, um ponto $(x, y, z) \in IR^3$ é representado no plano pela combinação linear $xu_1 + yu_2 +$

zu_3, onde $\{u_1, u_2, u_3\}$ é a imagem da base canónica de IR^3 pela transformação anteriormente descrita.

Seja um cubo de aresta l, posicionado no primeiro octante com o primeiro vértice coincidente com a origem do sistema de eixos, que denotamos por V_1. Então os restantes vértices da base são os pontos definidos por $V_2 = V_1 + lu_1$, $V_3 = V_2 + lu_2$, $V_4 = V_1 + lu_2$ e os vértices do topo são definidos por $V_{i+4} = V_i + lu_3$, para $1 \leq i \leq 4$.

Denotamos o conjunto de arestas do cubo por $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{12}\}$, de acordo com a figura 1.

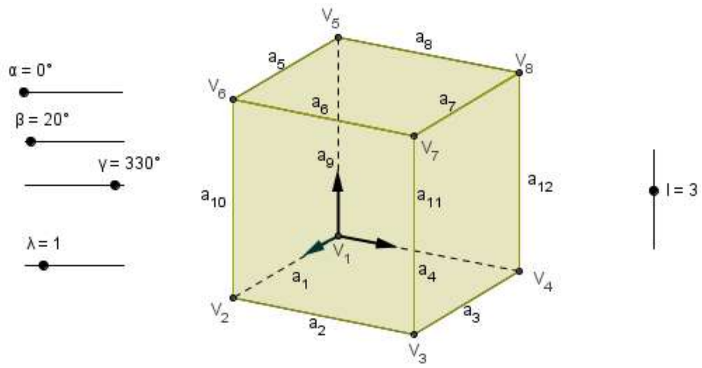


Figura 1: Representação de um cubo em ambiente 2D

Secções planas de um cubo

A construção de secções planas de um cubo assenta na axiomática de Euclides e usa recorrentemente o princípio de que um plano secante a dois planos paralelos entre si, interseta-os segundo retas paralelas.

Consideremos, por exemplo, a secção determinada para o caso particular em que os pontos $A \in a_1$ e $B \in a_2$ estão sobre arestas adjacentes do cubo e o ponto $C \in a_{11}$.

Se as retas AB e V_3V_4 forem paralelas então a secção determinada é uma das seguintes representadas na figura 2:

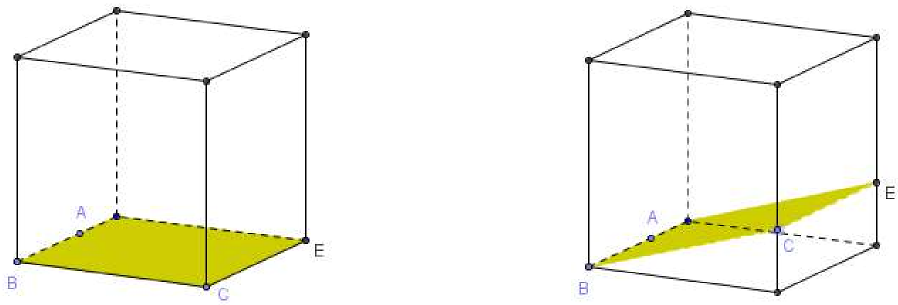


Figura 2: Secções definidas quando as retas AB e V_3V_4 são paralelas

No caso em que o ponto $D = AB \cap V_3V_4$ está definido, a reta CD interseta uma das arestas a_7 ou a_{12}. Seja E o ponto de interseção resultante (ver figura 3).

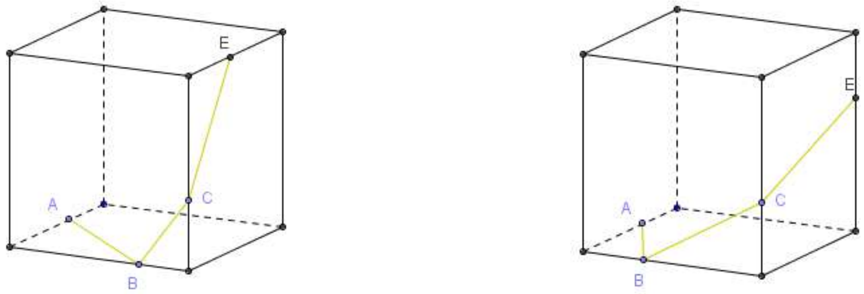


Figura 3: Arestas de suporte do ponto E caso o ponto D esteja definido

A secção obtida no caso em que o ponto $E \in a_7$ é uma das representadas na figura 4:

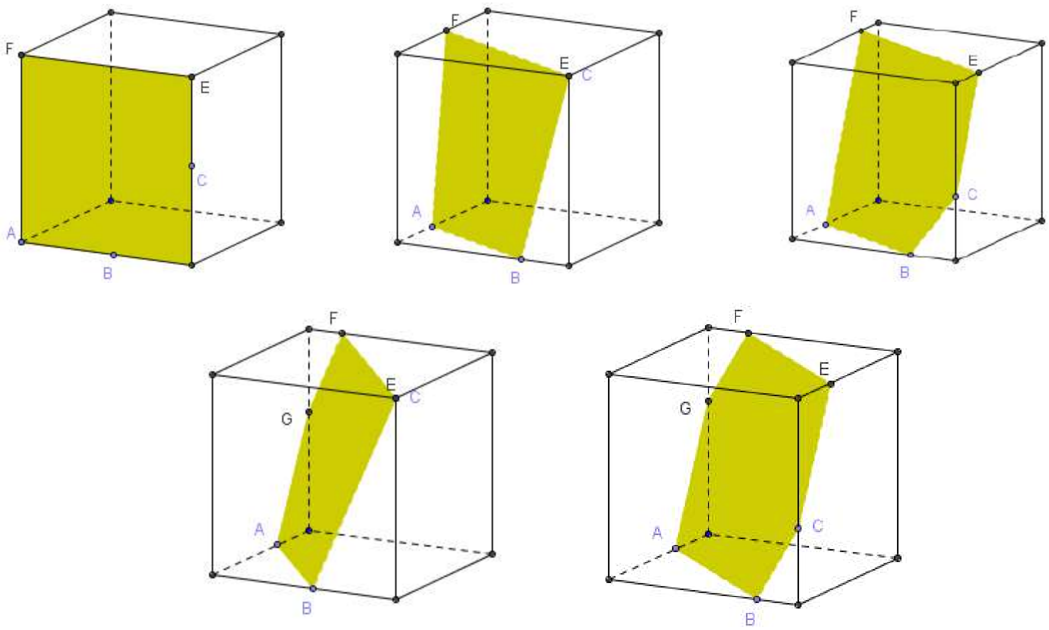


Figura 4: Secções determinadas quando D está definido e $E \in a_7$

No outro caso obtemos uma das secções constantes na figura 5:

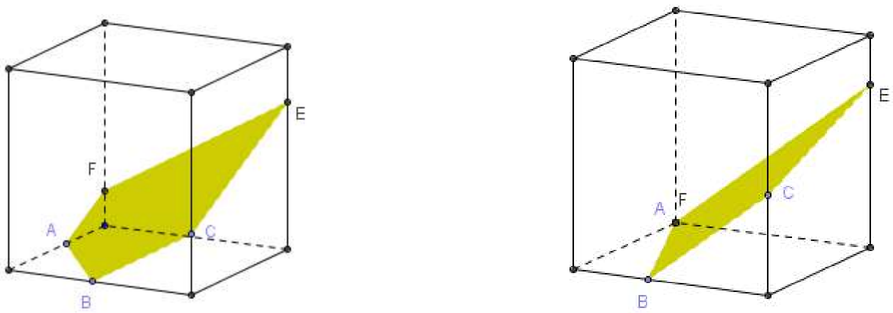


Figura 5: Secções determinadas quando D está definido e $E \in a_{12}$

Conclusões

A utilização deste tipo de construções em ambiente de sala de aula permite uma abordagem experimental que pensamos ser mais motivadora e mais centrada no aluno. As várias representações das construções apresentadas permitem a pesquisa de conexões entre objetos matemáticos e facilitam o processo posterior de validação.

Por outro lado a construção destes materiais por parte dos alunos efetiva a compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos e garante a distinção entre as propriedades do desenho e as propriedades do objeto em estudo.

Referências bibliográficas

Silva, J. C., Fonseca, M. G., Martins, A. A., Fonseca C. M. C., Lopes, I. M. C. (2001). *Matemática A – Programa do 10º ano.* Lisboa: Departamento do Ensino Secundário. Ministério da Educação.

Jeong-Eun Park, Young-Hyun Son, O-Won Kwon, Hee-Chan Yang & Kyeong-Sik Choi (2010). Constructing 3D graph of function with GeoGebra(2D), *Proc. of First Eurasia Meeting of GeoGebra* (pp. 46-55). Ankara, Turquia.

Lang, S., (2008). *Intruduction to Linear Algebra*, Springer, 2ª Edição.

Hohenwarter, Markus. GeoGebra. Disponível em: http://www.geogebra.org.

A ABORDAGEM LESSON STUDY NO ENSINO DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU: UM CASO DE DESENVOLVIMENTO PROFISSIONAL[44]

Cláudia Nunes
Escola Básica Fernando Pessoa & Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
cjohnent@gmail.com

Ana Isabel Silvestre
Escola Básica Gaspar Correia & Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
anaisabelsilvestre@gmail.com

Hélia Jacinto
Escola Básica José Saramago & Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
helia_jacinto@hotmail.com

Resumo

Este estudo centra-se numa experiência de trabalho colaborativo – lesson study – *desenvolvida por um grupo de professoras que pretendem melhorar a aprendizagem dos seus alunos no tópico Equações do 1.º grau. Este poster reporta parte desse estudo e visa dar a conhecer as perspetivas de uma professora sobre as potencialidades da* lesson study. *A investigação seguiu uma metodologia qualitativa e a recolha de dados incluiu gravações vídeo e recolha documental. A análise foi conduzida por uma perspetiva interpretativa, com o intuito de elaborar um estudo de caso. Neste poster documenta-se o ciclo de uma* lesson study, *conjugando reflexões pessoais da professora com imagens de sala de aula e excertos de planificações. Os resultados preliminares indicam que há vantagens no tipo de trabalho adotado, quer ao nível das aprendizagens dos alunos, quer em relação ao desenvolvimento profissional da docente.*

Palavras-chave: desenvolvimento profissional do professor, lesson study*, equações do 1.º grau.*

A abordagem *lesson study*

O atual Programa de Matemática do Ensino Básico tem vindo a revelar-se um desafio para os professores pois incentiva à inovação e ao aperfeiçoar das suas práticas. O trabalho colaborativo entre professores surge como indicado para lidar com problemas

[44] Este trabalho foi parcialmente apoiado pelo Centro de Formação de Loures Oriental, Lisboa.

complexos e exigentes, com os quais seria difícil lidar de forma isolada, e reduz o receio de experimentar algo novo (Nunes & Ponte, 2011; Ponte, 2008).

Enquanto abordagem específica de trabalho colaborativo entre professores, a *lesson study* é uma prática poderosa para apoiar o desenvolvimento profissional, visando melhorar o ensino e a aprendizagem (Burghes & Robinson, 2009). As suas potencialidades residem na colaboração entre os professores e no ciclo de trabalho que são chamados a desenvolver: (i) planificação; (ii) lecionação e observação; (iii) análise e reflexão; e (iv) revisão da planificação.

Foi este tipo de trabalho colaborativo que um grupo de professoras implementou a fim de melhorar a sua prática na lecionação. Selecionaram o tema Equações do 1º grau considerando as dificuldades que os seus alunos habitualmente revelam e que coincidem com as referidas na literatura (Chazan & Yerushalmy, 2003; Knuth, Stephens, McNeil & Alibali, 2006). Reconhecendo vantagens na utilização de materiais manipuláveis, o grupo optou ainda por incluir o recurso às balanças estáticas *Hands-on Equations*® no trabalho planificado.

A metodologia de investigação

O estudo desenvolvido seguiu uma abordagem qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994). Os participantes, duas professoras com profissionalização e duas alunas da formação inicial de professores, encontravam-se a lecionar numa escola básica de Lisboa. Os dados recolhidos incluíram gravação vídeo das sessões de trabalho colaborativo das professoras bem como das aulas lecionadas. Foram também recolhidos diversos documentos de trabalho, como planificações, tarefas, produções dos alunos, reflexões e notas pessoais das docentes. Os dados aqui apresentados, referentes a uma aula e a uma professora, foram analisados de uma perspetiva interpretativa com o intuito de elaborar um estudo de caso.

Resultados preliminares

Os resultados preliminares do estudo apontam que a professora encontra vantagens na metodologia de trabalho adotada ao nível: (i) das aprendizagens dos alunos – o material auxiliou na exploração intuitiva da noção de equação e o seu uso permitiu aos alunos a resolução de equações de 1.º grau na primeira aula; e (ii) do seu desenvolvimento profissional – explorou os materiais e planificou com as restantes colegas, lecionou e observou as aulas das colegas, refletiu com o grupo sobre a implementação das tarefas e interveio na reformulação das aulas seguintes. Da análise feita até ao momento, é possível afirmar que a professora considerou que o trabalho colaborativo permitiu que o grupo de professoras se focasse na forma como planificam, como interagem com os alunos e como a reflexão pode aprofundar o seu conhecimento matemático e didático.

O poster apresentará com maior detalhe o estudo conduzido, apresentando as várias fases da *lesson study* em questão, contendo imagens das sessões de trabalho colaborativo e da aula, combinados com excertos da reflexão pessoal da professora e dos documentos de trabalho.

Referências:

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação. Uma Introdução à Teoria e aos Métodos*. Porto: Porto Editora.

Burghes, D., & Robinson, D. (2009). *Lesson Study: Enhancing Mathematics Teaching and Learning.* Berkshire: CfBT Education Trust.

Chazan, D., & Yerushalmy, M. (2003). On appreciating the cognitive complexity of school algebra: Research on algebra learning and directions of curricular change. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Shifter (Eds.), *A research companion to Principles and standards for school mathematics* (pp. 123-135). Reston: NCTM.

Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37(4), 297-312.

Nunes, C., & Ponte, J. (2011). Práticas de gestão curricular de um grupo de Matemática. Em A. Henriques, C. Nunes, A. Silvestre, H. Jacinto, H. Pinto, A. Caseiro & J. P. Ponte (Orgs.), *Atas do XXII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 671-682). Lisboa: APM.

Ponte, J. (2008). Investigar a nossa própria prática: Uma estratégia de formação e de construção do conhecimento profissional. *PNA - Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 2(4), 153-180.

CONHECIMENTO E PRÁTICAS EM EDUCAÇÃO ESTATÍSTICA DE PROFESSORES DO 1.º CICLO NUM CONTEXTO DE TRABALHO COLABORATIVO[45]

Ana Caseiro

Escola Superior de Educação de Lisboa

anac@eselx.ipl.pt

Resumo

A Estatística tem vindo a ganhar uma ênfase crescente nas orientações curriculares. Nos últimos anos tem sido dedicada especial atenção ao conhecimento e práticas dos professores e ao modo como influenciam a qualidade do processo de ensino-aprendizagem. O presente estudo visa compreender o desenvolvimento do conhecimento especializado para o ensino e das práticas letivas de professores do 1.º ciclo no âmbito da Educação Estatística, na sua mútua relação, num contexto de trabalho colaborativo. O estudo segue uma abordagem qualitativa e interpretativa onde vão ser objeto de análise três professores do 1.º ciclo, tendo por base um grupo de trabalho colaborativo. A recolha de dados será realizada através das sessões do grupo de trabalho colaborativo, de entrevistas aos professores, das aulas observadas e de recolha documental. A análise dos dados apoiar-se-á na revisão da literatura elaborada, sendo inicialmente realizada através de categorias previamente estabelecidas.

Palavras-chave: conhecimento e práticas de professores; trabalho colaborativo; educação estatística

Texto

A Estatística é um tema importante na sociedade atual na medida em que constantemente contactamos com dados estatísticos apresentados de diferentes formas, o que requer a capacidade de os analisar e interpretar. Além disso, é inquestionável a sua relevância no desenvolvimento do sentido crítico dos alunos (Batanero, Godino & Roa, 2004). Assim, a Estatística tem vindo a ganhar maior ênfase nos currículos de Matemática, tendo em vista começar a desenvolver a literacia estatística desde cedo nos alunos (Ponte & Sousa, 2010).

Tal como defendem Ball, Hill e Bass (2005), as questões relativas ao conhecimento matemático utilizado no ensino e como ele é utilizado devem ser foco de pesquisa. Segundo Groth (2007), é necessário investigar o conhecimento necessário no ensino da Estatística, dado que o conhecimento dos professores é um dos aspetos mais influentes

[45] Este trabalho insere-se no projeto de Doutoramento realizado no presente ano letivo.

de um ensino eficaz. O estudo das práticas letivas do professor também é fundamental na medida em que a aprendizagem dos alunos deriva da forma como este planifica e conduz as aulas e reflete sobre todo o processo de ensino-aprendizagem. Por outro lado, as práticas e o conhecimento dos professores influenciam-se mutuamente e, por isso, devem ser analisados em simultâneo.

Este estudo seguirá uma metodologia de natureza interpretativa do tipo qualitativo, estando prevista a realização de três estudos de caso no ano letivo 2012/13. A escolha de um contexto de trabalho colaborativo é importante porque, como referem Ponte e Serrazina (2004), a colaboração é essencial para solucionar problemas da vida profissional. Num ambiente colaborativo, o processo de reflexão conjunta pode vir a assumir um papel importante no desenvolvimento profissional.

O trabalho do grupo colaborativo terá início com a discussão de textos sobre educação estatística, sendo que, de seguida, serão planificadas aulas cujo principal objetivo seja o de trabalhar conteúdos estatísticos. Posteriormente, será realizada uma reflexão sobre essas aulas lecionadas pelos professores do grupo desde o encontro anterior, sendo que serão visionados excertos das aulas de forma a ser possível aprofundar alguns aspetos e a possibilitar que esses sejam refletidos quer pelo professor que esteve na aula quer pelos restantes elementos do grupo. O meu papel neste grupo será o de participante, sendo que inicialmente terei um papel mais ativo que, espero, se vá diluindo ao longo do tempo de trabalho do grupo.

O estudo é orientado pelas seguintes questões de investigação:

1. Que planos de ação para abordar conteúdos de Estatística são definidos, quais são realizados e como são refletidos?
2. Que influência tem o grupo de trabalho colaborativo no desenvolvimento do conhecimento especializado para o ensino e nas práticas letivas em Estatística?

A recolha de dados será realizada através de entrevistas semi-estruturadas, de observação participante das sessões do grupo de trabalho colaborativo e das aulas de Estatística lecionadas e através de documentos produzidos. A análise dos dados terá como base a revisão da literatura, sendo que novas categorias podem surgir aquando da análise.

Deste modo, é minha intenção contribuir para o desenvolvimento do conhecimento especializado para o ensino e das práticas letivas de professores do 1.º ciclo em

Educação Estatística quando estes se encontram inseridos num contexto de trabalho colaborativo e contribuir para o meu próprio desenvolvimento profissional enquanto professora e formadora de professores.

No poster a que o presente texto diz respeito é meu intuito dar a conhecer o trabalho do meu projeto de doutoramento e o trabalho que será realizado para a sua concretização.

Referências

Ball, D. L. Hill, H. C., & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide?. *American Educator, 29*(3), 14-46.

Batanero, C., Godino, J. D., & Roa, R. (2004). Training teachers to teach probability. *Journal of Statistics Education, 12*(1).

Groth, R. E. (2007). Toward a conceptualization of statistical knowledge for teaching. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(5), 427-437.

Ponte, J. P., & Sousa, H. (2010). Uma oportunidade de mudança na Matemática do ensino básico. In GTI (Org.), *O professor e o programa de Matemática do ensino básico* (pp. 11-41). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2004). Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Quadrante, 13*(2), 51-74.

DESENVOLVER A LITERACIA ESTATÍSTICA (DSL): APRENDIZAGEM DO ALUNO E FORMAÇÃO DO PROFESSOR[46]

Hélia Oliveira
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
hmoliveira@ie.ul.pt

Ana Henriques
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
achenriques@ie.ul.pt

Ana Paula Canavarro
Departamento de Pedagogia e Educação, Universidade de Évora
apc@uevora.pt

Carolina Carvalho
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
cfcarvalho@ie.ul.pt

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ul.pt

Rosa Ferreira
Faculdade de Ciências, Universidade do Porto e CMUP
rferreir@fc.up.pt

Susana Colaço
Escola Superior Educação, Instituto Politécnico de Santarém e CIO
susanacolaco@gmail.com

e ainda:

Ana Quintelas, Ana Caseiro, Cátia Freitas, Cristina Roque, Isabel Velez, Mónica Patrício, Nélida Filipe, Nuno Raínho, Raquel Santos, Sandra Quintas

[46] Estudo realizado no âmbito do Projecto DSL – *Developing statistical literacy: Student learning and teacher education*, apoiado pela FCT-Fundação para a Ciência e a Tecnologia (contrato PTDC/CPE-CED/117933/2010), coordenado pela Professora Doutora Hélia Oliveira.

Resumo

O projeto DSL pretende estudar o desenvolvimento da literacia estatística dos alunos, desde os níveis mais elementares até ao ensino secundário e compreender o desenvolvimento do conhecimento didático e estatístico do professor, para ensinar este tema, em contextos de formação inicial e contínua. Nesta comunicação apresentamos o projeto, num formato gráfico, incluindo os objetivos, contexto, metodologia e diagramas para sumarizar e documentar as várias tarefas do projeto e o modo como se relacionam.

Palavras-chave: Literacia estatística, Aprendizagem da Estatística, Ensino da Estatística, Formação de professores.

Introdução

As recentes orientações curriculares nacionais e internacionais têm salientado a importância de desenvolver a literacia estatística dos alunos em diferentes níveis de escolaridade (ME, 2007; NCTM, 2007). Muitos alunos são capazes de ler tabelas e gráficos e de realizar procedimentos para calcular medidas estatísticas mas revelam muitas dificuldades conceptuais e na interpretação e obtenção de conclusões a partir de gráficos como base para a tomada de decisões (Shaughnessy, 2007). Embora o desempenho dos alunos na Estatística tenha vindo a melhorar, um grande esforço é ainda necessário para desenvolver a sua literacia estatística.

No panorama nacional, o atual programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) atribui um maior destaque à Estatística e apresenta objetivos de aprendizagem mais exigentes, desde os níveis mais elementares. Esta situação torna-se desafiadora para a prática do professor, exigindo-lhe o desenvolvimento de novas perspetivas e conhecimentos. Muitos professores não tiveram, na sua formação inicial, uma preparação adequada em Estatística. Assim, a formação de professores enfrenta o desafio de desenvolver contextos que contribuam para melhorar o conhecimento didático e estatístico dos professores permitindo-lhes promover nos alunos a literacia estatística.

Neste contexto, torna-se pertinente desenvolver um projeto com o objetivo de estudar o desenvolvimento da literacia estatística, em duas vertentes: i) na caracterização de aspetos essenciais da literacia estatística de alunos, nomeadamente no que diz respeito à capacidade de formular questões e recolher dados e representá-los para responder a essa questões, desde os níveis mais elementares até ao ensino secundário, e ii) na compreensão do desenvolvimento do conhecimento didático e estatístico do professor, para ensinar este tema, em contextos de formação inicial e contínua. Além disso, o projeto pretende compreender como é que as novas orientações curriculares para o ensino básico, relativamente ao ensino da Estatística, estão a ser implementados em Portugal.

Investigando duas vertentes

O projeto assenta no aprofundamento de ideias fundamentais sobre as orientações curriculares relativas ao ensino da estatística, processos de mudança curricular, processos de aprendizagem relativos ao tema em estudo e a identificação de recursos significativos para a aprendizagem. Este conhecimento irá suportar o planeamento e desenvolvimento de experiências de ensino, nas salas de aula de diferentes níveis de escolaridade, que se baseiam em sequências de tarefas e na utilização de recursos tecnológicos específicos. Nestas experiências de ensino adota-se uma metodologia de trabalho colaborativa, com equipas constituídas por professores investigadores no terreno e investigadores académicos que partilham conhecimentos complementares sobre os fenómenos em estudo. O projeto apoia-se também na revisão de estudos sobre a formação de professores, em particular, sobre o domínio do conhecimento estatístico e didático do professor e o seu desenvolvimento, em contextos de formação inicial ou contínua. Este conhecimento irá servir de suporte ao planeamento de cursos na formação inicial de educadores e professores dos níveis elementares e na formação contínua, assim como na criação de contextos de formação colaborativa, em estreita articulação com a prática profissional.

Aspetos metodológicos

É utilizado o *design research* nas experiências de ensino e de formação, seguindo uma abordagem metodológica mista. A recolha de dados é feita através de uma variedade de métodos, incluindo a entrevista, observações, registos dos alunos, testes e questionários. A análise de dados inclui abordagens qualitativas assim como técnicas de estatística descritiva e inferencial.

Referências bibliográficas

Shaughnessy, J. M. (2007). Research on statistics learning and reasoning. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 957-1009). Greenwich, CT: Information Age Publishing and NCTM.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME-DGIDC.

NCTM (2007). Princípios e Normas para a matemática escolar. Lisboa: APM e IIE.

A APRENDIZAGEM DE CONCEITOS MATEMÁTICOS EM CURSOS DE ENGENHARIA

Manuela Alves[1], Cristina S. Rodrigues[1], Ana Maria A.C[1]. Rocha; Clara Coutinho[2]

[1]Centro Algoritmi, Escola de Engenharia, Universidade do Minho

[2]Instituto de Educação, Universidade do Minho

manuealves@gmail.com, crodrigues@dps.uminho.pt, arocha@dps.uminho.pt; ccoutinho@ie.uminho.pt

A Matemática é essencial para a formação de todos os futuros engenheiros, seja qual for o seu campo de estudo e trabalho. Apesar disso, os estudantes de engenharia tendem a revelar dificuldades nas unidades curriculares com base na matemática. Os fatores que influenciam a aprendizagem da matemática têm sido objeto de estudo para vários investigadores em todo o mundo. Neste artigo apresentam-se os principais resultados de um focus group conduzido na Universidade do Minho, sobre as atitudes dos estudantes de engenharia para com a aprendizagem de conceitos matemáticos.

Palavras-chave: aprendizagem matemática, estudantes de engenharia, focus group

Motivação

O desempenho dos estudantes é uma preocupação para todos os educadores e é um objeto de estudo que se destaca em muitos trabalhos acadêmicos.

A engenharia desempenha um papel importante no mundo moderno, uma vez que está ligada a diversas áreas importantes da vida quotidiana: construção civil, computadores, tecnologia, energia, dispositivos eletrónicos e em todos os processos de fabricação. Muitos aspetos da atividade de engenharia compreendem a formulação de problemas e a escolha de métodos adequados para resolvê-los. Deste modo, os cursos de engenharia exigem o conhecimento de conceitos matemáticos.

Os estudos ao nível da aprendizagem da matemática indiciam que a mesma pode ser condicionada por vários fatores. Nos fatores explicativos demográficos, destaca-se o género e nos fatores psicográficos a personalidade do estudante, os aspetos sociocognitivos, a motivação, e a ansiedade em relação à matemática (ver por exemplo Homayouni, 2011; Walter e Hart, 2009; Suthar et al, 2010; Bakar et al, 2010; Muir, 2009; Kargar et al, 2010; Meelissen e Luyten, 2008).

Objetivos

O focus group aqui apresentado tem como objetivo conhecer as opiniões e perspetivas de alunos de engenharia sobre a aprendizagem de conceitos matemáticos, e sobre a Matemática em geral.

Metodologia: *focus group*

A ferramenta

O focus group é uma técnica de pesquisa qualitativa, através da qual se procura obter uma série de perspetivas acerca de uma mesma temática. O tamanho do grupo é uma questão essencial para o sucesso do focus group. Na definição do tamanho do grupo devemos ter em conta que ele tem que ser pequeno o suficiente para que todos tenham a oportunidade de partilhar as suas opiniões, e grande o bastante para fornecer uma diversidade de opiniões. Assim, é recomendável que os grupos tenham entre seis a dez pessoas. A escolha dos participantes no estudo também deve ser cuidada e feita de acordo com o propósito da pesquisa. O nível de envolvimento do moderador depende dos objetivos da pesquisa. Se a pesquisa for exploratória, e se pretende fazer uma análise de conteúdo, então o moderador deve ter um papel de pouca intervenção, fazendo apenas a discussão do grupo progredir. Caso se pretenda fazer comparações de opiniões de vários grupos, e a agenda a cumprir é extensa, então o moderador já deve ter um papel mais ativo e de maior envolvimento. (Oliveira e Freitas, 1998; Greenbaum, 1998).

Implementação

Os participantes no focus group aqui apresentado, são alunos do 3º,4º e 5º anos do curso de Mestrado Integrado em Engenharia e Gestão Industrial (MIEGI). Num total de dez alunos, cinco do género masculino e cinco do género feminino, com idades compreendidas entre os 21 e 24 anos.

Uma vez que se trata de um estudo exploratório, com análise de conteúdo, o moderador, tem um papel menos interventivo, orientando apenas a discussão dos alunos com um conjunto de questões pré-definidas, frases ou imagens.

O focus group, com a duração de 30 minutos, foi elaborado em três fases: 1) discussão orientada segundo um guião de questões pré-definidas, 2) citação de frases seguida de discussão e 3) projeção de imagens aberta a comentários. No presente trabalho apenas nos debruçaremos sobre a primeira fase, i.e., a discussão orientada.

Análise dos resultados

A Matemática é considerada pelos estudantes intervenientes no focus group como sendo uma disciplina essencial na escolha do curso de engenharia, apresentando-se como bons alunos no secundário. Ao nível do ensino superior, reconhecem que o método de estudo diverge em relação ao género do aluno e admitem ter dificuldades na compreensão dos conceitos matemáticos nas aulas teóricas pela falta de contextualização prática.

É reconhecida a importância do professor como um fator que interfere na aprendizagem dos conceitos matemáticos e dos pais, e da sociedade em geral, como um elemento que pode interferir nos resultados de matemática, pela descupabilização dos maus resultados.

Em balanço às aulas, os estudantes expressam o desejo das unidades curriculares com base Matemática abordarem conceitos com mais aplicabilidade na sua futura prática profissional. As aulas teóricas, nos seus moldes expositivos, requerem um maior cuidado ao nível da motivação e percepção da sua importância.

Dada a especificidade do curso de Engenharia e Gestão Industrial, com uma forte componente de gestão, é de todo o interesse reproduzir o focus group e alargar a investigação a cursos de engenharia com maior grau de tecnicidade e maior exigência ao nível da aplicação de conceitos matemáticos.

Referências bibliográficas

Bakar, K.A., Tarmazia, R.A., Mahyuddina, R., Eliasa, H., Luana, W.L., & Ayub, A.F.M. (2010). Relationships between university students' achievement motivation, attitude and academic performance in Malaysia. *Procedia - Social and Behavioral Sciences,* 2(2), 4906-4910.

Greenbaum, T. L. (1998). *The handbook for focus group research.* 2ª edição. Thousand Oaks: Sage.

Homayouni, A. (2011). Personality Traits And Emotional Intelligence As Predictors Of Learning English And Math. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 30, 839-843.

Kargar, M. Tarmizi, & R.A. Bayat, S. (2010). Relationship between Mathematical Thinking, Mathematics Anxiety and Mathematics Attitudes among University Students. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 8, 537-542.

Meelissen, M., & Luyten, H. (2008). The Dutch gender gap in mathematics: Small for achievement, substantial for beliefs and attitudes. *Studies in Educational Evaluation*, 34(2), 82-93.

Muir, T. (2009). Numeracy at Home: Involving Parents in Mathematics Education. *Primary Mathematics.*

Oliveira, M., & Freitas, H. M.R. (1998). Focus group – pesquisa qualitativa: resgatando a teoria instrumentalizando o seu planejamento. *Revista de Administração*, 33(3), 83-91

Suthar, V. Tarmizi, R. A. Midi, C. & Adam, M. B. (2010) Students' Beliefs on Mathematics and Achievement of University Students: Logistics Regression Analysis. *Procedia - Social and Behavioral Sciences,* 8, 525-531.

COMPREENDER PROBLEMAS DE PROCESSO: UM CONTRIBUTO PARA A EDUCAÇÃO PRÉ-ESCOLAR

Cláudia Soares
Escola Superior de Educação do IP de Viana do Castelo
soares.claudia10@gmail.com

Lina Fonseca
Escola Superior de Educação do IP de Viana do Castelo
linafonseca@ese.ipvc.pt

Resumo

A resolução de problemas é central no trabalho de matemática desde o jardim-de-infância (A ME, 1997). O modo como as crianças compreendem os problemas e os exploram foram aspetos estudados. De acordo com a natureza do problema optou-se pela realização de um estudo de natureza qualitativa, que assumiu a forma de estudo de caso.

Os participantes constituíram um grupo com dez crianças. Na recolha de dados foram utilizadas tarefas de resolução de problemas de processo, entrevistas, gravações áudio-vídeo, documentos e notas de campo.

Verificou-se que as crianças estavam motivadas para a resolução de problemas de processo, compreendiam os problemas recorrendo às imagens disponibilizadas e utilizaram estratégias diferentes na resolução. No entanto, algumas das dificuldades manifestadas emergiram da falta de compreensão do enunciado, apresentado oralmente.

Palavras-chave: Educação Pré-Escolar, Resolução de problemas, Compreensão de textos.

Introdução

Alunos do 1º ano de escolaridade têm dificuldade na compreensão de problemas, mesmo após várias leituras. Esta dificuldade poderia ser minorada no nível anterior: a educação pré-escolar. Pude investigar o modo como crianças desta faixa etária resolvem problemas, com foco, no modo como os compreendem e como os exploram para os resolver. Com o objetivo de refletir sobre este problema foi desenvolvido um estudo, tendo por base as questões: (1) Como é que as crianças compreendem o problema? (2) Que dificuldades é que emergem dessa compreensão? (3) Que estratégias usam para resolver os problemas?

Resolução de problemas. Compreensão de textos

A resolução de problemas deve ser parte integrante de toda a aprendizagem matemática e não deve ser apresentada isoladamente, mas como um contexto no qual se desenvolve o ensino. O Programa de Matemática para o Ensino Básico (ME, 2007) contemplou, a par do desenvolvimento dos temas matemáticos, o desenvolvimento de capacidades transversais, entre elas a resolução de problemas. Os problemas de processo resolvem-se com recurso a estratégias de resolução de problemas e não têm de estar relacionados com conteúdos (Vale & Pimentel, 2004). Ao aprender a resolver problemas os alunos irão adquirir modos de pensar, hábito*s* de persistência, curiosidade e confiança perante situações desconhecidas, que lhes serão úteis fora da aula de matemática. Segundo Silva (2003), os processos de leitura e escrita estão interligados com a compreensão e comunicação de uma mensagem. O facto de efetuar predições sobre o texto, sumariar, organizar ideias ou caracterizar personagens é um indicador de compreensão. A compreensão de textos é um dos pontos-chave para a resolução de problemas. Compreender é identificar algo, guardar o significado e ser capaz de o relacionar com outros factos. Para Sequeira, referida em Magalhães (2006), a compreensão constrói-se no espírito e tem de arrumar-se na memória de forma acessível para consulta rápida.

Metodologia

Realizou-se um estudo de caso. Participaram 10 crianças com 5 anos de idade e a seleção teve em conta a assiduidade e a facilidade em comunicar. Os dados foram recolhidos através de tarefas, observações, notas de campo, entrevistas, gravações, documentos. As tarefas assumiram um papel fundamental e decorreram numa só fase com a duração de dois meses. Foram implementadas num dia e no dia seguinte conduziram-se entrevistas individuais com todas as crianças do estudo.

Conclusões

As crianças compreenderam melhor os problemas com o auxílio das imagens pois conseguiram fixar as condições. Quando compreenderam o enunciado de cada tarefa foram capazes de, tal como defende Sequeira em Magalhães (2006), descrever com facilidade os aspetos mais importantes que guardaram na memória de forma acessível. Além disso, com e sem a visualização de imagens, mostraram-se capazes de organizar ideias e caracterizar personagens o que segundo Silva (2003) é um indicador de compreensão. Neste sentido, a compreensão do problema, sustentado por imagens adequadas, influenciou positivamente a resolução, revelando-se uma estratégia a seguir. Em duas das tarefas as dificuldades emergiram na fase de compreensão do problema e em algumas situações na fase do fazer e executar um plano. Estas dificuldades podem ter surgido de diversos fatores: a falta de atenção, o desconhecimento de algumas palavras utilizadas e a quantidade de dados/condições do problema. As estratégias de resolução usadas foram tentativa e erro, simulação, reconhecimento de um padrão, representação e lista organizada.

Referências bibliográficas

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

Magalhães, M.L. (2006). A Aprendizagem da leitura. Em F. Azevedo, (coord.), *Língua Materna e Literatura Infantil*. Lisboa: Lidel, pp. 73-92.

Silva, A. C. (2003). *Até à descoberta do princípio alfabético*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Vale, I. & Pimentel, T. (2004). Resolução de problemas. Em P. Palhares, (coord.), *Elementos da Matemática para professores do Ensino Básico*. Lisboa: Lidel, pp.7-51.

RACIOCÍNIO MATEMÁTICO DE ALUNOS E FUTUROS PROFESSORES: UMA PRIMEIRA APROXIMAÇÃO

Fernando Martins[1,2], Marta Vieira[1], Diogo Reis[1], C. Miguel Ribeiro[3]

[1]Escola Superior de Educação de Coimbra

[2]Instituto de Telecomunicações (Covilhã), RoboCorp (ISEC)

[3]Centro de Investigação sobre o Espaço e as Organizações, Universidade do Algarve

fmlmartins@esec.pt; mcdvieira@esec.pt; di_traves@hotmail.com; cmribeiro@ualg.pt

O raciocínio matemático do professor assume um papel fulcral na promoção efetiva do desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos, tanto no que concerne à(s) forma(s) de encarar esse raciocínio, em si, como no conhecimento que detém (assume deter) em relação aos vários tópicos matemáticos. Neste poster, iremos debruçar-nos sobre alguns aspetos associados ao raciocínio de futuros professores e alunos do 1.º Ciclo ao resolverem uma mesma tarefa envolvendo sequências. Um dos resultados preliminares indicia o facto de alunos e futuros professores apresentarem raciocínios e representações similares, o que perspetiva a necessidade de um foco específico na formação de modo a ampliar essa capacidade e uma prática futura que permita um ensino promotor de um raciocínio matemático sustentador de aprendizagens duradoras e com significado.

Palavras-chave: Raciocínio matemático, formação de professores, práticas letivas.

O raciocínio matemático é uma das capacidades transversais a promover ao longo da escolaridade (ME, 2007), devendo ser a continuação de uma abordagem iniciada na Educação Pré-Escolar. Essa promoção deverá recorrer, entre outros, ao suscitar a explicação de ideias e processos, à justificação de resultados e à formulação e teste de conjeturas simples por parte dos alunos[47], ampliando posteriormente estes aspetos através de exemplos, contra-exemplos e elaboração de deduções informais e generalizações. O desenvolvimento desta capacidade nos alunos apenas será possível se os próprios professores forem verdadeiramente conhecedores dos diversos temas e tópicos, e formas eficazes de os abordar, de modo a potenciarem situações que promovam o desenvolvimento de tal capacidade. Considera-se fulcral que detenham um conhecimento dos tópicos de forma mais ampla do que será exigível aos seus alunos, promovendo, assim, de modo sustentado, uma comunicação matemática que permita, também, entre outros, explicitar o(s) processo(s) e raciocínio(s) (e.g., Mason, Burton e

---

[47] Sempre que nos referirmos à formação de professores utilizamos estudante(s), correspondendo a expressão aluno(s) aquele(s) que frequentam o Ensino Básico.

Stacey (1985); Domingues e Martinho (2012)). Este conhecimento é aqui encarado na perspetiva do *mathematical knowledge for teaching* (Ball, Thames & Phelps, 2008).

As investigações que se centram na análise das diferentes formas/processos de raciocínio fazem-no, essencialmente, tendo por foco os alunos. Consideramos, porém, que será essencial alargar o espectro desse foco, pois o que os alunos sabem, como o sabem e as formas de raciocínio que revelam possuir dependem, em muito, da própria perspetiva/conhecimento do professor. Considerando essas premissas, efetuámos um estudo exploratório com um duplo foco, tendo por intuito aceder a processos de raciocínio de alunos e futuros professores dos primeiros anos, de modo a podermos aceder a situações matematicamente críticas que nos permitam conceptualizar tarefas a serem trabalhadas na formação de professores, visando incrementar tanto o seu conhecimento dos conteúdos (na perspetiva do MKT) que terão de abordar, como, paralelamente, aspetos inerentes à promoção de um raciocínio matemático. Neste estudo exploratório, recorremos a uma metodologia qualitativa, de índole interpretativa, e um *design* de estudo de caso instrumental. Os dados referem-se às resoluções de uma mesma tarefa (envolvendo sequências) aplicada a uma turma do 4.º ano de escolaridade e a futuros professores (do 1.º e do 2.º Ciclo).

Neste poster, iremos reportar alguns resultados preliminares relativos aos processos de raciocínio de alunos e futuros professores, discutindo similitudes e diferenças, bem como a especificidade do que deverá corresponder ao conhecimento do professor de modo a promover o desenvolvimento de tal capacidade. Um dos resultados preliminares indicia o facto de tanto os alunos como os futuros professores se encontrarem num nível similar em termos da estrutura de argumentação válida – em ambos os contextos encontrámos os mesmos tipos de incorreções ao nível desta forma de raciocínio –, apresentado também representações similares entre si (não promovendo uma discussão dos aspetos da generalização associada). Perspetiva-se, assim, a necessidade de que a formação possibilite uma efetiva promoção/aquisição de um raciocínio matemático que permita desenvolver aprendizagens sustentadas, duradoras e significativas.

Referências

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Domingues, C. & Martinho, M. H. (2012). Desenvolvimento do raciocínio matemático e as práticas de sala de aula. *Investigação em Educação Matemática 2012 - Práticas de Ensino da Matemática 1*, 321-334.

Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (1985). *Thinking mathematically*. London: Addison-Wesley Publishing Company.

Ministério de Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: ME-DGIDC.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PROCESSO NA EDUCAÇÃO PRÉ-ESCOLAR

Helena Costa
Jardim-de-infância Miminho – Cruz Vermelha Portuguesa
lenitabraga_costa13@hotmail.com

Ana Barbosa
ESE de Viana do Castelo
anabarbosa@ese.ipvc.pt

O presente estudo integra-se na área da educação matemática e realizou-se no âmbito do Curso de Mestrado em Educação Pré-Escolar, na Escola Superior de Educação de Viana do Castelo, em ligação estreita com a Unidade Curricular Prática de Ensino Supervisionada II. Teve como principal objetivo compreender a forma como crianças do ensino pré-escolar resolvem problemas de processo. Neste poster, serão apresentadas as principais fases deste estudo. Após a implementação de uma sequência de tarefas, foi possível verificar que as crianças estavam motivadas para a resolução de problemas de processo, tendo utilizado diversas estratégias, no âmbito da categorização adotada no estudo, potenciadas pelas tarefas implementadas, que também permitiram a mobilização de conhecimentos prévios de natureza diversa. No entanto, foram também evidenciadas algumas dificuldades que incidiram, principalmente, na fase de compreensão e interpretação dos problemas e na comunicação da sua forma de pensar, através dos registos.

Palavras-chave: Educação Pré-escolar, Matemática, Resolução de Problemas, Estratégias, Dificuldades.

Problema e objetivos

A Matemática é fundamental na formação de qualquer indivíduo, uma vez que contribui com ferramentas essenciais para a vida em sociedade, permitindo que se tornem pessoas mais competentes, críticas e confiantes na resolução de problemas do quotidiano (Moreira & Oliveira, 2003). A resolução de problemas atravessa todas as áreas e domínios do currículo, para além de se evidenciar no dia-a-dia, sendo por isso crucial desenvolver, desde os primeiros anos, a capacidade de resolver problemas de natureza diversa e a flexibilidade do raciocínio.

A resolução de problemas é referida como uma capacidade transversal e basilar nos documentos curriculares ao nível da matemática (e.g. DEB, 1997; NCTM, 2000; ME-DGIDC, 2007). Através da resolução de problemas, os alunos poderão construir novos conhecimentos, incorporar uma diversidade de estratégias e procedimentos e perceber a aplicabilidade da matemática, estabelecendo conexões com outras áreas e com o contexto real (NCTM, 2000). As Orientações Curriculares para a Educação pré-escolar (DEB, 1997) reforçam estes pressupostos referindo que a resolução de problemas potencia a aprendizagem e que deverá atravessar todas as áreas e domínios. As Metas de Aprendizagem (ME-DGIDC, 2010) acrescentam que a resolução de problemas é uma das capacidades que pode ser trabalhada em inúmeras situações do dia-a-dia e de forma integrada nos diversos temas do currículo.

No que refere à educação pré-escolar, pode-se partir de atividades espontâneas ou planeadas, onde as crianças devem ser desafiadas a mobilizar uma variedade de estratégias de resolução e construir, de forma progressiva, uma atitude reflexiva sobre a sua forma de pensar. É igualmente importante que o educador proporcione momentos de formulação de problemas e prepare, gradualmente, o caminho para a abstração e para a generalização (Moreira & Oliveira, 2003).

O grupo de crianças que integrou este estudo demonstrava uma predisposição espontânea para a resolução e formulação de problemas, reagindo com grande entusiasmo e motivação às situações problemáticas que lhes eram apresentadas. Neste sentido, houve curiosidade em aprofundar esta situação e compreender a forma como resolviam problemas, identificando as estratégias que utilizavam e, naturalmente, as dificuldades evidenciadas. Dada a diversidade de problemas que podem ser propostos no âmbito da matemática, optou-se por restringir o estudo aos problemas de processo por permitirem a utilização de um leque mais variado de estratégias. Tendo por base este grupo de crianças, optou-se por investigar: (i) Quais as estratégias utilizadas pelas crianças na resolução de problemas de processo? e (ii) Quais as dificuldades evidenciadas pelas crianças na resolução de problemas de processo?

Opções Metodológicas

Neste estudo optou-se por uma metodologia de investigação de natureza qualitativa, nomeadamente pelo design de estudo de caso, que foi construído com base num grupo de 22 crianças, com idades compreendidas entre os 5/6 anos, de um Jardim-de-Infância de Viana do Castelo, no contexto da Prática de Ensino Supervisionada. As técnicas usadas para a recolha de dados foram a observação participante, a inquirição através da realização de entrevistas e a recolha documental, incluindo gravações áudio e vídeo. Para concretizar esta investigação, foi elaborada uma proposta pedagógica, composta por quatro tarefas centradas na resolução de problemas de processo, com a finalidade de potenciar a emergência de múltiplas estratégias de resolução, dando assim às crianças a oportunidade de selecionar o caminho que quisessem, permitindo também compreender as suas dificuldades.

Conclusões

Considerando as categorizações propostas por Vale (1993) e por Van de Walle, Karp e Bay-Williams (2010), no âmbito das estratégias de resolução de problemas de processo, e como resposta ao problema inicial e às questões de investigação, pode-se concluir que, independentemente da frequência, o grupo de crianças utilizou: simulação/dramatização; lista organizada; identificação de um padrão; tentativa e erro; fazer um desenho, esquema ou diagrama. No que concerne às dificuldades evidenciadas pelas crianças, e refletindo sobre as diferentes etapas definidas no Modelo de Polya (Polya, 2003), a compreensão/interpretação do problema foi, na maioria das situações propostas, o maior obstáculo para o grupo. Noutros casos, evidenciaram dificuldades em estabelecer um plano, de modo a decidir qual a melhor estratégia a aplicar.

A proposta pedagógica planeada, traduzida na sequência de tarefas implementadas, revelou-se adequada, permitindo garantir a diversidade de estratégias, mostrando-se ajustada às capacidades e características do grupo que demonstrou interesse e motivação ao longo de todas as atividades, respondendo de forma desafiadora, experienciando momentos de aprendizagem significativos, onde os objetivos propostos foram alcançados. Estas aprendizagens contribuíram para o desenvolvimento das crianças que evoluíram na sua capacidade de utilizar e compreender diferentes tipos de estratégias e os processos envolvidos na resolução de problemas.

Referências bibliográficas

DEB (1997). *Orientações Curriculares para a Educação Pré-escolar*. Lisboa: Editorial Ministério da Educação.

ME-DGIDC (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

ME-DGIDC (2010). *Metas de Aprendizagem*. Obtido em 20 de Fevereiro de 2011, de http://metasdeaprendizagem.min-edu.pt/educacao-pre-escolar/metas-de-aprendizagem/metas/?areas=7&level=1

Moreira, D., & Oliveira, I. (2003). *Iniciação à Matemática no Jardim de Infância*. Lisboa: Universidade Aberta.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Polya, G. (2003). *Como resolver problemas*. Lisboa: Gradiva.

Vale, I. (1993). Concepções e práticas de jovens professores perante a resolução de problemas de Matemática: Um estudo longitudinal de três casos, *Tese de Mestrado*, Universidade de Lisboa: APM.

Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2010). *Elementary & Middle School Mathematics. Teaching Developmentaly* (7^{th} ed). USA: Pearson Education.

AS COMPETIÇÕES MATEMÁTICAS ONLINE COMO CONTEXTO DE INVESTIGAÇÃO – VERTENTES DO PROJETO PROBLEM@WEB*

Susana Carreira[1]; Nélia Amado[1]; Rosa Antónia Ferreira[2]; Jaime Carvalho e Silva[3]; Juan Rodriguez[4]; Hélia Jacinto[5]; Nuno Amaral[6]; Sandra Nobre[5]; Sílvia Reis[7]; Isa Martins[8]

[1]FCT da Univ. Algarve e Unidade de Investigação do IE da Univ. Lisboa;
[2] FC da Univ. Porto e Centro de Matemática da Univ. Porto;
[3] DM da Univ. Coimbra e Centro de Matemática da Univ. Coimbra;
[4] FCT da Univ. Algarve e CEAF do Instituto Superior Técnico;
[5] Bolseira da FCT e Unidade de Investigação do IE da Univ. Lisboa;
[6] EB 2,3 das Naus, Lagos; [7] ES/3 de Mirandela; [8] EB 2,3 Dr. Neves Júnior, Faro

scarrei@ualg.pt; namado@ualg.pt; rferreir@fc.up.pt; jaimecs@mat.uc.pt; jsanchez@ualg.pt; helia_jacinto@hotmail.com; nualroam@gmail.com; sandraggnobre@gmail.com; silviapreis@hotmail.com; ipati@sapo.pt

Neste poster damos a conhecer a variedade de linhas de trabalho do projeto de investigação Problem@Web que visa estudar o impacto dos campeonatos de matemática online, nas suas múltiplas facetas, do ponto de vista de alunos, pais e professores. As várias vertentes serão expostas a partir da apresentação de dados e resultados já disponíveis.

Palavras-chave: competições matemáticas online, resolução de problemas, atitudes, criatividade, tecnologias.

O Projeto Problem@Web

Problem@Web é um projeto de investigação financiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia que tem como objetivo geral estudar a resolução de problemas de matemática num contexto exterior à sala de aula – o das competições matemáticas baseadas na Internet, nas quais se incluem os campeonatos de matemática SUB12® e

* Este trabalho foi parcialmente financiado pelo projeto PTDC/CPE-CED/101635/2008 com a designação "Resolução de Problemas de Matemática: perspectivas sobre uma competição interactiva na web (Sub12 & Sub14)".

SUB14®, promovidos pelo Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve.

Os campeonatos de matemática SUB 12 e SUB 14

Estes campeonatos constituem ambientes tecnologicamente versáteis pois decorrem a partir da Internet, usando o correio eletrónico como veículo de comunicação a distância entre os participantes e a organização. São dirigidos aos alunos dos 5.º e 6.º anos (SUB 12) e dos 7.º e 8.º anos (SUB 14) das regiões do Algarve e Alentejo, que participam voluntariamente. Decorrem online ao longo da fase de apuramento, que se estende de janeiro a junho, e culminam com uma final presencial na Universidade do Algarve.

Para comunicar o seu raciocínio na resolução dos problemas, os participantes têm liberdade para recorrer às ferramentas tecnológicas que preferirem. Uma característica distintiva destes campeonatos está no feedback que é disponibilizado regularmente aos participantes e que é um traço e um reflexo do caráter inclusivo destas competições.

Os problemas propostos podem ser considerados problemas de palavras contextualizados. A escolha dos problemas não procura ir ao encontro dos percursos curriculares do Ensino Básico mas abordam tópicos de: geometria, álgebra, números, combinatória, raciocínio lógico. Na figura 1, apresentamos um exemplo de um problema da edição de 2010/11 do SUB12.

Figura 1. Problema do SUB12 (2010/11)

Neste poster, focamo-nos em algumas das linhas de investigação do projeto, em particular a resolução de problemas (estratégias e representações), o lado afetivo destas competições, a criatividade matemática, e a fluência tecnológica na resolução de problemas.

A resolução de problemas de matemática, para além do conhecimento de procedimentos e técnicas, exige a capacidade de os mobilizar e colocar em ação, de pensar em estratégias que, à partida, não são diretas nem pré-estabelecidas, e de recorrer a diversas formas de comunicar o raciocínio e o processo de resolução (English, Lesh, & Fennewald, 2008).

Nestes campeonatos é evidente a presença de fatores emocionais e afetivos (Reis & Amado, 2012). Várias mensagens enviadas pelos concorrentes bem como testemunhos de participantes, pais e professores, indicam a relevância destes fatores.

Um aspeto presente nestes campeonatos é a emergência da criatividade na resolução de problemas e no modo de comunicação que decorre da liberdade de métodos e estratégias dos participantes. Muitas das resoluções evidenciam uma abordagem informal a conceitos matemáticos que os participantes ainda não aprenderam formalmente ou ainda associam a uma linguagem matemática e simbólica, mas que já conseguem pôr a funcionar muito claramente quando raciocinam no contexto concreto de um dado problema (Applebaum, Freiman, & Leikin, 2008).

A fluência tecnológica refere-se à capacidade de um indivíduo para reformular o conhecimento, para se exprimir criativa e adequadamente e para construir ideias significativas com base em ferramentas tecnológicas (Noss, 2001). Os participantes nos campeonatos revelam a sua fluência digital na resolução dos problemas e na explicação do processo. Observa-se, em particular, a utilização do processador de texto para criar um documento, da Internet para procurar informação e recursos e para comunicar, da folha de cálculo para modelar processos simples e de programas de edição gráfica para criar ilustrações, slides e representações baseadas em imagens.

Resultados

Os resultados já obtidos no âmbito do Projeto Problem@Web – que provêm da análise de um grande conjunto de resoluções recebidas, entrevistas realizadas a participantes e ex-participantes, a pais e professores de alunos envolvidos – apontam para evidências significativas: a pluralidade de formas de resolução e de expressão do raciocínio matemático, a componente afetiva e emocional presente na resolução de problemas e nas competições matemáticas, a manifestação da criatividade matemática e o papel crucial das ferramentas digitais no desenvolvimento da competência tecno-matemática dos jovens (Carreira, Amado, Ferreira, Silva, Rodriguez, Jacinto, Amaral, Nobre, Martins, Reis, & Mestre, 2012).

Referências bibliográficas

Applebaum, M., Freiman, V., & Leikin, R. (2008). *Views on Teaching Mathematically Promising Students*. Paper presented at ICME 11, TSG 6 – Activities and programs for gifted students. [Disponível em http://tsg.icme11.org/document/get/595].

Carreira, S., Amado, N., Ferreira, R. A., Silva, J. C., Rodriguez, J., Jacinto, H., Amaral, N., Nobre, S., Martins, I., Reis, S., & Mestre, R. B. (2012). *Um olhar sobre uma competição matemática na Web: Os SUBs*. Faro: Universidade do Algarve – Projeto Problem@Web.

English, L., Lesh, R. & Fennewald, T. (2008). *Future directions and perspectives for problem solving research and curriculum development*. Paper presented at ICME 11, TSG 19 – Research and development in problem solving in mathematics education. [Disponível em http://tsg.icme11.org/document/get/458].

Noss, R. (2001). For a learnable mathematics in the digital culture. *Educational Studies in Mathematics*, *48*, 21-46.

Reis, S., & Amado, N. (2012). *A young student's emotions when solving a mathematical challenge.* Paper presented at ICME 12, TSG 27 – Motivation, beliefs, and attitudes towards mathematics and its teaching. [Disponível em http://www.icme12.org/upload/UpFile2/TSG/1442.pdf].

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E AS AVALIAÇÕES EXTERNAS DE MATEMÁTICA NO BRASIL[48]

Maria Madalena Dullius
Centro Universitário UNIVATES
madalena@univates.br

Daniela Cristina Schossler
Luciana Caroline Kilpp Fernandes

Virginia Furlanetto
Centro Universitário UNIVATES

No presente trabalho apresentamos uma pesquisa que objetiva investigar a possível influência da utilização de diferentes estratégias de resolução de problemas, por parte de estudantes da Educação Básica, para que os mesmos obtenham êxito ao deparar-se com essas situações matemáticas. A mesma constitui-se em uma dissertação de mestrado e emergiu dos estudos referentes aos processos avaliativos nacionais e internacionais, realizados no âmbito do Programa Observatório da Educação da CAPES[49]/INEP[50], ao qual esta proposta está vinculada e onde detectamos o foco em resolução de problemas, apresentado por tais sistemas. Pretendemos que a proposta contribua, a longo prazo, para a melhoria da qualidade dos processos de ensino e aprendizagem da Matemática e, consequentemente, para a elevação dos índices dos alunos nestas avaliações.

Palavras-chave: Matemática, resolução de problemas, estratégias, aprendizagem.

Visando fomentar estudos e pesquisas no sentido de elevar a qualidade da Educação Básica no Brasil, a CAPES/INEP lançou o Programa Observatório da Educação. Na UNIVATES, vem sendo desenvolvido um projeto, no âmbito deste Programa, que objetiva analisar as competências necessárias para um bom desempenho, nas avaliações externas, na área da Matemática, e a partir desses resultados propor ações e desenvolver atividades de intervenção pedagógica que, a médio e longo prazo, possam contribuir para melhoria dos índices de desempenho nessas avaliações.

---

48 O presente trabalho foi realizado com o apoio da CAPES, entidade do Governo Brasileiro voltada para a formação de recursos humanos.

49 Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

50 Instituto Nacional de Pesquisas Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira

Os participantes do grupo de trabalho preocuparam-se, inicialmente, em conhecer tais avaliações, em seus mais variados aspectos, incluindo seu histórico, objetivos, órgãos responsáveis pela elaboração e aplicação e alunos participantes. Em seguida, resolvemos algumas das questões disponíveis e, posteriormente, realizamos o estudo das matrizes e documentos de referência de cada sistema avaliativo, com o intuito de aprofundar nossos conhecimentos sobre estas. Identificamos, a partir disto, que as provas têm foco em resolução de problemas e, de posse deste dado, iniciamos a elaboração de ações de intervenção que contemplem este aspecto.

Dante (2000) assinala o trabalho com resolução de problemas matemáticos como a principal forma de se alcançar os objetivos da Matemática em sala de aula, entre eles, o de "fazer o aluno pensar produtivamente".

A pesquisa que estamos desenvolvendo diz respeito à investigação da possível influência da utilização de diferentes estratégias de resolução de problemas, por parte de alunos da Educação Básica, para que os mesmos obtenham êxito ao deparar-se com essas situações matemáticas. Para Pozo (1998, p. 60), "as estratégias de resolução de problemas seriam formas conscientes de organizar e determinar os recursos de que dispomos para a solução de um determinado problema".

Nossa ação envolve uma intervenção com alunos de 8ª série do Ensino Fundamental onde, inicialmente, várias turmas foram convidadas a resolver oito situações-problema. As resoluções foram analisadas sob a perspectiva das diferentes estratégias passíveis de serem utilizadas na resolução de problemas matemáticos. Em seguida, em uma das turmas será realizada uma prática incentivando o uso de diferentes estratégias de resolução de problemas.

Ao categorizar as respostas dos alunos que participaram da etapa inicial, evidenciou-se grande utilização do cálculo, mesmo em questões onde outras estratégias, como por exemplo o desenho, favoreciam e facilitavam o caminho ao resultado. Alguns estudantes também relataram não conseguir resolver determinados problemas por não saber qual o cálculo que deveriam realizar para encontrar os dados que faltavam para a resolução.

O impacto esperado com esta e as demais ações de intervenção é a melhoria da qualidade dos processos de ensino e aprendizagem da Matemática na Educação Básica e consequente elevação nos índices apresentados pelos estudantes nas avaliações.

Reconhecemos que este pode ser um processo demorado, mas acreditamos no papel do compartilhamento de boas práticas como forma de colocar mais professores a par de metodologias que possam contribuir para a qualificação de suas aulas e, portanto, pretendemos divulgar os resultados desta ação, em forma de dissertação de mestrado.

Referências

Dante, Luiz Roberto (2000). *Didática da resolução de problemas de matemática: 1ª a 5ª séries*. 12. ed. São Paulo: Ática.

Pozo, Juan Ignacio (Org.) (1998). *A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender.* Porto Alegre: Artmed.

PADRÕES: UMA ABORDAGEM CRIATIVA À APRENDIZAGEM EM DIFERENTES ÁREAS/DOMÍNIOS DA EDUCAÇÃO PRÉ-ESCOLAR

Ana Barbosa
IPVC - ESE
anabarbosa@ese.ipvc.pt

Bibiana Lopes
IPVC - ESE
bibisfl@gmail.com

Dada a importância da adoção de uma perspetiva integradora das diferentes áreas e domínios curriculares, nas experiências de aprendizagem de crianças em idade pré-escolar, e o carácter transversal dos padrões, achou-se pertinente compreender as potencialidades das conexões estabelecidas entre a matemática e outras áreas, através de tarefas desta natureza. Tendo como participantes um grupo de crianças de 5 anos de idade, pretendeu-se analisar o contributo da descoberta de padrões na utilização de abordagens criativas e no sucesso da aprendizagem em diferentes contextos. Neste poster, são apresentados resultados referentes à implementação de 4 tarefas.

Palavras-chave: padrões, pré-escolar, criatividade, conexões.

Problema e objetivos

As *OCEPE* (DEB, 1997) sublinham a importância de se reconhecer a criança como sujeito ativo no processo educativo, construindo o saber através da integração das diferentes áreas/domínios curriculares. No que refere à matemática, as crianças devem reconhecê-la e aplicá-la em diferentes contextos, através de experiências que enfatizem as relações entre ideias matemáticas e outras áreas (NCTM, 2000). O educador deve proporcionar oportunidades para que as crianças se envolvam em atividades que facilitem o estabelecimento de conexões entre a matemática e outras áreas, contribuindo para a estruturação de um ambiente de aprendizagem mais significativo (DEB, 1997; NCTM, 2000). É essencial partir da curiosidade natural das crianças para que compreendam o mundo que as rodeia e percebam a utilidade das ferramentas e conceitos matemáticos. Devido à sua natureza transversal, a exploração de padrões promove naturalmente o estabelecimento de diversos tipos de conexões (Orton, 1999). A criatividade está a emergir como uma capacidade fundamental em diferentes áreas da educação, incluindo a matemática, e a sua relação com atitudes como a curiosidade e o desafio é inegável. As tarefas de carácter exploratório, associadas à descoberta de padrões, implicam processos como experimentar, conjeturar, investigar, comunicar, suscitando o recurso a abordagens criativas (Vale & Pimentel, 2011). Com este estudo, pretende-se analisar o contributo da exploração de padrões na aprendizagem em diferentes áreas do currículo, por crianças em idade pré-escolar, procurando compreender: as potencialidades de tarefas desta natureza; e de que forma poderão promover abordagens criativas.

Metodologia

Adotou-se uma metodologia qualitativa, estruturada num estudo de caso, construído com um grupo de 25 crianças, de 5 anos de idade, de um JI do distrito de Viana do Castelo. Procurou-se compreender processos de aprendizagem e estratégias mobilizadas na resolução de uma sequência de tarefas construídas numa perspetiva integradora, associando a matemática, através da exploração de padrões, a outras áreas/domínios do currículo. Os dados foram recolhidos através de técnicas como: observação, entrevistas, gravações áudio/vídeo e documentos de natureza diversa. As evidências foram analisadas e interpretadas de forma indutiva, em paralelo com a recolha de dados, após a implementação de cada tarefa.

Resultados

Neste poster, apresentam-se resultados da implementação de 4 tarefas. Para a linguagem oral e abordagem à escrita, foi explorada a estrutura repetitiva de uma história; para a expressão plástica, foram analisados e aplicados procedimentos para a construção de papel de embrulho; na expressão musical, foi lida e reproduzida uma pauta musical: e na área do Conhecimento do Mundo, investigou-se os efeitos da reflexão da luz, através da utilização de espelhos.

Os resultados evidenciaram que, devido à existência de padrões, as crianças foram capazes de aprender factos relacionados com outras áreas/domínios de uma forma mais intuitiva, evidenciando abordagens criativas. Ao longo da leitura da história, tendo uma estrutura repetitiva, conseguiram prever acontecimentos, participando ativamente no momento da leitura, e recontaram a história evidenciando um raciocínio coerente. Na exploração de papéis de embrulho identificaram e descreveram padrões com diferentes estruturas, percebendo quais os aspetos comuns e necessários à construção do seu próprio papel de embrulho. Apresentaram diferentes propostas, com diferentes graus de complexidade e originalidade. Na análise do pictograma de uma música e consequente reprodução, interiorizaram rapidamente o ritmo em causa, mostrando saber em que momentos tinham de tocar bem como o padrão rítmico. Na tarefa sobre as características associadas à reflexão da luz, tendo utilizado espelhos em diferente número e posições, reconheceram propriedades relacionadas com: a utilização de 1 espelho; a influência da amplitude do ângulo formado por 2 espelhos; a exploração de 3 espelhos; os procedimentos de construção e potencialidades de um caleidoscópio.

As crianças consideraram este tipo de tarefas motivadoras e desafiadoras, apresentando indicadores de um ambiente de aprendizagem efetivo e criativo.

Referências bibliográficas

DEB (1997). *Orientações Curriculares para a Educação Pré-escolar.* Lisboa: DEB-ME

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Orton, A., & Orton, J. (1999). Pattern and the approach to algebra. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp. 104-120). London Cassel.

Vale, I., & Pimentel, T. (2011). Mathematical challenging tasks in elementary grades. In M. Pytlak, T. Rowland & E. Sowoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Societ for Research in Mathematics Education* (pp. 1152-1164). Rzeszów, Poland: University of Rzeszów.

UM OUTRO OLHAR SOBRE OS DADOS DO PISA: CARATERIZAÇÃO DOS ALUNOS COM NÍVEIS DE PROFICIÊNCIA ELEVADOS EM MATEMÁTICA

Sónia Barbosa
MMEAD, ECT - Universidade de Évora
soniabarbos@hotmail.com

Paulo Infante
CIMA-UE/DMAT, ECT - Universidade de Évora
pinfante@uevora.pt

Resumo

O Projeto PISA (Programme for International Student Assessment) tem como objetivo avaliar a capacidade dos jovens de 15 anos no uso dos seus conhecimentos, de forma a enfrentarem os desafios da vida real. Na área da matemática, ao aluno é proposta a resolução de itens de diferentes níveis de dificuldade originando uma escala de 6 níveis de proficiência.

Com base nos dados do questionário dos alunos ajustamos um modelo de regressão logística de modo a identificar e quantificar alguns fatores potenciadores de um desempenho de nível 5 na área espaço e forma.

Palavras-chave: PISA, literacia matemática, regressão logística.

A questão em análise

Na questão que analisamos neste trabalho, as competências gerais testadas são a capacidades de resolver problemas, recorrendo ao uso de expressões e modelos matemáticos formais algébricos ou de outro tipo e também a capacidade dos alunos estabelecerem relações entre representações matemáticas formais e situações complexas da vida real, refletindo acerca dos raciocínios e comunicando-os. Nesta questão, os alunos portugueses obtiveram 35% acertos.

Metodologia

Com base em variáveis do inquérito aos alunos (pisa2009.acer.edu.au.downloads.php), ajustou-se um modelo de regressão logística cuja variável resposta foi definida como: 0 - não acerto à questão; 1 - acerto à questão. Na construção do modelo foi considerada uma amostra de 1206 respostas válidas. Foi realizada uma análise de resíduos com verificação de outliers e de observações influentes. Constatou-se o bom ajustamento aos dados pelo teste de bondade de ajustamento de Hosmer e Lemeshow ($\chi^2_8 = 3{,}47$; valor p = 0,90), concluindo-se também que o modelo final é revelador de uma boa capacidade discriminativa (AUC= 0,77). O modelo foi validado por validação cruzada via bootstrap. Os coeficientes do modelo final são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1: Coeficientes do modelo para o acerto à questão nível 5 na área espaço e forma, desvio padrão e valor p teste *Wald* correspondentes ao inquérito realizado aos alunos. Categorias de referência: 1 - Alentejo, Algarve e Ilhas; 2 e 3 - 7º e 8ºano de escolaridade; 4 -Não frequentou o ensino pré-escolar; 5 - não ter nenhuma repetência nos três primeiros ciclos; 6 - 0 a 25 livros; 7 - quase nunca.

Variável	Coeficientes	Desvio Padrão	Valor p (Wald)
Constante	*-3.66*	*0.621*	*0.000*
Zona Geográfica[1]- Centro	*0.642*	*0.198*	*0.0013***
Zona Geográfica[1]- Grande Lisboa/ Penísula de Setúbal	*0.272*	*0.215*	*0.205*
Zona Geográfica[1]- Norte	*0.541*	*0.185*	*0.003***
Ano de escolaridade do aluno[2]- 9º ano	*1.097*	*0.510*	0.032*
Ano de escolaridade do aluno[2]- 10ºe 11º ano	*1.163*	*0.536*	*0.030**
Sexo do aluno- Masculino	1.234	0.190	0.001
Frequência do ensino pré escolar[4]- Sim	0.465	0.196	0.018
Repetências[5]Sim	-1.228	0.339	0.001
Programas de computador educativos em casa - Não	-0.249	0.148	0.092
Quantidade de livros em casa[6]- de 26 a 100 livros	0.437	0.177	0.013 **
Quantidade de livros em casa[6]- de 101 a 500 livros	0.846	0.186	0.001 ***
Quantidade de livros em casa[6]- mais de 500 livros	1.161	0.278	0.001 ***
Estudar a decorar[7]- muitas vezes	-0.329	0.146	0.024*
Tentar perceber o que é preciso aprender[7]- muitas vezes	0.696	0.359	0.052
Verificas se está a perceber o que já leu[7]- muitas vezes	0.956	0.247	0.001
*Sexo do aluno * Tentar perceber o que é preciso aprender- masculino *muitas vezes*	-0.7286	0.247	0.009**
*Tentar perceber o que é preciso aprender *Verificas se está a perceber o que já leu muitas vezes *muitas vezes*	-0.823	0.353	0.0198*
*O que é preciso aprender * repetências- muitas vezes X já repetiu*	-1.089	0.544	0.045*

Resultados

Para um aluno de 15 anos podemos concluir que as possibilidades de atingir este nível de proficiência são menores no caso de: estudar na Zona do Alentejo, Algarve ou Ilhas; não frequentar o 7º e 8º ano (os alunos da região Centro têm cerca do dobro das possibilidades e os da região norte uma 1,5 vezes mais possibilidades); não ter iniciado os seus estudos no ensino pré-escolar (os do ensino pré-escolar têm 1,5 vezes mais possibilidades); ter poucos livros em casa; não dispor de programas de computador educativos (caso em que tem menos 25% de possibilidades); não usar como metodologia de estudo decorar muitas vezes tudo o que está no texto (caso em que as possibilidades são reduzidas em quase 1/3). Das interações significativas presentes no modelo podemos concluir, entre outras, que a metodologia de estudo que consiste em começar por perceber o que é necessário aprender potencia o atingir o nível pretendido, em particular nos rapazes, e que a repetência tem um impacto particularmente negativo no desempenho dos rapazes.

Podemos, pois, concluir que a assimetria, tendo em conta a sua situação geográfica, apresenta evidências estatísticas, sendo as zonas menos populosas desfavorecidas. Uma vez que o teste PISA não pretende testar currículos, mas sim os conhecimentos dos alunos perante situações da vida real, após um ensino de mais ou menos 10 anos de escolaridade verifica-se que os alunos que frequentam os níveis mais baixos de escolaridade não conseguem responder às exigências pedidas. Por outro lado, a aposta numa educação pré-escolar obrigatória terá resultados no desenvolvimento das crianças durante o percurso escolar. Estes resultados revelam também a importância dos livros no processo desenvolvimento dos alunos. Vêm também confirmar que os rapazes nas questões de maior grau de dificuldade têm vindo a obter melhores resultados e que a compreensão da questão colocada é essencial.

Considerações finais

Este estudo pretende ser uma ferramenta para professores e educadores no sentido de perceber os fatores que levam ao sucesso dos alunos portugueses na área espaço e forma. Trata-se de uma abordagem inicial que pode ajudar a fornecer instrumentos de medida para o auxílio a políticas educativas que vão de encontro às necessidades reveladas pelos alunos e encarregados de educação.Com a análise realizada é possível definir o perfil mais provável de um aluno que atinge um nível 5 de competência na área das transformações e relações: trata-se de um aluno do sexo masculino da zona norte ou centro de Portugal, que frequenta mais do que o 8º ano de escolaridade, sem repetências durante o seu percurso escolar, que tenha iniciado o seu percurso no pré-escolar, com acesso a livros em casa e material informático didático, que ao estudar não decore, comece por perceber o que é necessário aprender e não se questiona sempre se está a perceber o que está a estudar.

Referências bibliográficas

David.W.Hosmer,& Stanley Lemeshow. (2000). *Applied Logistic Regression(2nd Edition)*. New York .Jonh Wiley & Sons,: Porto Editora.

PISA(2009). *Assessment Framework*.OECD.

PRÁTICAS PROFISSIONAIS DOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA: O PROJETO P3M[51]

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ul.pt

Hélia Oliveira
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
hmoliveira@ie.ul.pt

Ana Paula Canavarro
Departamento de Pedagogia e Educação, Universidade de Évora
apc@uevora.pt

Darlinda Moreira
Universidade Aberta
darmore@uab.pt

Helena Martinho
Instituto de Educação, Universidade do Minho
mhm@ie.uminho.pt

Luís Menezes
Escola Superior de Educação de Viseu
menezes@esev.ipv.pt

Rosa Tomás Ferreira
Faculdade de Ciências, Universidade do Porto
raoftf@gmail.com

e ainda:
Ana Gafanhoto, Ana Isabel Silvestre, António Guerreiro, Ana Paula Gil, Célia Mercê, Cláudia Domingues, Cláudia Nunes, Cláudia Oliveira, Célia Mestre, Hélia Ventura, Isabel Velez, Joana Mata Pereira, Laura Bandarra, Lígia Carvalho, Maria da Graça Magalhães, Marisa Quaresma, Mónica Patrício, Nelson Mestrinho, Neusa Branco, Paulo Gil, Renata Carvalho, Sandra Campelos, Sandra Quintas.

[51] Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projeto Práticas Profissionais dos Professores de Matemática (contrato PTDC/CPE-CED/098931/2008).

O projeto P3M tem como objetivo estudar as práticas profissionais na sala de aula de professores de Matemática. Pretende igualmente produzir recursos multimédia para formação inicial e contínua de professores do ensino básico e do ensino secundário. Neste poster apresentamos o projeto, indicando os seus objetivos, quadro conceptual, metodologia de trabalho e resultados preliminares, tanto no que se refere às práticas dos professores como aos materiais produzidos.

Palavras-chave: Professores de Matemática, Práticas profissionais, Formação, Tarefas

Contexto e objetivos

A aprendizagem dos alunos depende de forma crítica da ação do professor na sala de aula. As orientações curriculares atuais para a disciplina de Matemática estabelecem objetivos desafiantes para a aprendizagem dos alunos, o que, por sua vez, coloca fortes desafios às práticas profissionais dos professores. Deste modo, o presente projeto estuda as práticas profissionais dos professores de Matemática na sala de aula, dando especial atenção à natureza das tarefas que selecionam (Ponte, 2005), ao modo como conduzem a sua realização e à comunicação que favorecem, em especial nos momentos de discussão coletiva (Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008). Além disso, o projeto desenvolve protótipos de recursos multimédia para serem usados na formação inicial e contínua de professores dos diferentes ciclos de ensino, que serão testados nos dois tipos de formação. Esses recursos incluem descrições da prática profissional em aulas de carácter exploratório, tarefas para os professores realizarem e sugestões para os formadores de professores.

Tendo como ponto de partida o conhecimento existente sobre as práticas profissionais do professor (Ponte, Quaresma, & Branco, 2012), este projeto assume que estas tendem para um estado de equilíbrio relativamente a fatores como tradições pedagógicas, orientações curriculares, perspetivas sobre as capacidades e interesses dos alunos, recursos disponíveis, cultura de escola e influências profissionais, académicas e sociais. Assim, um conhecimento mais aprofundado dos processos subjacentes à constituição das práticas dos professores cria oportunidades para a sua mudança, tendo em conta a necessária articulação entre os objetivos dos documentos curriculares oficiais e as especificidades dos contextos em que atuam.

Metodologia

O projeto P3M está estruturado em torno de quatro tarefas distintas: experiências de ensino; formação inicial e contínua de professores; casos multimédia e uma tarefa integradora dos resultados das restantes tarefas). As experiências de ensino são realizadas por professores-investigadores, em colaboração com investigadores académicos, sendo também realizados estudos qualitativos nesse contexto procurando caracterizar a prática profissional subjacente. Também nas experiências de formação a metodologia é essencialmente qualitativa. A recolha de dados é feita sobretudo por observação com gravação áudio e vídeo, sendo também realizadas entrevistas e análise documental.

Resultados

No âmbito da investigação realizada sobre a prática do professor em aulas de carácter exploratório, desenvolvemos um modelo de análise das práticas profissionais do professor na sala de aula, que combina uma perspetiva cognitiva e sociocultural. Este modelo, que dá especial atenção à natureza das tarefas propostas e à comunicação na sala de aula, foi aplicado em diversos estudos parcelares, evidenciando traços significativos de uma abordagem exploratória ao ensino-aprendizagem da Matemática, pautado pela forte presença (embora não exclusiva) de tarefas abertas de nível de desafio moderado e por uma comunicação dialógica onde se evidencia uma significativa presença de questões de inquirição.

No que respeita à produção de casos multimédia, começámos por desenvolver um quadro organizador das ações e intenções do professor para servir de suporte às atividades formativas e orientar a estrutura dos casos (Canavarro, Oliveira & Menezes, 2012). Estes apresentam uma variedade de conteúdos tendo em vista uma utilização diversificada e flexível na formação inicial e contínua de professores. O primeiro caso multimédia que se encontra em processo de experimentação tem por base uma aula do 4.º ano em que a investigadora/professora realiza uma tarefa com sequências, para promover o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos.

Referências

Canavarro, A. P., Oliveira, H., & Menezes, L. (2012). Práticas de ensino exploratório: O caso de Célia. In *Actas do EIEM – Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 255-266). Castelo de Vide: SPIEM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Quaresma, M., & Branco, N. (2012). Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Avances en Investigación en Educación Matemática, 1*, 65-86.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10, 313-340.

O CONHECIMENTO MATEMÁTICO DOS FUTUROS DOCENTES NO INÍCIO DA LICENCIATURA EM EDUCAÇÃO BÁSICA: UM PROJETO ENVOLVENDO TRÊS ESCOLAS SUPERIORES DE EDUCAÇÃO

Lurdes Serrazina[1], lurdess@eselx.ipl.pt; Ana Barbosa[2], anabarbosa@ese.ipvc.pt; Ana Caseiro[1], anac@eselx.ipl.pt; António Ribeiro[3], ribeiro@esev.ipv.pt; Cecília Monteiro[1], ceciliam@eselx.ipl.pt; Cristina Loureiro[1], cristina@eselx.ipl.pt; Fátima Fernandes[2], fatimafernandes@ese.ipvc.pt; Graciosa Veloso[1], graciosav@eselx.ipl.pt; Isabel Vale[2], isabel.vale@ese.ipvc.pt; Lina Fonseca[2], linafonseca@ese.ipvc.pt; Luís Menezes[3], menezes@esev.ipv.pt; Margarida Rodrigues[1], margaridar@eselx.ipl.pt; Pedro Almeida[1], pedroa@eselx.ipl.pt; Teresa Pimentel[2], teresapimentel@ese.ipvc.pt; Tiago Tempera[1], tiagot@eselx.ipl.pt

[1]Escola Superior de Educação de Lisboa

[2]Escola Superior de Educação de Viana do Castelo

[3]Escola Superior de Educação de Viseu

Partindo da assunção de que o conhecimento do professor constitui um fator decisivo na interpretação e implementação do currículo e da necessidade de uma discussão alargada de qual deverá ser o conteúdo da formação em Matemática na Licenciatura da Educação Básica (LEB), as Escolas Superiores de Educação de Lisboa, Viseu e Viana do Castelo iniciaram um projeto de investigação que tem como principal objetivo compreender de que modo a formação inicial contribui para o desenvolvimento do conhecimento do professor e como pode este ser promovido. Uma das questões que o projeto visa investigar é que conhecimento de conteúdo matemático têm os estudantes quando iniciam o Curso da LEB. Neste poster, serão apresentados resultados preliminares de um questionário que pretende dar respostas a esta questão.

Palavras-chave: formação de professores, conhecimento matemático do professor, currículo.

Problemática e Objetivo

Uma das componentes do conhecimento do professor é a relativa a conceitos, processos e procedimentos matemáticos, que constitui o conhecimento a que Shulman (1986) designa por conhecimento de conteúdo, e que faz parte do conhecimento comum a muitas outras profissões que necessitam da matemática. Não sendo de todo suficiente ao trabalho do professor, ele influencia e é a base dos outros saberes como o conhecimento pedagógico e curricular. Uma aprendizagem matemática consolidada de forma compreensiva por parte dos alunos requer que os professores possuam um amplo e profundo conhecimento base em Matemática (Ball, Hill, & Bass, 2005; Ma, 1999; Sowder, 2007).

O Decreto-lei 43/2007, aquando da adaptação ao processo de Bolonha, legislou um novo modelo de formação inicial dos educadores de infância e dos professores dos 1.º e 2.º ciclo do ensino básico, em que o conteúdo a ensinar passou a ter um papel preponderante, ao nível da LEB. Compreender de que modo esta formação está a contribuir para o desenvolvimento do conhecimento do professor é um propósito central deste projeto. Relativamente à formação inicial, o projeto visa investigar as seguintes questões: (i) que conhecimento de conteúdo matemático têm os estudantes quando iniciam o Curso da LEB?, (ii) como é que este conhecimento vai evoluindo ao longo do curso?, (iii) como é que a reflexão sobre a prática e na prática contribui para desenvolver o conhecimento matemático dos futuros docentes?

O novo modelo de formação inicial exige que os futuros professores façam pelo menos 30 ECTs de formação em Matemática na licenciatura, mas a forma e o conteúdo desta formação é da responsabilidade de cada instituição, que define as unidades curriculares, o seu conteúdo e a forma como são lecionadas. Sabe-se que, para além do conteúdo, a forma como o professor aprende tem uma forte influência na forma como vai ensinar. Assim, todos estes aspetos precisam de ser discutidos, tendo por base a investigação já realizada em Portugal e noutros países.

Neste poster apresentam-se resultados preliminares de um questionário aplicado aos futuros educadores de infância e professores do 1.º e 2.º ciclo do ensino básico, à entrada de três instituições de formação, Lisboa, Viseu e Viana do Castelo, com vista a avaliar o conhecimento matemático em áreas consideradas fundamentais a um futuro docente: números e operações, estatística e probabilidades e geometria e medida.

Plano Metodológico

Para caracterizar o conhecimento matemático dos estudantes da LEB, à entrada no Curso, foi elaborado um questionário, que foi aplicado nas três Escolas Superiores de Educação, em outubro de 2011, a todos os alunos a iniciar o 1.º ano, num total de 274: 143 em Lisboa, 57 em Viseu e 74 em Viana do Castelo.

Resultados Preliminares

Da análise das respostas dos alunos ao questionário, verificam-se aspetos críticos relativos ao seu conhecimento, nomeadamente no campo dos números e operações, revelando um desconhecimento da estrutura do sistema de numeração decimal. No domínio da geometria e medida, os resultados revelam que um grande número de estudantes não identifica, por exemplo, os eixos de simetria de um retângulo, e desconhece a desigualdade triangular, surgindo nalgumas das respostas a conceção de que um triângulo tem de ter necessariamente dois lados iguais ou os três lados iguais. São manifestas as dificuldades dos estudantes na explicação do seu raciocínio e na justificação das suas respostas.

Referências bibliográficas

Ball, D. L. Hill, H. C., & Bass, H. (2005). *Knowing mathematics for teaching.* American Educator, Fall, 14-46.

Ma. L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics*. LEA, London.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand knowledge growth in teaching. *Educational researcher*, 15(2), 4-14.

Sowder, J. (2007). The mathematical education and development of teachers. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, pp. 157-223). Charlotte: Information Age Publishing.

CURSOS DE FORMAÇÃO CONTÍNUA DE PROFESSORES: ALTERNATIVA PARA A INSERÇÃO DE RECURSOS COMPUTACIONAIS NO ENSINO DE MATEMÁTICA[52]

Marli Teresinha Quartieri, Maria Madalena Dullius, Adriana Belmonte Bergmann, Teresinha Aparecida Faccio Padilha, Fernanda Eloisa Schmitt, Gabriele Born Marques[53]

Centro Universitário Univates

mtquartieri@univates.br, madalena@univates.br, aberg@univates.br, teresinhafaccio@gmail.com, fschmitt@universo.univates.br, gmarques@universo.univates.br

Com a introdução do computador nos lares e nas escolas surgiram inúmeros programas que possibilitam múltiplas formas de tratar o conhecimento e criar ambientes mais dinâmicos de aprendizagem. Nesse contexto, propomos investigar como os cursos de formação contínua contemplam a questão do uso de recursos computacionais no processo de ensino de Matemática e qual o seu impacto nas atividades desenvolvidas em sala de aula. Algumas ações já foram efetivadas, tais como a realização e análise de questionários enviados a professores de Matemática e Secretários Municipais de Educação e entrevista realizada com a Coordenadora Regional de Educação Estadual. Este poster objetiva apresentar a análise destes resultados e a proposta de oferta de dois cursos de formação contínua, fundamentados na metodologia da pesquisa-ação.

Palavras-chave: Formação Contínua. Recursos computacionais. Matemática.

Contextualização e referencial teórico

A existência de espaços para que o professor possa socializar experiências, aprender e ensinar são importantes durante a sua formação inicial e contínua. Entendemos a formação contínua como todas as ações praticadas pelos docentes em prol da melhoria da sua prática pedagógica e não apenas o mínimo exigido para o exercício da profissão.

Em relação ao uso de tecnologias concordamos com Cysneiros (2011, p. 10) quando expressa que “os professores iniciantes no uso das tecnologias geralmente precisam de muito suporte para vencer os obstáculos iniciais de insegurança, incerteza”. Neste contexto, decidimos investigar a seguinte questão: como os cursos de formação contínua, que abordam a temática da inserção de recursos computacionais, influenciam na prática pedagógica dos professores de Matemática?

---

52 O presente trabalho teve o apoio da CAPES, entidade do Governo Brasileiro voltada para a formação de recursos humanos.

53 Bolsista FAPERGS – Fundação de Amparo à Pesquisa do Rio Grande do Sul.

Dados emergentes de algumas ações efetivadas

Elaboramos três instrumentos de coleta de dados: um questionário, que foi enviado, por *e-mail,* a cento e setenta escolas das redes pública e privada da região do Vale do Taquari, situada na região central do Rio Grande do Sul/Brasil. Obtivemos retorno de quarenta e seis questionários. Um segundo questionário foi encaminhado a vinte e oito Secretários Municipais de Educação. Além disso, realizamos uma entrevista com a Coordenadora Regional de Educação Estadual da região. Os objetivos com estes instrumentos foram: investigar a existência de laboratórios de informática nas escolas; verificar o uso de recursos computacionais nas aulas de Matemática; investigar a participação dos professores em cursos de formação contínua, bem como os temas abordados nestes cursos.

Em relação a existência de laboratórios de informática, professores e Secretários Municipais responderam positivamente. Já a Coordenadora Estadual comentou que apenas 90% das escolas possuem laboratórios. Contudo apenas 47% dos professores afirmaram usar recurso computacional nas aulas de Matemática.

Em relação as temáticas abordadas nos cursos de formação contínua já oferecidos, apenas 39% dos Secretários disseram que os mesmos contemplam a questão das tecnologias no ensino de Matemática, enquanto que a Coordenadora comentou que o tema é pouco explorado. Destacamos, porém, o interesse geral na abordagem do referido tema em cursos de formação contínua.

Diante deste contexto, pretendemos, no segundo semestre de 2012, ministrar dois cursos de formação contínua. Os cursos terão por foco a discussão e problematização de atividades matemáticas utilizando *softwares* e jogos interativos e estarão fundamentados em princípios da pesquisa-ação, que segundo Moreira e Caleffe (2008) é uma intervenção em pequena escala no mundo real, na qual os efeitos desta intervenção são analisados, objetivando contribuir para a prática educacional.

Resultados esperados

Esperamos que os professores por meio das experiências vivenciadas, durante a realização das nossas atividades, sintam-se motivados, estimulados e encorajados a usar tecnologias nas aulas como ferramenta auxiliar no processo de ensino e de aprendizagem da Matemática, em particular, na Educação Básica.

Referências bibliográficas

Cysneiros, P. G. (2011). *Professores e Máquinas: Uma Concepção de Informática na Educação.* Acedido em 15 de abril, 2011, em http://edutec.net/Textos/Alia/PROINFO/prf_txtie08.htm.

Moreira, H.; Caleffe, L. G. (2008). *Metodologia da pesquisa para o professor pesquisador*. Rio de Janeiro: Lamparina.

FORMAÇÃO INICIAL DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA – CONTRIBUIÇÕES PARA UM PROCESSO DE INCENTIVO À DOCÊNCIA

Inocêncio Fernandes Balieiro Filho
UNESP – Ilha Solteira – Brasil
balieiro@mat.feis.unesp.br

Resumo

O objetivo deste trabalho é discutir as reflexões dos bolsistas do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual Paulista – UNESP – Campus de Ilha Solteira sobre o processo de ensino e de aprendizagem de Matemática dos alunos das turmas de 7º e 9º ano de uma escola pública estadual da cidade de Ilha Solteira, no Estado de São Paulo. Para isso, apresentamos as ações que foram desenvolvidas e os resultados obtidos ao longo do segundo semestre de 2011. Para a construção de nossa análise e discussão, consideramos os dados obtidos por meio do relatório semestral que foi elaborado valendo-se de anotações de campo, dos relatórios individuais dos bolsistas e do relatório da professora supervisora da Escola.

Palavras-chave: Licenciatura; Matemática; Docência.

Introdução

A maioria dos cursos de Licenciatura em Matemática tem pouca procura e elevados índices de desistência. No passado, a profissão docente era vista com respeito e admiração pela sociedade. Atualmente, diante das exigências de diferentes competências profissionais, a identidade profissional dos docentes passa por um processo de reavaliação e reconstrução. Nesse sentido, torna-se cada vez mais importante, durante a formação inicial do professor de Matemática, propor ações que possibilitem a inserção dos licenciandos no contexto sócio-cultural da escola, ou seja, é imprescindível que o processo de formação incentive o desenvolvimento de experiências que insiram o licenciando, desde o primeiro ano, no ambiente escolar (Sousa, Gama e Passos, 2010). Assim, vemos o PIBID como um projeto que favorece um maior comprometimento dos licenciandos com os objetivos da sua formação.

Objetivos do PIBID - 2011

O objetivo central do subprojeto de Matemática do PIBID na UNESP de Ilha Solteira é incentivar a participação do licenciando em Matemática no cotidiano da escola pública, contribuindo para o desenvolvimento de um processo de formação que incentive a docência, tomando-se por base a valorização da carreira do magistério.

Inicialmente, foram realizadas reuniões com a supervisora, com os bolsistas e com as professoras, a coordenadora pedagógica e a diretora da escola. Após a determinação dos horários de trabalho dos bolsistas na escola, foram iniciadas as atividades na escola. Para o contato inicial com os alunos, os bolsistas passaram a participar das aulas dos professores de Matemática, nos períodos da manhã e da tarde.

Tanto as professoras de Matemática, como a Direção da Escola mostraram uma preocupação com o desempenho em Matemática apresentado pelos alunos na prova do SARESP. Assim, vimos esse aspecto como uma oportunidade para dar início ao trabalho a ser desenvolvido e, gradualmente, os bolsistas foram participando de forma mais ativa nas aulas, passando a auxiliar os docentes e os alunos.

As atividades desenvolvidas

Os alunos bolsistas passaram a acompanhar as professoras nas aulas de Matemática das turmas do 7.º e do 9.º ano, já que, como destacamos anteriormente, o interesse inicial da escola era buscar alternativas para obter um melhor desempenho dos alunos na prova do SARESP e essas seriam as turmas avaliadas.

Com base nesse acompanhamento inicial, os bolsistas apontaram que os alunos e as turmas apresentavam dificuldades específicas, mas os conteúdos relacionados à Números Racionais, Expressões Algébricas, Potenciação e Geometria eram uma deficiência comum em todas as salas. Segundo os relatórios apresentados pelos bolsistas, os alunos apresentam dificuldades de leitura e interpretação na resolução dos problemas que são desenvolvidos em sala de aula.

Considerações

O trabalho desenvolvido pelos bolsistas na escola, no 2.º semestre de 2011, ficou restrito à sala de aula. Não houve a participação dos alunos em reuniões pedagógicas, reuniões com os pais ou outras atividades extraclasses.

A preocupação das professoras de Matemática com o SARESP foi o que possibilitou nossa entrada na escola, mas certamente tal fato limitou o trabalho dos bolsistas.

O PIBID tem promovido um processo de reflexão, dos bolsistas, sobre a prática em sala de aula e sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de Matemática. Essas reflexões têm levado os alunos a formular questões para a investigação do processo de ensino e de aprendizagem de Matemática.

Referência Bibliográfica

Sousa, M. C.; Gama, R.P.; Passos, C. L. B. (2010). Aprendizagens da docência reveladas por licenciandos de Matemática no projeto PIBID. Em: *Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática*. Ilhéus: Via Litterarum, 2010. Acesso em 25 de fevereiro de 2012, em http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/ENEM10.