A T A S

DO XXV SEMINÁRIO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Editores

Maria Helena Martinho
Rosa Antónia Tomás Ferreira
Ana Maria Boavida
Luís Menezes

Braga 2014

FICHA TÉCNICA

Título
ATAS DO XXV SEMINÁRIO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Editores
Maria Helena Martinho
Rosa Antónia Tomás Ferreira
Ana Maria Boavida
Luís Menezes

ISBN
978-972-8768-56-0

Associação de Professores de Matemática

Apoios
Centro de Investigação em Educação Matemática – CIEd

Braga, abril de 2014

Índice

Introdução

O XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática (SIEM), organizado pelo Grupo de Trabalho de Investigação (GTI) da Associação de Professores de Matemática, decorreu nos dias 9 e 10 de abril de 2014, na Escola Secundária de Alberto Sampaio em Braga. Ao longo dos anos, o SIEM tem vindo a afirmar-se como um espaço de divulgação, partilha e discussão de ideias e de trabalhos, desenvolvidos ou em curso, do âmbito da Educação Matemática. Este ano, na senda do que vem acontecendo desde 2009, o SIEM conta com o processo de revisão científica por pares de todas as comunicações e posters apresentados, facto que tem contribuído para a melhoria dos trabalhos apresentados.

O SIEM procura estabelecer uma ligação forte entre a investigação e o ensino da Matemática. A articulação entre o SIEM e o ProfMat (Encontro Nacional de Professores de Matemática), com partilha de parte do programa, visa atingir esse objetivo. O programa científico do XXV SIEM inclui duas conferências plenárias, o espaço GTI e um painel. A primeira conferência, proferida por Fátima Mendes, da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal, intitula-se "Uma experiência de ensino centrada na multiplicação: Especificidades e desafios". Inés Gómez-Chacón da Universidade Complutense de Madrid, profere a outra conferência, que é partilhada com o ProfMat, com o título "Visualización y razonamiento: Creando imágenes para comprender las matemáticas". O espaço GTI é dedicado a uma entrevista a esta investigadora espanhola sobre o desenvolvimento da investigação em Espanha e sobre as suas perspectivas relativamente às relações entre investigação e ensino.

O painel plenário, intitulado "Para evitar o desastre no ensino da Matemática", é moderado por Henrique Manuel Guimarães do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa (IE-UL). Nele participaram João Pedro da Ponte, do mesmo Instituto, que apresenta os "resultados do TIMSS 2011 e PISA 2012"; Ana Cristina Tudella, do Agrupamento de escolas de Fr. Gonçalo de Azevedo de S. Domingos de Rana, que discute "o prejuízo que se anuncia com o programa de Matemática do ensino básico homologado em 2013"; Jaime Carvalho e Silva, do departamento de Matemática da FC T da Universidade de Coimbra, que apresenta a "proposta

de um 'novo' programa de Matemática A para o ensino secundário"; e finalmente Leonor Santos, do IE-UL e presidente do SPIEM, com um "olhar da investigação em educação matemática sobre o que está a acontecer no ensino desta disciplina".
As vinte e seis comunicações estão organizadas em oito simpósios: Resolução de Problemas no ensino e aprendizagem da Matemática; Números e Geometria nos primeiros anos do ensino básico; Conhecimento profissional do futuro professor de Matemática; Práticas profissionais do professor de Matemática, Educação matemática e cidadania; Currículo de Matemática: Diferentes perspetivas; Formação de professores de Matemática; e Aprendizagem da Matemática. Adicionalmente sete posters apresentam investigação em curso em diversas temáticas. Comunicações e posters foram sujeitas a três revisões por pares, com uma taxa de rejeição de 28%.
O XXV SIEM conta com a participação de perto de uma centena de participantes com uma assinalável presença de investigadores estrangeiros, principalmente brasileiros.

Braga, abril 2014
A Comissão Organizadora

Conferências Plenárias

Visualización y razonamiento.
Creando imágenes para comprender las matemáticas

Inés Mª Gómez-Chacón
Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid
igomezchacon@mat.ucm.es

Resumen. *Varias investigaciones han demostrado que las actividades que promueven la construcción de las imágenes pueden mejorar enormemente el aprendizaje de las matemáticas. En esta conferencia se reflexionará sobre dos aspectos: el sentido epistémico de la visualización y el razonamiento matemático visual en contextos tecnológicos. De forma específica a través de datos empíricos procedentes de investigaciones realizadas con profesores, se reflexiona sobre las características de visualización geométrica en la transición de la Geometría II (geometría proto-axiomática natural) a la Geometría III (geometría completamente axiomática) en entornos interactivos y sobre algunos obstáculos y oportunidades de la enseñanza de la visualización tanto de carácter cognitivo como afectivo.*

Abstract. *Research has shown that activities that promote the formation of images can greatly improve the process of learning mathematics. This conference will consider two aspects: the epistemic sense of visualization and visual mathematical reasoning in technological contexts. These concepts will be analysed through empirical data collected from research conducted with teachers concerning the characteristics of geometric visualization during the transition from Geometry II (natural, proto-axiomatic geometry) to Geometry III (fully axiomatic geometry) in interactive environments. The conference will also include obstacles and opportunities that may arise during the teaching of visualization techniques, both cognitive and affective.*

Palabras claves: Representaciones; Visualización; Intuición; Formación de professores; Secundaria; Pensamiento Matemático Avanzado.

1. Introducción

El tema central de esta conferencia – visualización matemática y las relaciones entre los procesos de intuición y razonamiento – tiene una historia larga de discusión en los ámbitos de investigación. ¿Por qué traer este tema de nuevo a debate? Las razones por las que planteamos estudios sistemáticos desde 2006 son: razones epistemológicas sobre el conocimiento matemático y la reflexión generada por el impacto real o potencial de la tecnología en la educación matemática.

Martinho, M. H., Tomás Ferreira, R. A., Boavida, A. M., & Menezes, L. (Eds.) (2014).
Atas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática. Braga: APM., pp. 5–28

Reflexionar hoy en este contexto de la SIEM, en el que estamos conjuntamente trabajando investigadores y profesores, requiere volver a examinar brevemente las conceptualizaciones trabajadas y los resultados de investigaciones que nos han precedido. Esto es lo que voy a hacer en la primera parte de este texto, antes de situarme, en la segunda, en una actitud más proactiva. Apoyo esta reflexión en mi experiencia personal como profesora universitaria en una facultad de Ciencias Matemáticas e investigadora en educación matemática. La respuesta a las cuestiones tratadas no sólo vendrán de las investigaciones realizadas bajo mi responsabilidad, sino de algunos estudios internacionales que ampliamente han tratado el tema (p. e. Presmeg, 2006).

2. Algo de historia y conceptualización de visualización

A lo largo de las dos últimas décadas, la visualización está siendo reconocida como un aspecto importante del razonamiento matemático. Además, los estudios especializados han puesto de manifiesto que actividades que fomentan la construcción de imágenes pueden mejorar notablemente el aprendizaje matemático y contribuir de manera significativa a que la comprensión en los estudiantes sea más profunda (Wheatley & Brown, 1994). En este sentido, y como se pone de manifiesto, por ejemplo, en el trabajo de Presmeg (Presmeg, 2006) – en que la autora sintetiza más de ciento cincuenta estudios distintos sobre el tema de la visualización en la educación matemática –, los procesos intuitivos y de visualización se están revelando como un campo de investigación enormemente interesante en sí mismo y como un recurso alternativo muy efectivo para ayudar a los estudiantes a hacer matemáticas.

El documento de Presmeg (2006) permite constatar que hasta la década de los 80 apenas pueden encontrarse investigaciones específicas sobre visualización en Educación Matemática (EM). Es a partir de ese momento, de la mano de la psicología, cuando se retoman o inician estudios. Podríamos diferenciar distintas etapas. Una primera, que denominamos de los inicios: en la primera mitad del s. XX, los enfoques conductistas influyen en que este tema no sea una prioridad. Sin embargo, en la década de 1970 a 1980 emerge de nuevo la investigación en imágenes desde su base psicológica con metodologías tanto cuantitativas como cualitativas, sobre todo las últimas. Se investigan tanto las ventajas y desventajas, como los aspectos cognitivos y afectivos. Se realizan los primeros estudios sobre pensamiento geométrico espacial (con sólidos), relación con la intuición y representaciones de funciones con ordenadores.

Una segunda etapa se podría considerar en los años 90, en la que la visualización se reconoce como un campo específico de investigación de EM. Se realizan estudios en varias líneas sobre: a) desarrollo curricular y áreas particulares de las matemáticas; b) búsqueda de tipologías de enseñanza y prácticas de clase que promueven (o inhiben) una visualización matemática efectiva – entre ellas se encuentran las que estudian la influencia de las tecnologías (visualizaciones dinámicas) o las que estudian diferencias individuales, de género y entre el experto/novicio en el uso de la visualización, y uso que hacen los matemáticos expertos –; c) establecimiento de categorías de imágenes (p. e. Presmeg) y esquemas de imaginería (p. e. Dörfler); y d) status de la visualización y rechazo a visualizar en matemáticas – identificación de imágenes prototípicas y dificultades con la generalización y estudios longitudinales para explorar la evolución individual de las formas y los usos de imágenes (por ejemplo, la confirmación de la hipótesis de Kosslyn).

Y la tercera etapa, Presmeg la sitúa del 2000 en adelante. En este periodo se amplía la visión de la visualización hacia sus aspectos semióticos. Se focaliza en cómo toman cuerpo las ideas matemáticas, de ahí los trabajos sobre gesticulación. Se afianzan los estudios sobre las conexiones entre diferentes registros matemáticos y flexibilidad cognitiva. Y se constata la necesidad de dar consistencia a teorías que puedan unificar todo el campo de visualización dentro de la educación matemática.

Desde 2006, no sólo queda abierta la necesidad de unificación de teorías, sino que se demandan trabajos prospectivos en la relación entre imágenes personales y aspectos emocionales del aprendizaje, o en consonancia con los enfoques crecientes de la neurociencia – neurocognitivo –, y en discriminar más finamente cómo ayudan o perjudican las imágenes en los procesos de abstracción, generalización y 'reification' de los objetos matemáticos. Será desde esta perspectiva prospectiva donde se sitúan las investigaciones realizadas en nuestro equipo, que en este artículo se presentan en las secciones 2 y 3.

El término visualización se usa de distintas maneras en el contexto de las matemáticas y la didáctica de las matemáticas. Algunas definiciones de uso frecuente son las siguientes:

> Visualización o imagen de un concepto, es la estructura cognitiva total asociada al concepto, que incluye todas las imágenes mentales y propiedades y procesos asociados (Tall & Vinner, 1981).
>
> En el prefacio a Geometría e Imaginación, David Hilbert escribió: "En matemáticas [...] encontramos dos tendencias presentes. Por un lado, la

> tendencia hacia la abstracción busca cristalizar las relaciones lógicas inherentes a la maraña de material que se está estudiando, y organizar tal material de una forma sistemática y ordenada. Del otro lado, la tendencia hacia el entendimiento intuitivo favorece una comprensión más inmediata de los objetos que se estudian, una conexión viva con ellos, por así decirlo, que hace hincapié en el significado concreto de sus relaciones. Con la ayuda de la imaginación visual [Anschauung] podemos iluminar los variopintos hechos y problemas de la geometría y, más allá de esto, es posible en muchos casos describir el esquema geométrico de los métodos de investigación y demostración...". Siguiendo a Hilbert, utilizamos el término visualización para describir el proceso de producir o utilizar representaciones geométricas o gráficas de conceptos, principios o problemas matemáticos (Zimmerman & Cunningham, 1991).
>
> La visualización es la capacidad/acción de relacionar distintas representaciones de un mismo objeto matemático dándole sentido (Duval, 1999).
>
> Cuando una persona crea un arreglo espacial (incluyendo una inscripción matemática), hay una imagen visual en la mente de la persona guiando tal creación. Por tanto, la visualización incluye el proceso de construir y transformar tanto el imaginario visual mental como las inscripciones de una naturaleza espacial que puedan estar involucradas en el quehacer matemático (Presmeg, 2006).

En los trabajos que se presentan a continuación vamos a entender la visualización desde una concepción global:

> Visualización es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre figuras, imágenes, diagramas, en nuestra mente, sobre el papel o con herramientas tecnológicas con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas y avanzar la comprensión (Arcavi, 2003, p. 217).

Clarificada la conceptualización de visualización, a continuación se irá integrando la reflexión teórica que subyace al estudio empírico con una reflexión en torno a varios aspectos principales: el sentido epistémico de la visualización, el papel de la coordinación de los registros gráfico y analítico en la comprensión de los conceptos y las características de la visualización en contextos tecnológicos. En particular, se destacarán algunas características de la visualización a tener en cuenta en el diseño de una propuesta de enseñanza y que van más allá de la flexibilidad entre registros de representación.

3. Reflexión epistemológica sobre ideas y visualizaciones matemáticas

3.1. La actividad del matemático ejemplo de visualización

Junto a la definición expresada en la sección anterior queremos hacer notar también que la visualización es la "intencionalidad" (Gianquinto, 1992), que no está presente en el mero ver. La consideramos “una manera de ver las cosas” (Davis, 1993). Esta expresión de Davis sugiere que los conceptos matemáticos son “cosas” para la persona en cuestión, y por lo tanto, “una manera de mirar” es una síntesis (a menudo) tácita de comprender las propiedades de estas cosas y requiere de una comprensión de los conceptos más allá de la presentación visual.

En este marco, se ha situado la reflexión epistemológica en torno a las ideas y visualizaciones matemáticas y la preparación de materiales que hemos llevado a cabo. Las preguntas que nos hemos planteado han sido: ¿Qué conocimiento Matemático necesita el profesor para “enseñar a visualizar”? ¿Cómo realizar una transposición del conocimiento procedente de la investigación Matemática (y de Educación Matemática) al espacio de docencia universitaria? ¿Cómo transmitir el sentido epistémico de la visualización en los contextos de enseñanza?

Una de las mayores aportaciones de la Filosofía y la Historia de la Matemática es considerar la matemática como una ciencia temporal y conectada con la sociedad que le ha permitido su desarrollo. Gianquinto (2005) distingue varias fases en la actividad global del matemático: descubrimiento, explicación, justificación y aplicaciones. Estas fases ponen de manifiesto facetas del trabajo matemático, algunas de ellas con influencia implícita en la docencia. El contexto de descubrimiento precisa las condiciones que permiten el hallazgo y la elaboración de los conceptos a partir de la resolución de problemas. La explicación matemática a menudo involucra imágenes, representaciones, diagramas o imágenes mentales. La justificación se relaciona con la forma en que un resultado se presenta, se defiende, se justifica en una comunidad investigadora. Estas diferentes fases o contextos de la actividad del matemático no se refieren a lo puramente científico, sino que, a lo largo del siglo pasado, distintos matemáticos han señalado la necesidad de tener en cuenta en la invención matemática la naturaleza psicológica, como es el caso de los ensayos de Hadamard (1908/1945) o, posteriormente, los trabajos de Lakatos y Kuhn que permitieron enriquecer el contexto de descubrimiento, introduciendo una perspectiva más sociológica, como un contexto destinado a favorecer el trabajo de los matemáticos: “como seres humanos que hacen avanzar la comprensión humana de las matemáticas” (Thurston, 1995).

Por tanto, definir las matemáticas a partir de la actividad de los matemáticos nos obliga a mirar sus trabajos para comprender mejor la naturaleza y el contenido de las mismas. A lo largo de dos cursos académicos 2009-10 y 2010-2011 coordiné junto a la profesora

Capi Corrales, dentro del Proyecto de la Cátedra Miguel de Guzmán, en la Facultad de Ciencias Matemáticas, el Seminario de Ideas y Visualizaciones Matemáticas (Corrales & Gómez-Chacón, 2011), cuyo punto de partida está muy bien recogido en las siguientes palabras de Miguel de Guzmán (1996):

> Con la visualización en matemáticas se pretende otra cosa (no es la visualización psicológica). Las ideas, conceptos y métodos de las matemáticas presentan una gran riqueza de contenidos visuales, representables intuitivamente, geométricamente, cuya utilización resulta muy provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos como en la manipulación con ellos para la resolución de los problemas del campo. […] Esta forma de actuar con atención explícita a las posibles representaciones concretas en cuanto desvelan las relaciones abstractas que al matemático interesan constituye lo que denominamos visualización en matemáticas (p. 15).

Basados en los principios del debate científico, a lo largo de dieciséis sesiones recogidas en los materiales incluidos en Corrales e Gómez-Chacón (2011), matemáticos expertos en distintas áreas de conocimiento, reflexionamos sobre algunos conceptos, textos y problemas esenciales al devenir de las matemáticas y, ya sea construyendo ejemplos de situaciones de visualización en términos "de ver", ya sea presentando los elementos conceptuales que sirvieron para dar origen o cuerpo a la obra matemática, intentan extraer de las propias Matemáticas ideas e imágenes que, al contribuir a la interacción entre lo visual y lo analítico, puedan ayudar a los estudiantes del Grado en Matemáticas a comprender mejor esta disciplina. Los temas tratados estuvieron articulados en tres categorías: Temas (Número, El infinito, Límite, Dimensión, Espacio abstracto, Incertidumbre); Textos (Elementos de Euclides, Aritmética de Diofanto, Introductio de Euler, Disquisiciones Aritméticas de Gauss, Fundamentos de la geometría); y finalmente Problemas (Mecánica de fluidos, Los sistemas dinámicos de biología, La topología geométrica y dinámica, Algoritmos y su diseño, Visualización e Intuición: Investigación en Educación Matemática).

La visualización en estos trabajos tiene un sentido epistémico, tratando de responder a cuestiones de cómo y hasta qué punto se deben utilizar las representaciones visuales, además de como evidencia y medio de descubrimiento de un enunciado matemático, como parte de su justificación. Como los trabajos de Gianquinto han mostrado, la respuesta se considera afirmativa en el caso de la Geometría y la Aritmética, pero sin embargo, parece no estar tan clara la misma respuesta para el Análisis elemental o en otras áreas de conocimiento que hemos tratado en las que el pensamiento visual se considera un medio de descubrimiento más restringido.

Por último, en línea con una profundización matemática y epistemológica, reseñamos aquí brevemente un trabajo reciente de tesis doctoral europea dirigido por mi (Souto, 2013, Souto & Gómez-Chacón, 2012) cuya finalidad es la caracterización y potenciación de la "enseñanza de la visualización" en un curso de Álgebra Lineal (AL) para mejorar la comprensión de los estudiantes (trata de responder a la cuestión ¿Cómo "enseñar a visualizar" para potenciar el aprendizaje y la comprensión de los conceptos matemáticos del Álgebra Lineal?). Comprender, desde diversos puntos de vista (epistemológico, institucional, cognitivo y afectivo) el rol de la visualización en la comprensión (de la disciplina del AL, en general, y del concepto Espacios Vectoriales Cociente (EVC)) obteniendo ideas innovadoras de mejora. Para ello se ha observado durante dos años la docencia universitaria de cuatro matemáticos en el Grado en Matemáticas. Los resultados de este estudio permiten precisar algunos principios de diseño para potenciar la visualización relativos al conocimiento matemático del profesor tanto en aspectos de la visualización como producto y habilidad como proceso.

3.2. Pensamiento Geométrico: Génesis de razonamiento visual, instrumental y discursivo

En el estudio de los procesos de razonamiento matemático geométrico el papel de la intuición y la visualización es clave (Duval, 2005) y así ha sido señalado en los distintos modelos de aprendizaje. Son destacables el modelo de Van Hiele (Van Hiele, 1986), procedente de la escuela holandesa, y el de Houdement y Kuzniak (1998, 2006, 2010), en el ámbito de la escuela francesa.

El modelo de Espacio de Trabajo de la Geometría (ETG) y paradigmas se destaca que en el dominio de la Geometría aparecen claramente tres paradigmas, que se designan bajo los términos de Geometría I (o Geometría natural), Geometría II (o Geometría natural axiomática) y, finalmente, Geometría III (o Geometría axiomática formal). La idea que sustenta este modelo es que sólo se puede hablar de trabajo geométrico cuando la actividad del alumno es a la vez lo suficientemente coherente y compleja como para permitir la puesta en ejecución de una actividad de raciocinio.

Estos autores introducen dos niveles conectados en estructurar ETG: el nivel epistemológico y el nivel cognitivo.

1. El nivel epistemológico. La actividad geométrica en su dimensión puramente matemática se caracteriza por tres componentes: un espacio real y local, como material de apoyo con un conjunto de objetos concretos y tangibles; un conjunto de artefactos, tales como instrumentos de dibujo o de *software*; y un marco teórico de referencia sobre la base de definiciones y propiedades. Estas componentes no están simplemente yuxtapuestas, sino que se deben organizar con un objetivo preciso en función del ámbito matemático en su dimensión epistemológica. Esto justifica el nombre de plano epistemológico dado a este primer nivel. En este marco teórico, el concepto de paradigma geométrico reúne a los componentes del plano epistemológico. Cuando una comunidad se pone de acuerdo sobre un paradigma, podrá formular problemas y organizar sus soluciones con herramientas o estilos de pensamiento preciso que da lugar al ETG de referencia.

2. El nivel cognitivo. Un segundo nivel, centrado en la articulación cognitiva de los componentes del ETG. Este plano nos ayuda a entender cómo los grupos, y también las personas particulares, hacen uso y adecuan el conocimiento geométrico en la práctica. Siguiendo a Duval (2005), estos autores destacan tres procesos cognitivos implicados en la actividad geométrica:

- Una visualización del proceso conectado a la representación del espacio y el material de apoyo.
- Un proceso de construcción determinado por instrumentos (reglas, compás, manejo de *software*, etc.) y configuraciones geométricas.
- Un proceso discursivo que transmite la argumentación y las pruebas.

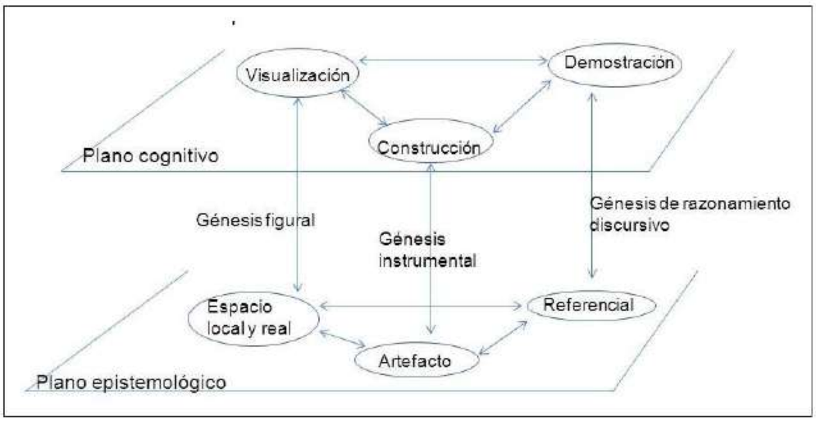


Figura 1. Espacio de trabajo geométrico: planos y génesis (Kuzniak, 2011)

Este enfoque busca comprender mejor la creación y desarrollo de todos los componentes y niveles mostrados en el diagrama de la Figura 1. El trabajo geométrico se ve como un proceso que implica la creación, desarrollo y transformación. Todo el proceso se estudia a través de la noción de génesis, utilizado en un sentido general que se centra no sólo en el origen, sino también en el desarrollo y la transformación de las interacciones. A través del proceso de transformación, se estructura el espacio de trabajo geométrico.

Los dos niveles, cognitivos y epistemológicos, necesitan estar articulados con el fin de garantizar un trabajo geométrico completo y coherente. Este proceso supone una serie de transformaciones que es posible identificar a través de tres génesis fundamentales, como se muestra en la Figura 1:

1. Una *génesis figurativa* y semiótica que proporciona a los objetos tangibles su estado de funcionamiento de los objetos matemáticos.

2. Una *génesis instrumental* que transforma los objetos en las herramientas en el proceso de construcción.

3. Una *génesis discursiva* de la prueba que da sentido a las propiedades utilizadas en el razonamiento matemático.

Las ciencias cognitivas han puesto de relieve los procesos para el estudio del pensamiento geométrico: percepción, lenguaje y acción. En el lenguaje de la Geometría, la visión está constituida por la percepción que conduce a los procesos de visualización. La acción se refleja fuertemente en los procesos de construcción. Finalmente, en el marco de la Geometría la articulación de los procesos de razonamiento está estrechamente asociada a las cuestiones de inferencia y toma de decisión. En definitiva, cada componente del trabajo geométrico está asociada a estos procesos cognitivos. Estudiar estas génesis y las conexiones entre ellas en ambientes tecnológicos puede suponer un avance para ofrecer a un profesor conocimiento estratégico para aprender a enseñar con tecnología (ver sección 4.3.).

4. Visualización en contextos tecnológicos. Algunos resultados desde nuestro contexto

La preocupación por el conocimiento matemático y didáctico del profesor en la enseñanza y aprendizaje con tecnología nos ha hecho buscar respuesta a distintas cuestiones: ¿Qué rechazo o preferencia por el razonamiento visual se produce en contextos computacionales? ¿Cómo la tecnología media en el pensamiento matemático e interactúa con las estructuras matemáticas? ¿Cómo se producen las transiciones entre génesis figural-semiótica, instrumental y discursiva en el trabajo geométrico? ¿Qué mantiene al estudiante en una ruta productiva de aprendizaje? ¿Cómo "enseñar a visualizar" para potenciar el aprendizaje y la comprensión de los conceptos matemáticos?

Con objeto de dar respuesta a algunas de estas cuestiones, a continuación hemos elegido algunos resultados y ejemplos procedentes de nuestras investigaciones recientes (Gómez-Chacón, 2012, 2014).

4.1. Rechazo o preferencia por lo visual en los estudiantes

Distintas investigaciones han señalado que una de las dificultades que pueden encontrar los profesores para trabajar la matemática mediante razonamiento visual es el rechazo o la no valoración por parte de los estudiantes (Eisenberg & Dreyfus, 1991; Eisenberg, 1994). En un estudio con 29 estudiantes de primer curso de la Licenciatura de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid (Souto & Gómez-Chacón, 2011), evaluando la influencia del método visual para la comprensión del concepto de integral, se puso de manifiesto el uso limitado que hacen los estudiantes del registro visual y la dificultad cognitiva propia del uso del registro visual como una de las causas para el rechazo de la visualización. Para este grupo de estudiantes, el concepto de integral se identifica con el cálculo de primitivas y con la aplicación indiscriminada de la regla de Barrow. La integral, para ellos, no comporta ningún proceso de convergencia ni tampoco ningún aspecto geométrico. Es, por tanto, un proceso puramente algebraico. La mayoría de los problemas que se les plantearon estaban basados en conceptos que tiene una interpretación visual, y esto hizo que los estudiantes no pudieran hacer muchos de los problemas de la lista, ya que "parecen no haber aprendido" a explotar las representaciones visuales asociadas con los conceptos y muestran déficit en la coordinación entre el registro visual y analítico o en la combinación de ambos.

En otro de los estudios sobre pensamiento geométrico y aprendizaje con sistemas de geometría dinámica (SGD), realizado también en nuestra facultad, con 30 estudiantes formándose como profesores de Secundaria (Gómez-Chacón, 2012 & 2014), se buscó detectar factores que favorecían o inhibían el uso del pensamiento visual, focalizando el estudio en qué dificultades estaban generadas por las creencias sobre el razonamiento visual y qué tipologías de emoción se derivaban de ellas. Los datos pusieron de manifiesto que todos los estudiantes consideraban que el razonamiento visual es algo central en la resolución de problemas matemáticos. Sin embargo, pudimos observar que frente a esta misma creencia se produjeron emociones diferentes. En un primer momento estas emociones fueron categorizadas como: gusto (77%), disgusto (10%) e indiferencia (13%)

hacia el objeto. Las razones que aducen para justificar estas emociones son: a) placer/gusto como una indicación de que uno puede lograr un conocimiento experto (30% de los estudiantes); b) placer/gusto cuando se progresa en la esquematización y se logra una forma conceptual suave (35%); c) placer y gusto como control y creación de aprendizaje profundo (40%); d) placer y gusto porque está asociado con aspectos intuitivos y lúdicos del conocimiento matemático (20%); e) emociones de indiferencia ante la visualización (13%); f) no placer y gusto cuando la visualización tiene una demanda cognitiva más fuerte (10%).

Una respuesta similar se obtuvo cuando se exploraron las creencias relacionadas con el uso de *software* de Geometría dinámica, como una ayuda para la comprensión y la visualización del concepto de lugar geométrico. Todos los estudiantes afirmaron que les resultó útil y el 80% expresaron emociones positivas sobre la base de su fiabilidad, rapidez de ejecución y el potencial para desarrollar su intuición y visión espacial. Agregaron que la herramienta les ayudó a superar bloqueos mentales y mejorar su confianza y motivación. Como futuros docentes, hicieron hincapié en que el programa de Geometría Dinámica (GeoGebra) puede favorecer no sólo el pensamiento visual, sino que ayuda a mantener una vía afectiva productiva. Indicaron que el trabajo con la herramienta les favorece creencias positivas hacia las matemáticas y hacia sí mismos como aprendices y estimula su propia capacidad y voluntad de participar en el aprendizaje de las matemáticas.

En síntesis, estos resultados muestran que la valoración o rechazo por la visualización está ligado al área de conocimiento, así como al uso de determinados instrumentos (atribución de gran valor al aprendizaje con ordenador). La elección de la representación en la que se resuelve un problema parece depender tanto del propio problema como de las preferencias y habilidades visuales personales. En distintos trabajos con futuros profesores (ver, por ejemplo, Gómez-Chacón, 2012 & 2014) hemos identificado distintas rutas afectivas-cognitivas que sigue su trabajo matemático en Sistemas de Geometría Dinámica. Los resultados ponen de manifiesto una serie de rasgos que caracterizan el afecto local y global de los sujetos. Rasgos de afecto local, cuando trabajan procesos de visualización y representación, se pusieron de manifiesto en el equilibrio entre razonamiento algebraico y gráfico y la comprensión de la herramienta, que se manifiesta en la deconstrucción instrumental de las figuras. Y respecto al afecto global, se puso de manifiesto la influencia de la motivación así como las metas y autoconcepto de los sujetos.

4.2. Visualización y trabajo geométrico con ordenador

Un objetivo principal en las investigaciones recientes consiste en caracterizar y especificar la naturaleza exacta del trabajo geométrico realizado por los estudiantes de matemáticas en los contextos tecnológicos con programas de Geometría Dinámica (SGD). Respecto al aprendizaje geométrico en contextos tecnológicos, son varias las cuestiones que se nos plantean: ¿Cómo se articulan las tres tipologías de génesis necesarias para la construcción de pensamiento geométrico en la integración de *software* de sistemas dinámicos (Cabri, GeoGebra, etc.) en el trabajo geométrico? ¿Qué rol desempeña el instrumento (*software*, p.e. GeoGebra) en la construcción del espacio geométrico? ¿Cómo interviene la utilización de los SGD en el paso de la Geometría I a la Geometría II (axiomática natural) o de la Geometría II a la III (axiomática formal), particularmente en los procesos visualización e intuición geométrica, y cómo influye el uso de este *software*? ¿Qué nuevo rol tienen las propiedades geométricas cuando se usa *software* dinámico? ¿Cómo puede hacer un profesor en su actividad docente que el artefacto (p.e. *software* de SGD) sea un instrumento matemático?

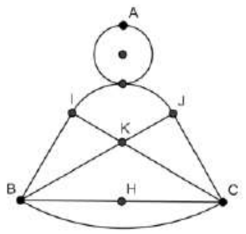
En nuestro caso, utilizando el marco teórico de los espacios de trabajo geométricos (ETG) mencionado en la sección 3 y el enfoque instrumental (Artigue, 2002), hemos podido constatar varios hechos en los estudiantes: no dominio del ciclo de razonamiento (sec. 4.3.) y la necesidad de profundizar en la visualización icónica *versus* la visualización no icónica (sec. 4.4.).

4.3. Ciclo de razonamiento

En distintas investigaciones hemos constato el carácter incompleto del ciclo de trabajo geométrico del alumnado. Para dominar todo el ciclo de razonamiento, los estudiantes deben dominar al mismo tiempo las técnicas aplicadas en tres génesis – figurativa, instrumental y discursiva – y mostrar un grado de flexibilidad cognitiva en el uso de diferentes facetas del trabajo geométrico. Volver al instrumento para poner fin al ciclo puede ser problemático entre los estudiantes, que apoyan su investigación en la resolución de los problemas sobre los aspectos figurativos y discursivos, cuando no hay congruencia entre el instrumento teórico y un instrumento informático.

Para ilustrar este carácter incompleto del ciclo de razonamiento tomamos los resultados de dos experimentaciones, una primera con 30 estudiantes de matemática, futuros profesores de Secundaria, confirmada por una experimentación complementaria con cuatro grupos de clase, con un total de 98 estudiantes (Gómez-Chacón & Kuzniak, 2011, 2013).

La tarea propuesta fue la siguiente:



Agranda la siguiente campana de tal manera que A'H' mida el doble que AB.

Escribe un protocolo de resolución del problema detallado. Algunas pistas que te pueden ayudar a dibujar la campana son:

1. Observa que A está sobre la recta BI y sobre la recta CJ.
2. H es el punto medio de BC.
3. Los ángulos IBC y JCB miden 60º.
4. Los ángulos BIC y CJB son ángulos rectos.
5. BC pertenece a una circunferencia de centro A.

La metodología de investigación es cualitativa mediante observación participante en las sesiones de formación y análisis de las producciones de los estudiantes. Como instrumentos de recogida de datos se utilizaron grabaciones en video, notas de campo y protocolo de resolución de problemas de los estudiantes.

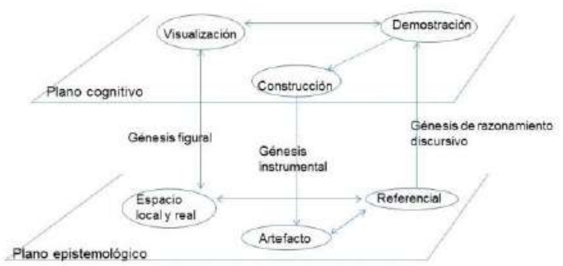


Figura 2. Trabajo geométrico apoyado sobre la génesis discursiva

Figura 3. Trabajo geométrico promovido por la génesis instrumental

Aunque las tareas geométricas sean sólo de construcción, como es en el caso de esta tarea, se observaron dos tendencias de espacio de trabajo matemático personal. La primera Fig. 2, referida implícitamente a Geometry II, se centra principalmente en una génesis discursiva de prueba, apoyada por un trabajo visual analítico sobre la figura, sin prestar específica atención a las herramientas de dibujo. En este caso, un aspecto que puede subrayarse es la incompletitud del trabajo geométrico global; corresponde a estudiantes que se basan en los aspectos visuales-figurales y discursivos. El retorno a la génesis instrumental puede ser problemático cuando no hay congruencia, en el sentido de Duval, entre la herramienta teórica y el instrumento informático.

El trabajo geométrico de los estudiantes que no tienen estas dificultades es porque se apoya sobre una génesis figural apropiada respecto al artefacto: estos estudiantes hicieron un tratamiento semiótico de una manera estructurada y la deconstrucción instrumental correspondiente. El razonamiento geométrico a menudo requiere la movilización en paralelo de dos registros de representación, de manera que las conversiones se producen de forma continua, aunque a veces éstas son implícitas. Nuestros datos muestran que las posibilidades que ofrece el *software*, en su doble relación con los significados personales y matemáticos, se conviertan en un potencial semiótico del artefacto para ETM. Sin embargo, este potencial no está activo de forma espontáneamente en la mayoría de los futuros profesores en el grupo.

El segundo tipología (Fig. 3) es un espacio de trabajo matemático que promueve la génesis instrumental articulada con la génesis figural. Este resultado no es sorprendente para tareas de construcción, si se produce una buena adaptación al instrumento. Se observa que se mueven en la Geometría I con un trabajo geométrico instrumental. De hecho, la mitad de los estudiantes construyeron tanto la campana original como la agrandada mediante una construcción basada en los ángulos. En este caso, se identifican las propiedades de la simetría y la invariancia de ángulos, y se guían tanto por la percepción y la visualización de la figura, como por el uso de instrumentos. Como resultado, se mantuvieron en el plano (Figural-Instrumental), ya que podían usar los mismos comandos de *software* para ambas tareas.

Para interpretar por qué este uso tan fuerte de la Geometría I hemos considerado el contexto de la tarea, de una parte en un medio tecnológico y de otra en un contexto institucional, la formación de profesores de Secundaria. Lo que puede que haya condicionado la búsqueda de soluciones elementales y la identificación de dificultades que puede tener un alumno de Secundaria.

También, el estudio muestra que al punto de vista sobre el desarrollo del razonamiento geométrico hay que añadir el mantenimiento de la construcción de una génesis discursiva relacionada con los elementos visuales de la deconstrucción de figuras. Esta forma de razonamiento requiere una reflexión sobre el papel de las definiciones y teoremas en el proceso de desarrollo de lo geométrico, de cara a que los estudiantes pasen de un trabajo práctico perteneciente a Geometría I a una Geometría más axiomática (Geometría II).

4.4. Visualización icónica versus visualización no icónica

Dos modos opuestos de funcionamiento cognitivo, en los cuales los procesos de reconocimiento de los objetos representados difieren radicalmente en el trabajo geométrico, son la *visualización icónica* y la *visualización no icónica* (Duval, 2005). Si tenemos en cuenta la complejidad del proceso puesto en juego en el acto de "ver", "ver" conlleva siempre dos niveles de operaciones que son diferentes e independientes uno del otro, aunque frecuentemente éstos se fusionan en la sinergia del acto de ver. Estos dos niveles de operaciones son: el reconocimiento discriminativo de las formas y la identificación de los objetos correspondientes a las formas reconocidas. El problema cognitivo mayor es saber cómo se realiza el paso de un reconocimiento discriminativo de formas a la identificación de los objetos a ver.

En la *visualización icónica*, el reconocimiento de lo que representan las formas se hace por el parecido con el objeto (real) que representa, o en su defecto, por comparación con un modelo tipo de formas (una figura particular sirve de modelo y las otras figuras son reconocidas según su grado de parecido con este modelo). La *visualización no icónica* reconoce las formas, bien en virtud de las limitaciones internas de organización que hacen imposible ciertas deformaciones o ciertas aproximaciones, bien en virtud de deducciones efectuadas discursivamente en función de las propiedades que han sido enunciadas en las definiciones o en los teoremas, o bien a partir de hipótesis que declaran lo que representa una figura.

Hemos podido constatar que en el aprendizaje geométrico con *software* dinámico se produce una gran ruptura entre estas dos diferentes formas de visualización. Y esta ruptura es muy importante, ya que sólo la visualización no icónica es pertinente para los procesos geométricos que se deben producir. Tomemos un ejemplo ampliamente trabajado en nuestras investigaciones (Gómez-Chacón, 2012, 2013; Gómez-Chacón & Escribano, 2014) en su forma analítica y desde distintos tipos de registros, así como en la interacción procesos cognitivos y afectivos en visualización. El problema es el siguiente: *Una escalera que mide 5 metros está apoyada por su extremo superior en una pared vertical, y su extremo inferior está situado en el suelo ¿Cuál es el lugar geométrico descrito por el punto medio M de la escalera al resbalar y caer ésta? (Y si el punto no es el punto medio de la escalera).*

Consideramos que se trata de un problema de nivel medio alto para los estudiantes. El enunciado está formulado sin consignas explícitas de construcción. Es una situación realista de fácil comprensión. No obstante, la traslación a construcción con el *software* GeoGebra no es evidente, es necesario ayudarse de un objeto auxiliar. El *razonamiento visual-analítico* requiere superar la dificultad inicial de construcción de la escalera a través de un objeto auxiliar, en ese caso GeoGebra ofrece el locus de forma precisa. Para el registro analítico o algebraico es necesario situar cinco puntos sobre el locus y después trazar con el comando "cónica que pasa por tres puntos". En este caso se obtiene la ecuación algebraica precisa. En lo referente al *razonamiento instrumental* que debe seguir el estudiante, dos momentos son claves en este problema: 1) la construcción de la escalera con una circunferencia auxiliar; y 2) si se quiere estudiar el lugar que describen los puntos sobre la escalera, estos puntos deben estar determinados de forma precisa (punto medio, 1/4).

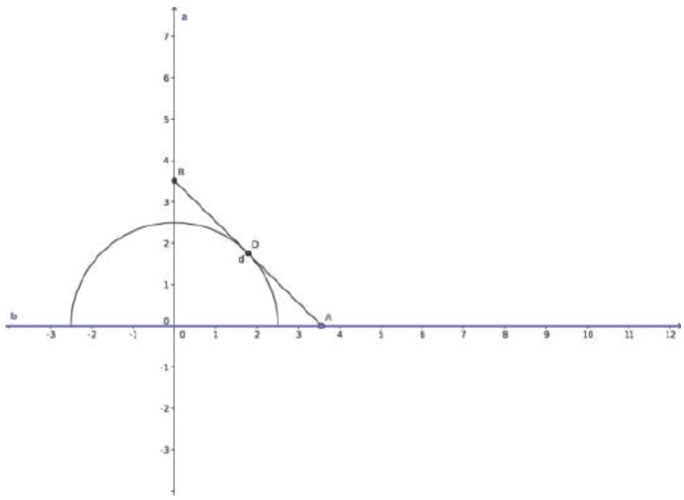


Figura 3. Resolución del problema de la escalera

En esta tipología, es clave la visualización no-icónica. A continuación comentamos brevemente algunas de las dificultades de los alumnos en una resolución con ordenador (GeoGebra).

Una primera tipología de dificultad son las construcciones estáticas (tratamiento discreto, Fig. 4). En esta tipología, el alumno utiliza GeoGebra como una pizarra avanzada pero no utiliza el dinamismo que propicia el *software*, sólo repite las construcciones para un conjunto de puntos. Para trazar el lugar geométrico se ayudan del comando cónica que pasa por 5 puntos.

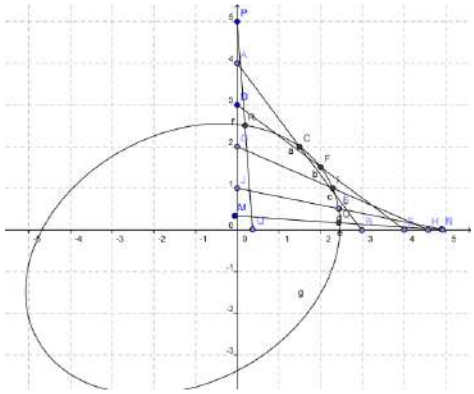


Figura 4. Resolución de alumno 13

Otra segunda tipología de dificultad es la definición no correcta de la construcción (punto libre). El alumno resuelve aparentemente el problema pero la solución impide la utilización de las herramientas de GeoGebra. Para utilizar la herramienta lugar geométrico es necesario que los puntos que lo definen estén correctamente determinados (no pueden ser puntos libres). En esta aproximación, el alumno, en el mejor de los casos, puede obtener una representación parcialmente válida, pero que no admite ningún tratamiento algebraico con GeoGebra. En este problema, la dificultad está en definir el punto de la escalera que no es el punto medio. Si se toma un punto libre, no se podrá utilizar la herramienta *Locus*.

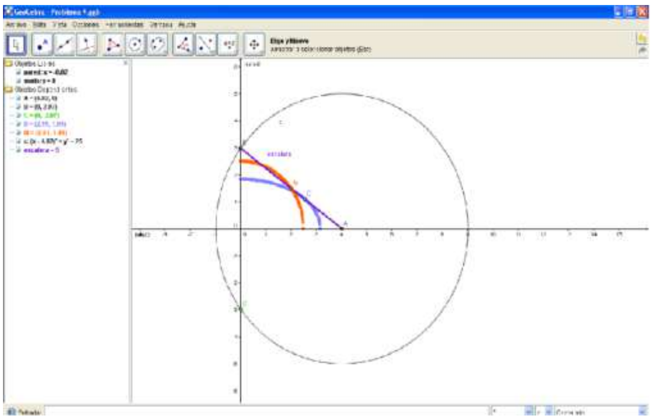


Figura 5. Solución del estudiante 23

Como se puede observar en la Figura 5, la solución que se obtiene es visual, aproximada y no da una solución exacta. Los estudiantes de esta tipología de solución quedan absolutamente convencidos y no son conscientes de que su solución es errónea.

Por último, otra tipología de dificultades es la utilización de elementos instrumentales no válidos. Por ejemplo, para este problema se utiliza la herramienta deslizador para desplazar el "mover". El alumno se da cuenta de que el "mover" hay que acotarlo y lo hace a través del deslizador. El problema es que en el sistema GeoGebra el deslizador es un escalar, y por lo que tras ello no se puede utilizar la herramienta lugar geométrico[1].

En una proporción amplia de estudiantes, se produce una deficiencia heurística ("esa incapacidad de ir más allá de lo que se aprecia en un primer vistazo") en la interpretación geométrica de las visualizaciones, en este caso en la comprensión de lugar geométrico desde el punto de vista funcional. A veces, la figura en Geometría funciona como una verdadera representación icónica que deja sin significado la aprehensión discursiva. Coincidimos con Duval (1999) cuando afirma que:

> […] la complejidad de la visualización matemática no radica en sus unidades visuales –que son menos y más homogéneas que para las imágenes- sino en la selección implícita de las variables visuales contrastadas dentro de la configuración de unidades que son relevantes y las que no (p. 15).

¿Se tiene esto en cuenta en la enseñanza? Muchas veces se enseña a construir imágenes, pero esto no es enseñar visualización. En construir incluso algunos alumnos son buenos, pero muchos se quedan en la aprehensión local, y no son capaces de llegar a lo global.

En el estudio de casos realizado en esta investigación (Gómez-Chacón & Escribano, 2014), para profundizar en las relaciones que se producen entre génesis instrumental y génesis video-figural, se analizó el perfil de los individuos para identificar qué variables parecen tener más influencia. Entre ellas se estudió su nivel de rendimiento matemático, su estilo visual o preferencia por el razonamiento visual, creencias y sentimientos hacia el aprendizaje con ordenador y creencias y sentimientos hacia el pensamiento visual.

Brevemente describimos uno de los casos, el caso de Ana. La resolución de esta estudiante nos permite ver la distinción entre uso de imágenes y constancia en el registro gráfico y propiedades deductivas. Aunque indica que utiliza registro visual en la resolución de problemas, señala que no le gusta resolverlo con ordenador:

> No me entusiasma mucho hacerlo porque no me suele hacer falta. Creo que bastaría con conocer el lenguaje (y ya lo conozco la resolución analítica) y hacer como mucho un ejercicio semanal para refrescar y poder usarlo con alumnos en caso de disponer de tiempo y/o de necesitarlo.

Le concede mayor valor al pensamiento analítico que al visual y no atribuye valor a la resolución de problemas con el ordenador:

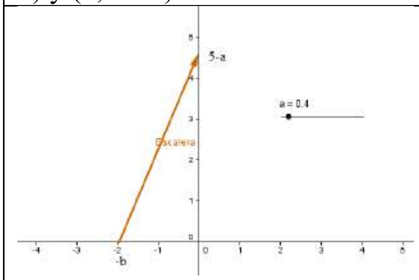
[1] Hacemos notar que en este estudio se utilizó la versión 3.7. En la actualidad, los creadores de GeoGebra han incorporado esta posibilidad.

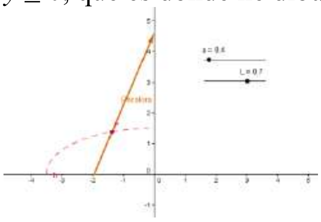
Con las Matemáticas asocio que hay que estudiarlas y entenderlas bien y el ordenador lo entiendo como herramienta para algunas cosas y también como pasatiempo y como medio de comunicación.

No creo que GeoGebra ayude a establecer conexiones en matemáticas, pienso que simplemente ayuda a representar algunos problemas. No sólo eso, sino que me parece que es tirar por la vía rápida y precisamente se puede perder la esencia matemática de los mismos.

El uso de imágenes y sinergia entre lo gráfico y analítico de esta estudiante queda recogido en la Tabla 1.

Tabla 1. Análisis del proceso de resolución de Ana,
informe por parte de la estudiante del uso de imágenes en su protocolo

Descripción del método	**Tipología de uso de representaciones e imágenes**
(1) Como el problema pide la solución para el punto medio y para cualquier punto P de la escalera, lo voy a resolver primero para P y luego particularizaré para el punto medio.	
(2) Voy a suponer que la escalera estuviese en el inicio totalmente vertical y que acaba completamente horizontal (para contemplar el mayor recorrido posible de P).	Imagen mental
(3) Para escribir cómo se cae la escalera defino la variable $a \in [0,5]$ por el *Teorema de Pitágoras* $b^2 + (5\text{-}a)^2 = Escalera^2 = 5^2$, así que $b = \sqrt{(10a - a^2)}$ de esta forma, los extremos de *Escalera* serán los puntos (-(b), 0) y (0, 5 - a)	No deja registro gráfico Imagen mental/visualización no icónica
 (4) Ahora pongo un punto $P=(P_x,P_y)$ en la escalera: si $P_y = ((5\text{-}a)/b)P_x + 5 - a$, P estará en la recta que contiene a la escalera.	Ilustración específica con interactividad (representación analogical) Analítico-visual
(5) Para que P se limite al segmento *Escalera*, pongo $L \in [0,1]$ y $P_x = -Lb$ Así, un punto ***P* en la escalera** se escribe de la forma: $P=[-Lb, (5\text{-}a)(1\text{-}L)] = [-L\sqrt{(10a - a^2)}, (5 - a)(1\text{-}L)]$	Analítico
(6) Ahora me pregunto ¿qué recorre P al variar a? La respuesta la tengo haciendo *I*: $x=-L\sqrt{(10a - a^2)}$; *II:* $y = (5 - a)(1\text{-}L)$	Analítico
(7) Pretendo escribir la y en función de la x. Para esto despejo de *I* la a y obtengo $a = (1/L)*[5L \pm \sqrt{(25L^2\text{-}x^2)}]$ Sustituyendo este valor de a en *II*, llego a *III:* $\mathbf{y = (5 - (5\,L \pm \sqrt{(25\,L^2 - x^2)}) / L)\,(1 - L)}$ que describe una **elipse**.	Analítico

(8)De esta elipse sólo recorre el cuarto correspondiente a $x \leq 0$, $y \geq 0$, que es donde he dibujado la escalera:  Si quiero elegir el punto medio, pongo L=0.5. Si en *III* sustituyo L por 0.5, tenemos (como se ve en el dibujo también), la *ecuación de una circunferencia*	Ilustración específica con interactividad (representación analogical) Analítico -visual

En la enseñanza es importante diferenciar entre utilizar una figura, manipularla en búsqueda de nuevas ideas y de comprensión, o utilizarla como esquema, como apoyo del proceso deductivo que se sigue. Es decir, en una situación la figura sirve para razonar, para generar nuevas ideas, para inventar, crear; en la otra, la imagen tan sólo tiene un papel explicativo, está subordinado a lo formal (discursivo). Por tanto, de cara a la docencia parece pertinente distinguir dos posibles funciones de las figuras: heurística (para crear, manipular, asociada a la aprehensión operativa); y ilustrativa (explicativa, subordinada a las hipótesis y el pensamiento deductivo, asociada a la aprehensión discursiva). Para el estudiante, o para el profesor como mediador en el aprendizaje, no es fácil activar los resortes necesarios para que la figura funcione de forma heurística, como base del pensamiento. Por ejemplo, en el aprendizaje, uno de estos resortes podría ser la habilidad de introducir nuevas unidades en la figura, así como las operaciones visuales que definen.

Por otro lado, cuando se trabaja con Geometría dinámica, la aprehensión perceptual, que sirve para ver las figuras y las visualizaciones icónicas, no siempre conduce a la aprehensión operativa. Por ejemplo, en el problema de la escalera que hemos descrito, la utilización de las representaciones físicas es muy diferente en la Geometría dinámica: qué nos da la información visual y qué esconde toda una visualización no-icónica. Habitualmente, la construcción paso a paso con SGD para realizar la representación visual de un problema de lugares geométricos procede del siguiente modo: construir las figuras geométricas basadas en las hipótesis del problema, aplicar las transformaciones geométricas, (mover el punto M a lo largo de una recta A), comprender las relaciones entre la construcción euclídea y la demostración, crear la demostración que involucra animación y determinada activación de comandos, averiguar las conexiones tanto geométricamente y algebraicamente para llegar a una demostración.

Habitualmente los estudiantes, cuando resuelven este tipo de problemas, utilizan más bien el comando *"Traza"* que *"Lugar geométrico"*. Pensamos que una justificación de este hecho puede darse por el punto de vista conceptual geométrico de la definición de *Lugar geométrico* en los manuales. Comprender estos aspectos epistemológicos que afecten a la dimensión cognitiva-instrumental de los estudiantes es clave. En los libros de texto, la noción de *Lugar geométrico* se introduce vinculada a construcciones con regla y compás, donde su aspecto constructivo y mecánico es claro en el contexto de las aplicaciones (caso 1). Pero también, podemos encontrar la noción *Lugar geométrico* en el contexto de las transformaciones, mostrando que estas transformaciones son herramientas muy eficaces para resolver problemas de *Lugares* (caso 2), cuyo significado no es el mismo.

En el primer caso, la definición vendría dada en el siguiente modo: (definición 1) *Un lugar geométrico es el conjunto de puntos que satisfacen una determinada propiedad* expresable a partir de una construcción geométrica realizada con regla y compás. Ésta es conocida como la aproximación "clásica". También, podemos encontrar otro tipo de formulación en el contexto de las transformaciones; en este caso nos referimos a un conjunto de puntos que son imágenes de un conjunto de puntos, se define como la imagen de un objeto bajo una aplicación o transformación: "*Si llamamos f de la función: $M \rightarrow N = f(M)$, buscar el lugar geométrico de N es buscar el conjunto de todos los puntos f(M)*". En este último caso, Locus se define de forma funcional; teóricamente, tenemos que considerar que un punto P variable que pertenece a una figura F considerado como un conjunto de puntos (una línea recta, un círculo...) corresponde a un punto P', la imagen de P por una la aplicación f. Locus tiene un doble significado: por una parte legitima el cambio de una figura sintética (un punto global de ver) a una figura como un conjunto de puntos, y de otra permite recomponer la figura. Esta distinción entre trayectoria y locus expresada en estas definiciones se refleja en el *software* de Geometría dinámica mediante dos herramientas: *"Lugar geométrico*" y "*Traza*". Utilizar la herramienta "*Lugar geométrico*" requiere de una aprehensión operatoria para hacer fecunda la intuición de la figura. La visualización no icónica requiere la toma de conciencia de las propiedades que están ligadas a las operaciones que se efectúan, bien para construir una figura o bien para transformarla.

5. A modo de epílogo

En síntesis, en esta conferencia se ha argumentado, dando evidencias empíricas, que la articulación entre visualización y razonamiento está en la base de toda actividad matemática, y en particular de la geométrica. La visualización aparece de forma natural por la propia naturaleza de la matemática – concepto de matematización –, porque nuestra percepción es prioritariamente visual, pero también es esencialmente relevante en actividades matemáticas en las que la abstracción parece llevarnos lejos de lo perceptible por la vista. En esos casos, los matemáticos se valen de procesos simbólicos, diagramas visuales y otros procesos imaginativos que les ayuden a desarrollar una intuición de lo abstracto.

También, se muestra que los procesos de visualización no están ausentes de dificultad en la transmisión de la disciplina. El comportamiento de los estudiantes en situaciones de aprendizaje geométrico con SGD muestra que es necesario añadir una dimensión para el desarrollo de razonamiento geométrico del estudiante, que tome en cuenta una línea de construcción de la génesis discursiva articulada con elementos de de-construcción visual. Las interrelaciones de las tres génesis (figural, instrumental y de razonamiento discursivo) en el espacio de trabajo geométrico en contextos tecnológicos es una línea abierta de estudio.

En las investigaciones realizadas en nuestro contexto el espacio de trabajo idóneo se muestra particularmente inestable y dependiente de estilo cognitivo visual de los alumnos y las creencias sobre el aprendizaje matemático en entornos informatizados. En los experimentos de enseñanza que hemos trabajado, se muestra la necesidad de un equilibrio entre una deconstrucción dimensional (expresada en el análisis analítico-algebraica que permite la representación) y la deconstrucción instrumental (expresada en la visualización no icónico que permite la regulación visual en un SGD).

Por último, la reorganización de un espacio de trabajo matemático pasaría por el acompañamiento del profesor en la aprehensión perceptiva de los estudiantes con el fin de obtener una aprehensión operativa. En estos estudios, se constató que cuando trabajamos en la aprehensión perceptiva, utilizando SGD, explorando las figuras y la visualización icónica, no siempre se alcanzaba la aprehensión operativa. Hay estudiantes con gran control de matemáticas que sin embargo tienen problemas para producir figuras dinámicas. Todo esto nos lleva a afirmar *la necesidad de una modelización progresiva de la visualización*, en la que se introduzca una progresión en el desarrollo y manejo de diferentes tipos de representaciones con la expertez que viene de los resultados de investigación y con la que aporta un profesor de aula.

Referencias

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*(3), 215-24.

Corrales Rodrigáñez C., & Gómez-Chacón, I. M. (2011). *Ideas y visualizaciones matemáticas*. Publicaciones Cátedra Miguel de Guzmán, Facultad de Matemáticas, UCM.

Davis, P. J. (1993). Visual theorems. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(4), 333-344.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking – Basic issues for learning. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st North American PME Conference* (Vol. 1, pp. 3-26). Mexico

Giaquinto, M. (1992). Visualizing as a means of geometrical discovery. *Mind & Language*, Vol. 7-4, 382-401.

Giaquinto, M. (2005). From symmetry perception to basic geometry. In P. Mancosu, K. F. JØrgensen & S.A. Pedersen (Eds.), *Visualization, explanation and reasoning styles in Mathematics* (pp. 31-55). The Netherland: Springer.

Gómez-Chacón, I. M. (2012). Affective pathways and interactive visualization in the context of technological and professional mathematical knowledge. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *17*(3-4), 57-74.

Gómez-Chacón, I. M. (2012). Visualización matemática: Intuición y razonamiento. In M. Castrillón, M. I. Garrido, J. A. Jaramillo, A. Martínez & J. Rojo, *Contribuciones matemáticas en homenaje a Juan Tarrés* (pp. 201-219.) Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

Gómez-Chacón, I. M., & Escribano, J. (2014). Geometric Locus activities in a dynamic geometry system. Non-iconic visualization and instrumental génesis. *Relime, Revista latinoamericana de investigación en matemática*.

Gómez-Chacón, I. M., & Kuzniak, A. (2013). Geometric work spaces: Figural, instrumental and discursive geneses of reasoning in a technological environment. *International Journal of Science and Mathematics Education*.

Guzmán, M. (1996). *El rincón en la pizarra*. *Ensayos de visualización en análisis matemático*. Ed. Pirámide.

Hadamard, J. (1945). The psychology of invention in the mathematical field. Princeton, N. J.: Princeton University Press.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *16*, 9-24.

Presmeg, N.C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future*. *PME 1976-2006* (pp. 205-235). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Souto, B., & Gómez-Chacón, I. M. (2011). Visualization at university level. The concept of Integral. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *16*, 217-246.

Souto, B. (2013). *La enseñanza de la visualización en Álgebra Lineal: El caso de los espacios vectoriales cociente* (Tesis Europea en Investigación Matemática). Universidad Complutense de Madrid, Madrid.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 151-169.

Thurston, W. P. (1995). On proof and progress in Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *15*(1), 29-35.

Van Hiele, P. (1986). *Structure and insight. A theory of Mathematics education*. Academic Press.

Wheatley, G., & Brown, D. (1994). The construction and re-presentation of images in mathematical activity. *Proceedings of PME 18-1*.

Zimmerman, W., & Cunningham, S. (1991). What is mathematical visualisation?. In W. Zimmerman & S. Cunningham (Eds.), *Visualisation in teaching and learning Mathematics* (pp. 1-9). Whashington: Mathematical Association of America.

Uma experiência de ensino centrada na multiplicação: Especificidades e desafios

Fátima Mendes
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal
fatima.mendes@ese.ips.pt

Ao nível da educação matemática identifica-se, em Portugal, um interesse crescente pela *design research*, abordagem metodológica que tem vindo a ser usada em investigações realizadas recentemente por alguns autores (Mendes, 2012; Silvestre, 2012).

A *design research* tem-se desenvolvido em estreita relação com a importância atribuída ao estudo da aprendizagem em contexto, uma vez que tem como propósito geral conhecer e melhorar os processos educativos (diSessa & Cobb, 2004). No mesmo sentido, Confrey (2006) e Sawyer (2006) apontam o carácter essencialmente qualitativo deste tipo de investigação e referem também que o seu objetivo é analisar a aprendizagem no seu contexto, estudando de forma sistemática modos particulares de aprendizagem, estratégias e ferramentas educativas, considerando a natureza sistémica dos processos envolvidos.

Apesar de a expressão *design research* incluir um vasto leque abordagens metodológicas, não necessariamente coincidentes, Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer e Schauble (2003) identificam um conjunto de características transversais e comuns a todas elas. A primeira está relacionada com o seu propósito geral, que é desenvolver um conjunto de teorias acerca do processo e dos meios que suportam uma determinada aprendizagem, seja ela individual ou de uma turma. A segunda está associada à natureza bastante intervencionista desta metodologia, usada frequentemente para investigar aspetos educativos associados a inovações. A terceira característica comum está relacionada com as duas anteriores e diz respeito à sua marca prospetiva e reflexiva. Efetivamente, este tipo de estudos é implementado a partir de conjeturas sobre o processo de aprendizagem e das condições necessárias ao seu desenvolvimento, com carácter prospetivo. A sua marca reflexiva está associada à verificação, ou não, das

Martinho, M. H., Tomás Ferreira, R. A., Boavida, A. M., & Menezes, L. (Eds.) (2014).
Atas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática. Braga: APM., pp. 29–31

conjeturas formuladas na fase prospetiva e à sua reformulação, no caso de aquelas serem refutadas. A ligação entre os aspetos prospetivo e reflexivo dá origem à quarta característica deste tipo de estudos, o seu carácter iterativo: são geradas e testadas conjeturas e, no caso de serem refutadas, novas conjeturas são formuladas. Finalmente, a quinta característica comum está relacionada com as suas "raízes pragmáticas", ou seja, as teorias desenvolvidas durante o processo de experiência devem ser úteis a esse mesmo processo e não serem, apenas, teorias filosóficas (Cobb et al., 2003).

Um dos tipos de estudo incluído na *design research* é a experiência de ensino em sala de aula. Nesta, uma equipa de investigadores (ou apenas um investigador) colabora com um ou mais professores que têm a responsabilidade do ensino na sala de aula (Gravemeijer & Cobb, 2006; Kelly, 2006). Ora é precisamente nesta modalidade de *design research* que se insere o estudo que desenvolvi numa turma do 3.º ano de escolaridade, em colaboração com a sua professora titular.

Esta conferência tem como objetivo discutir as principais características da *design research*, na modalidade de experiência de ensino, identificando as suas particularidades e os desafios com que me confrontei ao longo de todo o processo de investigação focado na aprendizagem da multiplicação.

Referências Bibliográficas

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher, 32*(1), 9–13.

Confrey, J. (2006). The evolution of design studies as methodology. In R. K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge handbook of the learning sciences* (pp. 135-152). New York, NY: Cambridge University Press.

diSessa, A., & Cobb, P. (2004). Ontological innovation and the role of theory in design experiments. *Journal of the Learning Sciences, 13*(1), 77-103.

Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. In J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney & N. Nieveen (Eds.), *Educational design research* (pp. 45-85). London: Routledge.

Kelly, A. (2006). Quality criteria for design research: Evidence and commitments. In J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney & N. Nieveen (Eds.), *Educational design research* (pp. 166-184). London: Routledge.

Mendes, F. (2012). *A aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número. Um estudo com alunos do 1.º ciclo.* (Tese de Doutoramento).

Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. In http://repositorio.ul.pt/handle/10451/5893.

Sawyer, R. (2006). The New Science of Learning. In R. K. Sawyer (Ed.), The Cambridge handbook of the learning sciences (pp. 1-18). New York, NY: University Press.

Silvestre, A. I. (2012). *O desenvolvimento do raciocinio proporcional: Trajetórias de aprendizagem de alunos do 6.ºano de escolaridade*. (Tese de Doutoramento). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Comunicações

Um estudo sobre a inserção da educação financeira como tema curricular nas escolas públicas brasileiras

Amarildo Melchiades da Silva[1], Marco Aurélio Kistemann Jr .[2], Márcio Carlos Vital[3]
[1] Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF) / Brasil, xamcoelho@terra.com.br
[2] Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF) / Brasil, marco.kistemann@ufjf.edu.br
[3] Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF) / Brasil, mc.vital@hotmail.com

Resumo. *Neste artigo apresentamos uma análise da proposta brasileira de inserção da Educação Financeira nas escolas públicas brasileiras em atendimento às recomendações da Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE). O ponto de partida de nosso estudo foi a análise da criação de um programa de Educação Financeira pela OCDE em 2003, com o objetivo de educar financeiramente os cidadãos de seus países membros e dos países não-membros convidados a participar. Num segundo momento, analisamos a participação brasileira a partir do ano de 2007, que buscou atender as metas e ações determinadas pela organização. Nas ações brasileiras, nossa análise tem como foco a parte do projeto destinado a inserção do tema no ambiente escolar e, em particular, o projeto pedagógico proposto pelo governo brasileiro. Concluímos nosso estudo sugerindo a importância de que a comunidade de educadores matemáticos e os professores de matemática, inseridos nessa comunidade, aprofundem uma discussão e desenvolvam pesquisas sobre o tema para além da esfera governamental.*

Abstract: *In this article, we present an analysis of the Brazilian proposal of insertion of financial education in public schools in Brazil in attendance to recommendations of the Organization for economic co-operation and development (OECD). The starting point of our study was the analysis of the creation of a financial education program by the OECD in 2003, with the goal of educating financially the citizens of their countries members and non-members invited to participate. Secondly, we analyze the Brazilian participation from the year 2007 that sought to meet the goals and actions determined by the organization. In Brazilian actions, our analysis focuses on the part of the project for the inclusion of the topic in the school environment and, in particular, the pedagogical project proposed by the Brazilian Government. We concluded our study suggesting the importance of the community of educators, mathematicians and math teachers, inserted in this community, deepen a discussion and develop research on the topic in addition to the governmental sphere.*

Palavras-chave: Educação matemática; Educação financeira; Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE); Escola pública.

Martinho, M. H., Tomás Ferreira, R. A., Boavida, A. M., & Menezes, L. (Eds.) (2014).
Atas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática. Braga: APM., pp. 35–46

Introdução

Este artigo é parte de um projeto de pesquisa mais amplo intitulado *Uma Experiência de Design em Educação Matemática: O Projeto Educação Financeira Escolar*, que tinha como objetivo desenvolver um estudo teórico de inserção da Educação Financeira nas escolas públicas brasileiras através do *design* de um currículo para o tema através da análise de estudos desenvolvidos pela OCDE e por seus países membros, em particular os Estados Unidos (Silva, 2011).

A pesquisa caracterizou-se como uma abordagem qualitativa de investigação do tipo documental. Nossa recolha e análise de dados foi feita a partir de diversos documentos oficiais emitidos pelo governo brasileiro e do material didático produzido pelo grupo reponsável por introduzir a Educação Financeira nas escolas públicas.

A importância desse tema reside no fato de que em muitos países as propostas de inserção da Educação Financeira têm sido discutidas apenas na esfera governamental e podem chegar ao sistema educacional sem uma reflexão e discussão com os professores e outros profissionais envolvidos com a escola. Por outro lado, está surgindo na comunidade de Educação Matemática brasileira um número crescente de pesquisas sobre o tema, que parece ser um caminho bastante frutífero para investigação, pela importância social e amplitude do tema. (cf. Pelicioli, 2011; cf. Souza, 2012; vf. Campos, 2013; cf. Hofmann, 2013; cf. Losano, 2013).

O programa de trabalho da OCDE, aprovado pelo conselho para o biênio 2003-2004, incluiu um projeto intitulado *Financial Education Project* (Projeto de Educação Financeira) que nasceu do interesse dos países membros da organização em educar financeiramente seus cidadãos e foi desenvolvido por dois Comitês da OCDE, a Comissão de Mercados Financeiros e de Seguros e a Comissão de Pensões Privadas. A primeira fase do projeto culminou, em 2005, com a publicação da pesquisa registrada em um relatório intitulado *Improving Financial Literacy: Analysis of Issues and Policies* (Melhoria da Literacia Financeira: Análise de Questões e Políticas) (cf. OECD, 2005a). O relatório gerou outro documento, mais conciso e com sugestões práticas destinadas aos governos, denominado *Recomendações sobre Princípios e Boas Práticas de Educação Financeira e Conscientização,* onde encontramos a definição de Educação financeira proposta pela OCDE:

> Educação Financeira é o processo pelo qual os consumidores financeiros/investidores melhoram a sua compreensão sobre os conceitos e produtos financeiros e, através da informação, instrução e/ou aconselhamento objetivos, desenvolvam as habilidades e a confiança para tomar consciência de riscos e oportunidades financeiras, para fazer escolhas informadas, saber onde buscar ajuda e tomar outras medidas eficazes para melhorar a sua proteção e o seu bem-estar financeiro (OECD, 2005b).

Esse conceito passou a ser adotado por alguns países na construção de sua proposta de Educação Financeira como, por exemplo, Espanha (cf. CNMV/Banco de España, 2008) e Brasil (Brasil/ENEF, 2011b, pp. 57-58).

Em 2008, a OCDE publicou um relatório, como parte de seu Programa de Educação Financeira iniciado em 2003, intitulado *Programas de educação financeira nas escolas: análise de programas atuais selecionados e literatura de projetos de recomendações para as melhores práticas* (Mundy, 2008). Esse relatório teve como objetivo analisar os programas de Educação Financeira existentes nas escolas e estabelecimentos de ensino e analisar as pesquisas disponíveis sobre a eficácia das iniciativas sobre o assunto destinado a crianças e adolescentes em idade escolar em alguns dos seus países membros e em países não membros da OCDE.

O Brasil iniciou sua participação no projeto, proposto pela OCDE, através de diversas ações que passaremos a discutir.

A participação brasileira no projeto da OCDE

As mudanças econômicas, sociais e tecnológicas crescentes, em todo o mundo, apontaram para a urgência da implementação de ações governamentais com o objetivo de educar financeiramente a população. Por exemplo, a partir de estudos realizados no âmbito dos países da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico e países emergentes, evidenciou-se um baixo nível de consciência financeira e falta de autoconsciência de grupos vulneráveis e desfavorecidos (IGFE, 2010). Em particular no Brasil, de acordo com Saito (2007), o extenso período de inflação comprometeu a capacidade da população brasileira de planejamento econômico-financeiro de longo prazo.

Diante de uma tendência mundial, o governo brasileiro formou, em novembro de 2007, um grupo de trabalho com representantes do Banco Central do Brasil, da Comissão de Valores Mobiliários (CVM), da Secretaria de Previdência Complementar (SPC) e da

Superintendência de Seguros Privados (SUSEP), para desenvolver uma proposição de Estratégia Nacional de Educação Financeira (ENEF).

Em 2010 o governo brasileiro instituiu, através de um decreto, a Estratégia Nacional de Educação Financeira – ENEF seguindo uma recomendação da OCDE de inserção da educação financeira no sistema escolar para que as crianças desde cedo tivessem contato com o assunto. O objetivo seria educar as crianças e adolescentes para lidar com o uso do dinheiro de maneira consciente de modo a desenvolver hábitos e comportamentos desejáveis. Com esta finalidade, a ENEF envolveu, na concepção de uma proposta de ensino para as escolas de instituições públicas de ensino – o Centro Federal de Educação Tecnológica do Rio de Janeiro e o Colégio Pedro II –, o Conselho Nacional de Secretários de Educação/Consed, a União dos Dirigentes Municipais de Educação/Undine, entidades do setor financeiro, como o Instituto Unibanco e órgãos do governo. O Ministério de Educação e Cultura (MEC) participou através da Secretaria de Formação Continuada, Alfabetização e Diversidade (SECAD).

Para elaborar um documento que apresentasse um modelo conceitual para levar a Educação Financeira às escolas foi constituído o Grupo de Apoio Pedagógico (GAP), sob a orientação e supervisão do MEC. O documento final, intitulado *Orientações para Educação Financeira nas Escolas,* apresentou um conjunto de princípios que tinham como finalidade nortear o ensino de educação financeira (cf. Brasil/ENEF, 2011b, pp. 56-85).

Além da elaboração do documento, o GAP realizou outras ações para levar a Educação Financeira para as escolas. O plano de ações envolvia a formação de professores e a realização de um projeto piloto que pretendia envolver as escolas que participavam de um programa de governo denominado *Programa Mais Educação*, que era uma das metas de outro programa do MEC intitulado *Programa de Desenvolvimento da Educação* (PDE). O plano de ações envolvia: uma campanha de sensibilização do público envolvido com educação e com a comunidade escolar, como pais e estudantes, e iniciativas voltadas a profissionais da área de educação, como educadores e gestores do sistema público e privado de ensino; a formação de professores; ações de implementação da proposta nas escolas; ações de expansão da ENEF em outros estabelecimentos de ensino no país; e ações de controle e avaliação dos resultados de forma qualitativa e quantitativa.

O material didático inicialmente produzido pelo programa atendeu o projeto piloto que teve duração de três semestres letivos, de agosto de 2010 até dezembro de 2011. Neste primeiro momento a avaliação englobou somente o Ensino Médio[1]. Foram observados 891 escolas e 26981 alunos, com 13745 alunos no grupo de controle e 13236 alunos no grupo de tratamento, em seis estados brasileiros. Nesse momento, o grupo de trabalho passou a investir em uma proposta de ensino para a Educação Financeira nas escolas públicas brasileiras através, principalmente, da produção de material didático.

O Projeto Pedagógico proposto pelo governo brasileiro

O ponto de partida para o desenvolvimento de ações práticas para a escola foi o desenvolvimento de um documento intitulado *Orientações para Educação Financeira nas Escolas* elaborado sob a coordenação do Instituto Unibanco, uma instituição financeira particular.

Nossa análise, a seguir, se pautará no material didático disponível, constituído pelo Livro do Professor, Livro do Aluno e Caderno do Aluno, elaborado para estudantes do Ensino Médio, pois não há outra fonte de informação disponível para análise.

A proposta pedagógica e o modelo conceitual do material com o objetivo de educar financeiramente os estudantes brasileiros é apresentada no Livro do Professor. A proposta toma como ponto de partida a definição de educação financeira apresentada pela OCDE, cujo modelo pedagógico é apresentado nos seguintes termos:

> O modelo pedagógico foi concebido para oferecer ao aluno informações e orientações que favoreçam a construção de um pensamento financeiro consistente e o desenvolvimento de comportamentos autônomos e saudáveis, para que ele possa, como protagonista de sua história, planejar e fazer acontecer a vida que deseja para si próprio, em conexão com o grupo familiar e social a que pertence. Nesse sentido, o foco do trabalho recai sobre as situações cotidianas da vida do aluno, porque é nelas que se encontram os dilemas financeiros que ele precisará para resolver (Brasil/COREMEC, 2010a, p. 7).

Segundo o documento, o modelo pedagógico se apóia em duas dimensões conceituais denominadas dimensão espacial e temporal. O que justifica esta perspectiva é o fato de que "o cotidiano acontece sempre em um espaço e tempo determinados" e "como a

[1] O Ensino Médio brasileiro tem três anos de duração. É a etapa da formação básica dos estudantes que têm geralmente entre 15 e 17 anos de idade.

Educação Financeira é comprometida com esse cotidiano", é importante que seja estudada de acordo com essas dimensões (Brasil/COREMEC, 2010a, p. 8).

O que vem a ser dimensão espacial é explicitada da seguinte maneira:

> Na dimensão espacial, os conceitos da Educação Financeira são tratados tomando-se como ponto de partida o impacto das ações individuais sobre o contexto social e vice-versa. Essa dimensão compreende os níveis individual, local, regional, nacional e global, organizados de modo inclusivo (Brasil/COREMEC, 2010a, p. 8).

O documento chama a atenção para o que deve ser entendido como "nível individual" na proposta do material didático. Para eles, este nível engloba também a família do estudante, pois entendem que o aluno deste nível de ensino não goza de autonomia financeira. E por família entende-se o "conjunto de pessoas que vivem sob o mesmo teto, independente dos laços familiares" (Brasil/COREMEC, 2010a, p. 8).

A dimensão temporal é expressa nos seguintes termos:

> Na dimensão temporal, os conceitos são abordados a partir da noção de que as decisões tomadas no presente podem afetar o futuro. Os espaços são atravessados por essa dimensão que conecta passado, presente e futuro numa cadeia de inter-relacionamentos que permitirá perceber o presente não somente como fruto das decisões tomadas no passado, mas também como o tempo em que se tomam certas iniciativas cujas conseqüências – positivas e negativas – serão vivenciadas no futuro (Brasil/COREMEC, 2010a, p. 8).

As duas dimensões conceituais se conectam a sete objetivos gerais. Os quatro primeiros objetivos estão relacionados à dimensão espacial – são eles: (1) formar para a cidadania; (2) ensinar a consumir e a poupar de modo ético, consciente e responsável; (3) oferecer conceitos e ferramentas para a tomada de decisão autônoma baseada em mudança de atitude; (4) formar disseminadores. Os outros três objetivos relacionam-se com a dimensão temporal e estão voltados para as articulações entre o passado, o presente e o futuro – são eles: (5) ensinar a planejar em curto, médio e longo prazo; (6) desenvolver a cultura da prevenção; e (7) proporcionar a mudança da condição atual. Este último objetivo está relacionado à perspectiva da proposta de que com os conhecimentos e as competências advindas do estudo de Educação Financeira, o estudante e sua família podem ascender socialmente.

Os objetivos, segundo a proposta, se traduzem e se relacionam com dez competências, como sugere o quadro abaixo, lembrando que os quatro primeiros objetivos são espaciais e os três últimos são temporais (Brasil/COREMEC, 2010a, p. 12) (Quadro 1).

Quadro 1 – Relação entre objetivos espaciais, objetivos temporais e competências

Objetivos	**Competências**
OB1 Formar para a cidadania	CO1 Debater direitos e deveres
OB2 Ensinar a consumir e a poupar de modo ético, consciente e responsável	CO2 Tomar decisões financeiras social e ambientalmente responsáveis CO3 Harmonizar desejos e necessidades no planejamento financeiro do projeto de vida.
OB3 Oferecer conceitos e ferramentas para a tomada de decisão autônoma baseada em mudança de atitude	CO4 Ler e interpretar textos específicos de Educação Financeira CO5 Ler criticamente textos publicitários CO6 Tomar decisões financeiras autônomas de acordo com suas reais necessidades
OB4 Formar disseminadores	CO7 Atuar como multiplicadores
OB5 Ensinar a planejar em curto, médio e longo prazo	CO8 Elaborar planejamento financeiro
OB6 (6) Desenvolver a cultura da prevenção	CO9 Analisar alternativas de prevenção em longo prazo
OB7 Proporcionar a mudança da condição atual	CO10 Analisar alternativas para superar dificuldades econômicas

Nota: OB – Objetivo; CO – Competência

A proposta acima, sob a nossa perspectiva, abre vários questionamentos que precisariam ser esclarecidos para a compreensão dos professores e de todas as pessoas interessadas da proposta. Por exemplo: o que os formuladores desta proposta concebem como competências?

Quando falamos em competências, atualmente, no Brasil, isto pode remeter a avaliações em larga escala. E como a ENEF parece seguir as propostas da OCDE, é possível que os formuladores da proposta tenham em mente a perspectiva do PISA, em nível internacional, ou a da Prova Brasil, uma avaliação em larga escala nacional a que são submetidos os estudantes brasileiros. A Prova Brasil, foi um mecanismo criado pelo MEC/INEP para avaliar os sistemas públicos de ensino e suas escolas nas áreas de Língua

Portuguesa e Matemática, buscando identificar o nível de proficiência do conjunto de seus alunos em relação aos conhecimentos, habilidades e competências pré-fixadas. Do ponto de vista metodológico, a Prova Brasil adota a perspectiva teórica e os mesmos procedimentos e técnicas do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB), como por exemplo as matrizes de referência e os testes padronizados para medir o que os estudantes demonstram saber e são capazes de fazer nas áreas de conhecimento acima citadas.

A opção teórica a que se chegou, na elaboração da matriz, foi a de uma avaliação de *competências cognitivas*, em substituição a uma listagem de conteúdos apenas. As competências cognitivas naquela proposta foram entendidas da seguinte forma:

> (...) diferentes modalidades estruturais da inteligência que compreendem determinadas operações que o sujeito utiliza para estabelecer com e entre os objetos físicos, conceitos, situações, fenômenos e pessoas. As habilidades instrumentais referem-se especificamente ao plano do saber fazer e decorrem, diretamente, do nível estrutural das competências já adquiridas e que se transformam em habilidades (INEP/SAEB, 2001, p. 11).

Nessa perspectiva, entende-se que as competências se expressam por habilidades envolvidas na resolução de situações-problema baseadas nos conteúdos que compõem o currículo escolar. Assim, nas matrizes encontramos um conjunto de descritores que expressam as habilidades passíveis de serem medidas em avaliações de larga escala.

A Matriz de Referência é, portanto, o documento que contém as competências e habilidades matemáticas que serão avaliadas no teste da Prova Brasil, indicando o que se espera que os alunos sejam capazes de demonstrar em cada série avaliada. O que propõem estes formuladores da proposta do Instituto Unibanco vai nesta direção? Pois se utilizarmos este conceito de competência na tabela acima, quais seriam e quais não seriam competências? Por exemplo, seria "atuar como multiplicador" uma competência? E uma competência passível de avaliação quantitativa? Assim, o modelo pedagógico apresentado possui alguns pontos obscuros que devem ser bem esclarecidos para a total compreensão do professor.

O primeiro material elaborado para uso em sala de aula foi destinado aos estudantes do Ensino Médio. Os conteúdos de Educação Financeira foram organizados em três blocos, que, segundo o texto, foram alinhados com as dimensões espacial e temporal do modelo conceitual. A estrutura dos blocos é apresentada da seguinte maneira (Brasil/COREMEC, 2010a, p. 14) (Quadro 2).

Quadro 2 – Estrutura dos blocos

BLOCO 1 **ÂMBITO INDIVIDUAL** (Situações de curto prazo)	O QUE VOCÊ SABE? **Tema 1** Vida familiar cotidiano **Tema 2** Vida social **Tema 3** Bens pessoais SONHO PLANEJADO
BLOCO 2 **ÂMBITO INDIVIDUAL** (Situações de médio e longo prazo)	O QUE VOCÊ SABE? **Tema 4** Trabalho **Tema 5** Empreendedorismo **Tema 6** Grandes Projetos SONHO PLANEJADO
BLOCO 3 **ÂMBITO SOCIAL**	O QUE VOCÊ SABE? **Tema 7** Bens públicos **Tema 8** Economia do país **Tema 9** Economia do mundo SONHO PLANEJADO

Cada um dos nove temas consiste de um conjunto de sete Situações Didáticas (SDs), que, segundo o texto, entende-se "o conjunto de ações e atividades que desenvolvem no aluno as competências que acionam os conhecimentos necessários para lidar com as múltiplas e variadas situações financeiras do cotidiano" (Brasil/COREMEC, 2010a, p. 13). Por conseqüência, conclui-se que "as SDs constituem um instrumento que congrega objetos de conteúdo (conhecimentos, conceitos) e objetos didáticos (orientações pedagógicas voltadas para o desenvolvimento de competências)" (Brasil /COREMEC, 2010a, p. 13).

A proposta do programa é que cada situação didática dure, em média, de uma a duas aulas, o que totalizaria 34 horas-aula em um ano. Além disso, a posição de diluir o ensino pelas várias disciplinas do currículo é apresentada nos seguintes termos:

> (...) o material de Educação Financeira pode ser aplicado por qualquer professor de qualquer matéria porque o desejável é que ele faça por meio de sua faceta cidadã e não necessariamente pelo ângulo de sua especialidade. Em outras palavras, um professor de português ou de geografia, que tenha uma vida financeira organizada, pode perfeitamente ensinar os alunos a fazer orçamento.

> Não se deve aplicar o raciocínio de que o professor de matemática pode conduzir as SDs ligadas a cálculos numéricos porque a rigor todo cidadão deve saber fazer contas no que se refere à sua própria vida financeira (Brasil/COREMEC, 2010a, p. 15).

Notamos, ao longo de todo livro, como na citação acima, que seus idealizadores não pretendiam colocar o ensino de Educação Financeira nas mãos dos professores de matemática; em verdade, o estímulo estava em que professores de outras disciplinas ensinem o assunto. Por exemplo, nas tarefas onde seria preciso fazer as contas dos gastos numa lanchonete, as contas já vinham como os cálculos feitos.

Considerações finais

A proposta de inserção da Educação Financeira na escola no Brasil se encontra em estágio inicial. Apenas algumas escolas selecionadas participaram de pré-teste com o material didático para o Ensino Médio. Uma coleção de três livros para estudantes do Ensino Médio foi disponibilizada de maneira completa (três volumes) em 2013.

Em nossa análise identificamos muitos problemas e deficiências, tanto no modelo pedagógico proposto como no material didático disponibilizado. Por exemplo, nossa revisão de literatura sugere que qualquer proposta de desenvolvimento de implementação do ensino de Educação Financeira deve passar pela compreensão do que significa uma pessoa educada financeiramente. Este é o ponto central, a nosso ver, quando se pensa na formação de estudantes. Nossa perspectiva também sugere que o ideal seria pensar uma formação ao longo de toda Educação Básica, para que ela se desenvolva a longo prazo de maneira coerente para cada fase de formação do Ensino Fundamental[2] ao Ensino Médio. Além disso, a falta de cursos de formação de professores para lecionar Educação Financeira pode vir a ser um problema para a inserção do tema na escola.

Um dos pontos na Estratégia Nacional de Educação Financeira que nos causa preocupação e que foi um dos motivos do desenvolvimento deste estudo é a participação de instituições financeiras, em particular dos bancos particulares, na entrega de Educação Financeira na escola. Esta participação acontece em vários países do mundo e também no Brasil. Em outros países, como os Estados Unidos, o material didático é preparado por essas instituições e o ensino do tema na escola fica a cargo de pessoas que não são

[2] O Ensino Fundamental brasileiro tem nove anos de duração. É a etapa da formação básica dos estudantes que têm geralmente entre 6 e 14 anos de idade.

professores, mas funcionários dessas instituições. Muitos currículos que analisamos foram montados por profissionais ligados a bancos e estavam voltados a preparar os alunos para ser bons consumidores de produtos bancários e futuros investidores. Porém, não consideramos que este seja o objetivo de se ensinar Educação Financeira para estudantes em formação.

Referências bibliográficas

Brasil/COREMEC (2009). *Proposta de estratégia nacional de educação financeira nas escolas*. Brasil.

Brasil/COREMEC (2010a). *Educação financeira nas escolas – Ensino médio*. *Bloco 1 (Livro do professor)*. COREMEC, GAP, UNIBANCO.

Brasil/COREMEC (2010b). *Educação financeira nas escolas – Ensino médio*. *Bloco 1*. COREMEC, GAP, UNIBANCO.

Brasil/ENEF (2011a). *Estratégia nacional de educação financeira – Plano Diretor da ENEF*. Acedido em 05 novembro 2011 em http://www.vidaedinheiro.gov.br/Imagens/Plano %20Diretor%20ENEF.pdf

Brasil/ENEF (2011b). *Estratégia nacional de educação financeira – Plano Diretor da ENEF: Anexos*. Acedido em 05 novembro 2011 em http://www.vidaedinheiro.gov.br/Legislacao /Arquivo /Plano-Diretor-ENEF-anexos-1.pdf

Campos, M. B. (2012). *Educação financeira na matemática do ensino fundamental: Uma análise da produção de significados* (Dissertação de Mestrado Profissional em Educação Matemática), Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora – MG, Brasil.

CNMV/Banco de España (2008). *Plan de educación financiera 2008-2012*. Comisión Nacional Del Mercado de Valores/CNMV y Banco de España. Acedido em 12 agosto 2011 em http://www.bde.es/webbde/es/secciones/prensa/EdU-Financiera-final.pdf

Hofmann, R. M. (2013). *Educação financeira no currículo escolar: Uma análise comparativa das iniciativas da Inglaterra e da França* (Tese de Doutorado). Universidade Federal do Paraná, Curitiba – PR, Brasil.

INEP (2001). *SAEB 2001: Novas perspectivas*. Brasília: INEP.

Losano, L. A. B. (2013). *Design de tarefas de educação financeira para o 6º ano do ensino fundamental*. Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora – MG, Brasil.

Mundy, S. (2008). *Financial education programmes in school: Analysis of selected current programmes and literature draft – Recommendations for best practices*. OCDE Journal: General papers, volume 2008/3. OCDE.

OECD (2005a). *Improving financial literacy: Analysis of issues and policies.OECD*. Acedido em 20 junho 2012 em http://www.browse.oecdbookshop.org/oecd/pdfs/product/ 2105101e.pdf

OECD (2005b). *Recommendation on principles and good practices for financial education and awareness*. *Directorade for financial and enterprice affairs*. Acedido em 15 setembro 2011 em http://www.oecd.org.

OECD (2012). *PISA 2012 – Financial literacy assessment framework*. Acedido em 15 agosto 2012 em www.oecd.org/pisa/pisaproducts/46962580.pdf

Pelicioli, A. F. (2011). *A relevância da educação financeira na formação de jovens* (Dissertação de Mestrado). Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre – RS, Brasil.

Saito, A. T. (2007). *Uma contribuição ao desenvolvimento da educação em finanças pessoais no Brasil* (Dissertação de Mestrado). Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil.

Silva, A. M. (2011). *Uma experiência de design em educação matemática: O projeto de educação financeira escolar*. Projeto de Pesquisa (Estágio Pós-Doutoral em Educação Matemática). Rutgers, the State University of New Jersey/USA.

Souza, L. (2012). *Resolução de problemas e simulações: Investigando potencialidades e limites de uma proposta de educação financeira para alunos do ensino médio de uma escola da rede privada de Belo Horizonte* (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto – MG, Brasil.

As funções exponencial e logarítmica nos manuais escolares do 12.º ano

Carla Rebimbas[1], *Rosa Rebimbas*[2], *Teresa B. Neto*[3]
[1]Escola Secundária de Estarreja, carlarebimbas@ua.pt
[2] Escola Secundária de Estarreja, rosa.rebimbas@ua.pt
[3] CIDTFF – Centro de Investigação Didática e Tecnologia Educativa na Formação de Formadores, Universidade de Aveiro, teresaneto@ua.pt

Resumo. *Este trabalho foca-se na análise da abordagem didática das funções exponencial e logarítmica, nos seis manuais escolares, do 12.º ano de Matemática A, adotados pelas escolas secundárias portuguesas, no ano letivo 2012-2013. Em concreto foram analisadas as situações matemáticas, conceitos, proposições, procedimentos, linguagem e argumentações que o manual do estudante apresenta. No que diz respeito às situações matemáticas, foram contabilizados os diferentes tipos de tarefas que o autor propõe ao estudante para aplicação dos conhecimentos. Foi ainda analisada a adequação didática das funções exponenciais e logarítmicas, nos manuais escolares. A metodologia de investigação teve por base pressupostos teóricos e metodológicos do enfoque ontossemiótico do conhecimento e do ensino da matemática. Em termos de resultados obtidos, pode concluir-se que é privilegiado o cálculo algorítmico, em detrimento das tarefas de exploração, conjetura/argumentação e modelação, que quase não têm expressão em todos os manuais. O presente estudo alerta para o facto de haver uma necessidade crescente de diversificação de tarefas propostas nos manuais escolares. Relativamente à adequação didática das funções exponenciais e logarítmicas nos manuais escolares, conclui-se, pela análise das suas componentes epistémica, mediacional e ecológica, que há adequação.*

Abstract. *This work focuses on the analysis of the didactic approach of exponential and logarithmic functions, in the six Portuguese textbooks, 12th grade math A, during school year 2012-2013. In particular we analysed the mathematical situations, concepts, propositions, procedures, language and arguments that the student manual presents. With regard to mathematical situations were recorded different types of tasks that the author proposes the student to apply the knowledge. It was also analysed the appropriateness of teaching exponential and logarithmic functions, in textbooks and curriculum. The methodology is based on the methodological onto-semiotic approach to mathematics knowledge and instruction. In terms of results, we can conclude that it is privileged algorithmic calculation, to the detriment of the tasks of exploration, conjecture / argue and modelling, which have almost no expression in all manuals. The study warns that there is a growing need for diversification of tasks proposed in textbooks. Furthermore, the degree of appropriateness in teaching various components is average in almost all manuals, since the emphasis in the calculation routine is not conducive to research, justification and argumentation and manuals technological resources undiversified.*

Palavras-chave: Manuais escolares; Ensino secundário; Enfoque ontossemiótico; Adequação didática.

Introdução

O Conselho Nacional de Educação (CNE) (2006) considera o manual escolar como um instrumento que, quando possui qualidade científica e didática, é um valioso auxiliar do processo de aprendizagem do estudante. Assim, foi realizado um estudo, no âmbito de uma dissertação de mestrado em didática da matemática, sobre manuais escolares do 12.º ano, de Matemática A, com os seguintes objetivos: identificar o significado pretendido, das funções exponenciais e logarítmicas, nos manuais e no programa de Matemática A; analisar a rede de entidades primárias: situações, linguagem, conceitos, proposições, procedimentos e argumentações, das funções exponenciais e logarítmicas, nos manuais escolares; e analisar as componentes, epistémica, mediacional e ecológica das funções exponenciais e logarítmicas, nos manuais escolares. Nesta comunicação pretendemos apresentar os resultados desta investigação. A metodologia adotada teve por base ferramentas teóricas do enfoque ontossemiótico do conhecimento e ensino da matemática (EOS) (Godino, Batanero, & Font, 2008; Godino, 2011; Godino, Rivas, & Artiaga, 2012) e a categorização criada por Ordóñez (2011).

Este trabalho dá indicadores de que os manuais escolares devem contemplar tipos mais diversificados de tarefas de forma a propiciar o desenvolvimento das competências previstas para o Ensino Secundário e devem apresentar um maior número de tarefas de exploração, conjetura/argumentação e modelação de situações da vida real. Mostramos, ainda, neste trabalho as possibilidades oferecidas pelo referido quadro teórico no campo da análise de recursos didáticos, nomeadamente de manuais escolares (Godino et al., 2012).

Na subsecção 2, resumimos o enquadramento teórico, problema e metodologia de investigação. Na subsecção 3 apresenta-se a análise das situações propostas nos manuais escolares e, finalmente, na subsecção 4 é apresentada a síntese de resultados e implicações do estudo.

Enquadramento teórico, problema e metodologia de investigação

O relatório dos Exames Nacionais de Matemática A de 2011 apresenta como proposta de intervenção didática "reforçar o cálculo algébrico, o desenvolvimento de raciocínios demonstrativos e a utilização da calculadora gráfica, diversificando estratégias de forma a otimizar as suas potencialidades e a desenvolver nos alunos a capacidade de analisar e interpretar os dados por ela gerados" (GAVE, 2011, p. 53). Também o relatório do

Projeto Testes Intermédios (GAVE, 2012) refere que os estudantes deverão ser incentivados a alcançarem "resultados de excelência" em itens que envolvam apenas conhecimentos ou aplicações rotineiras e que as dificuldades acentuam-se nos itens em que se torna necessário analisar, transferir e relacionar conhecimentos e resolver problemas não rotineiros.

Assim, o objetivo geral deste estudo foi averiguar de que forma o manual escolar do 12.º ano de Matemática A adotado nas Escolas Secundárias portuguesas aborda, numa perspetiva didática, o tema das funções exponenciais e logarítmicas. O regime de avaliação, certificação e adoção de manuais escolares aplicou-se a partir do ano letivo de 2008/2009, em condições fixadas pelo Despacho n.º 415/2008, publicado no Diário da República, 2.ª série, n.º 3 de 4 de janeiro de 2008. Os critérios de apreciação de manuais escolares estão distribuídos por quatro domínios: i) Organização e Método; ii) Informação; iii) Comunicação; iv) Características materiais. No entanto, as respetivas componentes de análise têm uma formulação muito genérica, podendo conduzir a interpretações diversificadas, de acordo com as conceptualizações que os professores têm.

Partindo da necessidade de uma análise mais específica, abordamos as seguintes questões de investigação, relativamente ao tema funções exponenciais e logarítmicas nos manuais do 12.º ano, Matemática A: que tipo de situações matemáticas são propostas nos manuais escolares, no âmbito das funções exponenciais e logarítmicas?; quais os conceitos, proposições e procedimentos utilizados nos manuais escolares, no âmbito das funções exponenciais e logarítmicas?; que tipo de linguagem e argumentações são utilizados nos manuais escolares, no âmbito das funções exponenciais e logarítmicas?; qual a adequação epistémica, mediacional e ecológica, das funções exponenciais e logarítmicas, nos manuais escolares?

Na revisão de literatura sobre a análise de manuais, verificamos que são diversos os estudos que se centram no manual escolar como objeto de análise. A título de exemplo, Viseu e Morgado (2011) divulgam alguns resultados de um estudo de caso realizado com professores de Matemática que lecionam os 9.º e 12.º anos de escolaridade, em dois agrupamentos de escolas do distrito de Braga, com o objetivo de averiguar de que forma(s) os professores integram os manuais escolares nas atividades que desenvolvem na escola, em particular ao nível da sala de aula, bem como os sentidos que conferem à utilização destes recursos. Um ano mais tarde, Mateus (2012) analisa a dimensão crítica da literacia estatística nos manuais escolares.

Da revisão de literatura sobre a análise de manuais, concluímos que são poucos os trabalhos que têm como campo investigativo os manuais do 12.º ano e não encontrámos nenhum, em Portugal, com o mesmo quadro teórico do nosso, que analise todos os manuais em vigor no ano letivo a que se refere este estudo.

A relevância da análise de manuais é justificada pelo facto de o professor, quando planifica as suas aulas, nem sempre trabalhar diretamente com os programas, mas sim com os manuais, que funcionam como guias de estruturação da aula, o que faz com que os manuais sejam um fator decisivo para a existência de uma estrutura invariante da ação didática do professor (Zabalza, 1992).

O Programa de Matemática A do 12.º ano (Silva, Fonseca, Martins, Fonseca, & Lopes, 2002) distingue, no âmbito dos conteúdos das funções exponenciais e logarítmicas, quatro subtemas: (i) função exponencial de base superior a um, crescimento exponencial, estudo das propriedades analíticas e gráficas da família de funções definida por $f(x) = a^x$ com $a > 1$; (ii) função logarítmica de base superior a um, estudo das propriedades analíticas e gráficas da família de funções definida por $f(x) = \log_a x$ com $a > 1$; (iii) regras operatórias de exponenciais e logaritmos; (iv) utilização de funções exponenciais e logarítmicas na modelação de situações reais.

O referido Programa destaca que vários conceitos do tema das funções exponenciais e logarítmicas são importantes noutras disciplinas como "Física", "Química", "Economia" e "Geografia". Por isso, é bastante importante haver uma colaboração estreita entre os professores de Matemática e os das outras disciplinas. A utilização de exemplos concretos dessas disciplinas, a realização de atividades comuns ou a lecionação de algum aspeto numa dessas disciplinas para posterior aprofundamento na disciplina de Matemática são algumas das possibilidades que se oferecem aos professores. Esta recomendação vai ao encontro da norma do National Council of Teacher of Mathematics (NCTM) para as conexões no ensino da matemática, quando refere que os estudantes devem "reconhecer e aplicar matemática em contextos exteriores a ela própria" (NCTM, 2008, p. 416).

A noção de adequação didática permite passar de uma " didática descritiva - explicativa a uma didática normativa, isto é, a uma didática que se orienta para uma intervenção efetiva em sala de aula" (Godino, 2011, p. 5). A adequação didática de uma abordagem de ensino compreende uma articulação coerente e sistémica das seguintes adequações parciais: epistémica, ecológica, cognitiva, afetiva, interacional e mediacional.

Para cada uma destas componentes de adequação didática, no marco teórico distinguem-se vários indicadores empíricos, tendo por base os trabalhos de Godino (2011), Ordóñez (2011) e Godino, Rivas, e Arteaga (2012).

De seguida, são apresentados os descritores de cada uma das seis categorias da componente epistémica bem como das suas subcategorias (Tabela 1).

1. **Situações**, de acordo com o tipo de situação de ensino que se utiliza. Podem ser as seguintes: 1.1 Tipo de situações que se usam para introduzir/motivar para as funções exponenciais e logarítmicas: uso de uma situação da própria matemática, uso de uma situação de outras ciências ou uso de uma situação da vida real. Analisa-se se apresenta uma proposta de resolução ou não; 1.2 Exemplos que se utilizam para facilitarem a compreensão do discurso matemático. Analisa-se: o lugar onde se incluem (antes ou depois da definição formal), o que se pretende com eles, se a resolução é completa ou incompleta e como (de modo formal ou intuitivo); 1.3 Tarefas que o autor propõe ao estudante de aplicação dos conceitos matemáticos ensinados. As tarefas classificam-se atendendo às subcategorias.

a) Conhecimentos prévios: tarefas destinadas a rever pré-requisitos sobre potências, funções e progressões geométricas, que se consideram necessários para o estudo das funções exponenciais e logarítmicas do 12.º ano.

b) Conhecimentos emergentes:

1) Representação gráfica de funções: destinado ao desenvolvimento de destreza na representação gráfica de funções.
2) Cálculo algorítmico: destinado ao desenvolvimento de destreza algorítmica e aplicação das regras expostas.
3) Exploração (com ou sem recurso à calculadora): destinada a que o leitor selecione e utilize as ferramentas mais adequadas para a sua resolução e cujo objetivo é despertar o interesse e desenvolver um raciocínio, usando conhecimentos já adquiridos.
4) Aplicação de uma definição: para clarificar ou interpretar uma definição.

5) Aplicação de uma propriedade: para interpretação e clarificação da mesma.

6) Conjeturar e argumentar: destinado a prever um determinado resultado e apresentar um discurso lógico que o sustente.

7) Prova: argumentação que justifica a validade de uma proposição ou um procedimento. A prática discursiva pode incluir elementos empíricos, indutivos, lógico-dedutivos,...

8) Modelação de situações da vida real: contextualizada numa situação vivida pelo leitor. Nesta subcategoria, apenas são contabilizadas tarefas em que o estudante tem de descobrir a expressão algébrica da função que melhor modela a situação.

2. **Linguagem**, que pode ser do tipo: verbal, numérica, gráfica, algébrica ou tabelar.

3. **Conceitos**, introduzidos mediante uma definição, tais como: função exponencial, logaritmo e função logarítmica. Analisaremos se há uma única definição e se esta é formal ou intuitiva.

4. **Proposições**, enunciados sobre conceitos tais como: propriedades das funções exponenciais e logarítmicas de base maior que um (domínio, contradomínio, zeros, sinal, monotonia, assíntotas, continuidade, injetividade, paridade…); regras operatórias das funções exponenciais e logarítmicas; crescimento das funções exponenciais e logarítmicas; limites: $\lim_{x\to+\infty} a^x$ $\lim_{x\to-\infty} a^x$ $\lim_{x\to+\infty} \log_a x$ $\lim_{x\to 0^+} \log_a x$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^p}$, $a > 1$, $p \in IR$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x}$, $a > 1$

Analisou-se a forma como são apresentadas estas propriedades, tendo em conta as seguintes subcategorias:

4.1 Se a exposição que é feita das propriedades é formal ou intuitiva.

4.2 Se se provam, justificam ou só se expõem.

4.3 Se se utilizam ou só se expõem sem mais referência.

5. **Procedimentos**, os utilizados para resolver as atividades. Distinguimos:

5.1 Se se empregam vários procedimentos para resolver as situações ou somente um em cada caso.

5.2 Se os procedimentos que se utilizam são justificados ou simplesmente se expõem como métodos rotineiros.

5.3 Se utiliza as novas tecnologias (calculadora gráfica, computador, sensores,...).

6. **Argumentações**, mostram as utilizadas no desenvolvimento. Distinguimos:

6.1 Se utiliza uma prática discursiva para convencer o leitor da validade de determinadas propriedades ou proposições, baseada na linguagem natural, gráfica,...

6.2 Tipo de prova (empírica, indutiva, lógico-dedutiva, contraexemplos, equivalências,...).

Apresenta-se de seguida, na Tabela 1, a grelha de análise dos manuais escolares do 12.º ano, relativamente ao tema das funções exponenciais e logarítmicas.

Tabela 1. Grelha de análise de manuais escolares

<table>
<tr><th>Categorias</th><th colspan="2">Subcategorias</th></tr>
<tr><td rowspan="4">1. Situações</td><td colspan="2">1.1 Introdução/motivação</td></tr>
<tr><td colspan="2">1.2 Exemplos (tarefas resolvidas)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1.3 Tarefas
(que o autor propõe ao estudante)</td><td>Conhecimentos prévios</td></tr>
<tr><td>Conhecimentos emergentes
1- Representação gráfica de funções
2 - Cálculo algorítmico
3 - Exploração
4 - Aplicação da definição
5 - Aplicação de uma propriedade
6 - Conjeturar e argumentar
7 - Prova
8 - Modelação de situações da vida real</td></tr>
<tr><td colspan="3">2. Linguagem</td></tr>
<tr><td colspan="3">3. Conceitos</td></tr>
<tr><td rowspan="3">4. Proposições</td><td colspan="2">4.1 Tipo de exposição.</td></tr>
<tr><td colspan="2">4.2 Se se prova ou não.</td></tr>
<tr><td colspan="2">4.3 Se se utiliza ou só se expõem.</td></tr>
</table>

5. Procedimentos	5.1 Se utiliza diversas abordagens.
	5.2 Justificam-se ou não.
	5.3 Se utiliza as novas tecnologias.
6. Argumentações	6.1 Se utiliza uma prática discursiva para convencer da validade de determinadas propriedades, baseada na linguagem natural, gráfica,...
	6.2 Tipo de prova usada.

Os manuais selecionados para o estudo foram ordenados e nomeados consoante o número de escolas que o adotaram: M1, M2, M3, M4, M5 e M6. Assim, o manual identificado com o número 1 é o mais adotado nas escolas de Portugal continental e dos arquipélagos da Madeira e dos Açores, e assim sucessivamente até ao manual identificado com o número 6, que é o menos adotado no ano letivo 2012-2013. Seguidamente faz-se uma breve apresentação de cada manual escolar em estudo, referindo-se para todos os manuais o título, os autores e a editora.

Manual M1: Título: *Novo Espaço - Matemática A - 12.º Ano*. Autores: Belmiro Costa e Ermelinda Rodrigues. Editora: Porto Editora.

Manual M2: Título: *Matemática A - 12.º Ano*. Autores: Maria Augusta Ferreira Neves, Albino Pereira, Jorge Nuno Silva. Editora: Porto Editora.

Manual M3: Título: *Xeqmat 12 - Matemática A - 12.º Ano*. Autores: Cristina Viegas, Francelino Gomes, Yolanda Lima. Editora: Texto Editores.

Manual M4: Título: *Ípsilon 12 - Matemática A - 12.º Ano*. Autores: Carlos Andrade, Cristina Viegas, Paula Pinto Pereira, Pedro Pimenta. Editora: Texto Editores.

Manual M5: Título: *Matemática A - 12.º Ano*. Autores: Luzia Gomes e Daniela Raposo.

Editora: Edições ASA.

Manual M6: Título: *Desafios 12.º Ano – Matemática A*. Autores: Cristina Negra e Emanuel Martinho. Editora: Santillana.

Este estudo pretende analisar a abordagem didática das funções exponencial e logarítmica nos referidos manuais. Para atingir este objetivo, definiram-se as quatro questões de investigação já apresentadas. Este estudo segue uma abordagem qualitativa e o processo de análise de dados (parte integrante da metodologia de investigação) é realizado com base nos pressupostos teóricos do enfoque ontossemiótico.

Análise das situações propostas nos manuais escolares

Para dar resposta à primeira questão de investigação – "Que tipo de situações matemáticas são propostas nos manuais escolares, no âmbito das funções exponenciais e logarítmicas?" –, começamos por fazer uma análise das situações de introdução/motivação, apresentadas nos manuais escolares.

Relativamente à forma como os autores introduzem o tema das funções exponenciais e logarítmicas, quase todos apresentam situações da vida real ou de outras ciências (tabela 2). Apenas o manual M2 coloca uma tarefa introdutória da própria matemática. Os manuais M1, M4, M5 e M6 apresentam uma situação de outra ciência. Destes quatro manuais, os três primeiros apresentam, tal como o manual M3, situações de introdução alusivas à vida real. Além disso, constata-se que a maioria dos manuais não explora as situações de introdução/motivação. Apenas o manual M5 apresenta a resolução das duas situações e o manual M4 resolve a tarefa alusiva às outras ciências.

Tabela 2. Situações de introdução/motivação nos manuais escolares

Situação / Manual	Da própria Matemática	De outras ciências	Da vida real
M1		1	1
M2	1		
M3			2
M4		1	1
M5		1	1
M6		1	

Todos os manuais apresentam uma pequena nota histórica focada no contributo de algum matemático para as funções exponenciais e logarítmicas.

Em todos os manuais há a preocupação de apresentar exemplos (tarefas resolvidas), depois do desenvolvimento teórico, para facilitar a compreensão do discurso matemático. Os exemplos ajudam o estudante na apresentação correta de texto escrito, com estratégias e modelos de resolução de problemas. Apresentam uma resolução completa e formal.

De seguida, apresenta-se uma análise dos diferentes tipos de tarefas matemáticas que os autores dos diversos manuais propõem aos estudantes. Considera-se tarefa cada um dos itens a que o estudante tem de dar resposta e é classificada apenas numa categoria.

Tabela 3. Quantidade dos diferentes tipos de tarefas matemáticas propostas nos manuais

Manual / Tarefa	M1	M2	M3	M4	M5	M6
Conhecimentos prévios	11	8	85	60	8	11
Representação gráfica de funções	2	0	20	8	9	4
Cálculo algorítmico	158	111	249	228	149	144
Exploração	21	2	39	16	5	8
Aplicação da definição	41	27	52	22	15	19
Aplicação de uma propriedade	123	14	124	86	56	74
Conjeturar e argumentar	6	6	16	10	0	1
Prova	39	6	17	24	19	13
Modelação matemática	0	3	5	12	2	2
Total de tarefas	401	177	607	466	263	276

Pela análise da tabela 3 poderemos concluir que o manual M3 é o que apresenta um maior número de tarefas matemáticas, seguido dos manuais M4, M1, M6 e M5. O manual M2 apresenta o menor número de tarefas propostas ao estudante (menos da terça parte de M3).

Após um estudo individualizado de cada manual, apresenta-se uma visão global das tarefas propostas nos seis manuais na figura 1.

Como se pode observar na figura seguinte, todos os manuais privilegiam as tarefas de cálculo algorítmico, seguidas das situações de aplicação de uma propriedade. As de aplicação da definição, conhecimentos prévios e prova têm alguma expressão. As tarefas de exploração, modelação, conjeturar/argumentar e representação gráfica de funções exponenciais e logarítmicas são as que têm menor relevância em todos os manuais.

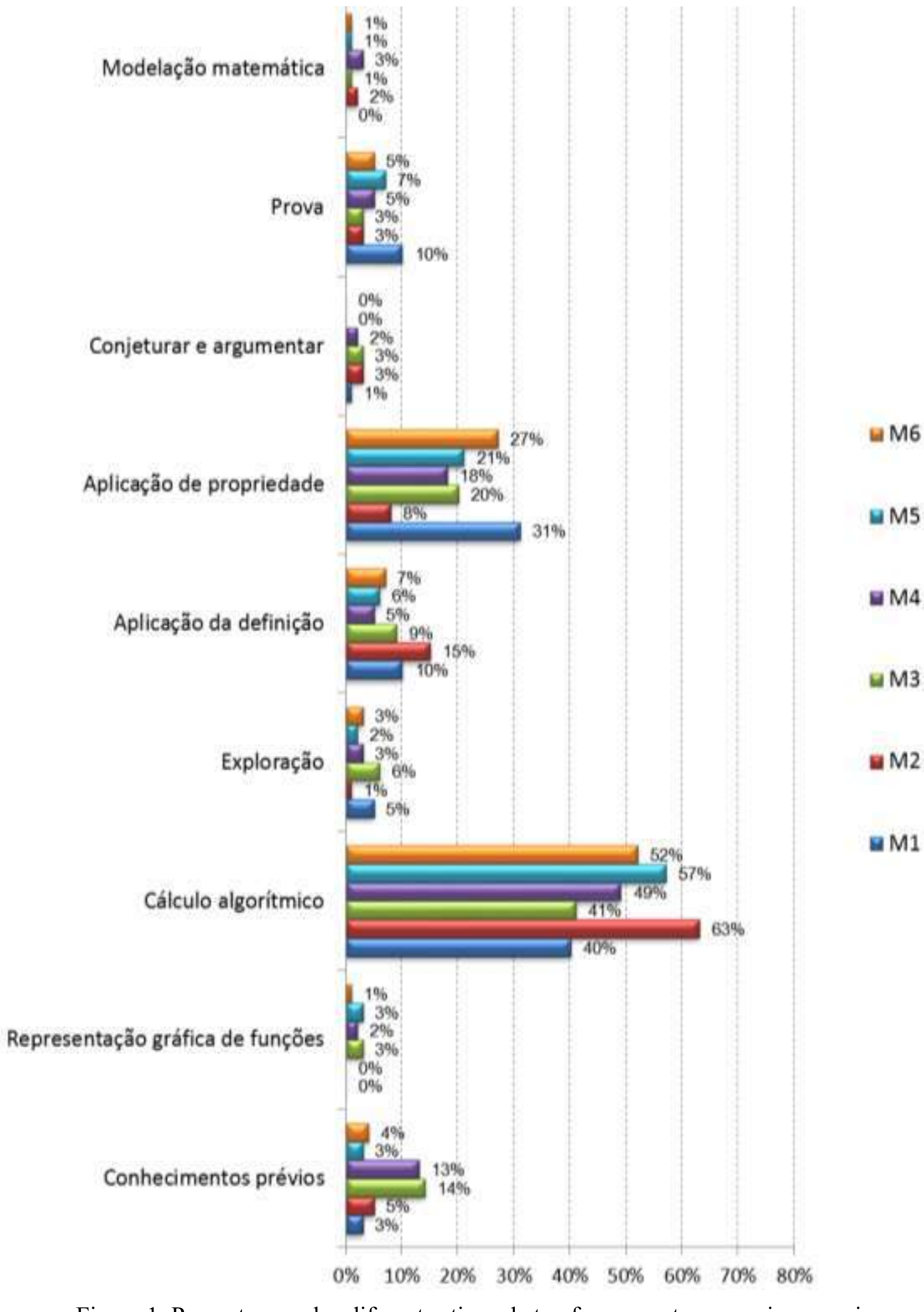


Figura 1. Percentagens dos diferentes tipos de tarefas propostas nos seis manuais

Da análise efetuada concluiu-se que: em média, 50% das tarefas propostas, nos manuais escolares do 12.º ano de Matemática A, são de cálculo algorítmico; 21% são de aplicação de uma propriedade; 8% são tarefas para aplicar uma definição; 7% são de revisão de conhecimentos prévios; 6% são de prova; 3% são tarefas de exploração; 2%

são de representação gráfica de funções; 2% são para conjeturar/argumentar; e 1% são tarefas de modelação da vida real para o estudante descobrir o modelo que melhor traduz a situação descrita (figura 2).

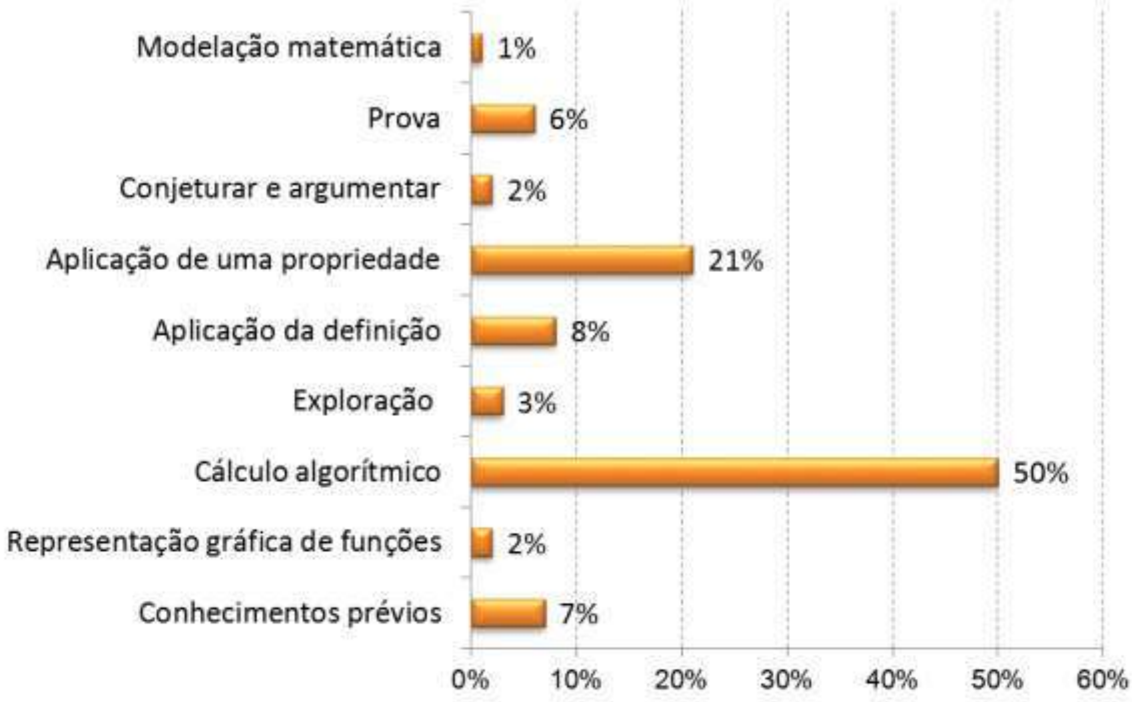


Figura 2. Média das percentagens de cada tipo de tarefa nos seis manuais.

De alertar para o facto que o manual M1 não apresenta tarefas de modelação de situações da vida real, em que o estudante tem de descobrir o modelo matemático que melhor traduz a situação descrita. O manual M2 não propõe a representação gráfica de funções exponenciais e logarítmicas. O manual M5 não propõe qualquer tarefa cuja resolução implique conjeturar e argumentar. Assim, conclui-se que, relativamente a este tipo de tarefas, os manuais M1 e M5 não vão ao encontro das orientações curriculares para as funções exponenciais e logarítmicas.

Na componente "argumentação" um dos indicadores refere-se à prova. A este respeito, os manuais M1 e M4 são os que propõem mais tarefas desta natureza, como se pode observar na figura 3. O manual M2 é o que apresenta menos tarefas deste tipo.

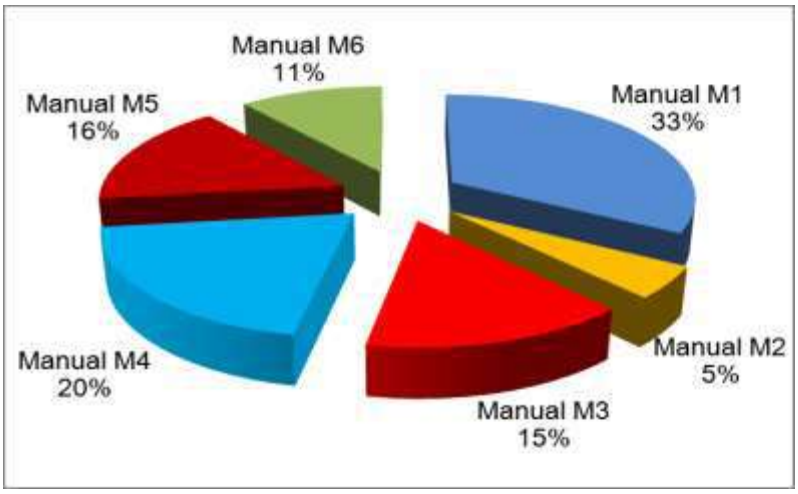


Figura 3. Percentagem de tarefas de prova propostas nos seis manuais

Os seis manuais escolares analisados caraterizam-se pela sua riqueza em tarefas de cálculo algorítmico, assim como inúmeras tarefas de aplicação de uma propriedade. Apresentam um número significativo de tarefas de prova, mas poucas situações para conjeturar, argumentar e de exploração.

Como se pode observar na figura 4, todos os manuais fazem a revisão dos conhecimentos prévios necessários para a aquisição dos conhecimentos emergentes, com principal destaque para o M3 e M4. O manual M4 é o único que apresenta um teste de diagnóstico. O manual M5 apresenta o resumo das progressões aritméticas, progressões geométricas e conceitos básicos de funções.

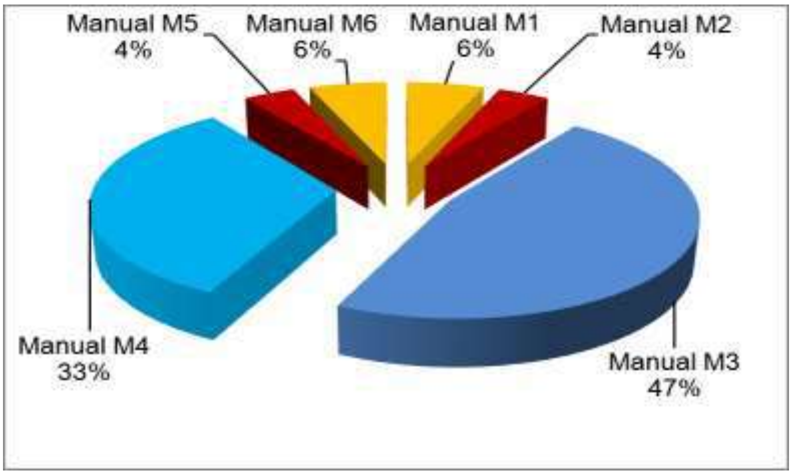


Figura 4. Percentagem de tarefas de revisão dos conhecimentos prévios

Todos os manuais apresentam tarefas que relacionam as funções exponenciais e logarítmicas com a vida real ou com outras ciências. O manual M4 é o que mais valoriza as conexões interdisciplinares, nomeadamente da física, química, biologia, economia, geografia, sociologia e saúde (28%). Um quarto das tarefas propostas pelo manual M5 tem esta natureza. Seguem-se os manuais M2 e M3, com 24%, e o M1 com 22%. O manual M6 é o que menos relaciona a matemática com as outras disciplinas (19%).

Síntese de resultados e implicações

Neste estudo fez-se uma análise documental dos seis manuais escolares portugueses de Matemática A do 12.º ano de escolaridade. O tópico analisado é o das funções exponencial e logarítmica, do tema "Introdução ao cálculo diferencial II". Em cada manual foram analisadas: situações, linguagem, conceitos, proposições, procedimentos e argumentações.

Relativamente à forma como os autores introduzem as funções exponenciais e logarítmicas, todos os manuais apresentam pelo menos uma tarefa introdutória. Além disso, a maioria propõe situações alusivas à vida real ou a outras ciências, que não explora.

Todos os manuais apresentam exemplos (tarefas resolvidas), depois do desenvolvimento teórico, para facilitar a compreensão do discurso matemático. Os exemplos ilustram a apresentação correta do texto escrito, com estratégias e modelos de resolução das tarefas. Os exemplos têm uma resolução completa e formal.

Relativamente às tarefas que os autores propõem ao estudante, para aplicação de conhecimentos e consolidação da aprendizagem, todos os manuais têm tarefas de revisão dos conhecimentos prévios necessários à aquisição dos conhecimentos emergentes. Refira-se, no entanto, que a maioria dos manuais apresenta um reduzido número de tarefas desta natureza.

No que diz respeito às tarefas que os autores dos manuais propõem ao estudante para aplicação dos conceitos matemáticos expostos que visam os conhecimentos emergentes, concluiu-se que o cálculo algorítmico é privilegiado em todos os manuais. Muito destacadas deste aparecem as tarefas de aplicação de uma propriedade. Seguem-se as de aplicação de uma definição e de prova em todos os manuais. As tarefas de exploração, representação gráfica de funções, conjeturar/argumentar e modelação matemática têm pouca expressão em todos os manuais.

A exposição das proposições é formal. Todos os manuais provam as regras operatórias dos logaritmos. Os limites notáveis e as propriedades das funções exponenciais e logarítmicas são justificados de forma intuitiva. As restantes propriedades só se expõem. Geralmente, as proposições são aplicadas através de exemplos após o enunciado. Utilizam vários procedimentos para resolver a mesma situação, embora predomine o analítico. Os manuais justificam os procedimentos que propõem, exceto o manual M1, que expõe as equações e inequações envolvendo logaritmos como métodos rotineiros.

Utilizam a linguagem verbal, algébrica, numérica, gráfica e tabelar, relacionando de forma sistemática os aspetos algébricos, numéricos e gráficos. Na exposição dos conteúdos, os manuais recorrem à linguagem lógico-formal apenas no contexto de enunciado de propriedades (quantificadores, implicações, equivalências,...).

No que se refere às argumentações, todos os manuais apresentam um discurso em linguagem natural, para convencer o leitor de determinadas propriedades ou proposições, partindo de exemplos concretos para a generalização. Utilizam quase exclusivamente os métodos de prova sintético ou analítico.

As adequações epistémica, mediacional e ecológica (Godino, Rivas, & Arteaga, 2012) não são observáveis diretamente e, por essa razão, inferimo-las a partir de indicadores empíricos (Godino, 2011). Nesta apreciação, destacam-se alguns aspetos, como se mostra na figura 5.

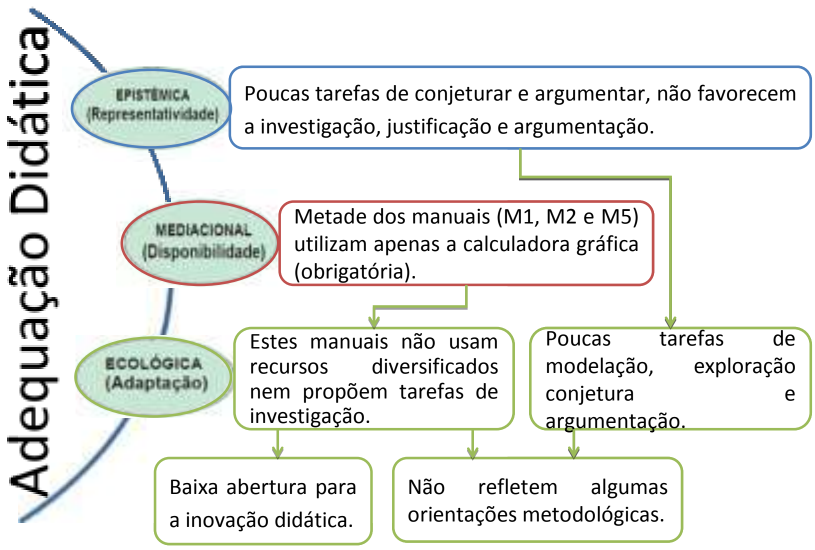


Figura 5. Aspetos a melhorar na adequação didática dos manuais analisados

A metodologia implementada na análise dos manuais, semelhante à utilizada na análise de livros de texto de outros trabalhos de investigação, baseia-se em elementos teóricos propostos pelo enfoque ontossemiótico e tem-se mostrado muito produtiva para analisar o processo de ensino, podendo ser utilizada para estudar outras noções.

Outro contributo vem da aplicação dos critérios de adequação didática, que nos deram elementos para analisar os manuais do 12.º ano e identificar, de acordo com esta análise, pontos em que os manuais não estão em absoluta sintonia com as normas curriculares. Ao tomarmos consciência das fragilidades dos manuais podemos agir no sentido de as colmatar, a fim de melhorar o ensino das funções exponencial e logarítmica.

Os manuais escolares devem contemplar tipos mais diversificados de tarefas, de forma a propiciar o desenvolvimento das competências previstas para o Ensino Secundário. Seria importante que apresentassem um maior número de tarefas de exploração, conjetura, argumentação e modelação matemática. Uma vez que o manual escolar é, segundo alguns estudos, o recurso privilegiado pelos professores, as alterações nos manuais escolares poderiam ajudar na mudança das práticas destes e, consequentemente, no ensino da Matemática.

Julgamos que este estudo poderá ser importante para mostrar como são apresentadas as funções exponencial e logarítmica nos manuais escolares do 12.º ano e identificar pontos que podem ser melhorados. Além disso, o estudo poderá fornecer argumentos aos professores para uma melhor escolha dos manuais escolares, com base numa análise mais crítica e reflexiva.

Referências

APM (1998). *Matemática 2001: Diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da Matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

CNE (2006). *Parecer sobre proposta de lei relativa ao sistema de avaliação dos manuais escolares para os ensinos básico e secundário*. Obtido de http://www.cnedu.pt/files/cnepareceresmodule/Parecer_2_2006.pdf?phpMyAdmin=nWb0ZYNY47nSvifA8BSCc4NedFa

Contreras, A., & Ordóñez, L. (2006). *Complejidad ontossemiótica de un texto sobre la introducción a la integral definida*. *Relime*, *9*(1), 65-84.

Font, V., Godino, J. D., & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, *82*, 97-124.

GAVE (2011). *Exames Nacionais - Relatório 2011*. Consultado em 20/11/2012, http://www.gave.min-edu.pt/np3/24.html

GAVE (2012). *Projeto Testes Intermédios - Relatório 2012*. Consultado em 20/11/2012, http://www.gave.min-edu.pt/np3/24.html

Godino, J. D. (2011). *Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2008). Um enfoque onto-semiótico do conhecimento e a instrução matemática. *Acta Scientiae*, *10*(2), 1-37.

Godino, J. D., Rivas, H., & Arteaga, P. (2012). Inferencia de indicadores de idoneidad didática a partir de orientaciones curriculares. *Práxis Educativa*, *7*(2), 331-354.

Mateus, A. L. (2012). A *dimensão crítica da literacia estatística nos manuais escolares* (Tese de mestrado). Instituto Politécnico de Leiria, Leiria, Portugal.

National Council of Teacher of Mathematics (NCTM) (2008). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

Ordóñez, L. (2011). *Restricciones institucionales en las matemáticas de 2º de bachillerato en cuanto al significado del objeto integral definida* (Tese de doutoramento). Universidade de Jaén, Jaén, Espanha.

Silva, J. C., Fonseca, M. G., Martins, A. A., Fonseca, C. M. C., & Lopes, I. M. C. (2001). *Matemática A - 10º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.

Viseu, F., & Morgado, J. C. (2011). Manuais escolares e desprofissionalização docente: Um estudo de caso com professores de Matemática. *Livro de Actas do XI Congresso Internacional Galego-Português de Psicopedagogía* (pp. 991-1002). Corunha: Universidade da Corunha.

Zabalza, M. (1992). *Planificação e desenvolvimento curricular na escola*. Rio Tinto: Edições ASA.

Práticas de discussão matemática no ensino da Álgebra

Cátia Rodrigues[1], *Luís Menezes*[2], *João Pedro da Ponte*[3]
[1]Escola Secundária de Emídio Navarro, catiamat@gmail.com
[2]Escola Superior de Educação de Viseu e CI&DETS, menezes@esev.ipv.pt
[3]Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, jpponte@ie.ul.pt

Resumo. *As discussões matemáticas contribuem fortemente para a aprendizagem dos alunos, na medida em que colocam em jogo um conjunto de interações sociais e o processo de negociação de significados matemáticos. Nesta comunicação analisamos as práticas de discussão de um professor de Matemática do 3.º ciclo, em contexto de trabalho colaborativo. O estudo é interpretativo, qualitativo e recorre à entrevista e à observação participante de sessões de trabalho colaborativo e de aulas do professor, apoiados pela elaboração de notas de campo. Os resultados evidenciam que o professor privilegia as ações de apoiar e ampliar na condução de discussões coletivas.*

Abstract. *Mathematical discussions contribute strongly to pupils' learning, as they put into play a set of social interactions and processes of negotiation of mathematical meanings. This communication analyzes the discussion practices of a mathematics teacher of the 3rd cycle of basic education, in the context of collaborative work. The study is interpretive, qualitative and draws on interviews and participant observation of collaborative work sessions and of the teacher's lessons, supported in field notes. The results show that the teacher focuses on supporting and extending actions in collective discussions.*

Palavras-chave: Discussões matemáticas; Práticas Profissionais.

Introdução

A aprendizagem da Matemática com compreensão pressupõe a participação ativa dos alunos na construção do seu conhecimento através do trabalho com tarefas matematicamente significativas e do envolvimento em discussões matemáticas coletivas (em grande grupo). Quando os alunos são incentivados a partilhar as suas ideias, justificá-las e argumentar sobre as ideias dos colegas, negociando significados matemáticos, estão a construir novo conhecimento ou a ampliar o conhecimento existente (Cengiz, Kline, & Grant, 2011). Em particular, em Álgebra, as discussões matemáticas podem dar um forte contributo à aprendizagem ao potenciarem o desenvolvimento da simbolização e da generalização, através da negociação de significados algébricos e de formas de representação adequadas para as ideias algébricas.

Martinho, M. H., Tomás Ferreira, R. A., Boavida, A. M., & Menezes, L. (Eds.) (2014).
Atas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática. Braga: APM., pp. 65–78

As discussões matemáticas decorrem, normalmente, após uma fase de trabalho autónomo em que os alunos, individualmente ou em pequenos grupos, resolvem uma tarefa proposta, geralmente, pelo professor. De seguida, os alunos são convidados a apresentar o seu trabalho, justificando os seus raciocínios. Espera-se que os alunos acompanhem as explicações dos colegas, coloquem questões, argumentem sobre as ideias apresentadas e procurem negociar significados para as ideias partilhadas (Sherin, 2002), que são sistematizadas, posteriormente, em conjunto com o professor.

Na condução de uma discussão coletiva, o professor é chamado a desempenhar diversas ações que são influenciadas e influenciam o seu conhecimento. É, assim, importante compreender como é que o professor promove estes momentos de interação, de modo a contribuir para a aprendizagem dos alunos. Nesta comunicação analisamos as ações que um professor de Matemática do 3.º ciclo do ensino básico realiza na condução de discussões coletivas, no trabalho com tarefas de Álgebra. O estudo que apresentamos nesta comunicação faz parte de um trabalho de investigação mais amplo, que procura compreender como é que um conjunto de três professores de Matemática do 3.º ciclo mobiliza e desenvolve o seu conhecimento didático na preparação, condução e reflexão de discussões matemáticas no ensino da Álgebra.

Práticas de discussão matemática e conhecimento didático

As aulas de Matemática, onde os alunos são incentivados a partilhar as suas ideias, a negociar significados para as ideias apresentadas, a questionar os colegas, a responder a questões levantadas pela turma e onde o professor faz perguntas para facilitar diálogos e promover novas ideias matemáticas colocam grandes desafios aos professores e aos alunos, mas têm grandes potencialidades para a aprendizagem.

A condução de uma discussão coletiva é da responsabilidade do professor. Para o apoiar nessa atividade, Stein, Engle, Smith, e Hughes (2008) sugerem o recurso ao modelo das 5 práticas – antecipar, monitorizar, selecionar, sequenciar e estabelecer conexões entre as respostas dos alunos – onde cada prática influencia as seguintes. Na primeira prática, prévia à aula, o professor antecipa eventuais resoluções dos alunos e dificuldades que possam sentir na resolução da tarefa. O professor pensa, ainda, como pode levar os alunos a aprender o definido para aquela aula, nomeadamente conceitos, representações e procedimentos, e a evoluir nas suas ideias iniciais. Contudo, é importante referir que embora o professor pense num possível fio condutor para a discussão, antecipe resoluções e linhas de raciocínio, no momento da discussão tem que ser capaz de considerar as ideias matemáticas mais produtivas, de forma a ampliar o pensamento dos alunos (Grant, Kline, Crumbaugh, Kim, & Cengiz, 2009).

Na segunda prática, em sala de aula, o professor acompanha o trabalho autónomo dos alunos, prestando atenção às estratégias de resolução apresentadas para a tarefa proposta e às ideias matemáticas envolvidas nessas resoluções. Neste acompanhamento ao trabalho dos alunos, o professor identifica potenciais ideias a serem partilhadas em grande grupo, quer em termos de representações usadas quer em termos de conceitos mobilizados, que vai selecionar e sequenciar, de forma a ampliar o pensamento dos alunos no momento da discussão. Ao selecionar as ideias a serem partilhadas, evita repetições e garante que são discutidas, coletivamente, ideias matemáticas importantes. A sequenciação que faz dessas ideias visa ajudar os alunos a evoluir nas suas ideias iniciais, tendo em conta o objetivo que o professor definiu para aquela aula. Durante a partilha de ideias, que pode ter início com a discussão de uma estratégia errada ou da estratégia mais frequente, o professor leva os alunos a estabelecerem conexões entre as ideias que estão a ser apresentadas, pedindo justificações, levando-os a comparar resoluções próximas e distantes, incentivando-os a formular questões aos colegas e a argumentar sobre as ideias apresentadas. Neste momento, foca a atenção dos alunos em ideias específicas e matematicamente importantes, que dão origem a uma nova troca de ideias entre todos. Uma discussão coletiva assenta, assim, em três componentes distintas que têm objetivos claramente diferentes, onde cada componente influencia as restantes: apresentação de ideias, comparação e avaliação dessas ideias e filtragem (Sherin, 2002). Numa discussão podem gerar-se vários ciclos desse padrão discursivo, onde num primeiro momento o mais importante é ter várias ideias para serem partilhadas e comparadas e, depois, num segundo momento, é o conteúdo do discurso, já que se pretende selecionar as ideias matemáticas mais significativas. O espaço do conteúdo matemático de uma discussão segue, assim, um processo de estreitamento de ideias (Sherin, 2002), já que durante a discussão o professor vai focando a atenção dos alunos nas ideias mais importantes, de forma a atingir o objetivo definido para a aula.

Na condução de uma discussão coletiva, o professor desempenha um conjunto de ações que podem ser agrupadas em quatro classes principais (classe das ações de discussão) que são apoiadas por um conjunto de sete possíveis ações de ensino, como mostra o esquema proposto por Rota e Leikin (2002) (figura 1).

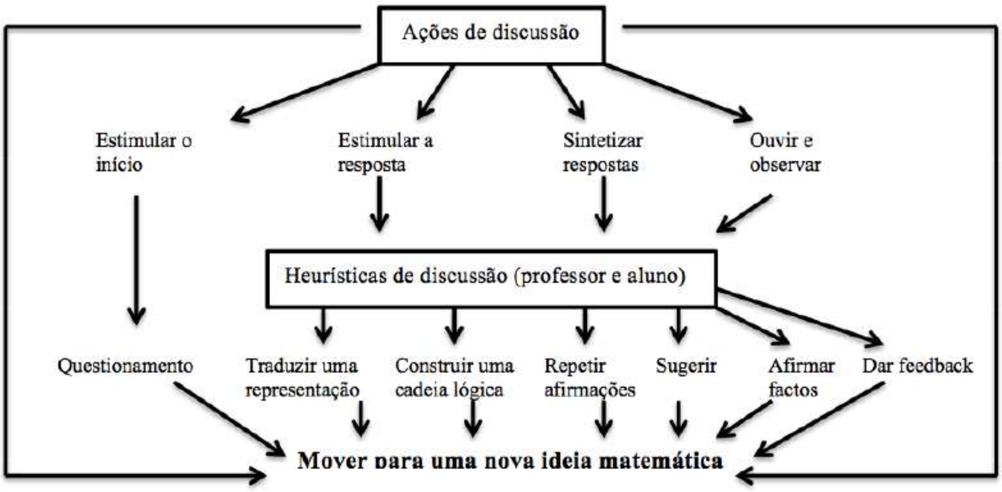


Figura 1. Ações de discussão (Rota & Leikin, 2002)

Cengiz, Kline, e Grant (2011) apresentam também um conjunto de ações que o professor pode desempenhar na condução de uma discussão e que designam de instrucionais: *i)* provocar, ações que pressupõem o convite à partilha de ideias; *ii)* apoiar, para recordar o objetivo da discussão, sugerir a interpretação de uma ideia, repetir um argumento, reforçar uma ideia partilhada, introduzir uma representação; e *iii)* ampliar, ações que pretendem levar os alunos a argumentar, a avaliar uma ideia partilhada, a comparar diferentes estratégias apresentadas. Numa perspetiva semelhante, Ponte, Mata-Pereira, e Quaresma (2013) referem que na condução de uma discussão o professor realiza quatro ações principais: *i)* convidar, com o propósito de envolver os alunos na partilha de ideias; *ii)* apoiar/guiar, para promover a continuação da participação dos alunos; *iii)* desafiar, para ajudar os alunos a evoluir nas suas ideias iniciais; e *iv)* informar/sugerir, para introduzir informação, apresentar argumentos ou até avaliar respostas. A primeira ação distingue-se das restantes, na medida em que tem como objetivo iniciar a discussão, enquanto as outras alimentam a discussão. As ações de desafiar e sugerir, apesar de contribuírem para ajudar os alunos a desenvolverem uma compreensão mais alargada das ideias que estão a ser partilhadas, envolvem diferentes responsabilidades para os diversos intervenientes. Nas ações de desafiar, a responsabilidade de apresentar as ideias matemáticas é dos alunos, enquanto nas ações de sugerir é do professor.

As ações de provocar, convidar ou estimular o início cumprem o mesmo objetivo, já que pretendem iniciar a discussão com o convite à partilha de ideias. As ações de ampliar e desafiar também têm finalidades comuns, na medida em que pretendem levar os alunos a desenvolverem uma melhor compreensão das ideias que estão a ser partilhadas. As ações de estimular e sintetizar a resposta, apoiar, guiar e sugerir incrementam a discussão, ao envolverem os alunos na discussão e ao ajudarem o professor a focar a atenção dos alunos nas ideias matemáticas mais importantes. Estas ações contribuem, fortemente, para as ações de ampliar e desafiar.

Na realização destas ações, o questionamento da parte do professor é uma peça fundamental, já que vai permitir apoiar o discurso dos alunos e envolvê-los na discussão (Huffer-Ackles, Fuson, & Sherin, 2004). Contudo, o questionamento não precisa de partir somente do professor, mas pode partir também dos alunos. Professor e alunos devem formular questões sobre as ideias que estão a ser partilhadas, de forma a procurar desenvolver uma melhor compreensão matemática. As decisões que o professor toma e as ações que desempenha na condução da discussão são apoiadas e influenciadas pelo seu conhecimento didático (Ponte, 2011). Este conhecimento é multidimensional e integra diversos aspetos, onde o conhecimento da prática letiva é central, relaciona-se com o conhecimento do currículo, da Matemática, dos alunos e da aprendizagem. O conhecimento da prática letiva influencia e é influenciado pelas outras dimensões do conhecimento e engloba elementos da gestão curricular como a planificação, as tarefas, o modo de trabalho dos alunos, a regulação da comunicação e a avaliação das aprendizagens. O conhecimento da Matemática é perspetivado como o conhecimento que o professor tem da Matemática enquanto disciplina escolar, incluindo o conhecimento de representações, de conexões, de conceitos e procedimentos. O conhecimento do currículo, dos alunos e da aprendizagem também é importante na atuação do professor em sala de aula, já que é fundamental conhecer bem os documentos curriculares, assim como os alunos e as suas formas de pensar, para promover uma boa aprendizagem e apoiar a tomada de decisões.

Metodologia

O estudo segue uma abordagem qualitativa e interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994), uma vez que se procura estudar as práticas de professores de Matemática do 3.º ciclo, de acordo com o significado que lhes atribuem. A modalidade é o estudo de caso (de um professor), sendo os principais instrumentos de recolha de dados a observação participante (de aulas e sessões de trabalho colaborativo) e a entrevista, apoiados em notas de campo (NC) (Bogdan & Biklen, 1994). A análise de dados é baseada na análise de conteúdo, apoiada no quadro teórico, nomeadamente nos modelos de Stein et al. (2008), Cengiz, Kline, e Grant (2011) e Rota e Leikin (2002).

O dispositivo do estudo envolve um trabalho colaborativo da primeira autora com três professores, na medida em que esta forma de trabalho favorece a compreensão das realidades dos professores (Boavida & Ponte, 2002), neste caso a preparação e condução de discussões matemáticas coletivas para promover a aprendizagem dos alunos. Para a constituição do grupo, foi contactado o coordenador do departamento de Matemática, do agrupamento de escolas onde decorre o estudo, sendo informado da intenção de realizar um trabalho colaborativo com 3 professores, relacionado com a temática das discussões matemáticas, no âmbito do trabalho de investigação da primeira autora. O coordenador considerou que seria pertinente apresentar a proposta aos professores enquadrada num modelo de ação de formação que envolvesse todos os professores do departamento. Respondendo ao desafio lançado, a investigadora propôs uma ação de formação relacionada com a temática das discussões matemáticas, organizada em 10 sessões de trabalho presencial, com o objetivo de criar dinâmicas de trabalho colaborativo e desenvolver práticas de discussão matemática. A ação de formação está a decorrer com a participação de 15 professores.

Nas 5 sessões de trabalho realizadas, com a duração aproximada de 3 horas, refletiu-se sobre textos e episódios de sala de aula relacionados com as discussões matemáticas e com o tema da Álgebra (a partir das próprias experiências dos professores) e prepararam-se tarefas para exploração em sala de aula, tendo em conta o modelo de Stein et al. (2008). Nesta comunicação analisamos alguns dados relativos à entrevista inicial (EI), às sessões de trabalho colaborativo e a duas aulas do professor, depois de feitas as respetivas transcrições.

Este professor tem 25 anos de serviço, 21 dos quais na escola onde leciona atualmente. Apesar de a sua escola fazer parte de um grande agrupamento, tem por hábito trabalhar em conjunto com os seus colegas de departamento, sobretudo os que lecionam os mesmos anos de escolaridade, para elaborar planificações e preparar materiais como fichas de trabalho, tarefas e testes de avaliação. Nestas reuniões de trabalho, procura também refletir com os seus colegas sobre experiências de sala de aula, nomeadamente ao nível da exploração de tarefas com os seus alunos.

Apresentação e discussão de resultados

Nesta secção apresentamos o conhecimento e as práticas do professor relativos às discussões matemáticas. Começamos por referir conceções do professor sobre as discussões matemáticas e em seguida as suas práticas de sala de aula, ao nível da condução de uma discussão, para melhor compreender a sua atuação.

Conceções sobre discussão matemática

O professor considera que o envolvimento dos alunos em discussões matemáticas é vantajoso para a aprendizagem, na medida em que proporciona aprendizagens mais consolidadas.

> Sem dúvida, porque penso que, pronto, a discussão de ideias, muitas vezes da discussão de ideias surgem conceções e surgem aprendizagens que de outra forma às vezes levam, levam muito mais tempo, e não só por isso, acho que as pessoas, os miúdos chegarem às suas próprias conceções, pronto, tem uma aprendizagem, eu acho, tem uma aprendizagem completamente diferente, muito mais consolidada, acho eu, e depois é assim: tendo as aprendizagens consolidadas, poderão fazer observações, intervenções pertinentes, do que ser aquelas aprendizagens que se fazem um bocadinho de, pronto, porque está no livro e pronto, ali acho que ao procurar o porquê, pronto, e acho que vão mais ao fundo. Para mim é uma aprendizagem mais consolidada (EI).

Salienta também que para os alunos é importante verem defendidas as suas ideias, uma vez que "a discussão que gera e que o aluno, sendo o colega, digamos assim, a defender aquela, o ponto de vista dele tem um interesse para ele, porque fala a linguagem dele, não é?" (EI).

Na entrevista inicial, o professor afirma que esta sua conceção não é recente, mas ganhou ênfase nas suas aulas com o Programa de Matemática do ensino básico de 2007. Refere, também, não contemplar de forma pormenorizada e organizada o momento de discussão coletiva na sua planificação. Contudo, na 2.ª sessão de trabalho colaborativo, e na sequência da discussão de um texto relacionado com esta temática, reconhece que a planificação desse momento pode potenciar a sua atuação em sala de aula, tornando a discussão coletiva mais produtiva.

> Acho que temos a ganhar ainda o facto de planificarmos, tu estás em vantagem na forma como podemos conduzir a discussão, acho eu, pelo menos em determinadas situações, claro que não vamos prevê-las todas, mas se calhar ajuda-nos de alguma forma a não nos apanhar tão desprevenidos, vai haver uma ou outra que... (2.ª sessão).

O professor considera que o ponto de partida para o desencadear de uma discussão coletiva é o trabalho dos alunos sobre uma determinada tarefa. No acompanhamento que faz a esse trabalho recolhe ideias que têm potencial para serem partilhadas, posteriormente, com a turma.

> Nas aulas é um bocadinho por, sei lá, às vezes um desafio, uma tarefa, pronto, pode ser como disse há bocadinho e bem em grupo ou a pares, pronto, e depois vou recolher as informações e partir por aí para a, para a discussão (EI).

Relativamente às suas práticas de condução de uma discussão coletiva, e no que respeita à forma como organiza as intervenções dos alunos, o professor salienta que a partilha de ideias tem início com os alunos que se oferecem como voluntários, sendo ele a escolhê-los só quando não há voluntários. Para a escolha desses alunos, usa normalmente o critério da competência matemática.

> Primeiro procuro saber se há algum voluntário, e isso para mim é sempre, pronto. Quando não há voluntários, claro que normalmente vou sempre para aqueles que têm mais competências, ou que eu penso que são melhores alunos, pronto, abrindo sempre discussão, discussão sempre ao grupo, e não fechando ali, portanto, puxando por um ou outro que esteja no mesmo grupo para ver se de facto as coisas, quem, quem funciona ali como motor, se conseguiu passar a informação para o grupo (EI).
>
> O professor afirma que vai iniciar a discussão com os alunos que recorrem a estratégias apoiadas em desenhos ou tabelas e só depois com as estratégias baseadas na escrita do termo geral, já que é esse o seu objetivo para a aula (NC).

A condução de discussões matemáticas, apesar de fazer parte da prática deste professor desde há algum tempo, e com mais ênfase a partir da introdução do Programa de Matemática do ensino básico de 2007, não era planificada antes da ação, decorrendo espontaneamente na sua prática. Atualmente, o professor prepara previamente o momento de discussão que terá lugar na aula, reconhecendo que esta preparação apoia a sua atuação e permite lidar mais eficazmente com situações imprevistas. A organização do momento de discussão também está a mudar, já que agora seleciona os alunos tendo em conta os contributos que as suas resoluções podem dar para o atingir do objetivo que definiu para a aula e para o evoluir dos alunos nas suas ideias iniciais.

A prática de sala de aula

Os episódios que se apresentam de seguida decorrem do trabalho dos alunos sobre duas tarefas que foram preparadas, em sessões de trabalho colaborativo, segundo a prática antecipar do modelo das 5 práticas. Tendo em conta as notas de campo elaboradas durante a preparação dessas tarefas nas sessões de trabalho colaborativo, e focando o momento da antecipação de possíveis estratégias que os alunos podem usar, o professor privilegia, em primeiro lugar, estratégias algébricas, e só quando desafiado a pensar sobre outras avança com estratégias que recorrem a tabelas, ou tentativa e erro (no caso da tarefa do 2.º episódio). Perante este possível cenário, considera que a discussão deve ter início com as estratégias menos poderosas, como as que recorrem a tentativa e erro, avançando depois para as que recorrem a procedimentos algébricos. Para o trabalho dos alunos na tarefa do 1.º episódio, decide disponibilizar cubos de madeira aos alunos, porque acredita que a manipulação desse material favorece a escrita de diferentes expressões para a sequência apresentada na tarefa.

Neste trabalho de preparação, o professor mobiliza diversos aspetos do seu conhecimento didático, nomeadamente o seu conhecimento de Matemática, dos alunos e da aprendizagem.

Episódio 1

O primeiro episódio resulta do trabalho dos alunos do 7.º ano com uma tarefa matemática (figura 2) relacionada com as sequências e regularidades, sendo o objetivo do professor para aquela aula a escrita e a explicação do termo geral. Os alunos trabalham em grupos de 4. Durante a fase de trabalho autónomo, o professor circula pelos grupos e esclarece as dúvidas dos alunos.

Tarefa: Cubos com autocolantes

A Joana está a construir um jogo com cubos e autocolantes. Ela une os cubos por uma das faces e forma filas de cubos. Depois cola um autocolante em cada uma das faces.

A imagem mostra a construção que a Joana fez com 2 cubos. Nessa construção ela usou 10 autocolantes.

1. Descobre quantos autocolantes a Joana usa numa construção com: três cubos; quatro cubos; dez cubos; cinquenta e dois cubos.

2. Consegues descobrir qual é a regra que permite saber quantos autocolantes a Joana usa numa construção com um qualquer número de cubos? Explica como pensaste.

Figura 2. Tarefa Cubos com autocolantes
(retirado de Canavarro, Oliveira, & Menezes, 2012)

Esta tarefa segue-se a uma outra que foi explorada na mesma aula e discutida coletivamente. O momento de apresentação e discussão de ideias tem início com o convite à partilha de ideias por um grupo que ainda não tinha apresentado as suas estratégias de resolução na tarefa anterior.

P: Como é que chegaram à dos cubos?

Aluno: No primeiro problema, 3 cubos deu, 3 cubos dá 14 autocolantes. Nós para descobrirmos isto fizemos o termo geral que é 4n mais 2.

P: Os 3 cubos?

Aluno: Ai, para descobrir os 3 cubos. Os 4 cubos deram-me 18 autocolantes, isto é a mesma coisa que somar sempre mais 4. Os 10 cubos era 42 autocolantes e 52 era 210. Para, porque nós determinámos o termo geral que era 4n mais 2.

P: Porquê? Como, como? Como é que chegaste à conclusão que era 4n? Olha para aqui, este ia ter quantos?

Aluno: 6.

P: 6 autocolantes. E este?

Aluno: Ia ter 10, porque estes dois ficaram.

P: Exatamente. E este ia ter quantos? Tu falaste nos 3 cubos.

Aluno: 14, porque retirámos 2 daqui, um daqui e um daqui.

P: Mas o que eu percebi é que são 4 em 4, mas por que é que é mais 2?

Aluno: Porque nós aqui só puséssemos deste lado 4, metemos mais 2 que é deste e daquele.

O professor dá início à discussão através do convite à partilha da estratégia de resolução. A sua primeira ação é, assim, a de provocar. O questionamento do professor cumpre, essencialmente, dois propósitos: focar a atenção do aluno no que está a partilhar, de forma a corrigir ideias que estão a ser partilhadas (*Os 3 cubos?, Olha para aqui, este ia ter quantos?*) e ajudar os alunos a evoluir nas suas ideias iniciais, através da justificação dos seus raciocínios (*Porquê? Como, como? Como é que chegaste à conclusão que era 4n?*). No primeiro momento, o professor apoia o aluno na exposição das suas ideias, permitindo ao aluno recordar o objetivo da discussão e as ideias que está a partilhar. No segundo momento, tem como objetivo levar os alunos à justificação dos seus raciocínios, apoiando-os na organização do seu pensamento. Neste episódio, são privilegiadas as ações de ampliação, favorecendo a justificação das ideias por parte dos alunos e contribuindo para a ampliação do seu pensamento.

Episódio 2

O segundo episódio surge no decorrer da exploração de uma tarefa (figura 3) com alunos do 8.º ano, que tem como propósito a resolução de problemas envolvendo equações. A tarefa é resolvida em grupos de 4 alunos.

Tarefa 1 – "Eleição para o delegado de turma"

A diretora de turma que coordenou o processo de eleição do delegado de turma, informou no final que:

- ✓ Os 30 alunos da turma votaram e não houve votos brancos ou nulos;
- ✓ Apenas três alunos receberam votos: a Francisca, o Lucas e a Sandra;
- ✓ A Sandra recebeu mais cinco votos que a Francisca;
- ✓ O Lucas recebeu metade dos votos que recebeu a Sandra.

Quem ganhou as eleições? Com quantos votos?

Não te esqueças de apresentar e explicar o teu processo de resolução.

Figura 3. Tarefa 1 (adaptada do Projeto P3M)

Durante o acompanhamento que faz ao trabalho dos alunos, o professor identifica dois tipos de estratégias: tentativa e erro e resolução algébrica. Inicia a discussão com o único grupo que recorre à estratégia de tentativa e erro. É de salientar que este grupo também apresenta uma segunda resolução através de uma equação, mostrando assim as duas estratégias de resolução.

P: (...) Então e depois como é que surgiu a outra parte?

Aluna: Também baseei-me na Francisca e depois isto corresponde aos da, o x+5 corresponde aos da Sandra.

P: Porque ela dizia que tinha mais 5 votos do que a Francisca, certo?

Aluna: Depois isto eram os da Francisca.

P: Sim.

Aluna: E este é os do Lucas, x mais 5 a dividir por 2.

P: E porquê a dividir por 2?

Aluna: Porque era.

P: Queres ver o enunciado?

Aluna: Porque era metade dos votos da Sandra.

P: Como a Sandra tinha x mais 5, não é? Portanto, fizeste x mais 5 sobre 2, certo?

Aluna: Depois dava 30 o total.

P: O total que era o número de alunos da turma, certo?

Aluna: Depois fiz o cálculo.

P: Sim.

Aluna: E o que me deu foi 9.

P: 9, sim.

Aluna: Que eram os votos que a Francisca recebeu, depois fiz o resto.

P: Como a pergunta era quem ganhou as eleições, não é? Portanto, o que é que foste fazer?

Aluna: Fiz.

P: A Francisca era 9, que era o que tinha dado. A Sandra.

Aluna: A Sandra.

P: 9 mais 5 porque. Porquê?

Aluna: Era x mais 5.

P: Porque ela tinha recebido mais 5 votos do que a Francisca.

Aluna: Que dava 14, depois o Lucas que era 14 a dividir por 2.

P: Metade dos da Sandra quer era 14 a dividir por 2. Certo.

Este episódio evidencia a importância das ações ouvir e observar na condução da discussão coletiva. Este tipo de ações numa discussão ajuda os alunos a moverem-se nas suas ideias matemáticas, apoiadas por outro tipo de ações como questionar, repetir afirmações e sintetizar ideias.

Em diversos momentos deste episódio, o professor recorre ao questionamento (*E porquê a dividir por 2? 9 mais 5, porquê?*) para provocar o pensamento dos alunos, levando-os à justificação dos seus raciocínios. Estas ações de ampliar são fundamentais no envolvimento dos alunos na discussão, já que favorecem a explicação e justificação de raciocínios, elementos fundamentais à construção do conhecimento matemático.

As intervenções do professor que vão no sentido de sintetizar as ideias dos alunos (*Porque ela tinha recebido mais 5 votos do que a Francisca. Porque ela dizia que tinha mais 5 votos do que a Francisca, certo?*) ou repetir afirmações (*Como a Sandra tinha x mais 5, não é? Portanto, fizeste x mais 5 sobre 2, certo?*) desempenham um papel importante neste episódio, já que permitem frisar certos raciocínios fundamentais para o acompanhamento das ideias que estão a ser partilhadas. Esta estratégia é uma forma de envolver a turma na escuta ativa das estratégias apresentadas e raciocínios que estão a ser justificados, contribuindo assim para a participação dos alunos na discussão e evitando que a encarem como uma simples apresentação de estratégias, onde todos os grupos terão oportunidade de fazer o mesmo. Ao focar certas ideias, o professor está a encaminhar o pensamento dos alunos para o objetivo da aula, ou para os aspetos que considera essenciais à compreensão dos raciocínios partilhados, permitindo aos alunos estabelecer conexões entre essas ideias e as suas. Estas ações servem, fundamentalmente, para apoiar o pensamento dos alunos.

Considerações finais

O professor inicia as aulas que dão origem a estes episódios com objetivos bem definidos. Na sua preparação, o professor decide sobre o modo de trabalho dos alunos e sobre os materiais a disponibilizar, antecipa possíveis estratégias de resolução que os seus alunos podem seguir e pensa num possível fio condutor para promover a discussão coletiva, de forma a atingir o objetivo da aula. Nessa preparação, o professor mobiliza diversos aspetos do seu conhecimento didático, em particular, da prática letiva, que é influenciado pelo conhecimento da Matemática, do currículo, dos seus alunos e de como eles aprendem.

A preparação pelo professor do momento da discussão pretende, apenas, ajudá-lo na sua atuação em sala de aula, apoiando-o na tomada de decisões, em especial na forma como conduz as ideias dos alunos para atingir os seus objetivos. Em sala de aula, o professor inicia a discussão com o convite a alunos específicos e não com voluntários, ao contrário do que fazia na sua prática letiva anterior. Esta mudança revela-se benéfica na promoção da discussão, já que favorece uma melhor conexão entre as ideias dos alunos, evita repetições e garante que são discutidas ideias matemáticas importantes.

Nestes episódios, o professor privilegia as ações de ampliar e apoiar. As primeiras, muito sustentadas pelas segundas, permitem aos alunos evoluir nas suas ideias iniciais, com responsabilidade nessa tarefa, como também mostram os resultados do estudo de Cengiz, Kline, e Grant (2011). O questionamento que o professor usa nestes episódios e que serve de base às ações de ampliar, permite aos alunos justificar os seus raciocínios e envolvê-los na discussão, criando um maior desafio ao desenvolvimento de uma compreensão mais aprofundada das ideias em jogo.

As ações de provocar surgem, nestes episódios, menos frequentemente, já que têm a função de iniciar a partilha de ideias, que é alargada com ações de apoiar e ampliar. As ações de apoiar ajudam no envolvimento dos alunos na discussão, no acompanhamento às ideias que estão a ser partilhadas e no focar de certas ideias que o professor considera particularmente importantes e que são, posteriormente, alargadas pelas ações de ampliar. O convite a justificar os raciocínios realizados é a ação mais observada nestes episódios (tal como em Cengiz, Kline, & Grant, 2011). É importante continuar a estudar a combinação entre a prática antecipar e a atuação do professor em sala de aula na condução de discussões coletivas, de modo a compreender melhor as ações do professor e os desafios que este encontra na promoção da aprendizagem dos alunos.

Referências

Boavida, A. M., & Ponte, J. P. (2002). Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas. In GTI (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 43-55). Lisboa: APM.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Um introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Canavarro, P., Oliveira, H., & Menezes, L. (2012). Práticas de ensino exploratório da matemática: O caso de Célia. In P. Canavarro, L. Santos, A. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes & S. Carreira (Eds.), *Investigação em educação matemática 2012: Práticas de ensino da matemática* (pp. 255-266). Portalegre: SPIEM.

Cengiz, N., Kline, K., & Grant, T. J. (2011). Extending students' mathematical thinking during whole-group discussions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *14*, 355–374.

Grant, T. J., Kline, K., Crumbaugh, C., Kim, O.-K., & Cengiz, N. (2009). How can curriculum materials support teachers in pursuing student thinking during whole-group discussions? In J. T. Remillard, B. A. Herbel-Eisenmann & G. M. Lloyd (Eds.), *Mathematics teachers at work: Connecting curriculum materials and classroom instruction* (pp. 103-117). New York, NY: Routledge.

Hufferd-Ackles, K., Fuson, K. C., & Sherin, M. G. (2004). Describing levels and components of a math-talk learning community. *Journal for Research in Mathematics Education*, *35*(2), 81-116.

Ponte, J. P. (2011). Estudando o conhecimento e o desenvolvimento profissional do professor de matemática. In N. Planas (Ed.), *Educación matematics: Teoría, critica y prática*. Barcelona: Graó.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante, 2,* 55-81.

Rota, S., & Leikin, R. (2002). Development of mathematics teachers' proficiency in discussion orchestration. In A. D. Cokburn & E. Nardi (Ed.), *Proceedings of 26th PME International Conference*, *4* (pp. 137-145). Norwich, UK.

Sherin, M. G. (2002). A balancing act: Developing a discourse community in a mathematics classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*, 205-233.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*, 313-340.

Organização e desenvolvimento curricular em Matemática, em países da América Latina

Célia Maria Carolino Pires
Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, celia@pucsp.br

Resumo. *No presente artigo nosso objetivo é o de apresentar alguns resultados e reflexões decorrentes de um projeto de pesquisas comparativas de currículos prescritos em alguns países da América Latina, envolvendo seis projetos de doutorado que realizaram, ou estão realizando, estudos comparativos entre Brasil-Chile, Brasil-Paraguai e Brasil-Argentina, Brasil-Uruguai, Brasil-Peru e Brasil-Venezuela. Apresentamos as motivações, os objetivos do projeto e a trajetória percorrida pelos pesquisadores que já concluíram suas investigações. Na sequência, organizamos algumas reflexões sobre resultados desses estudos, buscando identificar semelhanças e diferenças entre currículos prescritos e identificando as principais influências das pesquisas em Educação Matemática na formulação de propostas curriculares nesses países, no momento histórico recente.*

Abstract. *In this article our goal is to present some results and reflections of a comparative research project prescribed in some Latin American countries curriculum, involving six doctoral projects about comparative studies between Brazil-Chile, Brazil-Paraguay, Brazil-Argentina, Brazil-Uruguay, Brazil-Peru, Brazil-Venezuela, respectively. We present the motivations and goals of project, and the path traveled by the researchers. Following, we organize some thoughts on results of these studies in order to identify similarities and differences between prescribed curriculum and identifying the main influences of Mathematics Education in the formulation of curriculum proposals in these countries in recent historical time.*

Palavras-chave: Currículos de Matemática; Estudos comparativos; América Latina.

Introdução

A proposição do projeto "Pesquisas comparativas sobre organização e desenvolvimento curricular na área de Educação Matemática, em países da América Latina[1]" teve como justificativa a carência de pesquisas sobre comparações relativas a currículos de Matemática no Brasil e em outros países, particularmente nos países latino-americanos, considerando-se as possíveis similaridades entre eles, carência essa constatada pela análise de informações oferecidas pelo Banco de Teses da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e outras bases de dados.

[1] Desenvolvido no âmbito do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, pelo Grupo de Pesquisa "Desenvolvimento Curricular e Formação de Professores de Matemática", sob nossa coordenação.

No entanto, apesar da insuficiência de pesquisas sobre o que estamos ensinando a crianças e jovens em países latino-americanos, tínhamos a hipótese de que poderíamos encontrar pontos em comum entre seus currículos, pois é grande o intercâmbio entre pesquisadores em Educação Matemática de países ibero-americanos, em função da criação da Federação Iberoamericana de Sociedades de Educação Matemática (FISEM), em 2003, que congrega várias sociedades. Diversos eventos também mobilizam a comunidade, entre eles a Conferência Interamericana de Educação Matemática (CIAEM), a Reunião de Didática da Matemática do Cone Sul e a Reunião Latino-Americana de Matemática Educativa (RELME).

A opção por estudar países da América Latina apoiou-se ainda em outros fatos. Um deles, referenciado na Constituição Federal brasileira de 1988, que no seu parágrafo único do art. 4.º destaca a importância de uma integração econômica, política, social e cultural dos povos da América Latina, visando à formação de uma comunidade latino-americana de nações.

A distribuição dos serviços educacionais, em termos de eficiência e qualidade, é bastante injusta. Além disso, há uma ausência de mecanismos eficazes para que a sociedade civil venha a contribuir para a formulação de políticas na área da educação, bem como permanecem muito restritas a disponibilidade e utilização das tecnologias de informação e comunicação. Apesar dos problemas, a América Latina manteve o ritmo da tendência global de crescente acesso ao ensino básico e no ensino superior, na última década[2]. Em meio a avanços e desafios, consideramos importante para a comunidade de Educação Matemática desses países refletir a respeito das contribuições atuais e das demandas de pesquisa no sentido de implementar mudanças nesses sistemas educativos, com qualidade.

Nosso Projeto de Pesquisa partiu da definição de quatro objetivos, a saber: (1) identificar aspectos comuns e especificidades dos currículos de Matemática em cada um desses

[2] Números da UNESCO revelam que, em todo o mundo, entre 1990 e 1997, a taxa de escolarização bruta cresceu de 99,2% para 101,8%, no nível da escola primária, de 51,8% para 60,1% no ensino secundário e de 13,8% para 17,4 % no ensino superior. A taxa bruta de matrícula nos três níveis, entretanto, cresceu de 57,5% em 1990 para 63,3% em 1997. A taxa de escolarização bruta é calculada comparando a porcentagem representada por cada grupo etário na população em geral com o número de alunos matriculados em escolas ou centros de ensino superior. A relação pode ser superior a 100%, como no caso do ensino primário, porque inclui alunos matriculados cedo ou mais tarde, em qualquer grau determinado. A taxa bruta de matrícula na América Latina aumentou de 105% em 1990 para 113,6% em 1997, ao nível do ensino fundamental, de 50,9% para 62,2% para o ensino médio, e de 16,8% para 19,4% a nível terciário. A taxa bruta de matrícula nos três níveis foi de 66,1% em 1990 e 72,6% em 1997.

países e as formas de organização; (2) identificar os principais impactos das investigações em Educação Matemática na formulação de currículos prescritos; (3) buscar dados que evidenciem a adesão ou a rejeição dos professores de Matemática às orientações curriculares prescritas nos documentos oficiais; (4) procurar indícios referentes aos currículos que realmente se efetivam nas salas de aula.

Tais objetivos levaram à formulação das seguintes questões norteadoras: Qual Matemática está sendo proposta para ser ensinada a crianças e jovens de países latino-americanos neste início de milênio? Que pressupostos norteiam os documentos curriculares em países latino-americanos? Como se dá o processo de implementação curricular nesses países?

No presente artigo nosso objetivo é o de apresentar algumas comparações de currículos prescritos decorrentes desse projeto de pesquisa e alguns comentários sobre fragmentos de entrevistas realizadas no Brasil, Argentina, Chile e Paraguai.

Metodologia de Pesquisa

A revisão da literatura sobre estudos comparativos evidencia que a comparação não é uma operação simples e implica o recurso a uma teoria da comparação, conforme defende Nóvoa (1998) quando se refere à importância de uma estreita ligação entre as questões metodológicas e as discussões teóricas, bem como da identificação das bases ideológicas que subjazem às diferentes comunidades discursivas da educação comparada. Na busca por subsídios metodológicos encontramos os trabalhos de Ferrer (2002), estudioso sobre Estudos Comparados. Ferrer sugere fases para a estruturação de pesquisas comparativas que orientaram o percurso dos diferentes pesquisadores envolvidos no projeto[3], que seguiram caminhos similares de pesquisa.

Inicialmente os pesquisadores dedicaram-se à pesquisa documental e bibliográfica, com o objetivo de buscar informações preliminares sobre os currículos de Matemática prescritos pelos países pesquisados para os níveis correspondentes à educação básica brasileira, além de dados sobre legislação, organização dos sistemas educativos e ações empreendidas pelos Ministérios de Educação, no sentido de propor orientações

[3] Em uma primeira etapa do projeto, os estudos comparativos foram realizados pelos doutorandos Oliveira (Brasil-Argentina), Cerqueira (Brasil-Chile) e Dias (Brasil-Paraguai). Em uma segunda etapa, estão sendo desenvolvidas as comparações entre Brasil-Uruguai, Brasil-Peru e Brasil-Venezuela, pelos doutorandos Rosenbaum, Athias e Navarro, respectivamente.

curriculares e implementá-las, ao longo da década de 90 e até o momento atual. Além de buscas *on-line*, os doutorandos, nessa fase, fizeram seus primeiros contatos com professores/pesquisadores de outros países, que enviaram documentos e contribuíram para a organização da visita que seria posteriormente realizada pelos doutorandos aos países que estavam pesquisando.

Seguiu-se a fase de preparação de instrumentos para a coleta de dados por meio de entrevistas tanto no Brasil como nos outros países, procurando-se identificar diferentes atores do processo de organização e desenvolvimento curricular, elaboradores de currículos prescritos, coordenadores, diretores e professores responsáveis pelos currículos moldados e colocados em ação nas salas de aula[4].

Foram utilizadas entrevistas semiestruturadas, gravadas em áudio e cada pesquisador realizou, em média, 5 entrevistas em cada um dos dois países que estava comparando, buscando fazer pareamentos de acordo com o papel de diferentes atores, ou seja, dois elaboradores de currículo, dois formadores de professores, dois professores de ensino superior envolvidos com o tema, dois professores do ensino fundamental, dois professores de anos iniciais do ensino fundamental. O acesso aos entrevistados foi feito por meio de indicações de membros de sociedades científicas em cada país e a seleção levou em conta se o perfil se adequava à pesquisa e também a disponibilidade pessoal de conceder as entrevistas.

Realizada essa etapa, que também incluiu as entrevistas com pesquisadores e professores brasileiros, os doutorandos deram andamento à escrita de seu relatório para o exame de qualificação e, posteriormente, com as contribuições das bancas examinadoras, buscaram aperfeiçoar a análise dos dados.

Aportes teóricos

O grupo de pesquisa orientou-se pela contribuição de diferentes autores que estudam o currículo e o processo de desenvolvimento curricular. Dentre eles destacamos os trabalhos de Doll (1997), que nos propõe a pensar no currículo não em termos de conteúdo ou materiais mas em termos de processo – um processo de desenvolvimento, diálogo, investigação e transformação.

[4] O trabalho de coleta de dados na Argentina foi realizado por Oliveira, em abril de 2011. Cerqueira fez sua coleta de dados no Chile, em julho de 2011. Dias fez seu trabalho de campo no Paraguai, em outubro de 2011.

Doll (1997) destaca que, desde a escola básica até a universidade, os currículos baseiam-se no modelo de desempenho estabelecido e que os desvios em relação ao modelo são considerados "irracionais". Ele explica que o conceito de uma ordem abstraída, uniforme, que pode ser medida – por mais fictícia que seja – desempenhou um papel importante no paradigma que ele denomina "moderno". Esse conceito, principal, gerou outros conceitos, todos eles importantes para a estrutura que foi construída para interpretar o currículo como uma série de tarefas ou materiais a serem dominados. Três destes conceitos são o sequenciamento linear, as relações de causa e efeito, a negação da mudança qualitativa ao longo do tempo.

Em função dessas constatações esse autor questiona: "O que serviria como critérios para um currículo destinado a promover uma visão pós-moderna? Que critérios poderíamos usar para avaliar a qualidade de um currículo gerado, não pré-definido, indeterminado, mas limitado e constituído por uma rede sempre crescente de universalidades locais?". E oferece sua contribuição propondo, inicialmente, que o currículo seja considerado como uma integração mista e multivariada de experiências ricas e de final aberto, como um mosaico complexo que sempre muda o seu centro de atração. Sugere quatro "termos" que podem servir a um currículo com o que ele denomina de visão "pós–moderna": riqueza, recursão, rigor, relações.

Algumas comparações entre currículos prescritos

A análise de documentos curriculares oficiais dos diferentes países organizou-se em função de algumas categorias, a saber: contexto geral e educacional; princípios de organização curricular; finalidades da Matemática no currículo; critérios de seleção de conteúdos; referências a opções didáticas e metodológicas; recomendações sobre a avaliação da aprendizagem. Na sequência trazemos dados de algumas dessas categorias, devido à impossibilidade de tratar todas elas neste espaço.

Em relação ao contexto educacional, algumas particularidades foram observadas a respeito do processo de organização curricular.

No Brasil, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) *não são um documento obrigatório* em nível nacional, embora tenham sido elaborados segundo bases legais da Lei de Diretrizes e Bases (LDB) e reconhecidos pelo Conselho Nacional de Educação. Mesmo assim, eles desempenham um papel norteador de currículo no Brasil, como evidencia o Relatório de 2010 sobre propostas curriculares elaboradas por estados e municípios após a publicação dos PCN mas que também não têm caráter obrigatório:

> Quanto à fundamentação das propostas, é central a concordância com as indicações legais e com as perspectivas teóricas presentes nas orientações oficiais centrais, principalmente a Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB 9.394/96), as Diretrizes e Parâmetros Curriculares Nacionais (DCN e PCN), os fundamentos da psicologia da aprendizagem, na perspectiva do construtivismo. Diferentes concepções, tendências e tradições pedagógicas, presentes no campo pedagógico, misturam-se, fundem-se com as orientações citadas, produzindo explicações e abordagens que fazem sentido e confirmam o hibridismo de contribuições distintas na constituição do discurso curricular no país, apontado por muitos estudiosos do currículo (Brasil, 2010, p. 441).

No caso da Argentina, o documento Contenidos Basicos Comunes - CBC é um ordenamento curricular a ser seguido, ao se definirem os currículos das escolas, cidades e províncias.

Na comparação entre Brasil e Chile, uma primeira diferença identificada refere-se ao caráter de obrigatoriedade do currículo nacional no Chile e o de apenas orientação curricular desempenhado por documentos como os PCN no Brasil. Outro ponto ressaltado como diferente nessa comparação refere-se ao fato de que no Brasil os currículos apresentam um discurso marcado pela aspiração à equidade e pelo direito de acesso ao conhecimento que deve ser comum a todos os cidadãos, independentemente de sua condição social ou da região em que vive, o que não parece ser a perspectiva expressa em documentos chilenos.

A Reforma Curricular no Paraguai foi inspirada na introdução e desenvolvimento de valores democráticos, após longo período ditatorial que atravessou o país. Por outro lado, e assumindo as fraquezas e a falta de relevância do currículo durante a ditadura, os novos conteúdos priorizaram a formação para o trabalho e a produção econômica, embora reconhecendo a importância do desenvolvimento de competências básicas e incorporação de conhecimentos gerais. Nesse sentido, ressalta aspectos como leitura, escrita e habilidades para resolver problemas e, ao mesmo tempo, insiste no fortalecimento da capacidade de "aprender a aprender" (Rivarola, 2000, p. 23). Em 2008, foram ajustadas as propostas curriculares do 1.º e 2.º ciclos do currículo para as Escolas de Educação Básica (EEB) no Paraguai. No ano de 2009 e 2010, houve continuidade no processo de ajuste ao 3.º ciclo. O documento "Hacia nuevos desafios em el tercer ciclo de La EEB[5]" relata que tais atualizações foram focadas em:

a. El énfasis en el desarrollo de capacidades y competencias;
b. Las propuestas metodológicas y de la evaluación, atendiendo los avances en estos campos; y
c. Los temas de cada área acadêmica (Paraguay, 2011, p. 4).

No que se refere à finalidade da Matemática na formação dos estudantes, de modo similar ao apresentado nos documentos brasileiros, os documentos argentinos destacam o papel da Matemática na formação do cidadão, que permite o desenvolvimento pessoal e social, passando pelo diálogo:

> Es desde esta potencialidad que la matemática contribuye en forma privilegiada a la consecución de los objetivos que la Ley Federal de Educación puntualiza para la EGB, en tanto colabora con el desarrollo individual y social de los alumnos y alumnas propiciando en ellos "la búsqueda de la verdad", y en relación con ésta, el juicio crítico, el rigor en el método de trabajo, la presentación honesta de los resultados, la simplicidad y exactitud en el lenguaje, y la valorización de las ideas ajenas y del trabajo compartido (Argentina, 1995, p. 67).

Os autores do CBC consideram que para formação individual e social dos alunos um aspecto importante é a atualização dos conteúdos escolares, para que permitam ao aluno desenvolver competências para lidar com a realidade:

> Los contenidos deberán presentarse como productos no acabados de un proceso que se desarrolla en el tiempo, a través de una elaboración, presentación y contrastación de perspectivas múltiples. El hecho de que la información cambia velozmente, como la constata la población, especialmente en los niños y jóvenes, demanda la presentación de los temas desde distintos enfoques, explicados provisoriamente, con distintas hipótesis, abiertos a nuevos descubrimientos. La formación en competencias para operar sobre la realidad y el aprendizaje de procedimientos variados y combinables para el desarrollo de las potencialidades humanas genera condiciones que permitan el acompañamiento de dicho proceso de cambio y al mismo tiempo la producción de oportunidades (Argentina, 1993, p. 3).

Outro aspecto destacado no ensino e aprendizagem de Matemática relaciona-se à compreensão da conexão do conhecimento matemático com outros saberes e com os contextos culturais:

> [...] comprensión que asegura que los contenidos aprendidos pueden ser aplicados a situaciones nuevas, surgidas desde otros ámbitos aun ajenos a la

[5] Campaña de apoyo a la gestión pedagógica de docentes en servicio. Módulo 1. Matemática.

> matemática, reinterpretándolos en los contextos culturales en que se presenten (Argentina, 1995, p. 67).

No caso de Brasil e Chile, as semelhanças entre currículos prescritos começam pelas referências ao propósito de formação cidadã e preparação para a vida produtiva dos alunos. Nos PCN do Ensino Fundamental do Brasil, encontramos:

> Falar em formação básica para a cidadania significa refletir sobre as condições humanas de sobrevivência, sobre a inserção das pessoas no mundo do trabalho, das relações sociais e da cultura e sobre o desenvolvimento da crítica e do posicionamento diante das questões sociais. Assim, é importante refletir a respeito da colaboração que a Matemática tem a oferecer com vistas à formação da cidadania (Brasil, 1998, p. 26).

Nos PE/Chile identificamos proposições tais como:

> [...] El proceso de aprender matemática, por lo tanto, interviene en la capacidad de la persona para sentirse un ser autónomo y valioso en la sociedad. En consecuencia, la calidad, pertinencia y amplitud de ese conocimiento afecta las posibilidades y la calidad de vida de las personas, y a nivel de la sociedad, afecta el potencial de desarrollo del país (Chile, 2010, p. 20).

Outra semelhança revelada resulta da comparação entre a seleção de conteúdos matemáticos a serem ensinados, embora com pequenas diferenças. Assim, por exemplo, no Brasil, para todo o Ensino Fundamental, os conteúdos são organizados em quatro blocos temáticos – a saber: Números e Operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação. No Paraguai, para os três primeiros anos do Ensino Fundamental (1.º ciclo): Números e Operações, Geometria e Medida. Para os seis últimos anos do Ensino Fundamental (2.º e 3.º ciclos): Operações e Expressões Algébricas, Geometria e Medidas, Dados e Estatística.

Em relação a concepções metodológicas e didáticas referentes ao ensino e aprendizagem, nos documentos dos diferentes países há uma clara filiação a princípios do construtivismo com destaque ao aluno como participante ativo no processo de construção de seu conhecimento matemático. Os documentos trazem reflexões sobre o papel do erro no processo de ensino e aprendizagem da Matemática e às relações que devem ser desenvolvidas no ambiente escolar, entre professores e alunos, alunos e alunos, etc.

Um ponto comum é o destaque à Resolução de Problemas, como eixo metodológico. Nos PCN do Ensino Fundamental do Brasil, as orientações reforçam o uso de resolução de problemas como ponto de partida da atividade matemática:

> [...] a situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las (Brasil, 1998, pp. 40-41).

Também ressaltam que a resolução de problemas é o eixo norteador e organizador do processo de ensino-aprendizagem em Matemática.

> A resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se podem apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas (Brasil, 1998, pp. 40-41).

No Chile, há proposições similares:

> La resolución de problemas debe ser el foco de toda la enseñanza de la Matemática, ya que da un sentido al aprendizaje de esta disciplina, permitiéndole al estudiante aplicar y hacer conexiones con sus experiencias cotidianas. La comprensión de todos los conceptos y habilidades que debe aprender un estudiante en estas edades; como el significado de los números, la operatoria básica, la geometría y la medición, se ven maximizados desde la comprensión cuando se enseñan desde ele foco de la resolución de problemas. Esta actividad fundamental proporciona al profesor una visión sobre el pensamiento matemático de sus estudiantes cuando éstos seleccionan las estrategias y comunican su pensamiento para solucionar el problema, y entregan una evidencia muy relevante a la hora de apoyar y ajustar la enseñanza a las necesidades de los alumnos (BC/Chile, 2011).

Na Argentina, os registros sobre resolução de problemas são encontrados na introdução dos Conteúdos Básicos Comuns para Educação Geral Básica (CBC-EGB).

> Este enfoque de la enseñanza de la Matemática guarda total concordancia con lo establecido en la Recomendación Nº 26/92 del Consejo Federal de Cultura y Educación en relación con las competencias educativas a desarrollar vinculadas al eje del conocimiento científico-tecnológico. Allí se puntualiza la necesidad de que la alumna y el alumno adquieran "esquemas de conocimiento que les permitan ampliar su experiencia dentro de la esfera de lo cotidiano y acceder a sistemas de mayor grado de integración" a través de los procesos de pensamiento específicos dirigidos a la resolución de problemas "en los principales ámbitos y sectores de la realidad" (Argentina, 1995, p. 67)

No Paraguai, as referências à Resolução de Problemas aparecem em documentos do ensino fundamental e no Programa de Educação Média, que destaca a resolução de problemas atrelada à Modelagem Matemática, e à Metodologia de Projetos, sugerindo que tais recomendações propiciem:

> Desarrollar en los/as estudantes/as la capacidad de modelizar, es decir, de interrelacionar las matemáticas al mundo real. Trabajar la consolidación de los conocimientos matemáticos a desarrollarse en este curso por meio de la metodología de proyectos, tanto áulicos como de área, apuntando la formación de los estudantes/as al servicio de la comunidad, constituyéndose así las Matemáticas en un área facilitadora de la inserción del/la joven a la vida profesional y que al mismo tiempo lo entrene como ciudadano responsable en esta sociedad de cambio constante y de globalización. (Paraguai, 2003, p. 42).

Alguns comentários sobre fragmentos de entrevistas dos atores dos diferentes países

Ao analisar os documentos prescritos, os pesquisadores destacam a incorporação de resultados de pesquisas da área de Educação Matemática ao discurso curricular. Coerentemente com essa observação, os depoimentos de entrevistados que participaram do processo de elaboração nesses países também reforça pontos comuns, especialmente os que se referem a Resolução de Problemas, como estratégia relevante nas aulas de Matemática, o uso de tecnologias e de recursos didáticos diversificados e à aprendizagem significativa.

No entanto, de modo frequente, na entrevista com professores coordenadores e com professores que atuam em sala de aula, a adesão a esse ideário parece ser ainda bastante pequena. Nas entrevistas, há indícios de que orientações metodológicas expressas nos currículos prescritos ainda não foram incorporadas à prática. Mudanças de paradigmas referentes à maneira de conceber a Matemática e seu ensino, em função de concepções e crenças de professores sobre o ensinar Matemática e as percepções dos estudantes sobre aprender Matemática, ainda são um desafio para os sistemas educativos.

As entrevistas com os professores mostraram uma atitude de desconfiança e tolerância em relação ao uso de calculadora como facilitador de cálculos, mas não como uma ferramenta para resolução de problemas ou complemento de estratégias como o cálculo mental ou a estimativa. Mas há depoimentos de professores que estão usando esses recursos:

> Utilizo calculadora para mostrar padrões numéricos, explorar casas decimais e propriedades de operações. A rapidez viabiliza algumas questões para observação dos alunos. Toda aula no laboratório de informática é muito trabalhosa para o professor. Tudo deve ser muito bem esquematizado antes, de forma que os objetivos traçados previamente sejam alcançados da melhor forma. Para isso o *software* deve ser selecionado adequadamente. Procuro avaliar antes (com a seleção do *software* feita a partir do conteúdo a estar sendo estudado e adequação a realidade dos alunos, durante (com o retorno dos alunos e bastante atenta para sanar as dúvidas) e depois (com os resultados

> e opinião dos mesmos (Depoimento de professor brasileiro, cit.em Dias, 2012, p. 209).

Com relação a dificuldades de implementação das propostas curriculares, entrevistados nos diferentes países fazem suas revelações:

> Creo que la mayoría de los maestros no tienen mucho tiempo para entender lo que se propone en los documentos oficiales. Esta comprensión termina siendo realizada a través de los materiales de aprendizaje. Cada reforma curricular necesita tiempo para entender y poner en práctica (Depoimento de formador de professores chileno, cit. em Cerqueira, 2012, p. 200).
>
> Acesso aos documentos e tempo para que se apropriem das reorientações. Nas formações observo que muitos professores apesar de já terem passado dezesseis anos de PCN, alguns ainda demonstram não ter compreensão das propostas neles contidos. As jornadas dos professores são cansativas, exaustivas e estressantes, indo de uma escola para outra num curto espaço de tempo, não sobrando "tempo" para sua formação continuada (Depoimento de formador de professores brasileiro, cit. em Cerqueira, 2012, p. 201).
>
> Todas las recomendaciones metodológicas contribuyen muchísimo con la tarea docente, el uso de la calculadora en la resolución de problemas importantísimo, la informática aún no entra como debería, todo relacionado con los conocimientos previos (Depoimento de professora paraguaia, cit. em Dias, 2012, p. 210).

Considerações finais

Os resultados mostram que os currículos prescritos em países latino-americanos foram reformulados após o refluxo do Movimento da Matemática Moderna e que a influência das principais tendências da área de Educação Matemática se faz presente. Os estudos diagnosticaram grande ênfase conferida à Resolução de Problemas e ao uso das Tecnologias. Prevalece a perspectiva construtivista de aprendizagem, com destaque ao papel dos estudantes na construção de seus conhecimentos, do papel do erro na aprendizagem, entre outras argumentações. A seleção e organização de conteúdos, notadamente no Ensino Fundamental, são bastante similares nos países comparados, Brasil, Argentina, Chile e Paraguai, variando o nível de detalhamento apresentado nos documentos.

Foram observadas diferenças marcantes, por exemplo, no processo de elaboração, que evidenciou que, no Brasil, no caso dos Parâmetros Curriculares Nacionais, houve maior participação de instituições (Secretarias de Educação e Universidades), enquanto nos demais poucas pessoas conduziram o processo de elaboração.

Outra diferença observável refere-se ao fato de que no Brasil os PCN não foram obrigatórios e nos demais países o currículo nacional é obrigatório, o que leva ao estabelecimento de uma relação bastante distinta entre professores e prescrições. Ao contrário do Brasil, nos demais países revelou-se maior adesão e conhecimento das orientações curriculares. No Brasil, essa é uma questão não resolvida e, não obstante, as avaliações institucionais são realizadas como se houvesse currículo obrigatório nacional.

Referências

Argentina (1993). *Lei n.º 24.195*, aprobada em 29 de abril de 1993. Ley Federal de Educación. Buenos Aires.

Argentina (1995a). *Contenidos básicos comunes para la educación general básica* (2ª ed.). Buenos Aires: Ministerio de Cultura y Educación de la Nación Consejo Federal de Cultura y Educación.

Argentina (1995b.) *Contenidos básicos comunes para la educación inicial* (1ª ed.). Buenos Aires: Ministerio de Cultura y Educación de la Nación Consejo Federal de Cultura y Educación.

Brasil (1998). *Parâmetros curriculares nacionais: Matemática – Terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental*. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Fundamental.

Brasil (2010). *Relatório de análise de propostas curriculares de ensino fundamental e ensino médio*. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Fundamental.

Cerqueira, D. S. (2012). *Um estudo comparativo entre Brasil e Chile sobre educação matemática e sua influência nos currículos de Matemática desses países* (Tese de Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Chile (2010). *Programa de Estudio*. Chile: Ministerio de Educación.

Dias, M. O. (2012). *Educação matemática e sua influência nos currículos prescritos e praticados: Um estudo comparativo entre Brasil e Paraguai* (Tese de Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Doll Jr., W. E. (1997). *Currículo: Uma perspectiva pós moderna*. Porto Alegre: Artes Médicas.

Ferrera, F. J. (2002). *La educación comparada actual*. Barcelona: Ariel.

Nóvoa, A. (1998). *Histoire & comparaison (Essais sur l'éducation)*. Lisboa: Educa.

Oliveira, E. C. (2013) *Impactos da educação matemática nos currículos prescritos e praticados: Estudo comparativo entre Brasil e Argentina* (Tese de Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Paraguay (2011). *Ley n.º 1.264 General de Educación*. Ministerio de Educación y Cultura. El congreso de la nacion paraguaya sanciona con fuerza de ley. Disponível em http://www.mec.gov.py/cms (acesso em 12 jan. 2011).

Rivarola, D. M. (2000). *La reforma educativa en Paraguay*. Santiago de Chile: Cepal.

UNESCO (2012). *Declaração Mundial de Educação para Todos*. *Jomtien, 1990*. Disponível em http://unesdoc.unesco.org/images/0008/000862/086291por.pdf

Os números racionais no 2.º ano: Um estudo diagnóstico

Cristina Morais[1], *Raquel Cerca*[2], *Marisa Quaresma*[3], *João Pedro da Ponte*[4]
[1] Externato da Luz, morais.cristina@externatodaluz.com
[2] EB1 de Avelar, raquelcerca@gmail.com
[3] Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, mq@campus.ul.pt
[4] Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, jpponte@ie.ulisboa.pt

Resumo. *Esta comunicação apresenta um estudo diagnóstico cujo objetivo é identificar os conhecimentos dos alunos do 2.º ano sobre números racionais em diferentes representações. Seguindo uma metodologia qualitativa de carácter interpretativo, propusemos tarefas contemplando diferentes representações dos números racionais no significado parte-todo a alunos de duas turmas de duas escolas. Os resultados mostram que os alunos privilegiam a representação em forma de fração que já conhecem de aulas anteriores e alguns deles são capazes de converter corretamente entre representações pictóricas, fracionárias, dízimas e percentagens. Indicam ainda que bastantes alunos têm dificuldades na interpretação e registo de diferentes representações de números racionais, no trabalho com grandezas discretas e no reconhecimento da unidade.*

Abstract. *This communication presents a diagnostic study that aims to identify grade 2 students' knowledge about rational numbers in different representations. Following a qualitative approach, we proposed tasks that included different representations of rational numbers. The tasks were solved by two grade 2 classes from two schools. The results show that the students prefer the fraction representation that they know from previous lessons and that some of them are able to convert among pictorial representations, fractions, decimals and percent. The results also show that a significant number of students has difficulties in interpreting and recording different rational number representations, working with discrete quantities, and in recognizing the unit.*

Palavras-chave: Números racionais; Representações; Grandezas contínuas e discretas; Parte-todo.

Introdução

A aprendizagem dos números racionais constitui um grande desafio tanto para alunos como para professores (Barnett-Clarke, Fisher, Marks, & Ross, 2010; Behr, Lesh, Post, & Silver, 1983). A compreensão dos números racionais implica um entendimento dos seus vários significados bem como o estabelecimento de relações entre as suas diferentes representações, incluindo as linguagens verbal e pictórica, fração, dízima e percentagem. Segundo as orientações curriculares para o 1.º ciclo em vigor em 2012-13 (ME, 2007), ano em que este estudo foi realizado, no 1.º e 2.º ano, o foco é dado aos números representados na forma de fração, nos significados parte-todo (significado principal) e operador (significado secundário), considerando-se grandezas contínuas e

Martinho, M. H., Tomás Ferreira, R. A., Boavida, A. M., & Menezes, L. (Eds.) (2014).
Atas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática. Braga: APM., pp. 91–109

discretas. No 3.º e 4.º anos é abordado o significado quociente de fração e são trabalhados os números racionais na sua representação decimal. A representação em percentagem não constitui um objetivo do tópico Números e Operações, mas é aqui sublinhada a sua importância para o estabelecimento de relações entre diferentes representações de número racional.

Tendo em conta a complexidade a este tema, decidimos realizar um estudo de carácter diagnóstico, no 2.º ano, onde a abordagem aos números racionais tem ainda um carácter vincadamente informal. O estudo tem como objetivo identificar os conhecimentos que alunos deste ano revelam sobre os números racionais, nas suas diferentes representações, para apoiar os professores no ensino deste tema e também para preparar futuros estudos neste campo. Assim, procuramos responder às seguintes questões:

1. Que representações privilegiam os alunos na resolução de questões que envolvem a conversão de uma representação pictórica para uma representação simbólica de número racional?

2. Que dificuldades revelam na resolução de questões de conversão entre diferentes representações de números racionais?

Representações e significados de número racional

Um número racional pode assumir diferentes representações, nomeadamente fração, dízima, percentagem, diagrama, etc. Assim, um número racional pode representar-se como o quociente de dois números inteiros, por exemplo na forma de fração $\frac{a}{b}$, em que *a e b* são números inteiros *e b é* diferente de zero. Um número racional pode representar-se como dízima. Para além disso, um número racional pode também assumir a forma de percentagem, uma representação bastante familiar dos alunos ainda antes da sua aprendizagem na escola, uma vez que estão presentes no seu dia-a-dia.

Webb, Boswinkel e Dekker (2008) distinguem entre representações informais, preformais e formais de um conceito matemático. Estes autores apresentam um modelo a que chamam de "icebergue", em cuja base colocam as representações informais (diretamente relacionadas com o contexto), e mais acima as representações preformais que podem resultar da evolução das primeiras. Assentes nas representações informais e preformais surgem, no topo do icebergue, as representações formais ou simbólicas. Este modelo destaca portanto a importância das representações informais e preformais para a compreensão das representações formais.

Assim, para além das representações simbólicas (fração, dízima, percentagem), outras representações de número racional como a verbal e a pictórica assumem um papel igualmente importante. A representação verbal está sempre presente, pois todas as outras representações (incluindo as simbólicas) têm uma expressão verbal. Pelo seu lado, as representações pictóricas (que podem estar ou não presentes) distinguem-se pelo seu cunho semiformal, que facilita a interpretação dos alunos (Ponte & Quaresma, 2011). Na aprendizagem dos números racionais é muito importante que o aluno seja capaz de estabelecer conexões entre diferentes representações.

Independentemente da representação que um número racional assuma, a sua interpretação depende da unidade considerada (Barnett-Clarke et al., 2010; Monteiro & Pinto, 2005). Veja-se o seguinte exemplo: "O que é preferível: ter metade da mesada do Pedro ou um quarto da mesada da Joana?". Não é possível dar uma resposta à questão colocada comparando apenas $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{4}$, pois é necessário colocar uma questão fundamental: "Qual o valor da mesada de cada um?".

A unidade considerada pode ser de natureza contínua ou discreta. Uma grandeza contínua como um bolo ou o comprimento de um objeto, pode ser dividida infinitamente. Uma grandeza discreta é constituída por elementos que se podem contar, mas são indivisíveis, como o número de berlindes ou o número de crianças de uma turma. É importante que ambos os tipos de grandeza sejam abordadas no ensino, uma vez que este aspeto pode constituir um obstáculo à aprendizagem das crianças que, por vezes, tendem a olhar as partes que constituem uma unidade contínua, por exemplo, vendo as fatias de uma pizza como seis partes de pizza individuais, como se de uma grandeza discreta se tratasse (Carpenter, Fennema, & Romberg, 1993).

Os números racionais podem assumir diferentes significados: parte-todo, medida, quociente e operador. Na tarefa apresentada nesta comunicação, o significado parte-todo tem um papel central. Quando um número racional tem este significado, representa a comparação entre o número de partes consideradas e o número total de partes que constituem o todo. Note-se que a abordagem em sala de aula dos diferentes significados não tem de ser realizada de modo isolado. Para que se compreendam os números racionais, é necessário tanto compreender cada significado separadamente como entender como estes significados se interrelacionam (Behr et al., 1983; Lamon, 2007).

São vários os estudos que evidenciam dificuldades dos alunos na aprendizagem dos números racionais na sua representação em fração (e.g., Behr et al., 1983; Keijzer, 2003) e em dízima. Estes estudos mostram que várias dificuldades estão intimamente relacionadas com a utilização de conhecimentos relativos aos números naturais (com o zero) nos números racionais (e.g., Resnick et al., 1989). Existem também estudos que sugerem uma abordagem diferente aos números racionais, iniciando a sua aprendizagem pela representação em percentagem (Moss & Case, 1999).

Metodologia

Tendo em conta o objetivo do estudo, seguimos uma abordagem qualitativa, de cunho interpretativo. O estudo foi realizado em duas turmas do 2.º ano de duas escolas diferentes, uma de ensino particular e localizada na freguesia de Benfica, concelho de Lisboa e outra de ensino público e situada na freguesia de Avelar, concelho de Ansião, no distrito de Leiria. A turma da escola de ensino particular (Turma C) é constituída por 25 alunos e nela os números racionais foram inicialmente abordados no seu significado parte-todo, na representação em fração. A turma da escola de ensino público (Turma R) é constituída por 15 alunos e iniciou o seu estudo de números racionais pela representação em fração, no significado parte-todo.

Foi elaborado um conjunto de seis tarefas, cuja planificação teve como base as orientações curriculares para os 3.º e 4.º anos e os objetivos definidos para os 1.º e 2.º anos (ME, 2007). As tarefas foram realizadas pelos alunos em duas aulas de 90 minutos, realizadas em duas semanas. Estas aulas foram organizadas em três momentos: (i) apresentação da tarefa; (ii) resolução da tarefa a pares; e (iii) discussão coletiva da resolução da tarefa. Na Turma R, as aulas foram lecionadas pela segunda autora. Na Turma C, a professora titular da turma pediu à primeira autora que dinamizasse a discussão coletiva, pois queria garantir que os diversos aspetos das tarefas fossem discutidos em grande grupo.

Nesta comunicação consideramos apenas uma tarefa (Figura 1) constituída por duas questões, cada uma com seis alíneas.

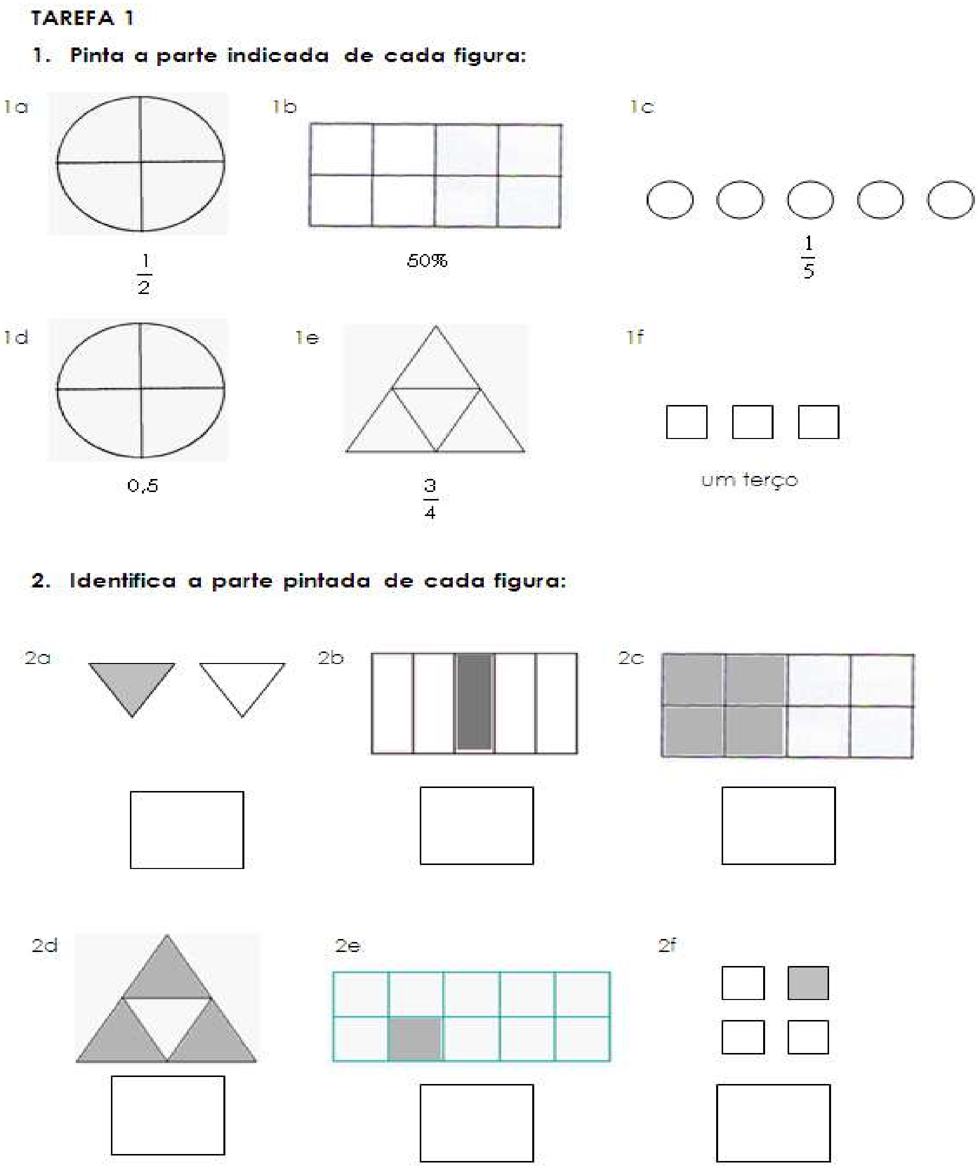


Figura 1. Enunciado da Tarefa 1

A Questão 1 pretendia que os alunos interpretassem os números racionais representados em forma de fração, dízima, percentagem e linguagem natural e que os conseguissem converter para a representação pictórica. A Questão 2 apresentava a representação pictórica de diferentes números racionais e pedia que os alunos as convertessem para outro tipo de representação, em linguagem natural, fração, dízima ou percentagem.

Para a análise de dados, a gravação vídeo da aula em que a tarefa 1 foi realizada foi transcrita, complementando-se com dados recolhidos através da gravação áudio, das notas de campo e das fotografias do trabalho realizado pelos alunos. Analisamos as resoluções de algumas alíneas dos alunos de ambas as turmas, procurando destacar os conhecimentos que parecem revelar sobre números racionais.

Análise da resolução da Tarefa 1

Apresentamos de seguida a análise das alíneas selecionadas em cada uma das questões que nos parecem mais relevantes tendo em conta as questões do estudo.

Alínea 1c

Os alunos deviam interpretar a representação simbólica $\frac{1}{5}$ e pintar a parte indicada de cinco círculos (grandeza discreta). O Quadro 1 apresenta os resultados globais de ambas as turmas.

Quadro 1. Respostas à questão 1c

1c Pintar a parte indicada ○○○○○ $\frac{1}{5}$				
	Respostas corretas		**Respostas incorretas**	
Turma C	**Freq. absoluta**	**Freq. relativa**	**Freq. absoluta**	**Freq. relativa**
	16	67%	8	33%
	Respostas: (16 alunos)		*Respostas:* (7 alunos) (1 aluno)	
Turma R	**Freq. absoluta**	**Freq. relativa**	**Freq. absoluta**	**Freq. relativa**
	15	100%	0	0%
	Respostas: (10 alunos) (3 alunos) (1 aluno) (1 aluno)			

Vários alunos da Turma C pintaram metade dos círculos, ou seja, dois círculos e meio, o que foi discutido em grande grupo:

> Luísa - Pintámos duas bolas inteiras e uma metade.
>
> Investigadora - E porquê?
>
> Luísa - Porque… (*A aluna não responde*.)
>
> Rute - Eu agora, eu agora já percebi. É que isso está cinco unidades e tem de se fazer a metade então…
>
> Investigadora - Porque é que tem de se fazer a metade?
>
> Rute - Pensei que tinha de fazer a metade.

Investigadora - Porquê? (*A aluna não responde*.) Por causa disto? $\left[\frac{1}{5}\right]$ (*A aluna acena que sim com a cabeça*) Isto é a mesma coisa que ter a metade?

Rita - Não.

Investigadora - Se fosse para pintar a metade o que deveria estar aqui escrito em vez disto?

Rute - Um sobre dois.

No momento de discussão coletiva, Jorge tentou explicar que os cinco círculos constituíam de facto de uma única unidade:

> Vou tentar explicar. Se temos… Temos que imaginar que temos uma unidade inteira e vamos dividi-la em cinco partes. Se temos cinco partes iguais… Qual é o número a dividir por cinco… Que vai dar…

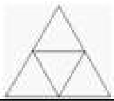
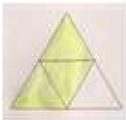
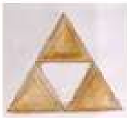
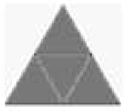
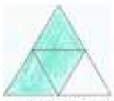
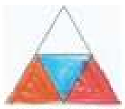
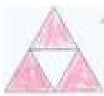
Apesar de não ter conseguido completar a sua explicação, o aluno revela compreender os cinco círculos enquanto uma unidade e não como cinco unidades distintas.

Nesta alínea, foi notória a dificuldade dos alunos da Turma C em pintar $\frac{1}{5}$ dos cinco círculos. Isso pode dever-se ao facto de ser apresentada uma grandeza discreta, uma vez que esta fração unitária já tinha sido abordada na aula. Além disso, em ambas as alíneas anteriores pediam aos alunos que pintassem a metade de cada figura, o que pode tê-los induzido em erro, pensando que também nesta figura teriam que pintar metade. Na Turma R os alunos não demonstraram qualquer dificuldade. Como diz Marta: "Tínhamos que dividir em 5 partes iguais e depois íamos ver em cada parte quanto é que pintávamos". Ao contrário da Turma C, os alunos da Turma R reconheceram que um círculo representaria $\frac{1}{5}$ dos cinco círculos.

Alínea 1e

Era pedido aos alunos que pintassem $\frac{3}{4}$ de uma figura que estava dividida em quatro partes iguais (ver Quadro 2).

Quadro 2. Respostas à questão 1e

1e Pintar a parte indicada  $\frac{3}{4}$				
Turma C	Respostas corretas		Respostas incorretas	
	Freq. absoluta	Freq. relativa	Freq. absoluta	Freq. relativa
	21	88%	3	12%
	Respostas:  		*Respostas:*  (2 alunos)  (1 aluno)	
Turma R	Freq. absoluta	Freq. relativa	Freq. absoluta	Freq. relativa
	15%	100%	0%	0%
	Respostas:  (9 alunos)  (2 alunos)  (2 alunos)  (2 alunos)			

Na Turma C, apesar da maioria dos alunos ter pintado corretamente a parte indicada, para alguns deles não foi imediato o que significava a fração apresentada, uma vez que esta ainda não tinha sido abordada na sala de aula:

> Gonçalo *(questionando a Investigadora)* - Isto aqui $\left[\frac{3}{4}\right]$ é a terça parte?
> (…)
> Hugo - Três em quatro. Três sobre quatro.
> Catarina - Três sobre quatro. O que é que pintamos?
> Hugo - É que eu nunca fiz uma coisa destas!

No entanto, rapidamente os alunos compreenderam que teriam de pintar três partes da figura que estava dividida em quatro:

> António - Ah, já sei o que é para fazer aqui! Só pintamos três de quatro. Só pintamos três de quatro triângulos!

Outro aluno interpreta a fração do seguinte modo:

> Jorge - Três quartos é três a dividir por quatro.
> Investigadora - Três a dividir por quatro, é isso…

Jorge - Ao contrário era quatro a dividir por três, mas é diferente.
Investigadora - Então como é que poderás pintar isto? O que significa isto?
Jorge - Acho que deixamos em branco a parte que falta para o quatro.

É de realçar que esta questão pedia aos alunos para pintar a parte indicada pelo número racional apresentado. Assim, a fração $\frac{3}{4}$ tem o significado parte-todo. Contudo, Jorge parece atribuir a esta fração o significado quociente, o que dificulta a resolução desta alínea.

Na Turma R, os alunos conseguiram facilmente identificar a parte que teriam de pintar:

Investigadora - Ricardo ajuda a tua colega. Ela está a dizer que pintou três triângulos.

Tomás – Porque é três quartos.

Ricardo – Porque temos três quartos.

Gustavo – Está bem professora!

Investigadora – Está bem porquê?

Ricardo – Se eu deixar um fica três. Os três pintados. E se eu pintar estes todos fica quatro. E assim tem que ficar um quarto.

(...)

Catarina – Pintámos três porque diz para pintarmos três partes. Estão quatro triângulos e dizem que dos quatro para pintarmos três.

Investigadora – OK. Marta diz.

Marta – Diz aqui para pintarmos três quartos, mas como isto já está dividido em quatro partes é só pintar três.

Os alunos de ambas as turmas demonstram alguma facilidade em identificar que parte da unidade pintam, que neste caso era contínua. Contudo, como se pode perceber pelo comentário de Catarina da Turma R ("Estão quatro triângulos e dizem que dos quatro para pintarmos três") ou pelo de António da Turma C ("Só pintamos três de quatro triângulos!"), alguns alunos parecem olhar para a figura apresentada não como uma unidade dividida em quatro partes iguais (como Marta, da Turma R, pareceu ter compreendido), mas sim como uma figura constituída por quatro unidades distintas.

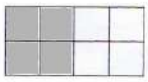
Repare-se ainda nas representações verbais de $\frac{3}{4}$ produzidas pelos alunos, particularmente no caso da Turma C, durante a resolução desta alínea: "três quartos", "três em quatro", "três de quatro", "três sobre quatro" e "três a dividir por quatro". Estas representações expressam, de algum modo, o entendimento dos alunos sobre o número racional representado. As representações "três em quatro", "três de quatro" e "três quartos", parecem sugerir um entendimento do racional no significado parte-todo, relacionando-se as partes tomadas com o todo, o que é natural tendo em conta a natureza da tarefa. Já as representações "três sobre quatro" e "três a dividir por quatro" parecem relacionar-se com a representação simbólica do número racional, a primeira associada apenas ao modo de escrita da fração (numerador sobre denominador) e a segunda demonstrando o reconhecimento da operação de divisão, identificada pelo traço de fração.

Alínea 2c

Era apresentado um retângulo dividido em oito partes iguais, estando metade da figura pintada. No Quadro 3 apresentamos as respostas dos alunos de ambas as turmas.

Quadro 3. Respostas à questão 2c

2. c
Identificar a parte indicada na figura



	Respostas corretas		Respostas incorretas	
	Freq. absoluta	**Freq. relativa**	**Freq. absoluta**	**Freq. relativa**
Turma C	22	92%	2	8%
Turma C	*Respostas:* 50% (13 alunos); $\frac{1}{2}$ (6 alunos); 0,5 (2 alunos); $\frac{4}{8}$ (1 aluno)		*Respostas:* $\frac{1}{4}$ (1 aluno); 1 (1 aluno)	
	Freq. absoluta	**Freq. relativa**	**Freq. absoluta**	**Freq. relativa**
Turma R	13	87%	2	13%
Turma R	*Respostas:* (10 alunos) 67% $\frac{4}{8}$; (3 alunos) 20% $\frac{1}{2}$		*Respostas:* (2 alunos) $\frac{1}{4}$	

Na Turma C foi com facilidade que os alunos identificaram que a parte pintada podia ser representada por $\frac{1}{2}$ ou por 50%, existindo ainda dois alunos que registaram 0,5.

Apenas um aluno identificou a parte pintada como $\frac{4}{8}$, o que causou a surpresa dos colegas:

> Mário - Quatro sobre oito.
>
> (*Grande admiração dos colegas*.)
>
> Investigadora - Onde foste buscar isso? Pensem lá onde é que ele foi buscar isto.
>
> Alguns alunos - Eu sei!
>
> Professora - Diz lá Rute, como é que achas que o Mário pensou?
>
> Rute - Porque estão quatro pintados…
>
> Investigadora - Em quantos?
>
> Rute (*e outros colegas*) - Em oito.
>
> Afonso - Quatro oitavos.

O facto de os alunos da turma terem ficado bastante surpresos com a fração identificada por Mário sugere que não estão habituados a identificar frações, para além das frações unitárias como $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{5}$.

Maria identificou a parte pintada como "1" uma vez que existia uma parte pintada, ou seja, não considerou a parte enquanto constituinte de uma unidade: "Eu pensei… na imagem só estava uma pintada, então pus um".

Ao contrário do que se verificou na Turma C, a maioria dos alunos da Turma R identificou a parte pintada através da representação $\frac{4}{8}$, contando o total de quadrados e identificando os que estavam pintados. Os restantes alunos que identificaram corretamente a parte pintada representaram também na representação em forma de fração, $\frac{1}{2}$, conseguindo perceber que estas duas frações eram equivalentes:

> Investigadora – Pedro, e a próxima, quanto é que tu puseste?
>
> Pedro – Quatro sobre oito.
>
> Maria – Professora, quatro sobre oito ou um meio porque quatro é metade de oito.

Verificamos que a aluna generaliza que todas as frações cujo numerador seja metade do denominador são equivalentes a um meio. Isto é bastante interessante pois trata-se de uma generalização assente em conhecimentos de carácter informal realizada no 2.º ano.

Dois alunos da Turma R que trabalharam em conjunto e um da Turma C registaram $\frac{1}{4}$. Possivelmente terão associado os quatro quadrados pintados da figura à noção de "quartos".

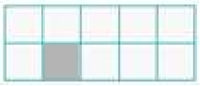
Alínea 2e

Era pedido que os alunos que identificassem uma parte das dez partes iguais do retângulo apresentado, o que suscitou uma variedade de respostas (Quadro 4).

Quadro 4. Respostas à questão 2e

2e

Identificar a parte indicada na figura



	Respostas corretas		Respostas incorretas	
Turma C	**Freq. absoluta**	**Freq. relativa**	**Freq. absoluta**	**Freq. relativa**
	18	75%	6	25%
	Respostas: $\frac{1}{10}$ (16 alunos); 10% (1 aluno); 10% $\frac{1}{10}$ = 0,1 (1 aluno)		*Respostas:* $\frac{10}{1}$ (4 alunos); [illegible] (1 aluno); $\frac{1}{9}$ (1 aluno)	
Turma R	**Freq. absoluta**	**Freq. relativa**	**Freq. absoluta**	**Freq. relativa**
	14	93%	1	7%
	Respostas: (13 alunos) $\frac{1}{10}$		*Respostas:* (1 alunos) $\frac{1}{9}$	

Vários alunos da Turma C identificaram que a parte pintada correspondia a $\frac{1}{10}$ e um aluno identificou também esta parte em percentagem:

> Guilherme: 10%.
>
> Investigadora: 10%? Porquê 10%?
>
> Guilherme: Porque depois temos que somar àqueles. Cada quadrado vale 10%. 10 mais 10, mais 10, mais 10…

Investigadora: (*interrompendo o aluno*) - Quantas vezes o 10?

Guilherme: 10.

Um aluno da Turma C revelou ser capaz de estabelecer a relação entre percentagem, fração e dízimas, revelando conhecimentos relativos às dízimas surpreendentes, uma vez que estes ainda não tinham sido trabalhados formalmente:

Manuel - É zero vírgula um porque é a décima parte de todo o retângulo grande. A décima está pintada e a décima parte do um é zero vírgula um.

Investigadora - E como sabes que é zero vírgula um?

Manuel - Porque dez vezes zero vírgula um é igual a um.

No entanto, vários alunos não conseguiram relacionar a parte pintada com a unidade, ou seja, não conseguiram atribuir o significado correto ao numerador e ao denominador (no caso da representação em fração):

Dinis - Nove sobre dez.

Investigadora - Porquê 9 sobre 10?

Dinis - Porque são 10 quadrados e de 10 nós só pintámos um, 10 menos um é 9.

Todos os alunos da Turma R utilizaram a representação em forma de fração. Nesta alínea, a maioria dos alunos contou o total de quadrados e viu que apenas um estava pintado. Um aluno desta Turma registou $\frac{1}{9}$ como a fração que representava a parte pintada da figura:

Investigadora – Gustavo que fração é que puseste? Quantos quadrados são ao todo?

Gustavo – 10.

Investigadora – E tu puseste em baixo o quê?

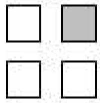
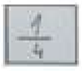
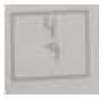
Gustavo – 9.

Um aluno da Turma C também registou $\frac{1}{9}$ como a sua resposta. Levantamos a hipótese de ambos os alunos terem reconhecido que uma parte da figura estava pintada e nove estavam em branco, e por isso o registo $\frac{1}{9}$, como se de uma razão se tratasse.

Alínea 2f

Era pedido que identificassem a parte pintada dos quatro quadrados apresentados. Apresentamos as respostas dos alunos no Quadro 5.

Quadro 5. Respostas à questão 2f

2f Identificar a parte indicada na figura 				
	Respostas corretas		**Respostas incorretas**	
Turma C	**Freq. absoluta**	**Freq. relativa**	**Freq. absoluta**	**Freq. relativa**
	20	83%	4	17%
	Respostas:  (18 alunos);  (1 aluno);  (1 aluno)		*Respostas:*  (3 alunos); $\frac{4}{3}$ (1 aluno)	
Turma R	**Freq. absoluta**	**Freq. relativa**	**Freq. absoluta**	**Freq. relativa**
	15	100%	0	0%
	Respostas: (15 alunos) 			

Na Turma C os alunos identificaram a parte pintada como $\frac{1}{4}$ ou 25%. De novo, os alunos desta Turma revelam alguma facilidade no trabalho com percentagens, relacionando-as com outras representações, como se observa pela explicação de um aluno:

> Diogo - 25 por cento.
>
> Investigadora - Porquê?
>
> Diogo - Se a quarta parte de 100 é 25, e se isso é a quarta parte, então dividi 100 por cento em quatro partes.

As respostas incorretas dos alunos parecem dever-se à dificuldade em relacionar a parte pintada da figura, com a unidade, que aqui é de natureza discreta, facto que a professora da turma parece reconhecer, no seu comentário final:

Catarina - Nós antes tínhamos feito quatro sobre um.

Investigadora - Porquê?

Catarina - Porque de quatro pintamos só um.

(…)

Professora - São outras representações que não estamos habituados a fazer. E daí essas dúvidas. Nós estamos habituados a ver o círculo ou o retângulo... Quando vemos separado, isto (*circunda os quatro quadrados*) significa à mesma a unidade. Não se esqueçam, é a unidade, é como se fosse um bolo.

Os alunos da Turma R não tiveram qualquer dificuldade em identificar $\frac{1}{4}$ dos quatro quadrados:

Tomás – Ali estão quatro e pintámos um que é um quarto. São quatro quadradinhos e pintámos um.

À semelhança do que aconteceu na alínea 1c, o facto de se apresentar uma grandeza discreta não causou qualquer dificuldade aos alunos da Turma R que, com facilidade, reconhecem toda a figura como a unidade.

Respostas corretas e incorretas

Os Quadros 6 e 7 apresentam uma síntese das respostas dos alunos de ambas as turmas, das alíneas das Questões 1 e 2 da tarefa em análise. Estes quadros ajudam a compreender as dificuldades dos alunos nas diversas alíneas. Recorde-se que a primeira questão pedia uma conversão de diferentes representações de número racional para a representação pictórica e a segunda questão pretendia que os alunos convertessem a representação pictórica noutro tipo de representação.

Repare-se na diferença das respostas corretas entre as turmas nas alíneas 1b e 1d da Questão 1 que apresentavam representações de número racional em percentagem e em dízima. Apenas na Turma R um aluno deu uma resposta correta a uma das questões. Embora estas alíneas não tenham sido aqui analisadas em detalhe, importa referir que na alínea 1b, que pedia aos alunos que pintassem 50% da figura, estes pintaram cinco partes da figura (que se encontrava dividida em dez partes iguais) e na alínea 1d, ao ser pedido para pintar 0,5, os alunos pintaram toda a figura, três quartos da figura ou dividiram a figura dada em mais partes de modo a pintarem cinco partes.

Quadro 6. Respostas dos alunos a alíneas da Questão 1, da Tarefa 1

	Turma C				**Turma R**				**Total de alunos**			
	Respostas Corretas		Respostas Incorretas		Respostas Corretas		Respostas Incorretas		Respostas Corretas		Respostas Incorretas	
	Frequência Absoluta	Frequência Relativa	Frequência Absoluta	Frequência Relativa	Frequência Absoluta	Frequência Relativa	Frequência Absoluta	Frequência Relativa	Frequência Absoluta	Frequência Relativa	Frequência Absoluta	Frequência Relativa
Alínea a	24	100%	0	0%	14	93%	1	7%	**38**	**97%**	**1**	**3%**
Alínea b	24	100%	0	0%	1	7%	14	93%	**25**	**64%**	**14**	**36%**
Alínea c	16	67%	8	33%	15	100%	0	0%	**31**	**79%**	**8**	**21%**
Alínea d	21	88%	3	12%	0	0%	15	100%	**21**	**54%**	**18**	**46%**
Alínea e	21	88%	3	12%	15	100%	0	0%	**36**	**92%**	**3**	**8%**
Alínea f	20	83%	4	17%	15	100%	0	0%	**35**	**90%**	**4**	**10%**
Total	81	84%	15	16%	59	98%	1	2%	**140**	**90%**	**16**	**10%**

Quadro 7. Respostas dos alunos às alíneas da Questão 2, da Tarefa 1

	Turma C				**Turma R**				**Total de alunos**			
	Respostas Corretas		Respostas Incorretas		Respostas Corretas		Respostas Incorretas		Respostas Corretas		Respostas Incorretas	
	Frequência Absoluta	Frequência Relativa	Frequência Absoluta	Frequência Relativa	Frequência Absoluta	Frequência Relativa	Frequência Absoluta	Frequência Relativa	Frequência Absoluta	Frequência Relativa	Frequência Absoluta	Frequência Relativa
Alínea a	22	92%	2	8%	14	93%	1	7%	**36**	**92%**	**3**	**8%**
Alínea b	18	75%	6	25%	15	100%	0	0%	**33**	**85%**	**6**	**5%**
Alínea c	22	92%	2	8%	13	87%	2	13%	**35**	**90%**	**4**	**10%**
Alínea d	21	88%	3	12%	14	93%	1	7%	**35**	**90%**	**4**	**10%**
Alínea e	18	75%	6	25%	14	93%	1	7%	**32**	**82%**	**7**	**18%**
Alínea f	20	83%	4	17%	15	100%	0	0%	**35**	**90%**	**4**	**10%**
Total	121	84%	23	16%	85	94%	5	6%	**206**	**88%**	**28**	**12%**

Como se pode observar quer pela percentagem de respostas corretas por turma, quer pela percentagem total das respostas corretas, não existe uma diferença significativa dos resultados obtidos nas duas questões da tarefa, o que sugere que os alunos têm facilidade idêntica em ambos os tipos de tarefa.

Na Turma R, o facto de os alunos terem resolvido de modo incorreto às alíneas 1b e 1d da Questão 1 (ver Quadro 6), alíneas em que lhes eram apresentadas as representações em percentagem e em dízima pode ter a ver com o facto de ter sido abordada na aula apenas a representação em fração.

Conclusão

Com este estudo procuramos compreender que conhecimentos revelam alunos do 2.º ano sobre números racionais representados na forma de fração, dízima, representação pictórica e percentagem em questões envolvendo números racionais no significado parte-todo. Relativamente às representações que os alunos privilegiam na resolução de questões que envolvem a conversão de uma representação pictórica para uma representação simbólica (questão 1 do estudo), os resultados mostram que os alunos da Turma R privilegiam a representação em fração, o que é natural uma vez que esta foi a única representação anteriormente abordada na aula. Na Turma C, embora tenha sido igualmente privilegiada a representação em forma de fração, também foram utilizadas as representações em percentagem (50% e 25%) e dízima (0,5 e 0,2).

Focando agora a questão 2 do estudo, na resolução desta tarefa as principais dificuldades dos alunos estão associadas: (i) à interpretação e registo de diferentes representações de números racionais; (ii) à natureza das grandezas (contínuas e discretas); e (iii) ao reconhecimento da unidade. Os alunos demonstraram dificuldade em compreender o significado da representação decimal de números racionais e também da sua representação na forma de fração própria não unitária. Note-se que, na Turma C, a fração $\frac{3}{4}$ nunca tinha sido abordada em sala de aula; no entanto, os alunos revelaram compreender esta fração no significado parte-todo, reconhecendo que teriam de pintar 3 em 4 partes. O próprio registo de uma representação específica, a fração, suscitou algumas dúvidas por parte dos alunos.

Nota-se ainda que vários alunos de ambas as turmas revelam dificuldade no reconhecimento da unidade, parecendo identificar as partes que constituem a unidade apresentada como unidades distintas, ou seja, não as reconhecem como partes constituintes de uma única unidade (tal como Carpenter et al., 1993). Além disso, as resoluções dos alunos da Turma C mostram que a natureza das grandezas apresentadas teve influência nas respostas. Comparando a percentagem de respostas corretas dos alunos em questões que envolvem grandezas contínuas e grandezas discretas (alíneas 1c e 1f), é notório que as questões envolvendo grandezas discretas assumem maior dificuldade. Estes resultados estão de acordo com o que referem Monteiro e Pinto (2005), que alertam para o facto de a natureza das grandezas poder influenciar a compreensão dos alunos sobre o conceito de unidade. No entanto, os alunos da Turma R não revelaram qualquer dificuldade nas questões que envolviam grandezas discretas, tendo todos eles resolvido de modo correto estas alíneas. Isto evidencia a necessidade da exploração de grandezas contínuas e discretas na abordagem dos números racionais.

A análise da resolução das questões e dos Quadros 6 e 7 evidencia diferenças nas resoluções entre ambas as turmas. Os alunos da Turma C revelam alguma facilidade no trabalho com frações unitárias e alguns conhecimentos, ainda que superficiais, de dízimas e percentagens, representações que já tinham sido abordadas em sala de aula. Demonstram facilidade na resolução de questões envolvendo grandezas contínuas, mas o mesmo não se verifica com grandezas discretas que, até ao momento da realização do estudo, tinham sido pouco abordadas. Revelam também dificuldade na interpretação de frações próprias não unitárias que não tinham sido ainda trabalhadas em sala de aula. Os alunos da Turma R revelam facilidade no trabalho com frações próprias (unitárias e não unitárias) e na resolução de questões com grandezas contínuas ou discretas. Por outro lado, apresentam dificuldade na interpretação e resolução de questões envolvendo dízimas ou percentagens, representações que ainda não tinham sido trabalhadas em sala de aula.

Este estudo diagnóstico sugere diversas implicações para a prática de professores e também para a investigação sobre o ensino e aprendizagem dos números racionais. O percurso realizado em cada turma, diferente na valorização de alguns aspetos, teve claro reflexo nos resultados dos alunos, o que evidencia a necessidade de preparar uma abordagem aos números racionais compreendendo a complexidade dos conceitos envolvidos, bem como valorizar os conhecimentos informais que os alunos têm sobre estes números. Os resultados deste estudo podem ter também um papel importante em investigações que tenham como objetivo o estudo dos processos de aprendizagem dos números racionais por alunos do 1.º ciclo, ajudando a compreender os conhecimentos formais e informais que alguns alunos do 2.º ano revelam relativamente aos números racionais.

Referências bibliográficas

Barnett-Clarke, C., Fisher, W., Marks, R., & Ross, S. (2010). *Developing essential understanding of rational number: Grades 3-5*. Reston, VA: NCTM.

Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver, E. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 91-125). New York, NY: Academic Press.

Carpenter, T. P., Fennema, E., & Romberg, T. A. (1993). Toward a unified discipline of scientific inquiry. In T. Carpenter, E. Fennema & T. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 1-11). Hillsdale, NJ: Laurence Erlbaum.

Keijzer, R. (2003). *Teaching formal mathematics in primary education* (Tese de doutoramento). Universidade Livre de Amsterdão, Amsterdão.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-667). Reston, VA: NCTM.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação: DGIDC.

Monteiro, C., & Pinto, H. (2005). A aprendizagem dos números racionais. *Quadrante*, *14*(1), 89-108.

Monteiro, C., Lobo, E., Veloso, G., Sousa, H., Moura, I., & Ribeiro, S. (2006). *Cadeia de tarefas para o ensino dos decimais*. Programa de Formação Contínua em Matemática para professores do 1º ciclo - ESE Lisboa.

Moss, J., & Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(2), 122-147.

Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2011). Abordagem exploratória com representações múltiplas na aprendizagem dos números racionais: Um estudo de desenvolvimento curricular. *Quadrante, 20*(1), 53-81.

Resnick, L. B., Nesher, P., Leonard, F., Magone, M., Omanson, S., & Peled, I. (1989). Conceptual bases of arithmetic errors: The case of decimal fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(1), 8-27.

Webb, D. C., Boswinkel, N., & Dekker, T. (2008). Beneath the tip of the iceberg. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *14*(2), 110-113.

O tema Relações Espaciais nas várias instâncias curriculares brasileiras: Algumas reflexões

Edda Curi
Universidade Cruzeiro do Sul, Edda.curi@gmail.com

Resumo. *Este texto tem por objetivo discutir alguns resultados de uma pesquisa realizada na cidade de São Paulo em 2013 por um grupo de pesquisa no âmbito do Programa Observatório da Educação, com financiamento da CAPES. A pesquisa se refere ao enfoque dado ao tema Relações Espaciais nas várias instâncias curriculares na perspectiva de Sacristan (2000), destacando aspectos convergentes e divergentes entre os currículos prescritos, apresentados e avaliados pela Prova Brasil. Foi realizada pelo grupo uma pesquisa documental com análise de documentos oficiais, livros didáticos e materiais didáticos institucionais no sentido proposto por Gil (2002). Entre os resultados destacamos convergências entre os currículos prescritos e o avaliado, mas observamos divergências entre os currículos nas instâsncias citadas e os currículos apresentados nos livros didáticos analisados. Destacamos ainda a falta de orientações aos professores no que se refere a estudos teóricos sobre o tema Relações Espaciais, visto que ele foi introduzido recentemente nos currículos do nosso país.*

Abstract. *This article aims to discuss some results of a research conducted in the city of São Paulo in 2013 by a research group within the Observatory Program of Education, funded by CAPES.The research refers to the emphasis given to the topic Spatial Relations in several curricular instances in the perspective of Sacristan (2000), highlighting convergent and divergent aspects among the prescribed curriculums, presented and evaluated by Prova Brasil. It was conducted by the group a documental research with analysis of official documents, textbooks and institutional educational materials in the direction proposed by Gil (2002). Among the results, we highlight convergences between the prescribed curriculums and the evaluated, but we observed differences between the curriculums in the quoted instances and the curriculums displayed in the analyzed textbooks. We also highlight the lack of guidance to teachers regarding the theoretical studies on the topic Spatial Relations, since it was recently introduced in the schools' curriculum of our country.*

Palavras-chave: Relações espaciais; Currículos prescritos; Currículos apresentados; Currículos avaliados.

Introdução

Esta comunicação apresenta os resultados de uma investigação realizada em 2013 na cidade de São Paulo, é parte de um projeto de pesquisa alocado no âmbito do Programa Observatório da Educação, financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). O grupo de pesquisa é constituído por 17 bolsistas:

seis alunos do curso de Pedagogia da Universidade, seis professoras da rede pública de São Paulo que atuam com crianças dos anos iniciais do Ensino Fundamental, três mestrandos, uma doutoranda e uma doutora. Além disso, participam voluntariamente do Projeto outros pesquisadores da Universidade, alunos do Curso de Pedagogia e do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática e três professoras em atuação na rede pública.

Nos anos de 2011 e 2012, o grupo fez pesquisas sobre o ensino do Sistema de Numeração Decimal, dos Campos Aditivo e Multiplicativo. No ano de 2013 o grupo desenvolveu trabalhos com o tema Espaço e Forma e publicou um livro com resultados da pesquisa. Focalizamos nesta comunicação o tema Relações Espaciais nos currículos, nos livros didáticos e na Prova Brasil. O objetivo é apresentar alguns resultados dessa pesquisa, no que se refere ao enfoque dado nas várias instâncias curriculares ao tema Relações Espaciais, na perspectiva de Sacristán (2000), destacando aspectos convergentes e divergentes.

Procedimentos de pesquisa

Foi realizada pelo grupo uma pesquisa documental com análise de documentos oficiais, livros didáticos no sentido proposto por Gil (2002). Segundo o autor, a pesquisa documental analisa materiais que não receberam ainda um tratamento analítico, ou que ainda podem ser reanalisados de acordo com os objetos investigados.

Fundamentação teórica

Para análise do tema Relações Espaciais no currículo usamos como referência os estudos de Sacristán (2000). O autor afirma que o currículo é um meio pelo qual a escola se organiza, propõe seus caminhos e orientações para a prática. Destaca a importância dos objetivos da escola, do contexto, dos conteúdos e ações práticas num currículo. Discorre sobre currículo como uma prática que se realiza em várias instâncias, com a participação de diferentes atores. Segundo ele, o *Currículo Prescrito* é um documento de referência que indica diretrizes para a educação, a escola, os objetivos e processos de ensino e de aprendizagem de uma dada área de conhecimento. O *Currículo Apresentado* é, no geral, formulado por autores de livros didáticos e/ou outros materiais instrucionais que operacionalizam as orientações curriculares expressas nos currículos prescritos. O *Currículo Moldado* é elaborado pela escola a partir dos currículos prescrito e apresentado, adequando-os às necessidades dos alunos. O

Currículo em Ação é a concretização do currículo em sala de aula, em que as atividades vão sendo ajustadas em função da interação entre professores, alunos e o conhecimento. O *Currículo Avaliado* se refere ao momento em que o professor procura captar os avanços e dificuldades de seus alunos, ao longo do processo.

Neste texto apresentamos a análise dos currículos prescritos, apresentado e avaliado com relação ao tema Relações Espaciais. Baseamo-nos em textos de autores que destacam as competências geométricas referentes a esse tema (Curi, 2013; Rainiere & Colombo, 2012); que discutem o ”tamanho” do espaço – micro espaço, meso espaço e macro espaço (Galvez, 1996; Rainiere & Colombo, 2012); que descrevem as relações topológicas, projetivas e métricas no espaço (Piaget & Inhelder, 1993); que debatem as diferenças entre os conceitos de lateralização e lateralidade (Saiz, 2006).

De acordo com Curi (2013), o trabalho com Relações Espaciais permite desenvolver três competências geométricas de natureza distintas: a primeira refere-se à leitura e interpretação de representações do espaço com uso de malhas e diagramas, guias e mapas; a segunda destaca a construção de representações do espaço; e a terceira, de grande uso social, faz referência à comunicação oral a partir de descrições do espaço, posições, movimentações e relações espaciais usando terminologia própria para que a sociedade seja capaz de compreender. Embora não haja hierarquia rígida entre essas competências, Rainiere e Colombo (2012) consideram que a exploração oral do espaço por meio de sua visualização é anterior a qualquer tipo de representação gráfica. A competência de interpretação do espaço também é anterior à da construção da representação do espaço.

Essas competências podem ser desenvolvidas em tipos de espaço de “tamanhos” diferentes. Galvez (1996) estabelece três tipos de espaço: micro espaço, meso espaço e macro espaço. Denomina micro espaço aquele em que o aluno pode contemplar instantaneamente em sua totalidade, como, por exemplo, uma folha de caderno. Chama de meso espaço à porção do espaço físico que exige pequenos deslocamentos ou mais de um ponto de vista para ser visto em sua totalidade, como, por exemplo, a sala de aula. Denomina macro espaço aquele em que é impossível obter uma percepção direta do mesmo em sua totalidade, mesmo com pequenos deslocamentos ou pontos de vista, como, por exemplo, o quarteirão da escola.

Resolver problemas em diferentes “tamanhos” do espaço requer procedimentos diferentes e modos diversos de relacionar os objetos presentes naquela parte do espaço. Segundo Rainiere e Colombo (2012), nos diferentes “tamanhos” de espaço, as maneiras de relacionar objetos são diferentes e há necessidade de utilizar modelos conceituais diferentes para orientar as ações do sujeito.

Além disso, Piaget e Inhelder (1993) destacam que as primeiras relações espaciais que o estudante estabelece são as chamadas topológicas que acontecem no espaço próximo, usando referenciais elementares como: dentro, fora, ao lado, na frente, perto, longe, etc. As relações de natureza projetiva referem-se à noção de pontos alinhados: o que vem antes, o que vem depois, o que está entre, o que está à direita, à esquerda, etc. As relações de natureza métrica ocorrem quando as medidas não se alteram em deslocamento de uma figura no espaço. Envolvem o conceito de proporcionalidade, em que o tamanho – ou amplitude – do lugar e dos objetos desempenham um papel importante.

Consideram-se ainda os estudos de Saiz (2006), que faz uma distinção entre os conceitos de lateralização e lateralidade. À utilização preferencial de um dos lados do corpo, ela denomina de lateralização. Esta se mantém constante e independentemente dos movimentos ou dos deslocamentos realizados pelo indivíduo. Já a lateralidade, é o avanço desse conhecimento, que implica saber que o lado direito de sua imagem refletida no espelho coincide com a sua esquerda. Dessa forma, direita e esquerda, de acordo com os movimentos ou deslocamentos, não se mantêm constantes, mas modificam-se de acordo com o objeto de referência utilizado. Para essa autora, a orientação espacial se dá “no” corpo e “com” o corpo.

Procuramos verificar, nos materiais analisados, a existência ou não das três competências geométricas já citadas e o que consideramos variáveis didáticas importantes para o desenvolvimento dessas competências, como o “tamanho” de espaço usado, os tipos de relações estabelecidas e o uso dos conceitos de lateralização e lateralidade. Buscamos ainda verificar se os documentos abordam diferentes tipos de representação do espaço, como mapas, guias, croquis, malhas quadriculadas, etc.

Contextualizando a pesquisa

No Brasil, embora não haja currículo obrigatório, há orientações curriculares em nível federal e em alguns estados (e municípios). É o que se dá na cidade de São Paulo, em que as orientações curriculares se dão em nível estadual e municipal, com base nas referências nacionais.

Em instância federal, o documento que apresenta orientações curriculares é denominado Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN, elaborado em 1997. Nessa época, o ensino fundamental estava organizado em oito anos. O documento está dividido em 4 ciclos e os dois primeiros podem ser adequados aos cinco anos do ensino fundamental na proposta de escolaridade fundamental atual de 9 anos. Em São Paulo, no nível estadual, o currículo prescrito pela Secretaria Estadual de Educação para os anos iniciais do ensino fundamental foi publicado em 2013. No nível municipal, em 2007, foi elaborado documento pela SMESP (Secretaria Municipal de Educação de São Paulo) denominado Orientações Curriculares e Proposição de Expectativas de Aprendizagem.

Nesta comunicação, no âmbito do currículo prescrito, apresentamos os resultados das análises dos três documentos citados em relação ao tema Relações Espaciais para os cinco primeiros anos do ensino fundamental. Em relação ao currículo apresentado, destacamos os resultados das análises de duas coleções de livros didáticos. Na instância do currículo avaliado analisamos documentos relativos a uma avaliação externa denominada de Prova Brasil. Essa prova tem como objetivo obter indicadores educacionais que possam subsidiar a elaboração de propostas de intervenção técnico-pedagógica nos sistemas de ensino.

Alguns resultados

Algumas considerações sobre as instâncias curriculares analisadas serão destacadas a seguir.

Considerações sobre o Currículo Prescrito

Os três documentos analisados apresentam uma discussão sobre a natureza da área e a importância da Matemática na formação do cidadão, destacam objetivos ou expectativas de aprendizagem[1] e conteúdos. Dão pistas para avaliação e expõem algumas orientações didáticas para o desenvolvimento dos conteúdos a partir de pesquisas atuais na área.

[1] Os documentos que usam a expressão 'Expectativas de Aprendizagem' as descrevem como o que se espera que o aluno aprenda ao final de cada ano de escolaridade em relação aos conteúdos matemáticos.

A Figura 1, a seguir, apresenta objetivos/expectativas de aprendizagem referentes ao tema.

	PCN		ORIENTAÇÕES CURRICULARES/SME	ORIENTAÇÕES CURRICULARES/SEE
Ciclo 1	- Estabelecer pontos de referência para situar-se, posicionar-se e deslocar-se no espaço, bem como para identificar relações de posição entre objetos no espaço; interpretar e fornecer instruções, usando terminologia adequada.	1º ano	- Identificar pontos de referência para indicar sua posição na sala de aula. - Indicar oralmente a posição em que se encontra no espaço escolar e representá-lo por meio de desenhos. - Indicar oralmente o caminho para se movimentar no espaço escolar e chegar a um determinado local da escola e representar a trajetória por meio de desenhos. - Fazer leitura de croquis simples que indiquem a posição de um objeto ou pessoa. - Fazer leitura de um croqui simples que indique a movimentação de um objeto ou pessoa.	- Identificar pontos de referência para indicar sua localização na sala de aula. - Identificar pontos de referência para indicar a localização de sua sala de aula na escola. - Indicar como se movimentar no espaço escolar e chegar a um determinado local da escola, oralmente. - Indicar como se movimentar no espaço escolar e chegar a um determinado local da escola, por meio de desenhos. - Fazer a leitura de croquis simples que indiquem a posição e a movimentação de um objeto ou pessoa.
		2º ano	- Localizar pessoas ou objetos no espaço com base em diferentes pontos de referência e algumas indicações de posição. - Identificar a movimentação de pessoas ou objetos no espaço, com base em diferentes pontos de referência e indicações de direção e sentido.	- Localizar pessoas ou objetos no espaço, com base em diferentes pontos de referência e algumas indicações de posição. - Identificar a movimentação de pessoas ou objetos no espaço, com base em diferentes pontos de referência e algumas indicações de direção e sentido.
		3º ano	- Interpretar a localização de um objeto ou pessoa no espaço, pela análise de maquetes, esboços e croquis. - Interpretar a movimentação de um objeto ou pessoa no espaço, pela análise de maquetes, esboços e croquis.	- Ler, interpretar e representar a posição de um objeto ou pessoa no espaço pela análise de maquetes, esboços, croquis. - Ler, interpretar e representar a movimentação de um objeto ou pessoa no espaço pela análise de trajetos em maquetes, croqis.
Ciclo 2	- Estabelecer pontos de referência para interpretar e representar a localização e movimentação de pessoas ou objetos, utilizando terminologia adequada para descrever posições.	4º ano	- Identificar a posição de uma pessoa ou objeto num desenho apresentado em malha quadriculada. - Identificar a localização de uma pessoa ou objeto num desenho em malha quadriculada.	- Utilizar malhas quadriculadas para representar, no plano, a posição de uma pessoa ou objeto. - Utilizar malhas quadriculadas para representar, no plano, a movimentação de uma pessoa
		5º ano	- Descrever, interpretar e representar por meio de desenhos a localização ou a movimentação de uma pessoa ou um objeto.	- Descrever, interpretar e representar a posição ou a movimentação de uma pessoa ou objeto no espaço e construir itinerários. - Interpretar representações no plano cartesiano, usando coordenadas.

Figura 1. Objetivos/expectativas de aprendizagem apresentados nos documentos

Consideramos que, nos objetivos/expectativas de aprendizagem, os três documentos convergem, embora os documentos mais recentes sejam mais explícitos na descrição das expectativas de aprendizagem, desdobrando-as e apontando ora trabalhos orais, ora leitura de mapas, ora elaboração de trajetos, assinalando para o desenvolvimento das três competências geométricas já citadas, embora não haja explicitação dessas competências, o que pode passar despercebido nas leituras por parte dos professores. O trabalho oral é mais enfatizado nos três primeiros anos para que a criança dê e receba instruções de localização, compreenda e utilize terminologia adequada. O trabalho com leitura e interpretação de representações do espaço é indicado em todos os anos de escolaridade e o trabalho com construção de representações, embora presente, está indicado com mais ênfase a partir do 4º ano.

Nos documentos mais recentes percebe-se claramente o encadeamento vertical das expectativas de aprendizagem ano a ano e a ampliação das habilidades relativas a esse tema.

Os documentos apontam objetivos/expectativas de aprendizagem que permitem desenvolver o trabalho com o micro, meso e macro espaço, na perspectiva de Galvez (1996), como mapas de sala de aula, de ambiente da quadra escolar, do quarteirão da escola, etc.

Em suas orientações didáticas, os documentos também convergem. Destacam que, para se orientar, a criança considera apenas seu próprio corpo como referência e que, gradualmente, ela toma consciência dos movimentos de seu próprio corpo, de seu deslocamento, o que indica a incorporação dos estudos de Piaget e Inhelder (1993). Destacam ainda a necessidade de trabalhar com diferentes tipos de representações do espaço como malhas e diagramas, guias e mapas.

Como é possível perceber, embora o foco teórico pudesse ser ampliado para melhor orientação ao professor, os documentos analisados contemplam aspectos importantes do trabalho com Relações Espaciais como o desenvolvimento das três competências geométricas já citadas, envolvendo variáveis didáticas como o "tamanho" do espaço, as relações destacadas por Piaget e Inhelder, as noções de lateralização e lateralidade e ainda indicam a exploração dos diferentes tipos de representação do espaço.

Considerações sobre o Currículo Apresentado

No âmbito do projeto já referido no início deste texto, foram analisadas por Pereira e Teixeira (2013) duas coleções de livros didáticos destinadas ao professor, observando a presença ou ausência de atividades que contemplassem as expectativas de aprendizagem indicadas nos currículos prescritos em São Paulo e os aspectos teóricos e de variáveis didáticas mencionados neste texto. A análise permitiu observar como o tema era apresentado e as orientações que a obra dava para a realização das atividades com os alunos.

O trabalho dos autores permite concluir que, nas duas coleções, as expectativas de aprendizagem propostas nos currículos prescritos foram pouco contempladas, principalmente as que se referem ao trabalho oral e à construção de representações do espaço. Esse fato foi verificado em todos os anos de escolaridade.

Os autores constataram que não existe uma integração vertical entre as propostas de atividades desenvolvidas ano a ano nas duas coleções e, em alguns momentos, as coleções exploram expectativas de aprendizagem não adequadas para o ano de escolaridade.

As propostas de atividades das duas coleções consideram a participação passiva dos alunos, trabalhando apenas a interpretação de representações. As poucas construções solicitadas não são de representações, mas de pequenos trajetos em malhas quadriculadas. Em nenhuma das coleções existem atividades que trabalhem a comunicação oral, o que nos permite concluir que essas coleções não contemplam as três competências geométricas relativas ao Tema Relações Espaciais descritas neste texto.

As atividades propostas na coleção A não permitem o trabalho com diferentes "tamanhos" do espaço. Já a coleção B, focalizou situações em micro espaço, meso espaço e macro espaço (Galvez, 1996), utilizando contextos adequados.

As orientações destinadas aos professores para realização das atividades focalizaram apenas o caráter procedimental e não envolveram aspectos teóricos que pudessem ampliar o conhecimento dos professores. Em nenhum momento há orientações sobre a necessidade de dois elementos para localizar um ponto no plano, o que apresenta fragilidade quanto à execução de algumas atividades.

O objeto de referência nem sempre estava claro nas atividades e não havia orientação aos professores para que fizessem trabalhos para amenizar as dificuldades dos alunos ao se colocar no lugar do objeto de referência, quando este não era seu próprio corpo.

Segundo Pereira e Teixeira (2013), em muitas situações as propostas de atividades das duas obras levam a obstáculos didáticos, ou por falhas nas ilustrações, ou por imprecisão na linguagem, ou por falta de cuidado nas referências de localização.

Como é possível observar com essa análise, o currículo apresentado faz um recorte muito pobre do currículo prescrito, com fragilidades conceituais, e não oferece ao professor elementos para ampliar seu conhecimento para trabalhar com esse tema.

Considerações sobre o Currículo Avaliado

No que se refere ao currículo avaliado, o documento base denomina-se Matriz de Referência de Avaliação do Sistema de Avaliação da Educação Básica - SAEB, publicado pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira - INEP, em 2001. Nos últimos anos, o INEP publicou outros documentos explicativos para as avaliações externas que subsidiam a Prova Brasil e serão analisados a seguir.

Todos os documentos apresentam objetivos para formulação das questões da Prova Brasil denominados de Descritor[2].

Cabe enfatizar que as questões da Prova Brasil são elaboradas em forma de teste, com 4 alternativas para o 5º ano, o que não permite que os alunos descrevam e repressentem o espaço, conforme citado nos documentos. Há um único Descritor referente a esse tema: Identificar a localização/movimentação de objeto em mapas, croquis e outras representações gráficas (D1). Esse Descritor pode dar origem a dois grandes conjuntos de questões, envolvendo habilidades diferentes: de localização ou de movimentação no espaço. Consideramos que esse Descritor é coerente com as indicações dos documentos curriculares que acabamos de analisar, mas é um recorte muito pobre do que pode ser desenvolvido nas aulas, pois não permite ampliar o conhecimento que a criança tem do espaço onde vive e não traduz a amplitude das atividades que podem ser desenvolvidas, quando se ensina esses conteúdos. Pela limitação da natureza da prova, esse tipo de questão só consegue avaliar se a criança domina a nomenclatura referente à posição.

As questões divulgadas da Prova Brasil, geralmente, contêm desenhos de cenas estanques, em que a criança precisa identificar a localização (ou a movimentação) de um personagem (ou objeto), como é possível verificar no exemplo de item a seguir.

[2] Segundo o documento, o Descritor descreve a habilidade que deve ser considerada no item de avaliação.

Marcelo fez a seguine planta de sua sala de aula

Das crianças que se sentam perto da janela, a que senta mais longe da professora é

(A) O Marcelo (B) A Luiza (C) O Rafael (D) A Tânia

Figura 2. Exemplo de Item (Fonte: PDE/ Prova Brasil, 2008, pp. 110-111)

A questão envolve duas informações: sentar perto da janela e mais longe da professora. A incidência de 34% de alunos que indicaram a alternativa D (Tânia) nos permite conjecturar que esses alunos consideraram, ao que parece, apenas uma informação dada (mais longe da professora), não percebendo a outra informação (perto da janela).

O documento, publicado em 2008, apresenta comentários sobre a questão, mas foca o percentual de indicações em cada alternativa e não aborda pedagogicamente o item. Não discute o cerne da questão, ou seja, a necessidade de duas informações para localizar um objeto no plano e o domínio do vocabulário adequado.

Quanto às sugestões de atividades para que essa habilidade pudesse ser desenvolvida, os documentos analisados propõem situações que permitem: a localização ou movimentação de objetos, indicando posicionamento e referências; a construção formal da sala de aula, de trajetos; o trabalho com mapas da cidade ou do bairro, croquis da escola ou da sala de aula, usando material "pedagógico apropriado".

Embora esses documentos não tenham como finalidade apresentar orientações curriculares, as sugestões de atividades não levam ao desenvolvimento da habilidade avaliada na Prova Brasil pela questão apresentada na Figura 2. Não há destaque para a necessidade de duas informações para a localização de um objeto ou um ponto no plano.

Consideramos que, se todas as atividades sugeridas por esses documentos forem realizadas, mas se não forem focadas as duas componentes da localização no plano e o desenvolvimento do vocabulário adequado, a evolução da criança será muito pequena, quase não perceptível, e não permitirá que ela acerte esse tipo de questão.

Considerações finais

Fica clara a convergência entre os documentos curriculares prescritos e os que sinalizam o currículo avaliado pelo SAEB, tanto nas habilidades descritas, como em exemplos de situações. No entanto, não há convergência dos livros didáticos com as outras instâncias curriculares analisadas.

Além disso, nos documentos prescritos e referentes à avaliação, não há discussões, com bases teóricas, mais direcionadas à prática do professor. Embora tenhamos clareza do objetivo desses documentos, eles acabam sendo indutores de currículo e de formação de professores e, por esse motivo, precisam aprofundar alguns assuntos, principalmente os que, de alguma forma, são "novos" para os professores.

Destacamos a necessidade de discussões sobre objetos de referência, pontos de vista, construção de representações. O espaço não é estático e a sua interpretação ou representação depende de diferentes pontos de vista.

Quanto aos desenhos das crianças, é interessante dar pistas aos professores para observar se há avanços no traçado, nos símbolos usados, se a criança percebe a necessidade de colocar uma legenda, como organiza as informações, etc. Além disso, é importante orientar os professores na verificação de uso de diferentes pontos de vista no mesmo desenho pela criança, se há predominância do frontal ou se ela mistura o frontal com o vertical. Nesses casos, as relações projetivas estão ainda em construção. É interessante chamar a atenção do professor para com o uso de medidas, de distância, de proporcionalidade, de perspectivas. Nesse sentido, há uma aproximação maior com o espaço projetivo e euclidiano. O conceito de proporção, por exemplo, é essencial no entendimento da ideia de escala utilizada em representações gráficas e na produção dessas representações. Na representação de um mapa ou de uma planta-baixa, essa noção é fundamental e ajuda a entender por que as plantas e os mapas guardam a mesma forma daquilo que eles representam. Essas observações nos documentos trariam elementos para reflexões do professor sobre sua prática.

Também percebemos que os documentos curriculares não destacam a importância do contexto para a elaboração das atividades, só consideram que devem ser próximos das experiências vivenciadas pelas crianças. Nos livros didáticos analisados, o contexto não deixava claro o referencial. Reconhecer se um objeto ou uma pessoa está longe ou perto, em cima ou em baixo, à direita ou à esquerda, requer que se estabeleça sempre outro objeto ou pessoa como referência. Nem sempre isso acontecia. Às vezes, o referencial era implícito na atividade e o contexto não tornava claro ao interlocutor qual o referencial tomado na situação. Não se percebia, na atividade proposta, se o referencial era o personagem da atividade ou era o aluno que estava resolvendo a situação proposta.

Consideramos que essas informações são importantes para o desenvolvimento de sequências d**e** ensino, como também para a formação do professor, possibilitando a incorporação desse tema nas práticas e, por consequência, sua implementação curricular.

Esperamos, com essa discussão, contribuir para implementação, na sala de aula, de um tema tão importante como o da construção de noções de espaço pela criança.

Referências

Curi, E. (2013). O currículo prescrito e avaliado pelo SAEB no que se refere ao tema relações espaciais: Algumas reflexões. In E. Curi & J. P. P. Vece (Org.), *Relações espaciais: Práticas educativas de professores que ensinam Matemática* (pp. 21-45). São Paulo: Terracota.

Galvez, G. (1996). A psicogênese das noções espaciais e o ensino da geometria na escola primária. In C. Parra & I. Saiz (Eds.), *Didática da matemática: Reflexões psicopedagógicas* (1ª ed.) (pp. 236-256). Porto Alegre: Artmed.

Gil, A. (2002) *Como classificar as pesquisas*. Acesso em julho de 2013 em http://dc307.4shared.com/doc/svHoPhCZ//html

Ministério da Educação (1997). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: MEC/SEF (Secretaria de Educação Fundamental).

Ministério da Educação (2000). *PDE: Plano de Desenvolvimento da Educação: Prova Brasil: Ensino fundamental: Matrizes de referência, tópicos e descritores*. Brasília: MEC/ INEP.

Ministério da Educação (2008). *Matemática: Orientações para o professor. SAEB/Prova Brasil*. Brasília: MEC/INEP.

Pereira, J. F. F., & Teixeira, A. C. (2013). Relações espaciais: Do currículo prescrito ao currículo apresentado em coleções de livros didáticos. In E. Curi & J. P. Vece (Org.), *Relações espaciais: Práticas educativas de professores que ensinam Matemática* (pp. 46-70). São Paulo: Terracota.

Piaget, P., & Inhelder, B. (1993). *A representação do espaço na criança*. Porto Alegre: Artmed.

Rainiere, A. F., & Colombo, C.V. (2012). *Pensar geometricamente: Ideas para desarrollar el trabajo en el aula*. Montevideo: Editorial Grupo Magro.

Sacristán, J. G. (2000). *O currículo: Uma reflexão sobre a prática* (3ª ed.). Porto Alegre: Artmed.

Saiz, I. (2006). A direita... de quem? Localização espacial na educação infantil e séries iniciais. In M. Panizza (Ed.), *Ensinar matemática na educação infantil e séries iniciais: Análise e propostas* (pp. 143-166). Porto Alegre: Artmed.

Sanchez, L. B., & Liberman, M. P. (2011). *Coleção fazendo e compreendendo Matemática, 1º ao 5º anos* (8ª ed.). São Paulo: Saraiva.

Secretaria Estadual de Educação (2013). *Educação Matemática para os Anos Iniciais – EMAI*. São Paulo: SEE.

Secretaria Municipal de Educação de São Paulo (SMESP) (2007). *Orientações curriculares e proposição de expectativas de aprendizagem: Matemática – 1º ao 5º anos*. São Paulo: SME.

Tosto, C. C., Tosato, C. M., & Perachi, E. P. F. (2011). *Coleção Hoje é dia de Matemática (1º ano ao 5º ano)* (2ª ed.). Curitiba: Positivo.

A complexidade do pensamento matemático e a qualidade das aprendizagens: um modelo de análise à luz da teoria da atividade

Fernando Luís Santos[1], António *Domingos*[2]
[1]ESE Jean Piaget de Almada, UIED FCT-UNL, fernando.santos@almada.ipiaget.pt
[2]Universidade Nova de Lisboa, UIED FCT-UNL, amdd@fct.unl.pt

Resumo. *A forma como os alunos respondem às questões colocadas é um instrumento importante para analisar a complexidade do seu pensamento matemático. Propomos um modelo de análise utilizando como enquadramento teórico as teorias de David Tall sobre a complexidade do pensamento matemático envolvendo as noções de proceito e bifurcação proceptual e a taxonomia SOLO de Biggs e Collis, e como instrumento a utilização da Teoria da Atividade, segundo Engeström, mostrando como esta permite descrever a análise/avaliação das respostas produzidas pelos alunos de formação inicial de professores (Licenciatura em Educação Básica), a uma questão de Cálculo da Probabilidade, evidenciando os diferentes níveis de complexidade do pensamento matemático envolvidos nas suas respostas (três), todas corretas, e a qualidade das suas aprendizagens.*

Abstract. *The way students answer to questions is an important tool for analyzing the complexity of their mathematical thought. We propose an analytical model using the theoretical framework of David Tall theories about the complexity of the mathematical thinking, procept, proceptual divide and SOLO taxonomy of Biggs and Collis, and as an operational model the use of Activity Theory according to Engeström by showing how this allows to describe the analysis / evaluation of the answers produced by pre-service teacher training students (Graduation in Basic Education) to a question of Probability, showing the different levels of complexity of mathematical thought involved in its answers (three), all correct, and, the quality of their learning.*

Palavras-chave: Formação inicial de professores; Pensamento matemático avançado; Qualidade da aprendizagem; Taxonomia SOLO; Teoria da atividade.

Introdução

Muitas teorias têm sido formuladas para explicar como os alunos obtêm compreensão no domínio da matemática. Estas teorias têm sido a base de numerosas práticas educativas.

Niss (2007) argumenta que não existe uma teoria unificada da educação matemática, em vez disso cada teoria tem forças associadas que podem conduzir ao desenvolvimento de práticas efetivas que reconheçam quer as idiossincrasias dos alunos quer a natureza objetiva do domínio da matemática. Acreditamos que pela ligação conciliada de teorias

Martinho, M. H., Tomás Ferreira, R. A., Boavida, A. M., & Menezes, L. (Eds.) (2014).
Atas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática. Braga: APM., pp. 125–140

de aprendizagem e o subsequente desenvolvimento de práticas educativas, há a necessidade de um modelo para analisar a complexidade do pensamento matemático e a qualidade das aprendizagens.

Este trabalho insere-se num estudo mais vasto que tem por objetivo aumentar a coerência da fundamentação teórica relativa ao papel das respostas dos alunos na complexidade do pensamento matemático utilizando um modelo de análise sustentado na conceptualização de David Tall sobre o pensamento matemático avançado, os proceitos e a bifurcação proceptual juntamente com a taxonomia SOLO (Structure of Observed Learning Outcomes) de Biggs e Collis (1982).

No episódio relatado neste texto, estas conceptualizações foram adotadas como lentes pelas quais se podem analisar as respostas dos alunos de formação inicial de professores a uma questão de Cálculo da Probabilidade, recorrendo à terceira geração da teoria da atividade de Engeström (2001) como forma de compreender a diversidade das respostas dos alunos, vendo ao pormenor a qualidade das respostas (versão do aluno e visão do professor).

O modelo de análise proposto refere-se à utilização de um protótipo de um currículo de matemática aplicado numa Escola Superior de Educação. Neste texto, o modelo de análise é posto em prática, e pela sua aplicação geram-se evidências para demonstrar a sua viabilidade enquanto ferramenta para discutir e melhorar o conhecimento e a compreensão da complexidade do pensamento matemático e da qualidade das aprendizagens.

O modelo de análise foi desenvolvido e avaliado no contexto do Cálculo da Probabilidade. Esta área, na qual se explora, analisa e avalia o modelo, foi escolhida por duas razões: é um tópico razoavelmente pequeno do protótipo do currículo e os objetos matemáticos envolvidos podem ser operados pelos alunos de várias formas.

Enquadramento teórico

O pensamento matemático avançado

Em 1988, David Tall argumentou que o *pensamento matemático avançado* podia ser interpretado de duas formas distintas (Tall, 1988):

- Pensamento relacionado com a matemática avançada, ou
- formas avançadas de pensamento matemático.

Mas o que é o *pensamento matemático avançado*? Desde que a expressão foi introduzida por Gontran Ervynck em 1985 que tem existido discussão sobre o mesmo, alguns autores apontam para as diferenças cognitivas entre os alunos do ensino secundário e o início do ensino superior, outros defendem a origem dos conflitos cognitivos inerentes aos modos de pensamento matemático, em qualquer idade e com qualquer conteúdo matemático.

A abordagem *processual* da aprendizagem da matemática está sustentada em enquadramentos positivistas onde, por intermédio de um conjunto de procedimentos predefinidos (algoritmos, por exemplo) se obtém uma resposta. Está assente na ideia de que, ao fazer um número suficiente de exercícios similares o aluno obtém as rotinas necessárias para aprender matemática.

Gray e Tall (1994) utilizam o conceito de capsular um processo num objeto mental, enraizado nos trabalhos de Piaget, para sustentar ciclos de construção de estruturas mentais que na teoria de Piaget são os ciclos de assimilação e acomodação. A utilização de símbolos, contudo, tem um duplo significado, introduzindo alguma ambiguidade entre o *procedimento* e o *conceito* que definem por *proceito.* A forma como os alunos lidam com esta ambiguidade e os raciocínios que desenvolvem parece ser a raiz da qualidade das aprendizagens em matemática.

Bifurcação proceptual

A esta combinação de raciocínio *processual* e *conceptual* denomina-se de pensamento *proceptual*. Quando se evidencia uma inabilidade para relacionar este dois tipos de pensamento torna-se difícil desenvolver um conhecimento *conceptual,* dicotomia esta definida por *bifurcação proceptual*, sendo para Gray e Tall (1994), uma das maiores barreiras e um dos fatores que mais tem contribuído para falhas no ensino e na aprendizagem da matemática.

No processo de aprendizagem de um conceito e/ou objeto matemático um aluno que simplesmente repete procedimentos, mesmo que exista compressão do processo (que pode ser um algoritmo, uma fórmula, entre outros) pode não conseguir efetuar uma relação entre os dados de entrada e os resultados obtidos. Este procedimento pode ser lembrado por intermédio da experiência como um processo memorizado, relembrado quando necessário, combinando vários proceitos elementares, mas conduzem a outros proceitos elementares (definidos como um conjunto de processos, objetos e símbolos) Este tipo de raciocínios estão ligados a um pensamento processual.

A figura 1 representa essa bifurcação baseada num esquema apresentado por Gray (1993) no tema da aritmética, sendo adaptada para uma forma genérica.

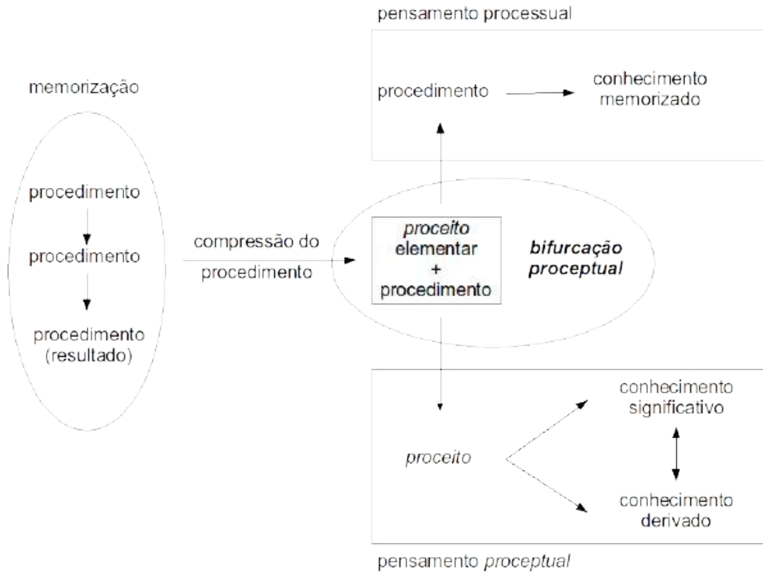


Figura 1. Identificação da *bifurcação proceptual* relacionando a aprendizagem de um objeto matemático com o pensamento processual e o pensamento *proceptual* baseado em Gray (1993).

Para ter raciocínios a um nível de pensamento *proceptual*, o aluno para além da compressão do processo, relaciona os dados recolhidos com os resultados obtidos. Podemos considerar que os novos *proceitos* resultam da combinação de *proceitos* elementares com outros processos abrangidos pela simbologia própria do conceito a estudar, o conhecimento adquirido assume um caráter significativo e não memorizado podendo ser utilizado em situações derivadas onde a sua aplicação não é tão evidente, ou em que a questão não é tão diretamente relacionada com um procedimento padrão.

Taxonomia SOLO (Structure of the Observed Learning Outcomes)

A ênfase na análise da qualidade das respostas dos alunos torna a taxonomia SOLO interessante para este modelo de análise. O foco não está no grau de correção das respostas, mas na natureza das mesmas, codificadas em categorias baseadas nos níveis SOLO permitindo uma descrição mais detalhada do desenvolvimento do raciocínio evidenciado pelos alunos e na qualidade das suas aprendizagens.

A qualidade das aprendizagens para Biggs e Collis (1982) depende de recursos exteriores ao aluno, tais como a qualidade do ensino e de recursos intrínsecos como a motivação, o estádio de desenvolvimento e o conhecimento prévio dos conteúdos. Para os autores, torna-se difícil identificar essa qualidade somente pela consideração dos estádios de desenvolvimento, mas mudando o ponto de vista da análise para as respostas do aluno identificam-se padrões que definiram a criação da taxonomia.

Esta distinção, é uma componente importante para a terminologia utilizada na taxonomia SOLO descrita de forma suscita na tabela 1, onde na primeira coluna se indica o nível da taxonomia – do mais complexo para o mais simples – na segunda coluna uma breve descrição do raciocínio envolvido em cada nível e na terceira coluna indicadores de resposta.

Tabela 1. Descrição dos níveis na taxonomia SOLO relacionando-os com os indicadores de resposta adaptado de Biggs e Collis (1982) e de Ceia (2002).

	Raciocínio	Indicadores
Abstrato	Vai para além do tópico, efetua conexões a outros conceitos e generaliza.	Teoria, generalização, testa hipóteses e usa reflexão. Evidencia capacidade máxima, utiliza dados relevantes e sua inter-relações. Não sente necessidade de responder de forma fechada possibilitando alternativas.
Relacional	Efetua conexões complexas e sintetiza partes do significado global.	Compara, explica as causas, integra, analisa, relata e aplica. Evidencia alta capacidade, utiliza dados relevantes e inter-relações. Não existem inconsistências dentro do tópico, mas responde de forma fechada.
Multi-estrutural	Efetua algumas conexões mas falta visão unificadora.	Enumera, classifica, descreve, lista, agrupa e trabalha com algoritmos. Evidencia capacidade média, consegue isolar os dados relevantes. Consegue obter conclusões diferentes com os mesmos dados.
Uni-estrutural	Efetua conexões simples sem identificar a sua importância.	Identifica, memoriza e efetua procedimentos simples. Evidencia baixa capacidade, aponta somente um dado relevante. Tira conclusões precipitadas baseadas num único aspeto.
Pré-estrutural	Disponibiliza informação solta e desorganizada, não relaciona.	Não relaciona os dados. Evidencia capacidade mínima, dá respostas confusas. Respostas inconsistentes.

Esta taxonomia é utilizada como uma ferramenta que permite um enquadramento sustentado na complexidade do pensamento matemático, tendo em vista a qualidade da aprendizagem e permite evitar a ênfase num único tipo de resposta ou raciocínio.

Teoria da Atividade

A Teoria da Atividade iniciada por Vygotsky e desenvolvida por Leont'ev, que assume o seu sistema de atividade coletiva (orientada por objetos e mediada por artefactos) como a unidade de análise, tem sido desenvolvida ao longo de três gerações, desde a ideia de *mediação* introduzida por Vygotsky no seu modelo triangular que refinada se transformou na tríade *sujeito – objeto – artefacto mediador,* deixando para trás a separação entre o indivíduo e o meio social envolvente (Engeström, 2001).

Numa segunda geração, centrada em Leont'ev para Engeström (2001) a unidade de análise deixou de ser individual e passou a incluir ligações a outras áreas envolvidas num sistema coletivo de atividade, focalizando-se agora nas inter-relações entre os objetos individuais e as comunidades. As noções de rede de atividade trouxeram a emergência de uma terceira geração, onde o modelo elementar se centra em, no mínimo dois sistemas de atividade em interação.

Na figura 2, estes objetos do sistema de atividade vão de um estado bruto, sem reflexão (objeto 1) para um objeto coletivo significativo para o sistema de atividade (objeto 2), até um objeto potencialmente partilhado pelos dois sistemas de atividade (objeto 3).

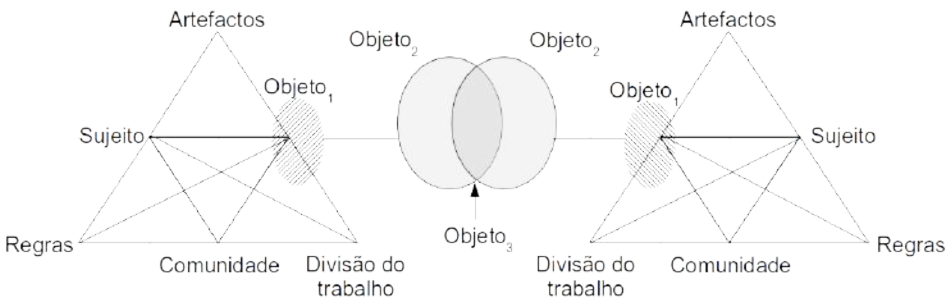


Figura 2. Modelo da 3.ª geração da Teoria da Atividade com dois sistemas de atividade a interagir (adaptado de Engeström, 2001).

O modelo do triângulo que sustenta o sistema de atividade evidencia as relações entre o *sujeito* e o *objeto* da atividade, mediado pela utilização de *artefactos*, a *comunidade* que partilha o objeto, a *divisão do trabalho* e as *regras* como o ambiente cultural e/ou institucional que medeia as relações entre o sujeito e a comunidade.

Cada elemento do sistema de atividade pode ser referenciado da seguinte forma:

- *Sujeito*, visto como o indivíduo ou o subgrupo sob o qual se obtém o ponto de vista da análise;
- *Objeto*, visto como o problema ou a parte do mundo material na qual a atividade existe de modo a obter um resultado;
- *Artefactos*, vistos como instrumentos de mediação, aqui podem ser reconhecidos como artefactos técnicos (instrumentos, calculadoras, etc.) ou artefactos psicológicos (imagens mentais, conceptualizações, etc.);
- *Comunidade*, vista como o coletivo dos sujeitos ou grupos onde se orienta a atividade em relação ao objeto;
- *Divisão do trabalho*, vista como a divisão horizontal das atividade e a divisão vertical do poder e responsabilidades; quem faz o quê na atividade em relação ao objeto;
- *Regras*, vista como a cultura partilhada do sistema de atividade com regras explícitas ou implícitas, processos, práticas culturais, normas, pontos de vista e convenções.

Um dos aspetos cruciais da Teoria da Atividade, para Engeström (1999) envolve a relação dialética, sustentada por Marx e Hegel das contradições entre os vários elementos do sistema de atividade.

Estas contradições não são vistas como um objeto vazio de conteúdo, mas sim um movimento que surge como solução das contradições internas e externas do sistema de atividade, ou no caso deste estudo, da interação entre dois sistemas. Esta relação causal é assim dialética e multidirecional.

Metodologia

Reconhecendo a dificuldade de transferir uma conceptualização teórica para a prática, o modelo de análise utiliza a conceptualização de Engeström (2001) enquanto instrumento de análise que não só conjetura mecanismos para a descrição do pensamento matemático (taxonomia SOLO), mas também inclui explicações sobre como os resultados identificados – a complexidade do pensamento matemático – podem ser analisados.

A opção metodológica pelo estudo de caso interpretativo prende-se com a necessidade de aplicação do modelo de análise a contextos reais, de forma a garantir a sua exequibilidade.

Um aspeto crucial deste modelo de análise é a proposta e utilização da Teoria da Atividade (Engeström et al, 1999) na qual se suporta a análise e descrição das respostas produzidas e sua compreensão, sustentada neste episódio por um estudo de caso (análise de três respostas – estas respostas foram selecionadas por estarem corretas e apresentarem formas diferentes de resolução - a uma pergunta de Cálculo da Probabilidade) de cariz interpretativo.

A questão analisada neste episódio faz parte integrante dos conteúdos lecionados na unidade curricular de Estatística e Probabilidades e está afeta aos módulos iniciais onde se estudam noções básicas de probabilidade, definindo a álgebra dos acontecimentos e introduz-se o cálculo, no sentido clássico, da probabilidade de um acontecimento.

Esta questão faz parte da frequência final da unidade curricular e está cotada com 20 pontos em 200 totais.

A referida questão tem o seguinte enunciado:

Os alunos de uma escola utilizam diversos meios de transporte na sua deslocação casa-escola;

- *57% utilizam o autocarro;*
- *45% utilizam o metropolitano;*
- *32% utilizam o comboio;*
- *15% utilizam o comboio e o metropolitano;*
- *17% utilizam o autocarro e o comboio;*
- *42% utilizam o autocarro mas não o metropolitano;*
- *92% utilizam ou o autocarro ou o metropolitano ou o comboio.*

Qual é a percentagem de alunos que não utiliza qualquer daqueles meios de transporte?

Este problema pressupõe que o aluno defina acontecimentos e que mobilize os conhecimentos, processos e procedimentos do cálculo de probabilidades, aplicando-os, nomeadamente na utilização dos teoremas que constam do formulário distribuído juntamente com o enunciado da frequência.

Esta questão foi analisada e identificada como possivelmente *multi-estrutural* de acordo com a taxonomia SOLO utilizada, o que indica que eram esperadas respostas contextualizadas e com dados relevantes retirados do enunciado, que fossem dadas dentro do contexto e usando aspetos relevantes e sem inconsistências utilizando dois ou mais conceitos ou dados.

Aplicação do modelo e análise dos dados

Assim, o modelo de análise baseia-se em dois sistemas de atividade (aluno e professor) e suas inter-relações de acordo com o esquema indicado nas figuras 3 e 4.

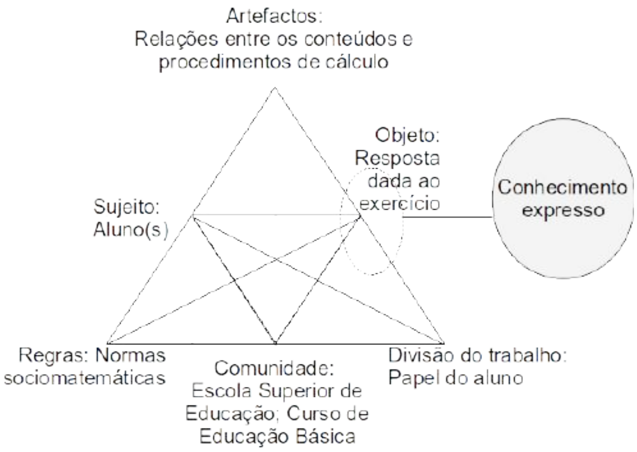


Figura 3. Representação do sistema de atividade do aluno.

Este sistema de atividade do aluno está centrado exclusivamente na resposta à questão analisada, daí que nas *regras* estejam expressas as normas sociomatemáticas do contexto, no conjunto dos *artefactos* estejam indicados os conteúdos, processos e procedimentos necessários para a resposta à mesma, já a *comunidade* e a *divisão de trabalho* são gerais e ligadas ao contexto onde o aluno está inserido.

Figura 4. Representação do sistema de atividade do professor.

O sistema de atividade do professor, estando centrado na questão analisada para este episódio acaba por ser geral dado que os elementos constantes são transversais a qualquer questão, nomeadamente os artefactos ligados ao modelo de análise.

A ligação dos dois sistema de atividade, para Engeström (2001) só faz sentido quando confrontada com as contradições da unidade de análise, as diferenças nas contradições das três respostas analisadas salientam o caráter prático da aplicação do modelo.

Na primeira resposta analisada as contradições estão relacionadas com os *artefactos* e com o *objeto* de análise (a resposta dada pelo aluno A).

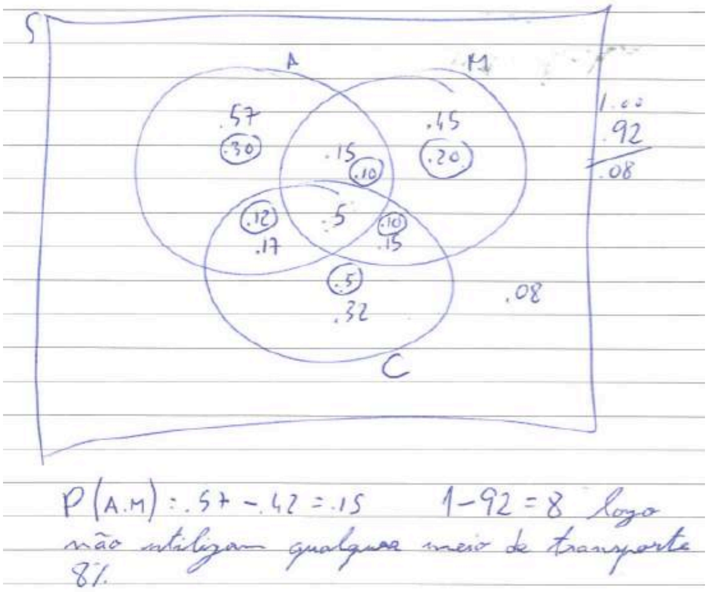


Figura 5. Resposta do aluno A, utilizando o diagrama de Venn.

O aluno A, para obter uma resposta correta, utilizou um diagrama de Venn que lhe permitiu identificar os valores em falta, e o valor necessário para a resposta. Esta estratégia gráfica apela aos conceitos aprendidos anteriormente na unidade curricular de Matemática I (1.º ano) no tópico da teoria elementar de conjuntos, ou seja, fez ligação com outras áreas o que permite identificar a resposta como de nível *relacional* (de acordo com a taxonomia SOLO) onde para além de identificar os dados relevantes, faz inter-relações com outras áreas do currículo e do conhecimento matemático.

A contradição surge na unidade de análise do aluno A entre os *artefactos* e o *objeto* (resposta dada pelo aluno) devido à utilização de outros conhecimentos matemáticos que não estão diretamente ligados, apesar de corretos, aos processos e procedimentos do cálculo da probabilidade, no sentido clássico, conferindo desta forma uma qualidade da aprendizagem que segundo Biggs e Collis (1982) vai para além de uma aprendizagem meramente operacional do tema.

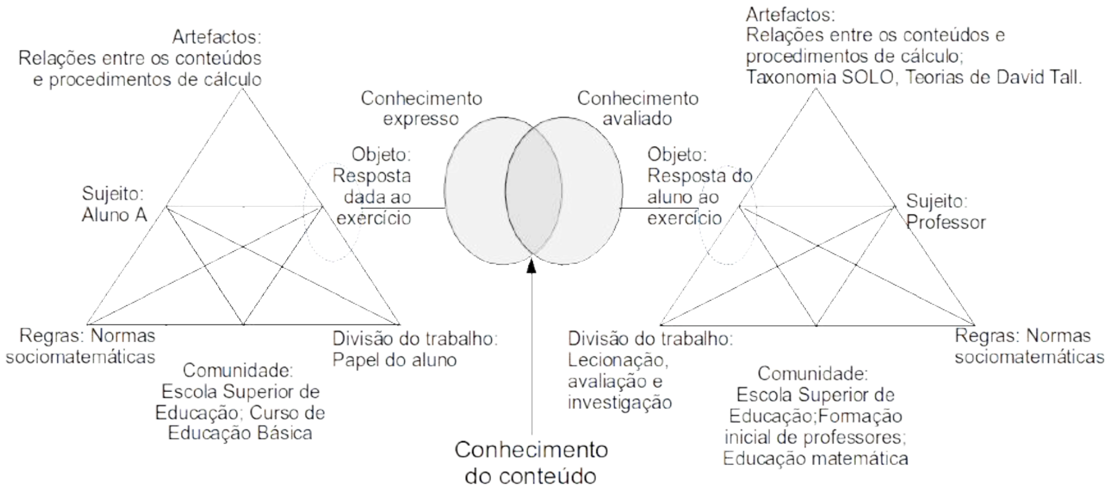


Figura 6. Contradições no sistema de atividade do aluno A.

A análise a esta resposta, seguindo as conceptualizações de Gray & Tall (1994), indica que o aluno A ultrapassou a *bifurcação proceptual* pois não se centrou exclusivamente nos conteúdos implícitos na área do tópico questionado, mesmo com a disponibilização dos teoremas em formulário (não existindo assim a necessidade de os memorizar), o que pode indiciar uma de duas situações: ou o aluno não utilizou os processos e procedimentos clássicos porque não se lembrou, ou a utilização de diagramas serve como forma de estudo preferencial deste aluno, por ter um raciocínio mais visual, e como lhe permite resolver o problema não se preocupou com os procedimentos clássicos.

Estas duas situações levantam interrogações sobre os *proceitos* envolvidos na resposta, indicando um aluno com necessidade de esquematizar o seu pensamento matemático como forma de justificar a sua resposta.

Na segunda resposta analisada não se identificam contradições nas unidades de análise pois o aluno responde exatamente como esperado.

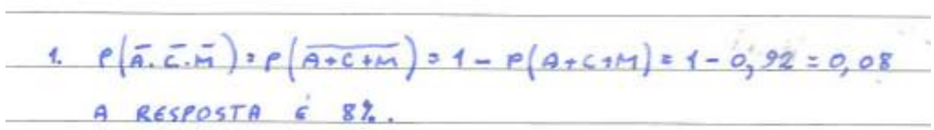


Figura 7. Resposta do aluno B, utilizando os teoremas segundo o processo clássico.

O aluno B, responde da forma considerada clássica, utilizando os teoremas estudados de forma direta, não necessitando de esquemas auxiliares, mesmo assim, a sua resposta foi classificada como potencialmente *relacional* (segundo a taxonomia SOLO).

Apesar de que, pela disponibilização dos teoremas em formulário, não ser possível identificar, pela sua resposta, se esta se deve ao domínio do tópico ou ao formulário, o que teria possivelmente alterado a sua classificação de *relacional* para *multi-estrutural*, caso esta se deva à utilização do formulário.

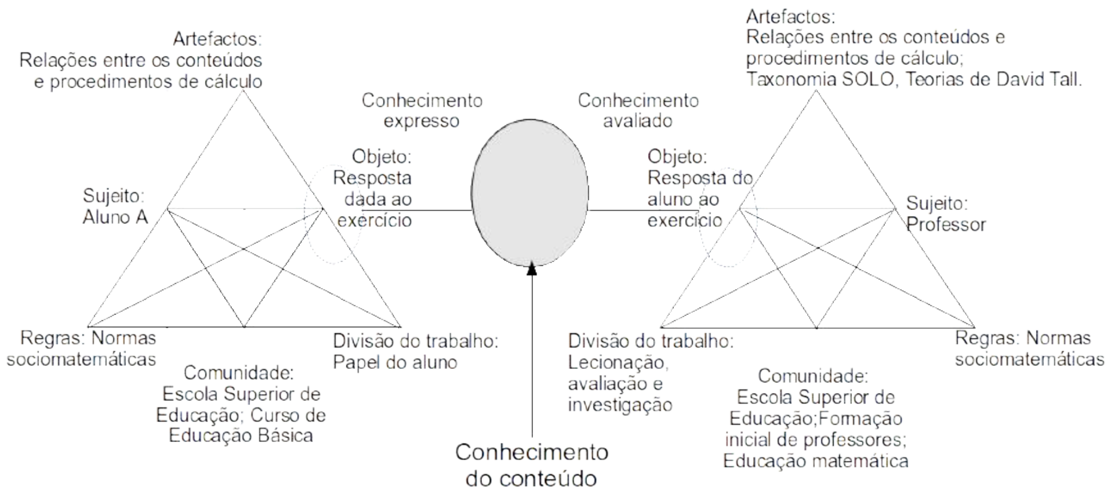


Figura 8. Sistema de atividade do aluno B, sem contradições.

Como neste caso não existem contradições, pela resposta analisada não se consegue chegar à conclusão se este aluno ultrapassou a *bifurcação proceptual*, assumindo, pela utilização dos teoremas enquanto algoritmos e estando estes disponíveis em formulário, que este aluno somente evidencia *pensamento processual*, daí a dúvida anterior entre classificar a resposta do aluno como *relacional* (ultrapassando a classificação esperada da resposta), ou como *multi-estrutural*, de acordo com a classificação esperada.

Este tipo de resposta esperada, igual ao resultado obtido, no modelo de análise levanta algumas questões, quando se pretende aferir da complexidade do pensamento matemático utilizando somente as respostas dos alunos, os *outcomes* como referem Biggs e Collis (1982) na génese da taxonomia SOLO. Principalmente quando se pretende tirar ilações para além da identificação do nível da taxonomia, o que se pretende com este modelo estudado. Assim, a principal questão levantada por este tipo de resposta é a da necessidade de obter algum *feedback* do aluno sobre a forma como respondeu.

O aluno C responde, mais uma vez corretamente, mas de uma forma diferente dos outros dois.

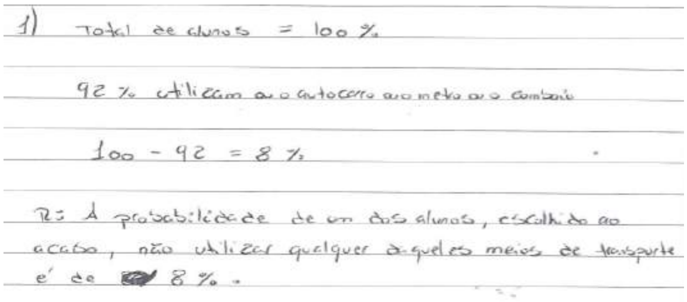


Figura 9. Resposta do aluno C, utilizando somente o raciocínio e a leitura do enunciado.

A resposta do aluno C, para além de permitir identificar o percurso do seu raciocínio, permite identificar as relações que este faz com a interpretação da pergunta e, ao contrário dos outros dois alunos analisados, não se fixa somente nos dados do enunciado completo, isolando os dados relevantes, característica de um nível *relacional*, potencialmente na fronteira com o nível *abstrato*, pois utiliza recursos de identificação de aspetos relevantes, ignorando os restantes dados.

As contradições evidenciadas pela resposta deste aluno no sistema de análise são semelhantes às identificadas no sistema de análise do aluno A, apesar da diferença entre o tipo de resposta esperada e a resposta avaliada.

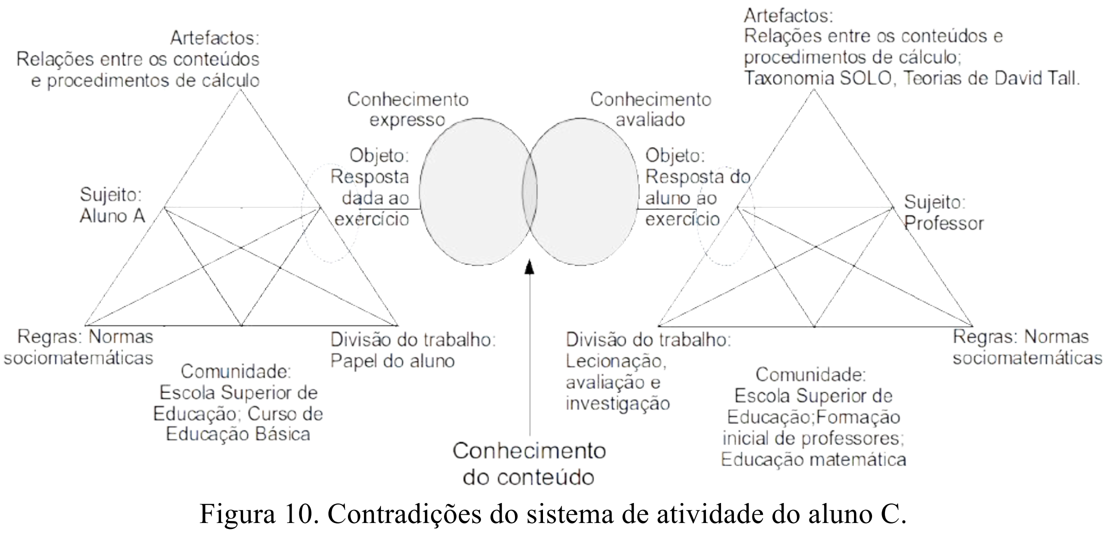


Figura 10. Contradições do sistema de atividade do aluno C.

O aluno C, ultrapassa claramente a *bifurcação proceptual*, evidenciando um raciocínio mais relacionado como *pensamento proceptual* onde, para além de evidenciar a compressão do procedimento (este procedimento segue a mesma lógica do aluno B), demonstra sinais de conhecimento significativo e derivado, pois, apesar de não responder de forma esperada, o raciocínio está correto, em termos da aferição da qualidade da aprendizagem, este aluno demonstra capacidade de relacionar vários conceitos, o que pode ser considerado como uma mais valia qualitativa em relação às duas respostas anteriores.

Este tipo de resposta levanta ainda outra questão, não tanto na aplicação do modelo de análise, mas na análise à própria avaliação em si. Apesar destas três respostas analisadas estarem todas corretas, não seria de esperar uma maior cotação da classificação para os alunos que conseguissem evidenciar raciocínios aparentemente mais complexos?

Tabela 2. Sistematização das contradições evidenciadas pelos sistemas de análise e ligação ao modelo de análise.

Sistema de atividade - aluno	Sistema de atividade - professor	Modelo de análise Nível SOLO esperado: *multi-estrutural*
Aluno A. *regras ↔ objeto* *artefacto ↔ objeto* Diagramas de Venn.	*regras ↔ objeto* *artefacto ↔ objeto* Resposta diferente do esperado.	Nível SOLO: *relacional* *Pensamento proceptual*, com evidências de conhecimento derivado.
Aluno B. *Sem contradições* Teoremas.	*Sem contradições* Resposta de acordo com o esperado.	Nível SOLO: *multi-estrutural* *Pensamento processual*, com evidências de conhecimento memorizado.
Aluno C. *regras ↔ objeto* *artefacto ↔ objeto* Texto, aritmética.	*regras ↔ objeto* *artefacto ↔ objeto* Resposta diferente do esperado.	Nível SOLO: *relacional*, potencialmente *abstrato*. *Pensamento proceptual*, com evidências de conhecimento significativo e derivado.

Considerações finais

Neste texto foram analisadas três respostas na área do Cálculo da Probabilidade colocadas a alunos da formação inicial de professores utilizando um modelo de análise baseado na complexidade do pensamento matemático e na qualidade das aprendizagens.

Partindo deste pressuposto, existe a necessidade de aferir o modelo de análise com atividades reais de modo a que se possam tecer considerações sobre os construtos teóricos e sua aplicação, para tal foi utilizado um instrumento sustentado pela teoria da atividade segundo Engeström et al (1999).

Da aplicação do modelo de análise às respostas dos alunos surgiram contradições entre as unidades de análise dos vários sistema de atividade envolvidos, que permitem elaborar algumas considerações relativas a:

- Diferentes formas dos alunos apresentarem as respostas para além do esperado pelo professor. Neste caso o aluno A respondeu recorrendo a diagramas de Venn e o aluno C recorrendo a um raciocínio identificado como pensamento proceptual denotando um raciocínio derivado.
- A forma como a questão foi colocada poderá induzir os alunos a um tipo específico de resposta, principalmente quando, é esperada a utilização de teoremas e esses teoremas são apresentados em formulário. A indução de um tipo específico de resposta pode ser visto como um fator contextual que não foi contemplado no âmbito deste texto, apesar disso, é um fator que deve ser considerado em estudos posteriores.
- Os diferentes tipos de raciocínios evidenciados pelas respostas analisadas poderão conduzir a uma classificação diferenciada, apesar de estarem todas corretas. Esta consideração está em linha com a noção de qualidade de aprendizagem suportada na fundamentação teórica (apesar de ser uma consideração a clarificar em estudos posteriores) onde a classificação possa não estar afeta somente a aspetos quantitativos (por exemplo, metas curriculares), mas também a competências matemáticas evidenciadas, independentemente do resultado obtido, desde que correto.

Este modelo sustenta-se na análise realizada às respostas escritas dos alunos numa tentativa de perceber a complexidade do seu pensamento matemático, evidencia utilidade para a avaliação e a sua aplicação não segue um protocolo extenso e complexo. A questão da qualidade das aprendizagens deve ser relevante nesta análise, onde de alguma forma poderia servir como fator de diferenciação.

Da análise à resposta do aluno B, surgem questões que não são respondidas sem que se possa aprofundar e individualizar mais algumas das vertentes do sistema de atividade.

O próximo passo na investigação passa pela necessidade de verificar a validade da análise através de entrevistas posteriores de forma a confirmar as ilações retiradas pelo modelo de análise.

Agradecimentos

Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projeto *Promover o Sucesso em Matemática* (contrato PTDC/CPE-CED/121774/2010).

Referências bibliográficas

Biggs, J., & Collis, K. (1982). *Evaluating the quality of learning*. London: Academic Press.

Ceia, M. (2002). *A taxonomia SOLO e os níveis de van Hiele*. Visualizado em http://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/2002/2002_15_MJMCeia.pdf

Engeström, Y. (2001). Expasive learning at work: toward an activity theoretical reconceptualization. *Journal of Education and Work*, 14 (1), 133-156.

Engeström, Y, Miettinen, R., & Punamäki, R-L (Eds) (1999). *Perspectives on Activity Theory*. Cambridge: Cambridge University Press.

Gray, E. (1993). Count-on: The Parting of the Ways for Simple Arithmetic. In N. Hirabayashi, K. S. Hohda & F.-L. Lin (Eds.). *Proceedings of XVII International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.I pp.204-2011), Tsukuba. Japan.

Gray, E., & Tall D. (1994). Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic. *The Journal for Research in Mathematics Education*, 25 (2), 116–140.

Niss, M. (2007). The concept and role of theory in mathematics education. In C. Bergsten, B. Grevholm, H. S. Måsøval & F. Rønning (Eds.). *Relating practice and research on mathematics education – Proceedings of NORMA05, fourth nordic conference on mathematics education* (pp. 97-110). Trondheim, Norway: Tapir Academic Press.

Tall, D. (1988). *The nature of advanced mathematical thinking, a discussion paper for PME – Hungary 1988*. Visualizado em http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1988i-nature-of-amt-pme.pdf

Utilização, uso ou integração da tecnologia: Contributo para a clarificação de um conceito

Helena Rocha
Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa,
Unidade de Investigação Educação e Desenvolvimento (UIED), hcr@fct.unl.pt

Resumo. *O reconhecimento das potencialidades da tecnologia para o ensino e aprendizagem da Matemática tem motivado diversos estudos em torno da tecnologia. Em todos eles a integração, a utilização ou o uso que é feito da tecnologia é (ou deveria ser) necessariamente um elemento importante. Neste artigo procuro ponderar as terminologias mais comuns na investigação e o significado que lhes é atribuído, partindo de uma revisão de literatura e analisando os estudos apresentados no SIEM nos últimos cinco anos. As conclusões alcançadas apontam para uma diversidade de entendimentos e para uma ausência de explicitação desses entendimentos. Ainda assim, parecem ser reconhecidos diferentes tipos de utilização da tecnologia, geralmente associados à manutenção ou alteração das anteriores práticas. O papel do professor e o assumir de uma postura mais diretiva ou mais centrada no aluno, associada a uma alteração relativamente às tarefas propostas, são igualmente referidos. Quanto à terminologia adotada, a diversidade é grande, com casos de diferenciação em função de alguns dos elementos referidos e com casos de adoção de múltiplos termos aparentemente com significados idênticos.*

Abstract. *The recognition of the potential of technology for the teaching and learning of mathematics has encouraged many studies around technology. In all these studies, the integration, the utilization or the use of technology is (or should be) necessarily an important element. In this paper I consider the most common terminologies present in research and the meaning assigned to them, based on a research review and on the analysis of the studies presented in SIEM over the last five years. The conclusions reached suggest a diversity of understandings and a lack of explicitness of these understandings. However, different types of technology use seem to be recognized, usually associated with continuity or change of practices. The teacher's role and a more directive or more student-centered approach, associated with a change in the proposed tasks, are also mentioned. In what concerns to the terminology adopted, there is great diversity, with cases of differentiation in terms of some of the elements listed and cases of adoption of multiple terms with apparently identical meanings.*

Palavras-chave: Integração; Utilização; Uso; Tecnologia.

Introdução

É amplamente reconhecido o potencial da tecnologia para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática (Hew & Brush, 2006). Apesar desse reconhecimento e do progressivo investimento que tem vindo a ser feito no sentido de equipar as escolas, a utilização que é feita da tecnologia parece ficar aquém das expectativas, justificando

Martinho, M. H., Tomás Ferreira, R. A., Boavida, A. M., & Menezes, L. (Eds.) (2014).
Atas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática. Braga: APM., pp. 141–153

plenamente o surgimento de estudos focados no uso que é feito destas (Ertmer & Ottenbreit-Leftwich, 2010). Mas o entendimento de utilização da tecnologia nem sempre é explicitado. Como realça Laborde (2001), a integração da tecnologia é largamente referida em inúmeras recomendações, em diversos currículos e até em muitos estudos de investigação, sem que seja dada atenção ao que se entende por tal. Esta ausência de clarificação relativamente ao significado dos termos utilizados e a importância de a investigação lhes dar atenção são igualmente reconhecidos por Rocha (2013), ao referir que muitos dos estudos realizados têm procurado indicar o que a integração da tecnologia deve envolver e não tanto definir essa integração de modo a que se compreenda o que caracteriza uma prática onde a integração ocorreu. Mas entre os autores que dão atenção à questão também não parece existir consenso (Hew & Brush, 2007), sendo grande a diversidade de entendimentos existente (Bebell, Russell, & O'Dwyer, 2004). E se à primeira vista este pode parecer um aspeto pouco importante, facilmente se percebe que não é bem assim, se atendermos às consequências de basear a nossa análise da utilização da tecnologia em diferentes definições. Bebell et al. (2004) ilustram bem essa importância ao contrastarem duas definições: uma onde é assumido que um professor usa tecnologia nas suas aulas se usa algumas vezes o computador com os alunos; e outra onde é considerado que um professor o faz se 90% dos alunos que ensina têm que, de algum modo e nalgum momento, usar o computador. A primeira das definições considera o uso da tecnologia em termos do uso do professor durante o processo de ensino, a segunda em termos do uso dos alunos. E basta que existam professores que façam uma utilização do computador centrada neles para que um estudo baseado numa ou noutra definição conduza a resultados diferentes.

Percebe-se assim a importância de clarificar o entendimento atribuído ao uso da tecnologia, pois fazer uma análise global do que a investigação nos permite concluir relativamente ao uso da tecnologia no ensino é algo complexo mas, acima de tudo, potencialmente enganador se não for cuidadosamente ponderada a definição de uso de tecnologia que norteou o estudo. Neste artigo procuro fazer uma análise da questão, atendendo ao panorama internacional e nacional, ao mesmo tempo que procuro contribuir para uma clarificação de entendimentos. Mais concretamente pretendo:

- identificar as terminologias utilizadas relativamente a diferentes tipos de uso da tecnologia e caracterizar o significado que lhes é atribuído;

- analisar semelhanças e diferenças, tanto ao nível da terminologia utilizada como do seu significado, entre diferentes autores;
- identificar continuidades e descontinuidades relativamente ao panorama internacional.

A integração ou o uso da tecnologia: panorama internacional

A ausência de uma definição do significado de uso da tecnologia, associada à multiplicidade de formas sob as quais os professores podem recorrer à tecnologia durante a sua atividade profissional, conduziram a uma grande diversidade de abordagens ao conceito (Bebell et al., 2004). E é neste sentido que Inan e Lowther (2010) consideram três categorias no uso da tecnologia. Numa primeira categoria, da tecnologia para a preparação do ensino, incluem o uso por parte do professor na preparação de material de ensino, na comunicação no seio da comunidade educativa, na pesquisa de recursos digitais e no desenvolvimento de planos de aula. Numa segunda categoria, da tecnologia para a implementação do processo de ensino, consideram a apresentação de informação com recurso a um projetor e a promoção de um ensino assistido por computador. Neste caso a tecnologia tanto pode ser usada pelo professor como pelos alunos. Por fim, numa terceira categoria, da tecnologia como ferramenta, incluem o uso pelo aluno de *software* que permita ampliar as suas capacidades de resolver problemas, criar produtos ou comunicar e partilhar as suas perspetivas.

Por seu turno, Russell, Bebell, O'Dwyer, & O'Connor (2003) referem-se a seis categorias do uso da tecnologia: para preparação das aulas, para a implementação das aulas, para uso dos alunos durante a aula, para apoio aos alunos, para comunicar através de *e-mail* e para registo de classificações. A estas seis categorias Bebell et al. (2004) acrescentam uma sétima, relativa ao uso da tecnologia para a criação de produtos pelos alunos. Importa referir que estas categorias não são, contudo, consideradas independentes umas das outras pelos autores. Além disso, a frequência com que a tecnologia é usada no âmbito de cada uma delas é diferenciada, sendo bastante mais raros os usos correspondentes a situações de sala de aula. Neste sentido, os autores acabam por fazer uma organização destas categorias em dois grandes grupos: o do uso que ocorre dentro da sala de aula e o do que ocorre fora desta. E concluem que as capacidades desenvolvidas pelos professores através das suas próprias experiências, através das oportunidades de desenvolvimento profissional e através da sua formação inicial, parecem estar a conduzir a um uso considerável da tecnologia fora da sala de aula, mas têm um impacto muito reduzido sobre o uso em sala de aula. Também Cuban (2001), ao ponderar a tecnologia e o ensino, faz esta distinção relativamente ao que ocorre dentro e fora da sala de aula. E esta parece ser uma divisão central, com alguns autores a procurarem formular caracterizações mais abrangentes e outros a centrarem-se exclusivamente no que ocorre na sala de aula.

Definir o que se entende por uso da tecnologia tem, no entanto, vindo a tornar-se progressivamente uma tarefa mais complexa à medida que a tecnologia evolui, aumenta em diversidade e se torna uma presença cada vez mais real no sistema educativo (Bebellet al., 2004). Ao longo dos anos têm vindo a ser propostas definições por diversos autores mas, mesmo quando nos limitamos à sala de aula, continua a não existir uma opção consensual. Cuban, Kirkpatrick, e Peck (2001), embora não explicitando uma definição, abordam a integração da tecnologia referindo-se a diferentes tipos de uso: um uso de baixo nível, por exemplo quando os alunos efetuam uma pesquisa na Internet; e um uso de alto nível, por exemplo quando os alunos recolhem e analisam dados no âmbito de um projeto. Ertmer e Ottenbreit-Leftwich (2010) também se referem a diferentes tipos de uso, apoiando-se numa análise da investigação realizada para apontar um uso de baixo nível como sendo o que mais frequentemente ocorre nas salas de aula. E os autores caracterizam este uso como aquele que suporta um ensino tradicional, baseado no ensino direto pelo professor, ou que se foca no desenvolvimento da mecanização por parte dos alunos. Enquadram assim este tipo de uso na intenção de facilitar a aprendizagem dos alunos e, consequentemente, envolvendo a realização de trabalhos ou a execução de tarefas para permitir a prática sobre os conteúdos em estudo.

Hennessy, Ruthven, e Brindley (2005) analisam a integração da tecnologia em termos da forma como os professores a usam para realizar atividades familiares de forma segura e eficiente (por exemplo, recorrendo à tecnologia para realizar cálculos) e do modo como esse uso pode redefinir essas atividades (por exemplo, permitindo a realização de tarefas exploratórias). Lim et al. (2003) consideram a integração da tecnologia em termos do uso que os professores fazem dela para desenvolver nos alunos o raciocínio e a capacidade de refletir (um uso focado na resolução de problemas e na exploração de situações). Ian e Lowther (2010) definem integração da tecnologia como a atividade do professor que compreende qualquer tipo de uso do computador, desde que este seja usado ou suporte o processo de ensino. Griffin (2003) define a integração da tecnologia como o uso intencional desta na concretização da implementação do currículo. Para esta autora, a integração da tecnologia é, assim, a incorporação, na rotina diária, da tecnologia e de práticas apoiadas nesta. Hew e Brush (2007) consideram, por seu turno, a integração da tecnologia como o uso de computadores, calculadoras ou outros aparelhos similares, ou ainda o uso de *software* ou da Internet nas escolas, com o propósito de ensinar. Bebell, Russell e O'Dwyer (2004) reconhecem a diversidade de entendimentos existente e consideram a integração como o uso que os professores fazem da tecnologia na sala de aula.

Assim, parece poder concluir-se que os termos integração da tecnologia e uso da tecnologia são ambos bastante usados. Para alguns autores parece não existir verdadeiramente uma distinção entre as duas designações, embora muito poucos assumam como Ian e Lowther (2010) que atribuem o mesmo significado a integração da tecnologia e a uso da tecnologia. Para outros, como Bebell et al. (2004, p. 46), parecem não ter exatamente o mesmo significado, pois referem-se à "integração e uso da tecnologia" sem, no entanto, aludirem às diferenças. Para muitos autores, integração e uso parecem estar relacionados, com a integração a corresponder a determinado tipo de uso. E talvez seja nesta linha, e com a intenção de tentar evitar algumas ambiguidades, que surgem também algumas referências a uma integração especial.

É o caso de autores como Angeli e Valanides (2009) e Ertmer e Ottenbreit-Leftwich (2010), que fazem referência a uma integração significativa ou efetiva da tecnologia, onde destacam aspetos do conhecimento do professor relativamente à tecnologia e à relação entre esta e os conteúdos a ensinar. Ertmer e Ottenbreit-Leftwich (2010) consideram que ainda não foram alcançados altos níveis de uso efetivo da tecnologia nas salas de aula, mas que esse uso tem necessariamente que ter por base o tipo de ensino que se crê ser o mais poderoso para promover a aprendizagem dos alunos: um ensino-aprendizagem centrado no aluno. Também Summak, Samancioğlu, e Bağlibel (2010) referem uma definição de integração efetiva da tecnologia apresentada por Protheroe (2005) e caracterizada pelo uso da tecnologia para proporcionar oportunidades de aprendizagem baseadas em perspetivas colaborativas e construtivistas. Laborde (2001), embora mencionando apenas a integração da tecnologia, parece considerar também uma integração efetiva desta. Refere-se-lhe como um estabelecer de ligações entre a Matemática e a tecnologia que se reforçam mutuamente. Nas palavras da própria autora, a integração ocorre quando "a tecnologia dá um significado à Matemática e a Matemática justifica o uso da tecnologia" (p. 316).

A integração, a utilização ou o uso da tecnologia: abordagem no SIEM

A abordagem

Podendo o SIEM ser considerado como um dos mais importantes encontros nacionais no âmbito da educação matemática, pareceu-me adequado considerar os textos publicados nas atas nos últimos cinco anos como o campo da análise a que me propus.

Tendo em vista a identificação dos artigos que abordam a tecnologia no ensino da Matemática, adoptei uma metodologia análoga à preconizada por Hew e Brush (2006) e realizei um processo de seleção organizado em duas fases com critérios progressivamente mais específicos. Assim, na primeira fase procedi a uma leitura do título, do resumo e das palavras-chave de todos os artigos. Deste modo obtive um primeiro conjunto de artigos onde incluí todos os que tinham alguma referência à tecnologia. A este conjunto acrescentei ainda os artigos que identifiquei através de uma pesquisa pelas palavras *tecnologia*, *computador*, *calculadora*, *software* e *tic*. Na segunda fase realizei uma leitura integral dos textos e excluí aqueles que explícita ou implicitamente não apresentavam um entendimento sobre a utilização da tecnologia no ensino da Matemática. Este processo permitiu identificar 15 artigos (ver quadro 1), que foram depois analisados em função de:

- terminologia utilizada (utilização, uso, integração ou outra);
- refinamento de terminologia (utilização e utilização significativa, por exemplo);
- e uso de mais de uma terminologia (com significados análogos ou distintos).

Estas categorias de análise foram inferidas a partir dos próprios dados, depois das categorias desenvolvidas inicialmente e baseadas na revisão de literatura (utilização dentro ou fora da sala de aula, definição explícita ou implícita do significado atribuído ao termo adoptado) se terem revelado inadequadas em virtude de praticamente todos os artigos se referirem a utilização na sala de aula (apenas o projeto Problem@web considera a tecnologia fora da sala de aula, mas mesmo assim foca-se no uso dos alunos) e fazerem uma caracterização implícita do termo que adotam (apenas um artigo explicita o entendimento).

Quadro 1. Artigos do SIEM

Fase 1						Fase 2					
Artigos escolhidos por pesquisa por palavras em todo o texto e/ou por leitura do resumo e palavras-chave	2009	2010	2011	2012	2013	Artigos escolhidos por leitura integral do texto	2009	2010	2011	2012	2013
	11	16	20	22	16		1	4	4	2	4
Total	85						15				

A tecnologia no SIEM: um olhar de 2009 a 2013

Referências à integração, à utilização e ao uso da tecnologia são bastante comuns nos artigos com enfoque na tecnologia apresentados no SIEM, independentemente da investigação se centrar nos alunos ou no professor e do contexto de estudo se situar dentro ou fora da sala de aula. Esta não é, contudo, uma referência presente em todos os artigos onde a tecnologia é abordada e, nos casos em que surge, por norma não assume a forma de uma caracterização explícita. As ideias aqui apresentadas foram, assim, fundamentalmente inferidas a partir das ideias expressas pelos autores.

Jacinto e Carreira (2013) são as únicas autoras que se referem explicitamente ao significado da integração da tecnologia. Num estudo sobre a literacia tecno-matemática dos alunos na resolução de problemas no âmbito da geometria, caracterizam a integração da tecnologia como o aliar de “diferentes recursos digitais de forma a encontrar uma combinação relevante para o problema / tarefa” (p. 525).

Segundo Paiva, Amado, e Carreira (2013), “a integração das tecnologias no processo de ensino e aprendizagem faz emergir novas formas de *feedback* em sala de aula” (p. 101), sendo particularmente relevantes as que ocorrem entre alunos e entre estes e o computador no decorrer da resolução das tarefas. Rocha (2011) alude igualmente a algumas possíveis mudanças, na sequência da integração da calculadora gráfica, ao nível das propostas de trabalho apresentadas aos alunos. Na mesma linha de ideias, Abar e Alencar (2011) falam de alterações na conceção dos recursos por forma a tirar partido das potencialidades da tecnologia, referindo que "a integração das novas tecnologias no ensino de matemática causa um desequilíbrio no processo de ensino e aprendizagem existente, requerendo, portanto, novas adaptações, tanto dos professores como dos alunos" (p. 2). Um ponto de vista que Henriques e Nascimento (2013) levam um pouco mais além, ao afirmar que a integração da tecnologia pode mudar "gradualmente o conteúdo – o que se ensina – e a pedagogia – como se ensina" (p. 118).

Reforçando igualmente a ideia de mudança associada à tecnologia, mas referindo-se ao seu uso, Oliveira e Araújo (2011) afirmam que "o uso das tecnologias não significa a simples transposição das aulas tradicionais para o computador, mas expressa uma mudança na forma de ensinar, representando uma forma de estimular o aluno a ganhar autonomia, avançando desde a perspectiva de um simples executor de tarefas automatizadas, para a de alguém que aprende a aprender" (p. 3). E os autores abordam também o papel do professor, referindo que este deve assumir uma postura diferenciada de modo a que possa tirar partido das potencialidades da tecnologia. Considerando também o uso da tecnologia e falando especificamente sobre a calculadora gráfica, Magalhães e Martinho (2010) referem que o uso desta altera "a natureza dos problemas importantes para a disciplina e os métodos usados na investigação desses mesmos problemas pois [permite] uma ampliação e diversificação das mesmas. As calculadoras alteram o tipo de tarefas, questões e estratégias de ensino e aprendizagem a desenvolver dentro da sala de aula" (p. 160). Uma ideia semelhante à preconizada por Araújo, Dias, Mesquita, e Faria (2010), que associam o uso da tecnologia a "mudanças na produção de materiais didáticos e nas metodologias de ensino-aprendizagem" (p. 559).

Canário, Amado, e Carreira (2011) referem-se à utilização da tecnologia afirmando que esta vem "permitir investir em conhecimentos e capacidades de nível superior, tais como, saber interpretar um gráfico, fazer conjecturas, ser capaz de relacionar conceitos e utilizá-los, saber analisar criticamente os resultados obtidos, investigar, ser versátil em representações matemáticas diversas" (p. 3). Adotando uma terminologia e uma abordagem um pouco diferente, Jacinto e Carreira (2013) afirmam que "os processos mediados pelas tecnologias conduzem a uma reorganização da mente humana" (p. 514), pelo que os processos de pensamento, de raciocínio e de comunicação serão necessariamente reorganizados na presença de tecnologias (Jacinto & Carreira, 2010). Como ilustram as autoras (Jacinto & Carreira, 2013), "o conhecimento matemático produzido por humanos-com-papel-e-lápis é qualitativamente diferente daquele que é produzido por humanos-com-GeoGebra", consequentemente "a introdução de uma ferramenta no sistema humanos com-media impele modificações ao nível da atividade" (p. 513). Oliveira e Araújo (2011) usam igualmente uma terminologia um pouco diferente, falando em sucesso do emprego das tecnologias, algo que consideram ocorrer quando são estabelecidas as estratégias apropriadas para o desenvolvimento cognitivo do aluno, o que requer um aperfeiçoamento das práticas de ensino por parte do professor.

Rocha (2010) refere-se à integração e à utilização da tecnologia, não atribuindo contudo o mesmo significado aos dois termos. A autora menciona a dificuldade inerente à integração da tecnologia, ao mesmo tempo que alude ao facto de a utilização da tecnologia não implicar necessariamente alterações nas práticas dos professores. Parece, pois, que a integração será algo mais complexo que a utilização ou, por outras palavras, uma utilização mais sofisticada da tecnologia que envolverá uma alteração das práticas do professor. Rocha (2010) acrescenta que a integração da tecnologia exige novos conhecimentos ao professor, distinguindo entre integração efetiva ou plena da tecnologia e acomodação da tecnologia, em função do professor alterar ou não as suas práticas e em função de explorar ou não as novas potencialidades disponibilizadas pela tecnologia e amplamente divulgadas na literatura dedicada à temática. Rocha (2011) reconhece assim a existência de diferentes utilizações da tecnologia, enfatizando o impacto do conhecimento profissional do professor nessa diversidade, sem negligenciar a influência sobre este de aspetos como a experiência profissional e a formação realizada (Rocha, 2012).

Saraiva e Branco (2012) referem-se à integração e ao uso da tecnologia afirmando que "no ensino da Álgebra é, ainda, fundamental integrar a tecnologia e estudar o seu uso com vista à promoção da aprendizagem" (p. 261). Os autores parecem, pois, atribuir significados diferentes aos dois termos, sugerindo que existe um tipo de uso que ocorre quando a tecnologia está integrada. Além disso, consideram claramente diferentes tipos de uso da tecnologia, aludindo ao que ocorre quando a tecnologia é "usada para confirmar os resultados já obtidos com métodos tradicionais" (p. 261) e ao que ocorre quando esta é usada "como instrumento de exploração de novas relações" (p. 261).

Romano e Ponte (2009) consideram a utilização, a integração e o uso da calculadora gráfica de forma aparentemente indiferenciada. Independentemente da designação, os autores consideram que a utilização/integração/uso da calculadora gráfica pode ocorrer de forma diferenciada, existindo casos de "professores para quem a integração da calculadora gráfica nas suas práticas profissionais contribui para a transformação dessas mesmas práticas" (p. 539) e casos de "professores cujas práticas lectivas assimilam a calculadora, sem que isso se traduza numa transformação dessas práticas" (p. 539). Apesar de admitirem esta diferenciação, que atribuem às diferentes conceções dos professores, os autores parecem considerar que a utilização/integração/uso da calculadora gráfica se deveria traduzir numa "mudança de objectivos, tarefas ou práticas lectivas" (p. 531), uma vez que "o uso da tecnologia como suporte do que se ensina requer alterações na Matemática que se quer ensinar, incitando a mudanças das metodologias, estratégias e práticas profissionais dos professores" (p. 532).

Conclusão

A análise dos artigos apresentados no SIEM nos últimos cinco anos sugere fortes pontos de contacto com a realidade internacional. Neste sentido, prevalece um recurso a múltiplas designações, sendo integração, utilização e uso as mais comuns, e um desinvestimento generalizado na sua caracterização. Entre os autores que implicitamente avançam alguns elementos para uma caracterização do conceito é possível identificar uma diferença de significados, com casos de autores que usam mais de uma das designações como sinónimos (como Romano & Ponte, 2009) e casos de autores que lhes atribuem significados diferentes (como Saraiva & Branco, 2012). Globalmente, parece existir o entendimento de que nem todo o uso/utilização/integração da tecnologia será igual. Prevalece, assim, por um lado, a ideia de uma assimilação da tecnologia sem originar mudanças de práticas, o que ocorre com professores que assumem uma postura diretiva, que se enquadra no que geralmente é designado por um ensino tradicional (como em Romano & Ponte, 2009). E, por outro lado, a ideia de uma integração da tecnologia que provoca um desequilíbrio relativamente às práticas até então existentes, requerendo novas adaptações, tanto do professor como dos alunos, e envolvendo mudanças ao nível das propostas de trabalho, das estratégias de ensino e de aprendizagem e até da Matemática que é abordada (como em Magalhães & Martinho, 2010).

Em termos terminológicos, e relativamente aos autores que os diferenciam, uma das opções parece passar pela adoção de utilização ou uso, no primeiro caso, e por integração, no segundo caso (como Saraiva & Branco, 2012). Outros autores optam por adicionar ao termo que geralmente usam para o primeiro caso a expressão significativa, plena ou efetiva ao referirem-se ao segundo caso (como Rocha, 2011). É ainda curioso notar uma maior diversidade de terminologias nos estudos nacionais (utilização/uso/integração) comparativamente com os internacionais (uso/integração), um aspeto que poderá eventualmente dever-se apenas a questões linguísticas.

Esta análise permite ainda evidenciar a falta de interesse que as questões mais formais em torno da integração da tecnologia têm suscitado, apesar do número significativo de autores que se dedicam às questões da tecnologia no ensino e aprendizagem da Matemática. E esta é uma questão que precisa de ser alvo de atenção em estudos futuros, pelo contributo que uma explicitação de significado pode trazer a um conhecimento mais profundo sobre a forma como a tecnologia surge ou poderia surgir no processo de ensino e aprendizagem. Como referem Bebell et al. (2004), apesar do nosso desejo de estudar o contributo que a tecnologia pode trazer à aprendizagem dos nossos alunos, esse estudo só pode ser realizado tendo em conta o contexto em que alunos e professores usam a tecnologia e, para tal, é necessário ter um entendimento claro de como a tecnologia está a ser usada e, consequentemente, do que entendemos por uso (ou utilização ou integração) da tecnologia.

Referências bibliográficas

Abar, C., & Alencar, S. (2011). A génese instrumental em propostas de actividades com o uso do GeoGebra. In *Actas do XXII SIEM* (S6.01, pp. 1-13). Lisboa: APM.

Angeli, C., & Valanides, N. (2009). Epistemological and methodological issues for the conceptualization, development, and assessment of ICT-TPCK: Advances in technological pedagogical content knowledge (TPCK). *Computers & Education*, *52*, 154-168.

Araújo, I., Dias, S., Mesquita, T., & Faria, P. (2010). M@t-educar com sucesso – Uma plataforma de aprendizagem. In H. Gomes, L. Menezes & I. Cabrita (Org.), *Actas do XXI SIEM* (pp. 557-571). Aveiro: APM.

Bebell, D., Russell, M., & O'Dwyer, L. (2004). Measuring teachers' technology uses: Why multiple-measures are more revealing. *Journal of Research on Technology in Education*, *37*(1), 45-63.

Canário, F., Amado, N., & Carreira, S. (2011). O GeoGebra na construção de modelos matemáticos: Uma experiência no estudo da variação linear. In *Actas do XXII SIEM* (S6.12, pp. 1-13). Lisboa: APM.

Cuban, L. (2001). *Oversold & underused: Computers in the classroom*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Cuban, L., Kirkpatrick, H., & Peck, C. (2001). High access and low use of technologies in high school classrooms: Explaining an apparent paradox. *American Educational Research Journal*, *38*(4), 813-834.

Ertmer, P., & Ottenbreit-Leftwich, A. (2010). Teacher technology change: How knowledge, confidence, beliefs, and culture intersect. *Journal of Research on Technology in Education*, *42*(3), 255-284.

Griffin, D. (2003). *Educators' technology level of use and methods for learning technology integration* (Tese de doutoramento). University of North Texas.

Hennessy, S., Ruthven, K., & Brindley, S. (2005). Teacher perspectives on integrating ICT into subject teaching: Commitment, constrains, caution and change. *Journal of Curriculum Studies*, *37*(2), 155-192.

Henriques, A., & Nascimento, M. (2013). Ensino e aprendizagem de probabilidades e estatística. In J. A. Fernandes, M. H. Martinho, J. Tinoco & F. Viseu (Org.), *Actas do XXIV SIEM* (pp. 117-126). Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

Hew, K., & Brush, T. (2007). Integrating technology into K-12 teaching and learning: Current knowledge gaps and recommendations for future research. *Education Tech Research Dev*, *55*, 223-252.

Inan, F., & Lowther, D. (2010). Factors affecting technology integration in K-12 classrooms: A path model. *Education Tech Research Dev*, *58,* 137-154.

Jacinto, H., & Carreira, S. (2010). As TIC como artefacto mediador da resolução de problemas de Matemática. In H. Gomes, L. Menezes & I. Cabrita (Org.), *Actas do XXI SIEM* (pp. 401-413). Aveiro: APM.

Jacinto, H., & Carreira, S. (2013). "Ah, boa! Geometria! Vou pôr isto tudo direitinho." – Literacia tecno-matemática na resolução de problemas com o GeoGebra. In J. A. Fernandes, M. H. Martinho, J. Tinoco & F. Viseu (Org.), *Actas do XXIV SIEM* (pp. 513-528). Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

Laborde, C. (2001). Integration of technology in design of geometry tasks with Cabri-geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *6*, 283-317.

Lim, C., Teo, Y., Wong, P., Khine, M., Chai, C. & Divaharan, S. (2003). Creating a conductive learning environment for the effective integration of ICT: Classroom management issues. *Journal of Interactive Learning Research*, *14*(4), 405-423.

Magalhães, M. G., & Martinho, M. H. (2010). A argumentação matemática na resolução de tarefas com a utilização da calculadora gráfica: Uma experiência numa turma do 11.º ano. In H. Gomes, L. Menezes & I. Cabrita (Org.), *Actas do XXI SIEM* (pp. 156-171). Aveiro: APM.

Oliveira, G., & Araújo, P. (2011). Lugares geométricos: Uma abordagem com o *software* GeoGebra. In *Actas do XXII SIEM* (S6.03, pp. 1-13). Lisboa: APM.

Paiva, J., Amado, N., & Carreira, S. (2013). O *feedback* no contexto do trabalho entre alunos com o GeoGebra. In J. A. Fernandes, M. H. Martinho, J. Tinoco & F. Viseu (Org.), *Actas do XXIV SIEM* (pp. 99-114). Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

Protheroe, N. (2005). Technology and student achievement. *Principal*, *85*, 46-48.

Rocha (2010). O conhecimento para ensinar Matemática com a tecnologia. In H. Gomes, L. Menezes & I. Cabrita (Org.), *Actas do XXI SIEM* (pp. 72-83). Aveiro: APM.

Rocha (2012). O recurso a diferentes representações no ensino das funções com o apoio da tecnologia. In H. Pinto, H. Jacinto, A. Henriques, A. Silvestre & C. Nunes (Org.), *Actas do XXIII SIEM* (pp. 365-376). Coimbra: APM.

Rocha, H. (2011). A prática profissional num contexto de utilização da calculadora gráfica. In *Actas do XXII SIEM* (S5.09, pp. 1-17). Lisboa: APM.

Rocha, H. (2013). A janela de visualização da calculadora gráfica nas propostas de trabalho de uma professora de Matemática. In J. A. Fernandes, M. H. Martinho, J. Tinoco & F. Viseu

(Org.), *Actas do XXIV SIEM* (pp. 373-384). Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

Romano, E., & Ponte, J. (2009). A calculadora gráfica nas práticas dos professores de Matemática do 12.º ano. In J. A. Fernandes, M. H. Martinho & F. Viseu (Org.), *Actas do XX SIEM* (pp. 531-540). Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

Russell, M., Bebell, D., O'Dwyer, L., & O'Connor, K. (2003). Examining teacher technology use: Implications for preservice and inservice teacher preparation. *Journal of Teacher Education*, *54*, 297-310.

Saraiva, M., & Branco, N. (2012). Álgebra e pensamento algébrico. In H. Pinto, H. Jacinto, A. Henriques, A. Silvestre & C. Nunes (Org.), *Actas do XXIII SIEM* (pp. 261-268). Coimbra: APM.

Summak, M., Samancioğlu, M., & Bağlibel, M. (2010). Technology integration and assessment in educational settings. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, *2*, 1725-1729.

Formação de professores do 1.º e 2.º ciclos: Articulando contextos de formação e de prática

João Pedro da Ponte[1]*, Joana Mata-Pereira*[2]*, Marisa Quaresma*[3]*, Isabel Velez*[4]
[1,2,3,4]Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
[1]jpponte@ie.ul.pt, [2]joanamatapereira@campus.ul.pt, [3]mq@campus.ul.pt, [4]velez@campus.ul.pt

Resumo. *Esta comunicação incide sobre um processo de formação, conduzido numa perspetiva curricular de ensino exploratório, que valorizou a orientação para a prática e a reflexão coletiva entre os formandos, professores do 1.º e 2.º ciclos. O seu objetivo é analisar as mudanças que os professores referem ter sentido nas suas perspetivas e práticas de ensino e o modo como avaliam a formação realizada. O estudo constitui uma (auto)avaliação tendo por base registos em diário de bordo, um questionário de resposta aberta e entrevistas. Os resultados mostram que, como consequência do trabalho realizado, os professores passaram a valorizar o ensino exploratório, as discussões coletivas e a assumir uma expectativa elevada sobre as capacidades dos alunos. Relativamente à formação destacam a ligação com a sua prática e os momentos de partilha de experiências.*

Abstract. *This communication focuses on a professional development process framed by an exploratory curricular perspective which valued the orientation towards practice and collective reflection among learners, teachers from 1st and 2nd cycles. Our goal is to analyze the changes that teachers refer to have felt in their perspectives and teaching practices as well as how they evaluate the work carried out. The study constitutes a (self) evaluation based on a researcher's journal, an open response questionnaire and interviews. The results show that the participants came to enhance exploratory learning, collective discussions and to assume a high expectation on the abilities of students. Concerning the work carried out, the participants highlight the connection with their practice and the moments of sharing experiences.*

Palavras-chave: Formação contínua; Números e Álgebra; Tarefas; Discussão coletiva; Teoria-Prática.

Introdução

As orientações curriculares internacionais para o ensino da Matemática colocam um sério desafio aos professores. Em particular, tem vindo a afirmar-se cada vez mais o valor de uma abordagem exploratória no ensino da Matemática (Ponte, 2005) que representa um corte com a tradição em que o professor apresenta tarefas para as quais os alunos já dispõem de um método de resolução, anteriormente ensinado. Neste caso, o professor primeiro apresenta o método e depois dá tarefas que proporcionam aos alunos oportunidades para o praticar. No caso das tarefas de cunho exploratório, os alunos têm de construir os seus próprios métodos para resolver as questões propostas, usando os seus conhecimentos prévios. O trabalho de cunho exploratório cria oportunidades para os alunos construírem e aprofundarem a sua compreensão de conceitos, procedimentos, representações e ideias matemáticas. Os alunos são assim chamados a desempenhar um papel ativo na interpretação das questões propostas, na representação das informações dadas e na conceção e concretização de estratégias de resolução, que devem ser capazes de apresentar e justificar aos colegas e ao professor.

As perspetivas atuais sobre a formação de professores, nomeadamente dos professores em serviço, enfatizam o valor da investigação pelo próprio professor (Llinares & Krainer, 2006) e salientam a importância da mobilização de situações de prática, tanto quanto possível situações autênticas (Smith, 2001). Esta comunicação debruça-se sobre uma oficina de formação com estas caraterísticas, que envolveu professores dos 1.º e 2.º ciclos, sobre o ensino dos temas de números e álgebra, numa perspetiva exploratória. O nosso objetivo é analisar as mudanças que os professores referem ter sentido nas suas perspetivas e práticas de ensino destes temas, bem como o modo como avaliam o trabalho de formação realizado.

Prática profissional e processos de formação

A prática profissional do professor pode ser caraterizada por dois aspetos fundamentais: as tarefas propostas aos alunos e a comunicação que se estabelece na sala de aula (Ponte, Branco, Quaresma, Velez, & Mata-Pereira, 2012). No que respeita às tarefas, o professor pode propor exercícios onde os alunos tenham de empregar os métodos de resolução anteriormente aprendidos ou tarefas mais desafiantes como problemas, explorações e investigações, nas quais os alunos têm que conceber e concretizar estratégias de resolução a partir dos seus conhecimentos prévios (Ponte, 2005). Pelo seu lado, a comunicação que se estabelece na sala de aula pode assumir um caráter sobretudo unívoco, que se processa essencialmente num só sentido, com uma voz (a do professor) dominando todas as outras, ou um caráter dialógico, se existe um relativo equilíbrio de vozes, tendo os alunos possibilidade de participar de modo significativo na aula e ter iniciativas de intervenção no discurso (Brendefur & Frykholm, 2000).

Sobretudo a partir da introdução do *Programa de Matemática do Ensino Básico* (Ministério da Educação, 2007), as discussões coletivas têm vindo a ganhar um interesse crescente no nosso país como momento de trabalho particularmente produtivo na sala de aula. Relativamente à atuação do professor na preparação destas discussões, Stein, Engle, Smith, e Hughes (2008) salientam a importância de uma boa preparação, propondo quatro "práticas" para o efeito: antecipar, monitorizar, selecionar e sequenciar. No que respeita à condução das discussões propriamente ditas, estes autores sublinham a importância do estabelecimento de conexões. Pelo seu lado, na condução das discussões, Wood (1999) destaca sobretudo a importância da exploração de desacordos entre os alunos, enquanto Sherin (2002) aponta a necessidade do professor manter o equilíbrio entre promover a participação dos alunos no discurso matemático e promover a abordagem de assuntos matemáticos importantes.

Na formação de professores predominam os processos centrados nos conteúdos de formação, aquilo que Lesne (1984) considera o modo de trabalho pedagógico de "tipo transmissivo". Isso acontece, sobretudo, quando não se presta a necessária atenção ao modo como os formandos aprendem. Em alternativa, outras perspetivas em relação à formação de professores sugerem que esta deve proporcionar a oportunidade para estes desenvolverem o seu conhecimento por processos mais próximos do trabalho de cunho exploratório ou investigativo. Para isso, na formação, os professores devem trabalhar com artefactos próprios da prática de ensino da Matemática – tarefas, materiais didáticos, representações de situações na sala de aula em transcrições de diálogos ou em registos vídeo, resoluções de problemas realizadas por alunos, etc. (Smith, 2001).

Como mostram Loucks-Horsley, Hewson, Love, e Stiles (1998), a conceção de um processo de formação de professores é essencialmente uma questão de *design*. É preciso saber quem são os participantes, quais os objetivos definidos para a formação, quais os processos formativos que se irão privilegiar, que recursos e materiais se podem mobilizar, que obstáculos é provável encontrar e como se irão ultrapassar. É também fundamental saber que necessidades de formação sentem os participantes e que investimento estão dispostos a fazer. Entre todos estes aspetos, a questão da relação dos processos formativos com os conhecimentos prévios, as necessidades e a disponibilidade dos participantes sobressai como essencial. Na verdade, faz uma grande diferença proporcionar aos professores a possibilidade de aprenderem através da experimentação, reflexão e discussão sobre as suas próprias experiências de trabalho com alunos em sala de aula ou por processos distanciados das suas práticas. No entanto, é preciso ter em atenção que os processos formativos mais significativos são também os que requerem maior disponibilidade e investimento pessoal por parte do professor. Por isso, para cada condição concreta é preciso construir processos formativos adequados.

A oficina

A oficina decorreu de janeiro a maio de 2013 em 8 sessões de cerca de três horas (a última sessão teve quatro horas) em horário pós-laboral, com uma frequência aproximadamente quinzenal. Os participantes eram 19 professores, dos quais 16 do 1.º ciclo e 3 do 2.º ciclo. Um número significativo destes professores tinha participado anteriormente no Programa de Formação Contínua para professores dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico (Serrazina, 2013), que decorreu de 2006 a 2011.

Em cada sessão, alternaram-se momentos de apresentação de ideias e informações relevantes por parte da equipa de formadores com trabalho prático por parte dos professores, na sequência dessas apresentações (em pares ou trios), e, finalmente momentos de discussão coletiva. No final das sessões 1, 3, 5 e 7 foram propostas tarefas relacionadas com o tema nelas trabalhado que os professores adaptaram aos seus alunos (que iam do 1.º ao 6.º ano de escolaridade) e propuseram nas suas aulas. Nas sessões 2, 4, 6 e 8, num momento de discussão coletiva, os professores relataram os aspetos que consideraram mais salientes do trabalho que teve lugar nas suas turmas, interpelando-se uns aos outros e respondendo a questões colocadas pelos formadores. Em quase todas as sessões (sessões 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8) os professores realizaram explorações matemáticas, tendo oportunidade de trabalhar em pares ou trios em tarefas semelhantes às que poderiam propor aos alunos e de apresentar depois as suas estratégias e soluções, durante a discussão coletiva. Em quatro sessões os formandos analisaram respostas dadas pelos alunos a tarefas matemáticas (3, 4, 5, 7) e em três tiveram oportunidade de observar em vídeo e discutir a condução, por parte do professor, da atividade na sala de aula (1, 6, 8), alternando o trabalho em pares ou trios com a discussão coletiva. Algumas sessões (em especial a 2) deram bastante atenção à discussão de documentos curriculares, materiais de apoio e manuais escolares. Houve um forte paralelismo entre as situações de trabalho nas sessões de formação e as propostas feitas para a prática profissional: em ambos os casos se propunham tarefas para trabalhar, havia momentos de trabalho autónomo e momentos de discussão coletiva, procurava-se valorizar as estratégias e soluções dos alunos, prestando atenção aos conceitos e representações matemáticas e também à comunicação e ao raciocínio. Um resumo dos assuntos trabalhados na oficina encontra-se na Tabela 1.

Tabela 1. Temas e atividades da formação

Sessão	Assuntos trabalhados	Principais atividades realizadas
1	Apresentação da Oficina e modo de trabalho; Orientações curriculares atuais; Organização da aula a partir de tarefas.	Resolução de uma tarefa (sequência crescente) e sua discussão. Observação de vídeo e momento de discussão. Proposta de tarefa a realizar com os alunos.
2	Documentos curriculares e recursos para o professor.	Análise de documentos curriculares portugueses e internacionais sobre os tópicos (Adição e divisão de números naturais, Sequências, Números racionais e adição de números racionais). Análise dos documentos de apoio (brochuras, etc.). Discussão da Tarefa realizada nas aulas.
3	Sequências.	Análise do Programa, das Metas, e da Brochura da Álgebra sobre Sequências. Realização de uma tarefa sobre sequências (Exploração com números). Análise do trabalho dos alunos em duas tarefas de sequências. Proposta de tarefa a realizar com os alunos.
4	Números naturais e algoritmos.	Pesquisa de materiais na Internet. Realização de uma tarefa matemática – Cálculo mental (com discussão de estratégias [decomposição, compensação, algoritmo], abordagem da reta vazia, sentido de número). Análise de resoluções de alunos numa tarefa (Caracol). Discussão da tarefa realizada nas aulas.
5	Números naturais e algoritmos.	Sentido de Número e Pensamento Relacional. Tarefa matemática (sobre pensamento relacional – exploração matemática, análise de respostas de alunos, discussão coletiva). Análise do significado das operações a partir de exemplos (adição, subtração, multiplicação, divisão). Algoritmos nos documentos curriculares. Análise do Programa e das Metas sobre Aprendizagem dos Números Naturais e Operações. Proposta de tarefa a realizar com os alunos.
6	Números racionais.	Análise do Programa sobre Aprendizagem dos Números Racionais. Tarefa matemática (Os combustíveis – exploração matemática). Análise da prática profissional (Os combustíveis, fase de preparação, trabalho de grupo, discussão – reflexão sobre a organização da aula em 3 fases usando aulas em vídeo). Discussão da tarefa realizada nas aulas.

7	Números racionais.	Análise de manuais sobre a introdução dos algoritmos da adição e da multiplicação (Que preparação fazem? Que oportunidades dão para a compreensão dos algoritmos?). Apresentação e discussão de ideias fundamentais sobre o Ensino e a Aprendizagem da Proporcionalidade. Tarefa matemática (IMLNA-Quadrados, 1.ª e 2.ª partes). Análise de resoluções de alunos na resolução de tarefas sobre proporcionalidade direta (IMLNA-Quadrados, 1.ª e 2.ª partes, colares). Proposta de tarefa a realizar com os alunos.
8	Proporcionalidade; Balanço final.	Discussão da tarefa realizada nas aulas. A aula em três fases (revisão sobre as aulas em vídeo do 1.º e 2.º ciclo e discussão sobre as potencialidades e problemas na realização deste tipo de aula). Realização e discussão das tarefas de números do TIMSS. Resultados dos alunos portugueses no TIMSS. Balanço final.

Neste conjunto de atividades é de destacar: (i) a análise das orientações curriculares atuais no que respeita ao ensino dos números e da álgebra no 1.º e 2.º ciclos e recursos para o professor; (ii) a organização da aula de Matemática em 3 fases, tendo por base tarefas de natureza exploratória; e (iii) a abordagem dos temas sequências, números naturais e algoritmos, números racionais e proporcionalidade. As atividades de formação estiveram a cargo de três formadores (três dos autores desta comunicação), que alternavam papéis durante as sessões de formação.

Durante a formação chegou a notícia da revogação do Programa de Matemática de 2007, o que constituiu um fator de perplexidade e incerteza para os professores. Para os formadores, este acontecimento obrigou a uma atenção especial em tudo o que respeita ao enquadramento curricular.

Metodologia de investigação

Este estudo tem caraterísticas de (auto)avaliação (Patton, 1987), numa abordagem de observação participante, uma vez que uma equipa de formação procura fazer uma avaliação de um processo formativo por si realizado. Para isso, a equipa identificou à partida um conjunto de questões que pretendia ver respondidas, estabeleceu diversos procedimentos de recolha de dados e empreendeu uma análise e reflexão final sobre os dados recolhidos.

Um dos processos de recolha de dados foi um diário de bordo escrito por um dos membros da equipa e completado com contribuições de todos os restantes. Também entrevistámos três formandas, selecionadas entre aquelas que tinham tido maior envolvimento nas sessões de formação. Além disso, como parte do processo de avaliação da formação, todos os professores responderam a um questionário com cinco questões de resposta aberta sobre o modo como encaravam diversos aspetos da formação a as aprendizagens por si realizadas. Como pontos principais de análise, em primeiro lugar, procuramos perceber as perspetivas dos formandos quanto aos aspetos de ordem didática, nomeadamente em relação (i) às tarefas exploratórias, (ii) à discussão coletiva e (iii) às suas expectativas em relação aos alunos. Em segundo lugar, relativamente à formação, procuramos também saber o modo como encaram (i) os momentos de partilha de experiências e (ii) a relação entre a formação e a prática. Os registos em diário de bordo proporcionam uma informação valiosa sobre os aspetos mais marcantes da oficina, tal como foram sendo percebidos pelos formadores. Por outro lado, os questionários e as entrevistas mostram como a formação foi percebida pelos professores participantes.

Perspetivas e práticas dos professores

Tarefas exploratórias

Logo no início da formação foi possível verificar que a proposta de tarefas exploratórias na sala de aula aos seus alunos não fazia parte da prática profissional da maioria dos professores. Durante a formação foram vários os momentos em que os professores trabalharam em tarefas desta natureza e diversas as situações em que as realizaram na sua sala de aula. Os registos realizados no diário de bordo dos formadores mostram que, no decurso da oficina, os formandos valorizaram a realização de tarefas nas suas aulas, com os seus alunos, e o seu relato posterior nas sessões de formação. Como eles próprios indicaram, apesar de muitos deles terem frequentado anteriormente outras ações de formação, nunca tinham apresentado aos alunos tarefas como as que lhes foram aqui propostas e muito menos discutido com os colegas as resoluções dos alunos. Inicialmente, quando a proposta foi feita, a maioria dos professores sentiu indisfarçável incomodidade e alguns ensaiaram propostas para anular este trabalho. No entanto, no final da formação vários professores identificam estas tarefas como potencialmente interessantes para promover a aprendizagem dos alunos.

Catarina é uma das formandas que valoriza a introdução de propostas de trabalho exploratório:

> [A formação] fez-me abrir mais um bocadinho e pensar assim: não, Catarina, tens que começar também… a deixar que os meninos descubram. Mas estar a dar a matéria diretamente, eles se calhar não apreendem tanto aquilo que eu estou a dizer ou a fazer, eles aprendem muito mais, se forem eles a descobrir. *(Catarina E)*[1]

Também Paula refere a influência da formação na proposta de tarefas de exploração na sala de aula, destacando ainda as potencialidades destas tarefas no desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos:

> [A formação] também me permitiu promover e pensar em atividades de exploração e de investigação que posso realizar em contexto sala de aula, ou seja [levar os alunos a] "pensar matematicamente". *(Paula Q)*

Esta professora apresenta ainda um exemplo de sala de aula em que usa tarefas de exploração para que os alunos passem de uma fase mais concreta para situações mais abstratas:

> Num grupo de quarto ano e depois de os alunos já terem passado por inúmeras etapas experimentais e de manipulação concreta, pretende-se já que estes consigam resolver situações um pouco abstratas desenvolvendo estratégias e explorando-as com os seus pares. *(Paula Q)*

Apesar de valorizarem as potencialidades das tarefas de exploração na aprendizagem dos alunos, alguns dos professores refletem sobre algumas dificuldades e desafios que estas tarefas podem trazer às suas práticas profissionais:

> No trabalho de natureza exploratória, em turmas demasiado grandes e com dificuldades de aprendizagem, o acompanhamento de todos os alunos na fase de exploração é complicado porque é preciso tempo para ajudar todos os alunos através da reformulação de questões a compreender o problema e a resolvê-lo. *(Teresa Q)*

Nesta reflexão, Teresa destaca o tempo necessário ao acompanhamento dos alunos como um desafio para o professor, mas evidencia uma compreensão da importância do questionamento no trabalho de natureza exploratória. Pelas intervenções apresentadas, a formação parece ter contribuído para uma compreensão mais aprofundada, por parte dos formandos, do conceito de tarefas de natureza exploratória e também das suas potencialidades para a aprendizagem dos alunos.

---

[1] As afirmações dos professores retiradas das entrevistas são marcadas com (E) e as afirmações retiradas dos questionário com (Q).

Discussão coletiva

Um momento de trabalho muito significativo das sessões de formação foram as discussões coletivas. Estas discussões eram realizadas após a concretização das mais diversas atividades – após a exploração matemática de tarefas, a análise de trabalho dos alunos, a análise de sítios *web*, a análise de manuais, a análise do trabalho do professor. Com o decorrer do tempo, estas discussões passaram a ser um modo de trabalho valorizado como forma de construir coletivamente conhecimento na sequência de um trabalho preparatório adequado. Nas suas reflexões, os professores destacam também os momentos de discussão coletiva em sala de aula como uma das alterações metodológicas às suas práticas profissionais. Assim, Ana valoriza as tarefas de exploração propostas na formação como um ponto de partida para a realização de discussões coletivas, no contexto particular da sua turma:

> A realização e adaptação destas tarefas permitiu uma diversificação de metodologia ao nível da minha sala de aula, já que foi possível a sua aplicação aos dois níveis de ensino que integram a minha turma (1.º e 2.º anos), possibilitando a discussão coletiva e a aquisição de conceitos. *(Ana Q)*

Num registo idêntico, Paula refere que os momentos de discussão coletiva podem ser motivadores para os alunos quando estes desenvolveram previamente tarefas de natureza exploratória:

> Deixar os alunos inventarem as suas próprias estratégias e procedimentos é uma opção pedagógica que pode ser de extrema importância. E solicitar-lhes que as partilhem, surpreendentemente enriquecedor! *(Paula Q)*

Teresa, além de mostrar uma boa apropriação do conceito de discussão coletiva, salienta o papel da formação na compreensão de que a discussão coletiva pode ser produtiva independentemente do desempenho dos alunos: "Aprendi nesta formação que pode ser aplicado a todos os alunos desde que o acompanhamento do professor seja mais minucioso em todas as fases" *(Q)*.

Os momentos de discussão mais interessantes tiveram por base a realização de tarefas matemáticas e a análise de resoluções dos alunos. A discussão de documentos curriculares (em especial as Metas e o Programa de Matemática de 2007) também foi valorizada pelos professores, mas não proporcionou situações de debate e de participação semelhantes aos de outras atividades.

Expectativas quanto aos alunos

Na primeira apresentação das resoluções dos alunos (sessão 2), os professores referiam apenas erros e dificuldades, dando uma imagem negativa das capacidades dos alunos. Isto foi contrariado pelos formadores, que, conhecedores das resoluções dos alunos através de digitalizações previamente enviadas pelos formandos por e-mail, destacavam aquilo que os alunos conseguiam fazer, ressaltando as suas estratégias e resoluções. Com o decorrer do tempo, passou a prevalecer a valorização do trabalho dos alunos e todos os professores procuravam enfatizar, nas resoluções que apresentavam, os aspetos mais originais e mais interessantes. E a verdade é que um aspeto particularmente interessante destacado pelos professores nas suas reflexões relaciona-se com as mudanças que se registaram nas suas expectativas sobre o que os alunos são capazes de realizar em sala de aula:

> [A formação promoveu] a autoconfiança nas minhas capacidades como professora, que incluiu, sem dúvida, a criação de expetativas elevadas acerca do que os alunos podem aprender em Matemática. *(Paula Q)*

Também Catarina destaca que a formação a leva a olhar de um modo diferente para o trabalho dos alunos. Refere ainda que as tarefas propostas na formação influenciam a sua visão sobre o que os alunos são ou não capazes de concretizar em sala de aula, pois, apesar das suas expectativas iniciais, pôde verificar que as tarefas propostas se adequam aos seus alunos:

> Eu cheguei a levar daqui… propostas para nós fazermos com os meninos. Pensava assim: isto não vai dar certo… eles não vão achar isto interessante, e foram essas as atividades que, pelo menos uma delas, que eu fiquei bastante até… feliz e fiquei motivada, e foi aí que me deu o tal clique… que eles realizaram… eles fizeram um trabalho em grupo, foi espetacular… E aí vi… Dá mesmo, vale a pena… *(Catarina E)*

Deste modo, a formação parece ter contribuído para algumas mudanças nos professores, no sentido da valorização da natureza exploratória do trabalho em sala de aula e das potencialidades das discussões coletivas e ainda sobre as suas expetativas relativamente ao desempenho dos alunos.

Perspetiva sobre a estrutura da formação

Partilha de experiências

Um dos aspetos mais destacados pelos formandos é a possibilidade de partilharem experiências durante toda a formação. Um dos momentos de partilha mais valorizado é promovido a cada duas sessões de formação e consiste na discussão de situações de sala de aula vividas pelos professores durante a realização de tarefas de exploração sobre Números e Álgebra.

Jorge é um dos participantes que destaca estes momentos: “Esta partilha foi tão mais enriquecedora na medida da diversidade dos contextos de origem: anos diferentes do mesmo ciclo e diferentes ciclos (1.º e 2.º)” *(Q)*. Estas situações de partilha de experiências são também realçadas por Paula, que enfatiza ainda a relação desta partilha com a sua própria prática:

> Através da partilha de situações práticas dos formandos e da nossa própria experimentação em sala de aula, conseguimos obter uma visão abrangente, reflexiva e crítica de cada situação. *(Paula Q)*

Pelo seu lado, Luísa evidencia que a partilha de experiências a surpreende, particularmente pelas alterações que os colegas propõem para as tarefas apresentadas na formação:

> É a troca de experiências, o ouvir, a forma como eles abordavam as tarefas ou como as completavam mesmo em casa, as arranjavam para os anos… Eu nunca fiz grandes arranjos às minhas tarefas, foram muito idênticas às que eram propostas, mas vi colegas que faziam grandes… algumas mudanças e adaptavam àquilo que eles achavam. *(Luísa E)*

Por outro lado, para Paula, “há ainda a salientar a participação, a partilha, a troca de experiências entre os formandos e formadores, que favoreceu o trabalho cooperativo, trabalho de grupo e trabalho de sala de aula” *(Q)*. Na sua perspetiva, a importância da troca de experiências na formação não se cinge aos formandos, valorizando igualmente a partilha entre formandos e formadores.

Assim, a partilha de experiências revela-se uma mais-valia nesta formação, onde os professores podem conhecer situações algo semelhantes às vivenciadas nas suas salas de aula, mas que enriquecem o seu conhecimento sobre as potencialidades dessas situações. Destacam particularmente a importância de conhecerem situações vivenciadas em anos diferentes do ano que lecionam e possibilidades de adequação das tarefas.

Relação entre a formação e a prática

Outra questão largamente valorizada pelos professores é a ligação estabelecida entre a formação e a prática, ou seja, o paralelismo entre atividades desenvolvidas na formação e atividades equivalentes em sala de aula ou também entre a formação e outros aspetos da sua prática profissional. Um dos aspetos destacados é a realização de tarefas, tanto por parte dos formandos como por parte dos seus alunos. Como refere Luísa: "esta oficina proporcionou que trabalhássemos com os nossos alunos durante a aplicação das tarefas e que trabalhássemos nós próprios durante as sessões" *(Q)*. Pelo seu lado, Jorge salienta que a resolução de tarefas matemáticas durante a formação não corresponde linearmente à resolução realizada na sala de aula:

> Era realizada a tarefa que seria apresentada em sala de aula por cada um dos formandos. Este trabalho era feito em grupo, tal como seria com os alunos… Esta adequação ambiental permitia refletir sobre as possíveis dificuldades das crianças na execução da tarefa e conduzir para uma adaptação à especificidade dos alunos. *(Jorge Q)*

Deste modo, ainda que os professores se envolvam ativamente na resolução das tarefas matemáticas propostas na formação, veem esta resolução como um ponto de partida para aprofundarem o seu conhecimento sobre a tarefa de modo a poderem usá-la na sala de aula.

Conclusão

Esta formação teve momentos mais conseguidos e momentos menos conseguidos. No entanto, em termos gerais, o *design* de formação adotado (Loucks-Horsley et al., 1998), a ênfase na abordagem de ensino exploratório (Ponte, 2005), a forte ligação com situações de prática profissional (Smith, 2001), nomeadamente considerando tarefas matemáticas, resoluções de alunos e momentos de trabalho em sala de aula, revelaram-se apropriados para os objetivos de formação propostos para este grupo de professores. Especial relevo merecem os momentos de discussão coletiva (Ponte, 2005; Sherin, 2002; Stein et al, 2008) nas sessões de formação, que proporcionaram amplo espaço de participação aos formandos, valorizaram os seus saberes e as suas práticas, e proporcionaram um modelo vivo como poderia ser o trabalho da sua sala de aula.

São diversos os professores que indicam que, como consequência da formação, as suas práticas se alteraram, tendo modificado as tarefas que propõem, a forma como as introduzem e o modo como as discutem no fim com toda a turma. Como formadores, não podemos garantir que os participantes tenham mudado de modo significativo as suas práticas. No entanto, é de salientar que a valorização do ensino exploratório, das discussões coletivas e das capacidades dos alunos foram conclusões a que eles próprios chegaram como consequência do trabalho realizado na formação. Em que medida estas perspetivas irão informar as suas práticas futuras dependerá muito do trabalho de coordenação ao nível dos seus agrupamentos e da política nacional para o ensino da Matemática, pois só através da conjugação de diferentes níveis de atuação – formação, trabalho nas organizações escolares e política central – se podem conseguir mudanças profundas e duradoiras para o ensino da Matemática.

Referências

Brendefur, J., & Frykholm, J. (2000). Promoting mathematical communication in the classroom: Two preservice teachers' conceptions and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education, 3*(2), 125-153.

Lesne, M. (1984). *Trabalho pedagógico e formação de adultos*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Llinares, S., & Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 429-460). Roterdão: Sense.

Loucks-Horsley, S., Hewson, P. W., Love, N., & Stiles, K. E. (1998). *Designing professional development for teachers of science and mathematics*. Thousand Oaks, CA: Corwin.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Autor.

Patton, M. Q. (1987). *How to use qualitative methods in evaluation*. Newbury Park, CA: Sage.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Branco, N., Quaresma, M., Velez, I., & Mata-Pereira, J. (2012). Perspetivas teóricas no estudo das práticas profissionais dos professores de matemática. In *Práticas de ensino da Matemática: Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 267-279). Lisboa: SPIEM.

Serrazina, L. (2013). O programa de formação contínua em matemática para professores do 1.º ciclo e a melhoria do ensino da Matemática. *Da Investigação às Práticas*, *3*(2), 75-97.

Sherin, M. G. (2002). A balancing act: Developing a discourse community in the mathematics classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*, 205-233.

Smith, M. S. (2001). *Practice-based professional development for teachers of mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*, 313-340.

Wood, T. (1999). Creating a context for argument in mathematics class. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*(2), 171-191.

GeoGebra e ferramentas *tradicionais* – Uma conjugação favorável à apropriação das isometrias

Jorge Manuel Pedrosa Gaspar[1], *Isabel Cabrita*[2]
[1]Agrupamento de Escolas Rio Novo do Príncipe, gasparix2@gmail.com
[2] Centro de Investigação Didática e Tecnologia na Formação de Formadores (CIDTFF), Universidade de Aveiro, icabrita@ua.pt

Resumo. *O presente artigo propõe-se divulgar parte de uma investigação que perseguiu como uma das principais finalidades analisar o potencial da exploração do GeoGebra, complementada com ferramentas tradicionais, no desenvolvimento de competências geométricas, relacionadas com as isometrias e os frisos, em alunos do 1.º ciclo do ensino básico. No âmbito do trabalho empírico, desenvolveu-se um estudo de caso múltiplo centrado em dois pares de alunos do 4.º ano de escolaridade que resolveram autonomamente, por recurso àquelas tecnologias, uma bateria de tarefas de natureza essencialmente exploratória. Os dados foram recolhidos através das técnicas de inquirição, observação direta e participante e análise documental. A análise de conteúdo a que foram submetidos permitiu concluir que uma abordagem didática centrada em sequências de tarefas a resolver com recurso a tecnologias tradicionais conjugadas com o GeoGebra potencia uma apropriação mais sólida dos conceitos geométricos em causa e sua aplicação. Além disso, contribuiu ainda para o desenvolvimento de atitudes favoráveis em relação à matemática e à geometria, em particular.*

Abstract. *This article intends to disseminate part of an investigation that aims to analyze the potential of GeoGebra, complemented with traditional tools, in the development of geometric competences related to isometries and the friezes, in elementary school. Within the empirical work, we developed a case study focused on two pairs of students in the 4th grade who solved autonomously, using those technologies, a battery of exploratory tasks. The data was collected mainly through inquiry techniques, direct observation and documentary analysis. Its content analysis allowed us to conclude that the didactical approach, centered on sequences of tasks to be solved using traditional technologies combined with GeoGebra, enhances a more solid appropriation of the focused geometric concepts and its application. Moreover, it has also contributed to the development of positive attitudes towards Mathematics and particularly to Geometry.*

Palavras-chave: GeoGebra; Isometrias; Ferramentas tradicionais; Ensino Básico.

Introdução

Segundo Lévy (1990), as “tecnologias da inteligência” ou “da mente”, cada vez mais presentes na sociedade, propiciam um novo debate sobre a filosofia do conhecimento. Serão responsáveis por novas formas de elaboração do saber e de comunicação e colocam em questão alguns dos pilares da epistemologia contemporânea – a dualidade sujeito-objeto e mente-matéria.

No entanto, parece ser opinião generalizada que a escola e, em particular, a Matemática, está muito longe de incorporar as tecnologias informáticas no processo educativo. Ao que se assiste hoje nas escolas é ao uso esporádico e desadequado dessas ferramentas, não obstante a mais-valia no contexto educativo que se lhe reconhece (Costa, 2007; Matos, 2005). Mas não se defende que tais tecnologias substituam as ferramentas mais tradicionais, como a régua, e outros materiais manipuláveis, como os miras. Apesar de não ter sido muito investigada, a coexistência de ambas as tecnologias, numa lógica de complementaridade, poderá trazer vantagens para o processo educativo.

Assim, muito tem de ser feito no sistema de ensino e de aprendizagem da matemática, uma das áreas fundamentais para o desenvolvimento da humanidade, mas, paradoxalmente, uma das mais votadas ao insucesso educativo e escolar (Brunello, 2010), diretamente relacionado com uma visão negativa em torno dessa área. A este facto não são alheias, nomeadamente, as dificuldades dos professores em praticarem um ensino motivador e consequente, também causadas pelas sucessivas reformas que se têm introduzido nos últimos anos no sistema educativo.

No caso de Portugal, o Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB) (Ponte et al., 2007)[1] introduzia alterações significativas relativamente às orientações anteriores. Uma das áreas em que isso é notório é a da Geometria e, mais concretamente, a das transformações geométricas no plano euclidiano, a cuja aprendizagem estão associadas algumas dificuldades identificadas na literatura.

Neste contexto, desenvolveu-se uma investigação norteada pela principal questão – Poderá a exploração de uma sequência de tarefas, que variam quanto à abertura e complexidade, suportada pelo GeoGebra e por outras ferramentas mais tradicionais, contribuir para uma mais sólida apropriação e aplicação de conceitos relacionados com transformações geométricas isométricas e para uma visão mais positiva da geometria?

[1] Apesar deste programa já ter sido revogado em 2013, foi nele que a presente investigação se baseou, por ser o que se encontrava em vigor à data da realização do trabalho empírico.

Aprendizagem das Transformações Geométricas mediada por tecnologias

Neste ponto, faz-se referência: à Geometria nos *curricula* e a atitudes sobre a mesma; às transformações geométricas, focando-se dificuldades na sua aprendizagem e formas de as superar; e, finalmente, ao uso do GeoGebra e das ferramentas tradicionais na aprendizagem deste tópico.

A geometria é uma área à qual, durante muito tempo, não se deu a ênfase devida (Abrantes, Serrazina, & Oliveira, 1999; APM, 2009; Breda, Serrazina, Menezes, Sousa, & Oliveira, 2011; NCTM, 2007). Quando a sua importância foi reforçada (Guimarães, Belfort, & Bellemain, 2002;), os currículos apresentavam uma geometria muito fechada sobre si mesma, muito ligada ao reconhecimento e nomeação de formas geométricas, às definições e à utilização de fórmulas em medições geométricas (Breda et al., 2011; Costa, 2001; Veloso, 1999). Por outro lado, muito influenciados por pedagogias mais centradas no ensino do que na aprendizagem dos alunos (Nóvoa, 2009), os professores não estavam preparados para a abordar da forma mais adequada nem havia materiais de qualidade que apoiassem devidamente a sua atividade (Clements, 2003). Tudo isto contribuía para o baixo desempenho dos alunos neste tema e para que não tivessem uma atitude muito positiva em relação ao mesmo:

> Experiências com métodos pouco adequados para o ensino desta disciplina, sucessivos fracassos ao desempenhar tarefas que exigem habilidade espacial e baixa crença de auto-eficácia na capacidade de resolução de problemas geométricos são fatores que podem influenciar as atitudes em relação à geometria (Viana, 2004, p. 7).

Tal situação pode provocar insucesso temporário ou mesmo uma completa repulsa para com toda a disciplina porque, sendo a Geometria um tema da Matemática, pode-se tomar o todo pela parte ou vice-versa (Hershkowitz, 1990).

Presentemente, a geometria ganhou relevo nos programas curriculares muito motivado por documentos como os do NCTM (2007).

Em 2007, Portugal viu-se confrontado com o PMEB (Ponte et al., 2007), que esteve a ser implementado, de forma generalizada, desde 2011 e até à sua revogação em 2013. Aí explicita-se que "Desenvolver atitudes positivas face à Matemática e a capacidade de apreciar esta ciência" constitui uma duas principais finalidades do seu ensino. No tema de Geometria, tal Programa refere como propósito principal o desenvolvimento do sentido espacial dos alunos, com ênfase na visualização e na compreensão de propriedades de figuras geométricas, no plano e no espaço, bem como a utilização destes conhecimentos e capacidades na resolução de problemas geométricos em contextos diversos. Refere também que se devem estudar, desde o 1.º Ciclo, diversas transformações geométricas isométricas que, segundo Bastos (2007), se podem constituir como verdadeiras ferramentas para raciocinar sobre o plano e o espaço.

Em relação aos conteúdos, o PMEB apresenta apenas um tópico relacionado com as isometrias – "Reflexão" – e, para os 1.º e 2.º anos, enuncia três objetivos específicos: a) Identificar no plano figuras simétricas em relação a um eixo; b) Desenhar no plano figuras simétricas relativas a um eixo horizontal ou vertical; e c) Resolver problemas envolvendo a visualização e a compreensão de relações espaciais (p. 22). Para os 3.º e 4.º anos, os objetivos específicos são: a) Identificar no plano eixos de simetria de figuras; b) Construir frisos e identificar simetrias; c) Resolver problemas envolvendo a visualização e a compreensão de relações espaciais (p. 23). Em sintonia com estes objetivos, definiram-se metas de aprendizagem – finais e intermédias[2] – (também já revogadas), que se pretendiam constituir uma referência para a avaliação (Serrazina et al., 2010).

Propõe-se, assim, uma mudança ao nível da conceptualização das transformações geométricas, mais próxima da usada na literatura matemática internacional (Veloso, 2012), que pode acarretar dificuldades acrescidas no processo educativo deste tópico, que não é de fácil aprendizagem.

De facto, apesar de não se terem encontrado muitos estudos centrados nas transformações geométricas e nem todas as conclusões serem consensuais, poder-se-á sintetizar que: a translação (principalmente a horizontal) será a isometria que menos dificuldades acarreta; a rotação será mais difícil nos casos em que o centro de rotação é externo à figura e a de meia-volta parece ser facilmente confundida com a reflexão; a reflexão será gradativamente mais difícil consoante a posição do eixo – vertical, horizontal ou oblíqua;

---

[2] Meta Final 25 - Compreende a noção de reflexão.
Metas intermédias até ao 2.º Ano
- Identifica no meio natural e físico o transformado de uma figura numa reflexão de eixo vertical ou de eixo horizontal.
- Identifica polígonos com simetria de reflexão (p. 22).

Metas intermédias até ao 4.º Ano
- Identifica eixos de simetria em figuras no plano.
- Identifica simetrias em figuras diversas, nomeadamente: polígonos; frisos.
- Representa frisos com simetrias de reflexão (p. 23).

a aplicação de uma isometria será mais difícil do que a identificação de objetos que possam ser o transformado um do outro pelas isometrias; objetos mais elaborados provocam piores desempenhos; é mais difícil a identificação de isometrias presentes num friso do que a sua continuação, completamento ou criação (Coelho, 2013; Gomes, 2012; Oliveira, 2012; Vieira, 2010).

Para além de medidas transversais a todo o currículo, como um ensino centrado na perspetiva construtivista e apoiado por tarefas ricas e desafiantes, devidamente sequenciadas (ver p.e. Cabrita et al., 2011), têm-se proposto medidas mais específicas para se tentar ultrapassar tais dificuldades. Assim, defende-se que o aluno vá construindo o conceito de congruência – por sobreposição, pelas propriedades das figuras e depois pela translação, rotação e reflexão, assim como pelas suas composições (Abrantes, Serrazina, & Oliveira, 1999; Clements, 2003; Del Grande, 1990). A simetria deve começar por ser reconhecida, por exemplo, por dobragem e por exploração com espelhos, começando-se pelas que apresentam um só eixo de simetria e evoluindo-se para as que apresentam rotação; em relação à composição de figuras com simetria de rotação e reflexão, devem-se explorar alguns ‘movimentos’ e proporcionar conhecimentos gradativamente mais formais e sistematizados (Breda et al., 2011; NCTM, 2007; Schattschneider, 2009).

Nesta mesma lógica, o PMEB também defende uma abordagem das isometrias primeiro de forma intuitiva, em associação com os frisos, e depois com crescente formalização (Ponte et al., 2007).

As tecnologias informáticas, em particular ambientes dinâmicos de geometria dinâmica[3], têm contribuído para o desenvolvimento do sentido geométrico, a finalidade principal da Geometria, e, portanto, poderão desempenhar um papel fundamental na aprendizagem destes tópicos (Laborde, 2000). O rigor e pormenor das imagens dinâmicas que proporcionam de objectos muito mais complexos dos que os habitualmente usados em ambientes clássicos de papel e lápis, desencadeando fenómenos visuais muito ricos e

[3] A propósito desta designação, concorda-se com Piteira e Matos (2000) quando dizem: “Falo em ADGD, não em Ambientes Dinâmicos de Geometria (ADG), nem em Ambientes de Geometria Dinâmica (AGD), por considerar que este termo define melhor o tipo de software. Se por um lado é um tipo especial de aplicação que cria acção entre a interface e o utilizador, por outro, torna dinâmica a forma de abordar e trabalhar a geometria euclidiana” (p. 62).

fortes, favorecem a compreensão dos conceitos e de relações geométricas, conduzindo a um progresso intelectual. Assim, devem ser utilizadas para observar, analisar, relacionar e construir figuras geométricas e operar com elas (Cabrita, Neto, Breda, & Santos, 2013; Coelho, 2013; Jonassen, Howland, Marra, & Crismond, 2008; Laborde, 2000; Matos, 2011). Por isso, defende-se que, desde cedo, os alunos deverão desenvolver a capacidade de visualização através da utilização das tecnologias que permitem rodar, encolher e deformar uma série de objetos bi e tridimensionais (NCTM, 2007). As mais usadas têm sido o Cabri-Géomètre e o Geometer's Sktetchpad, com resultados interessantes ao nível do ensino e da aprendizagem da geometria envolvendo a construção de conhecimento, capacidades para o aplicar e o desenvolvimento de atitudes favoráveis em relação à matemática e à geometria (ver p.e. Goldenberg, Scher, & Feurzeig, 2008; Hershkowitz, 1990; Oliveira, 2012; Silva, 2012). Mais recentemente, surgiu o GeoGebra, que se constitui uma mais-valia quando comparado com outras aplicações, por aliar a manipulação gráfica às representações algébrica e de cálculo (ver p.e. Berger, 2012; Hohenwarter, 2013; Mehanovic, 2009; Misfeldt, 2009). Além disso, é muito intuitivo e de distribuição gratuita.

As vantagens de tais ambientes não menorizam, no entanto, a importância da utilização de outras ferramentas mais tradicionais como a régua e de materiais como os georrefletores. Assim, diversos autores, como Breda et al. (2011), defendem a convivência de tais ferramentas e ambientes no contexto educativo, o que está consignado no PMEB (Ponte et al., 2007):

> No estudo deste tema, é fundamental o recurso a instrumentos de medida e de desenho – régua, esquadro, transferidor, compasso – bem como a utilização de materiais manipuláveis – geoplanos, tangrans, puzzles, mosaicos, peças poligonais encaixáveis, cartolina e elásticos, armações e palhinhas, mira e espelhos. Todos estes instrumentos e materiais são um apoio importante para a aprendizagem em Geometria, em particular na exploração, análise e resolução de problemas de natureza geométrica e na realização de desenhos e construções com um rigor adequado. Os programas computacionais de Geometria Dinâmica e os applets favorecem igualmente a compreensão dos conceitos e relações geométricas, pelo que devem ser também utilizados (p. 37).

A propósito, Ponte, Branco, & Matos (2009) interrogam-se:

> Devem aprender primeiro os conceitos e processos pelos «métodos tradicionais», baseados no papel e lápis, ou devem aprendê-los, desde o início, usando estes instrumentos? E com que propósito devem usar a

tecnologia – para confirmar os resultados já obtidos com métodos de «papel e lápis» ou como instrumento de exploração?" (p. 17).

Em forma de resposta, os mesmos autores defendem que a abordagem depende da familiaridade dos alunos com os instrumentos tecnológicos subjacente ao seu meio cultural, aos seus interesses e preferências, além dos recursos existentes na escola e da experiência professor (Ponte et al., 2009).

Num estudo realizado por Vieira (2010), embora o foco fosse nas tecnologias informáticas, também foram utilizados materiais manipuláveis no estudo de isometrias no 1º CEB, e a autora pôde constatar o desenvolvimento de conhecimentos, capacidades e atitudes dos alunos envolvidos.

No âmbito do estudo empírico que se passa a descrever, optou-se pela coexistência do GeoGebra e de ferramentas e materiais mais tradicionais, enquanto suporte da resolução de adaptações de tarefas previamente experimentadas[4] (ver Cabrita et al., 2011; Cabrita et al., 2013; Vieira, 2010).

Método

A opção por um método qualitativo e por um *design* de estudo de caso (Ponte, 2006) múltiplo, na aceção de Bogdan e Biklen (1994), prende-se com a própria natureza da investigação (Coutinho, 2011). Além disso, a investigação qualitativa fornece informação acerca do ensino e da aprendizagem que de outra forma não se pode obter (Fernandes, 1991).

O estudo desenvolveu-se com dois dos cinco pares de alunos do 4.º ano de escolaridade de uma turma mista que também tinha 13 alunos do 1.º ano, ao longo de cerca de seis semanas. Os dois pares referidos, selecionados por terem participado em todas as atividades relativas ao estudo empírico, constituíram-se os *casos* em estudo. No âmbito deste artigo, a análise foca-se no par G1, constituído por André e Tadeu[5]. O professor/investigador (P/I) teve uma participação ativa neste estudo, visto que planeou e conduziu todos os acontecimentos decorrentes desta investigação.

---

[4] Designadamente por diversos professores, no âmbito dos programas de formação contínua em matemática com professores do 1ºCEB da Universidade de Aveiro - m@c1.

[5] Nomes fictícios.

As técnicas de recolha de dados foram a observação direta, a inquirição e a análise documental. Na tentativa de ilustrar, de forma mais completa possível, as situações e as experiências dos sujeitos, usaram-se diversos instrumentos: Questionários Inicial (QI) e Final (QF), Teste aplicado no início (TI) e no fim (TF) da experiência, Diário de Bordo (DB) e produções dos alunos. Na opinião de Ludke e André (1986), na procura do conhecimento da realidade, todos os detalhes são importantes.

Num primeiro momento, os alunos responderam ao QI, na sala de aula (ver figura 1).

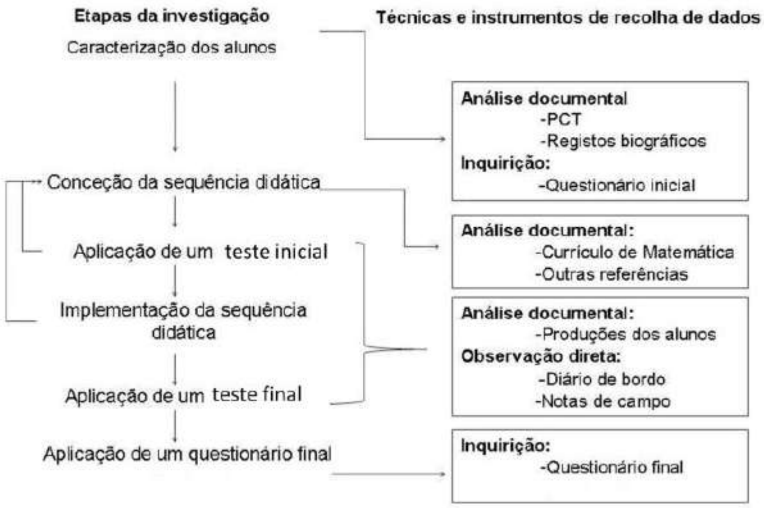


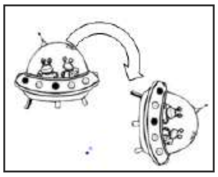
Figura 1. Esquema da investigação

Com esse QI pretendia-se, principalmente, recolher dados sobre os seus gostos em relação à Matemática e às tecnologias e sobre os seus hábitos e conhecimentos básicos de utilização do computador. Admite, ainda, questões orientadas para a Geometria (gosto e importância que lhe atribuem) e para o uso de *software* dinâmico de exploração da mesma.

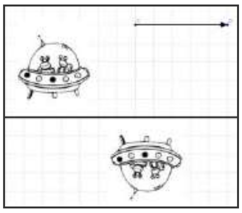
De seguida, foi resolvido o TI a pares. Com ele pretendia-se, num primeiro momento, analisar os conhecimentos que os alunos detinham sobre o tema, mesmo que construídos para além do contexto formal. Tal avaliação poderia aconselhar alterações à planificação. Posteriormente, facilitou a análise da evolução do desempenho dos alunos por comparação com o TF.

Numa fase posterior e ao longo de seis sessões de cerca de 90 min. cada, os alunos, em díades, realizaram tarefas que apresentam duas partes – uma na qual se faz apelo à utilização de ferramentas ditas tradicionais, como lápis, régua, transferidores, etc, e uma outra que implicou o uso do software GeoGebra[6] (Gaspar, 2013).

A título de exemplo, refira-se que a 3.ª tarefa, encadeada nas anteriores através de um pequeno texto introdutório, apresenta uma imagem representando uma rotação de 90º.



Pede-se: *"Completa a imagem que se segue desenhando a nave após ter realizado uma rotação de 180° em torno do ponto (x). Se precisares, recorre a uma folha de acetato e ao transferidor. Indica qual o sentido da rotação"*. Na alínea 2, questiona-se sobre qual o efeito, sobre a figura, de uma rotação com a mesma medida de amplitude de ângulo, mas efetuada em sentido inverso. Na última alínea propõe-se: *"No GeoGebra, desenha livremente estrelas e planetas e aplica-lhe diferentes rotações. Podes mesmo criar bonitas rosáceas"*.



Na tarefa 6, começa-se por pedir que, no GeoGebra, efetuem uma composição de uma reflexão com uma translação tendo o eixo e o vetor a mesma direção, como no exemplo. E explicita-se que essa transformação se designa por 'reflexão deslizante'.

Por fim, pede-se: "*Numa folha de papel, desenha uma figura a gosto e aplica-lhe uma reflexão deslizante à tua escolha, mas com um eixo e um vetor verticais"*.

Enquanto realizavam as tarefas, o P/I ia circulando pelos vários grupos e dando a orientação necessária para o desenvolvimento da atividade. Numa fase posterior, passava-se à apresentação e discussão de resoluções criteriosamente selecionadas. Em relação às construções feitas no GeoGebra e usando-se um sistema de projecção, o P/I aproveitava para as manipular e discutiam-se, no coletivo, aspetos particulares dos 'movimentos' em causa para que mais facilmente os alunos os pudessem realizar usando as ferramentas tradicionais. Por fim, sintetizavam-se os aspetos principais relativos aos tópicos abordados.

---

[6] A iniciação ao uso deste *software* aconteceu durante o TI, quando o professor introduziu os comandos básicos para a utilização do programa. A partir desse momento e contando sempre com o apoio do professor, os alunos exploraram potencialidades do mesmo, com grande motivação e destreza.

No final, foram aplicados o TF e o QF. Com o QF pretendeu-se recolher a opinião dos alunos principalmente acerca: da utilidade das ferramentas utilizadas no âmbito do estudo empírico desenvolvido; do conhecimento adquirido ao nível das transformações geométricas; e da construção de uma visão mais positiva da matemática em geral e da geometria em particular.

Principais resultados e conclusões

Os dados foram sujeitos a análise de conteúdo, subordinada a categorias de análise. No que respeita a competências geométricas, tais categorias incidiram sobre: a) conhecimento e capacidades relacionadas com isometrias – a reflexão, a rotação, a translação, a reflexão deslizante – e frisos; e b) atitudes sobre a geometria e a matemática em geral.

No QI, André e Tadeu afirmaram: gostar de matemática; ter computador em casa com acesso à Internet; possuir conhecimentos medianos a nível de informática; nunca terem tido contacto com *software* de geometria dinâmica; que a geometria é importante; e gostar deste tema. André assinalou que gostava de trabalhar com computadores, embora raramente o fizesse, e considerou-se muito bom a matemática. De facto, segundo dados recolhidos pelo P/I, sempre teve os melhores resultados de toda a turma a matemática, manifestando uma capacidade invulgar de resolver problemas. Tadeu considerou-se razoável a matemática e afirmou gostar muito de trabalhar com o computador, o que fazia diariamente. Segundo registos do P/I, o aluno era desmotivado, só se aplicando quando as temáticas abordadas o interessavam particularmente.

Construção e aplicação de conhecimento

No início da abordagem do tema, G1 revelou desconhecer as isometrias, não tendo conseguido responder a qualquer das primeiras 4 questões do TI. Apenas tentou uma resposta à questão inicial que incidia sobre a reflexão. No entanto, revelou que desconhecia a noção de eixo de reflexão, não sendo capaz de identificar qual a figura resultante de uma reflexão de eixo oblíquo (figura 2).

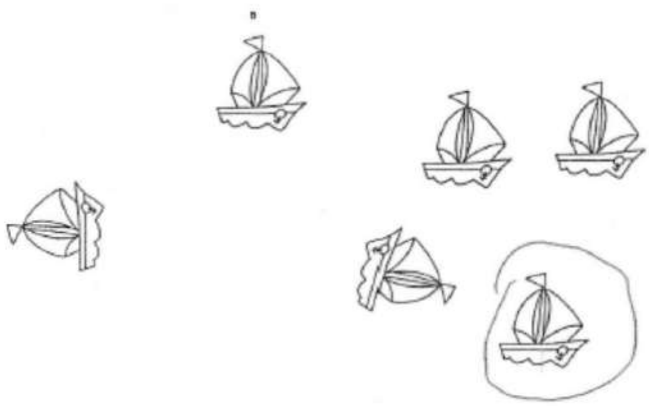
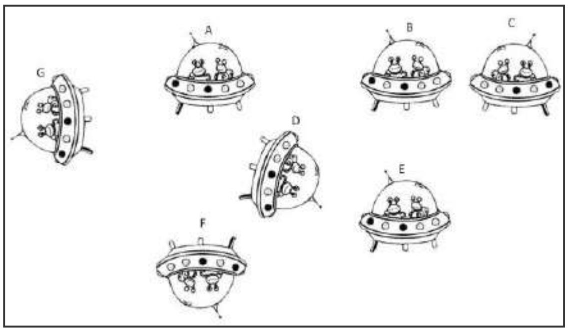


Figura 2. Resolução de G1 da questão 1 do TI

Na resolução da tarefa 1, G1 revelou confusão de conceitos relativos à reflexão. Para descrever cada um dos 'movimentos' da forma mais precisa possível, considerou que, de A para C, a nave "refletiu para a direita e deslizou 3 cm" e, de A para D, "refletiu com um eixo oblíquo e fez um ângulo obtuso". Seguiu-se um momento de apresentação das resoluções dos vários grupos e de discussão e síntese coletiva dos principais aspetos relativos a esta isometria, nas quais principalmente André se envolveu, manifestando vontade de aprender.



Relativamente à tarefa 2, G1 revelou ser capaz de identificar eixos de reflexão verticais, horizontais ou oblíquos, por recurso ao mira. No entanto, revelou dificuldades para os traçar uma vez que, na utilização da régua, não tinham em conta o afastamento provocado pela espessura do lápis, não revelando também a preocupação de, no final, verificar se as distâncias estariam corretas e a questão da perpendicularidade assegurada (ver figura 3).

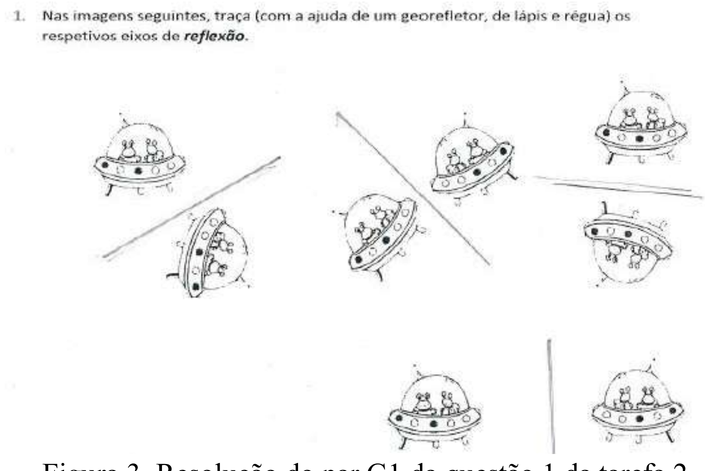


Figura 3. Resolução do par G1 da questão 1 da tarefa 2

À medida que o trabalho foi progredindo, o par foi esclarecendo algumas dúvidas tendo sido capaz de efetuar, no GeoGebra, a reflexão presente na figura 4.

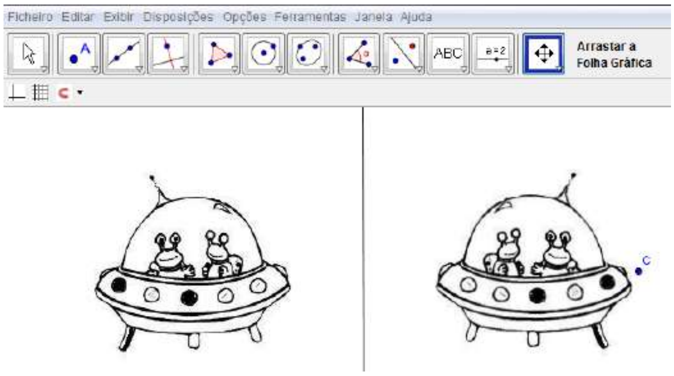


Figura 4. Resolução do par G1 da questão 2[7] da tarefa 2

Aquando do momento de apresentação dos trabalhos, o P/I aproveitou para manipular uma das construções projetadas e questionar, designadamente, acerca da distância das figuras ao eixo e da posição relativa do eixo e do segmento que une pontos correspondentes nas figuras inicial e final, tendo Tadeu e André, respetivamente, respondido corretamente.

No TF, o par resolveu a tarefa relativa à reflexão de eixo oblíquo com grande facilidade, sem hesitações e com um grau de rigor aceitável para este nível de escolaridade (ver figura 5). Recorde-se que este tipo de reflexão foi considerado como um dos que se revela mais difícil para os alunos.

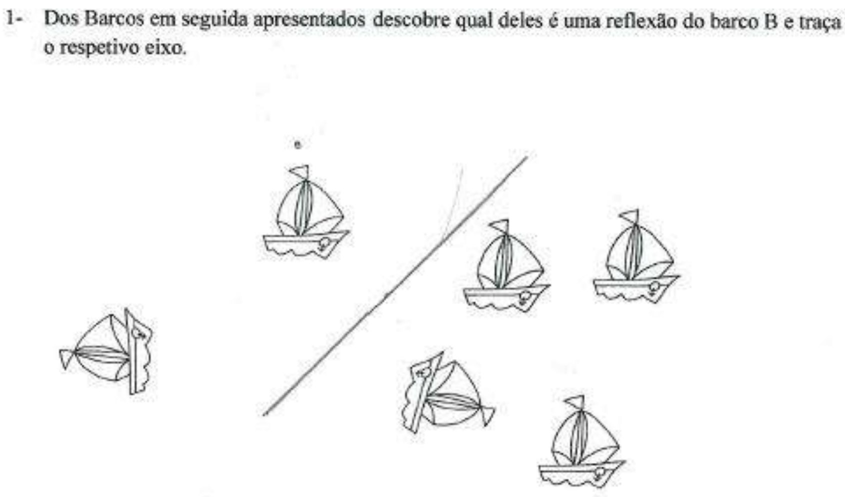


Figura 5. Resolução do par G1 da questão 1 do TF

[7] Nesta questão, pedia-se que tentassem reproduzir reflexões apresentadas na questão 1.

Além disso, revelou-se seguro na justificação da resolução, tendo mesmo explicado o porquê de as outras representações não respeitarem a reflexões. Conseguiu, ainda, identificar e descrever uma reflexão numa composição de isometrias, como se evidencia na resposta dada a outra questão do TF (ver figura 6).

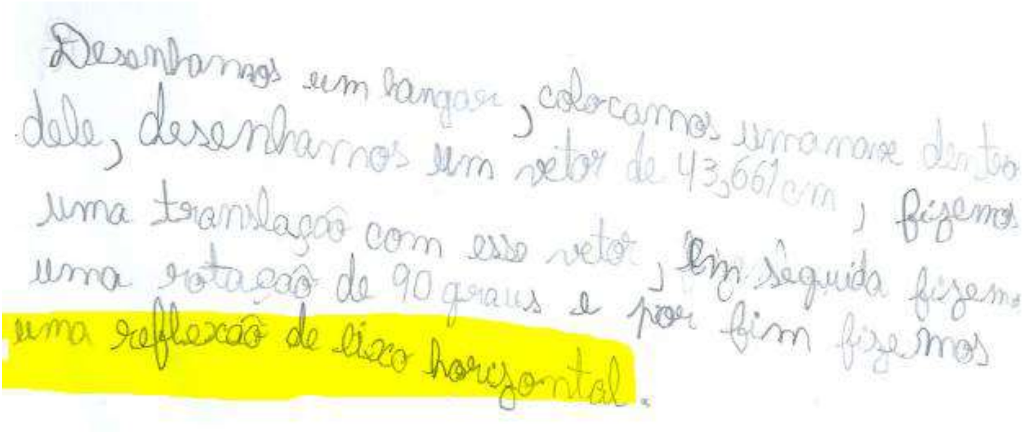

Desenhamos um hangar, colocamos uma nave dentro dele, desenhamos um vetor de 43,661cm, fizemos uma translação com esse vetor, em seguida fizemos uma rotação de 90 graus e por fim fizemos uma reflexão de eixo horizontal.

Figura 6. Resolução do par G1 da questão 6 do TF - reflexão

Relativamente à rotação, no TI, o grupo não conseguiu identificar a apresentada numa composição de isometrias (ver figura 7).

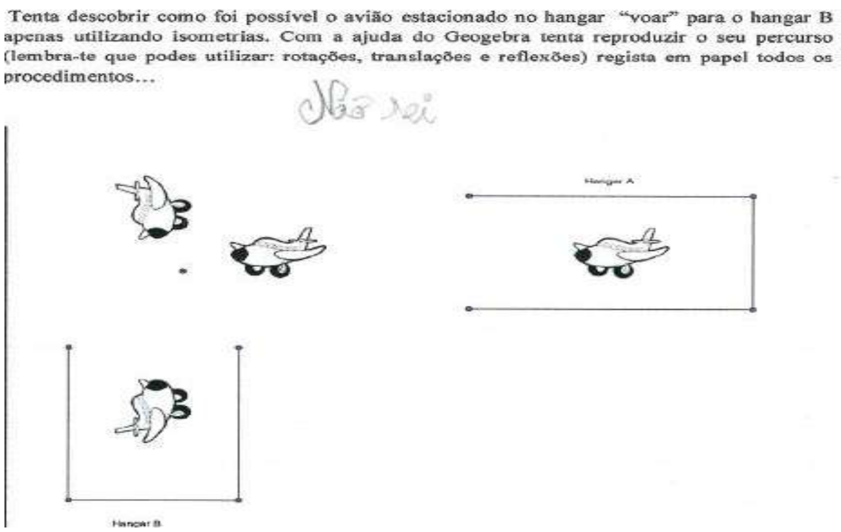


Figura 7. Resolução do grupo G1 da questão 4 do TI

Ao longo do trabalho, foi-se apropriando das noções envolvidas. Por exemplo, conseguiu identificar qual seria o resultado da aplicação de uma rotação de 180º e com o centro exterior (que alguns autores reportaram de mais difícil) à figura (bastante elaborada), esboçando prontamente a respetiva imagem, utilizando somente o lápis, como se pode ver na figura 8.

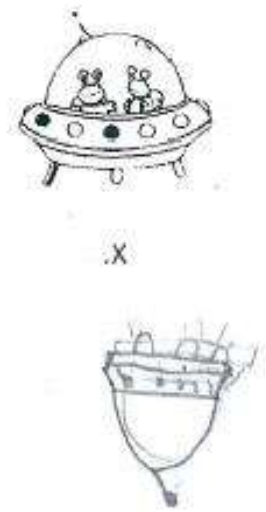


Figura 8. Resolução do grupo G1 da questão 1 da tarefa 3

No final desta tarefa, propôs-se que efetuassem diferentes rotações ou rosáceas a figuras criadas por eles, no GeoGebra. De início, G1 sentiu algumas dificuldades na construção da rosácea, pois não tinha compreendido que era necessário aplicar, sucessivamente, uma determinada rotação a cada uma das figuras resultantes. Logo que esta situação foi clarificada, conseguiu concretizar rapidamente a tarefa (figura 9).

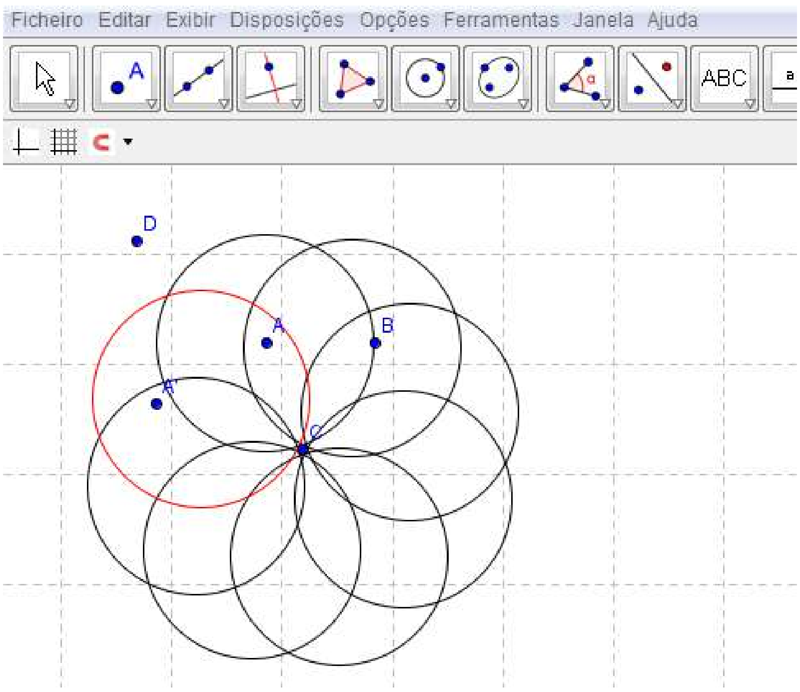


Figura 9. Trabalho do par G1 para a atividade proposta na alínea 3 da tarefa 3

No TF, o grupo melhorou o seu desempenho relativamente a esta isometria, tendo sido capaz, designadamente, de identificar e apresentar algumas características de uma rotação usada numa composição de isometrias (ver figura 10).

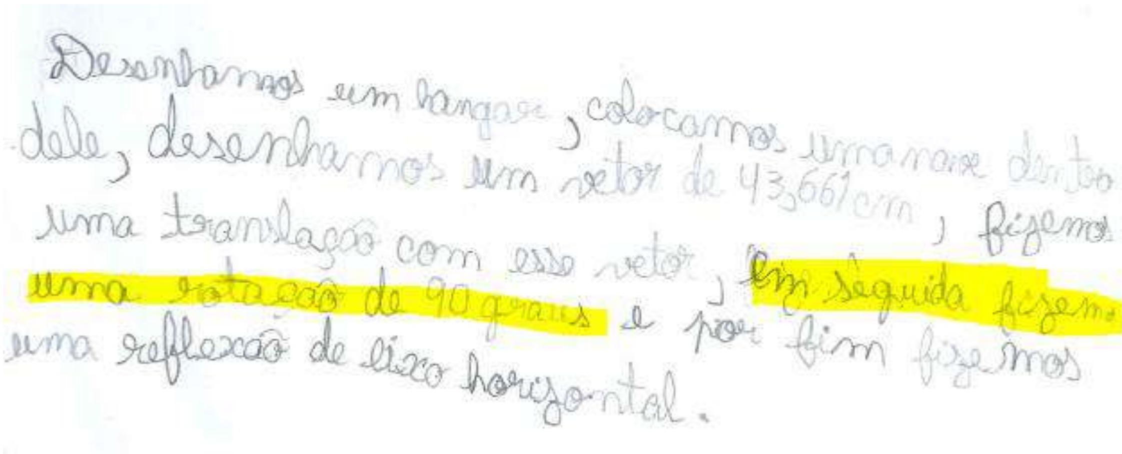


Figura 10. Resolução do par G1 da questão 6 do TF – rotação[8]

Depois de um primeiro contacto intuitivo com a translação e após alguma discussão, G1 conseguiu identificar o vetor e indicar a medida de comprimento, tendo sido apenas ajudado pelo P/I na forma de o identificar usando simbologia (ver figura 11).

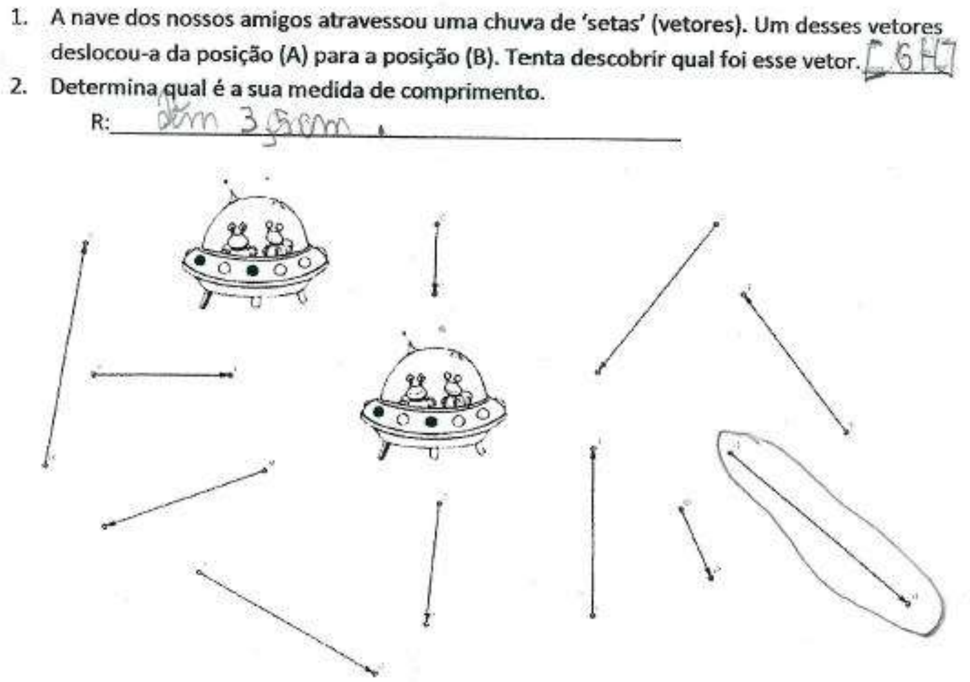


Figura 11. Resolução do par G1 das alíneas 1 e 2 da tarefa 4

O par não revelou qualquer dificuldade em efetuar uma translação com o auxílio do GeoGebra (veja-se a figura 12), não tendo solicitado qualquer tipo de ajuda.

[8] A digitalização é a mesma da figura 6 mas reporta-se a outro aspeto.

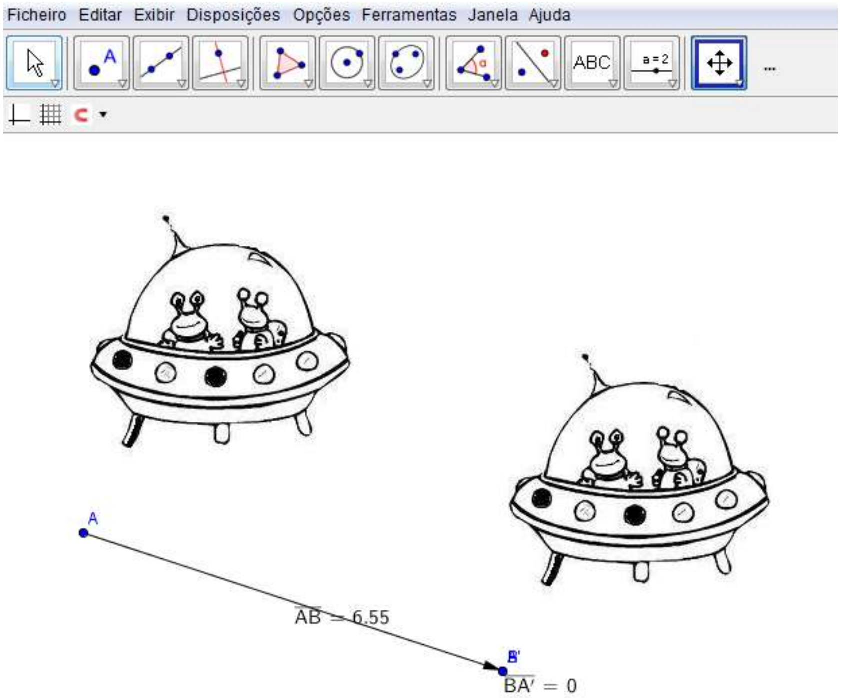


Figura 12. Resolução do grupo G1 alínea 3 da tarefa 4

No que respeita à reflexão deslizante, no início do estudo o par não respondeu a qualquer questão relacionada com este tema. Ao longo do trabalho, foi compreendendo que envolvia uma reflexão e uma translação, tendo o eixo e o vetor a mesma direção. E foi capaz de, no GeoGebra, realizar o trabalho que se apresenta na figura 13.

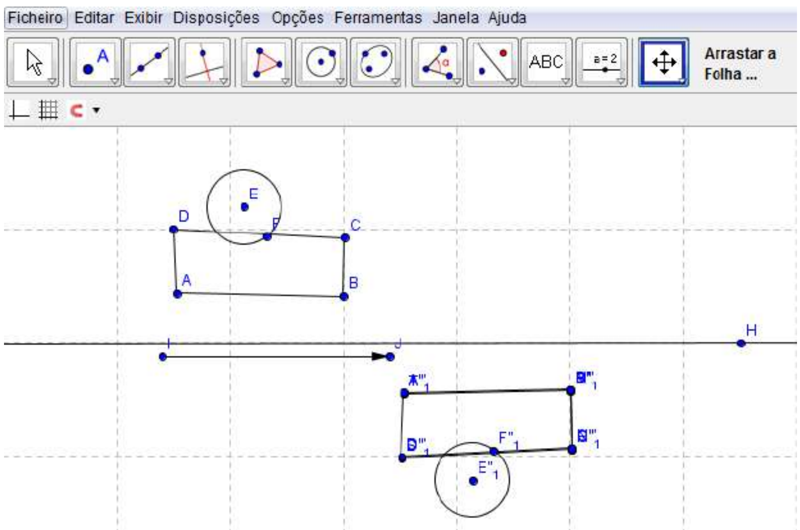


Figura 13. Resolução do par G1 da tarefa 6

À semelhança das sessões anteriores, nesta também se manipulou uma das construções projetadas e discutiram-se aspetos da sua construção, de forma a facilitar o trabalho com ‘papel e lápis’. G1 foi muito participativo.

Na fase final do estudo, foi solicitado que realizassem uma tarefa semelhante com o auxílio do papel quadriculado, o que G1 fez com sucesso[9] (figura 8).

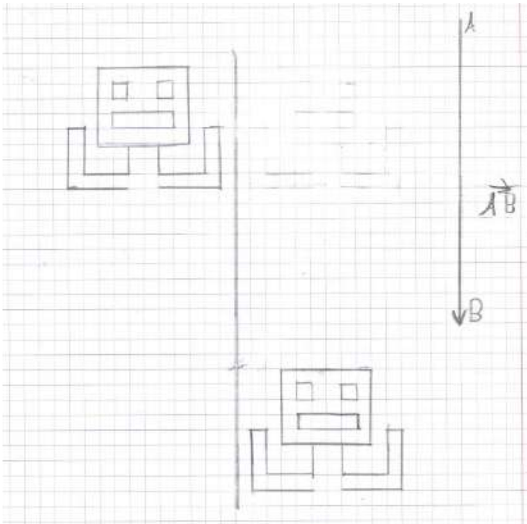


Figura 14. Resolução do par G1 par a alínea 4 da tarefa 6

No TI, nenhum aluno do par foi capaz de responder à questão colocada sobre frisos.

Na 5.ª tarefa, depois de terem criado uma imagem e um vetor, no GeoGebra, algo em que não sentiram qualquer dificuldade, o investigador exemplificou que, para a obtenção de um friso, poderiam 'aplicar', sucessivamente, o mesmo vetor à imagem resultante de cada translação. G1 compreendeu a explicação e concretizou-a (figura 15).

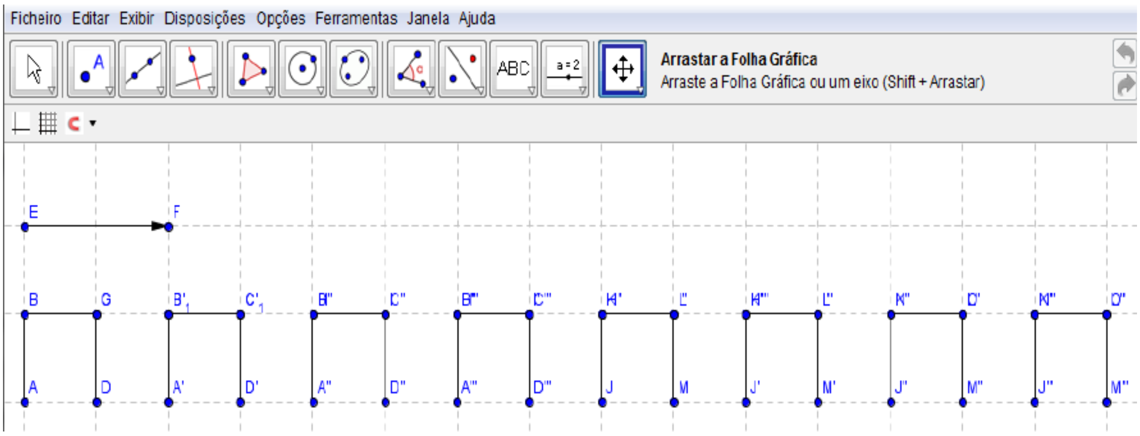


Figura 15. Resolução do par G1 da alínea 5 da tarefa 5

Mais uma vez, manipulou-se uma das imagens projetadas e discutiram-se aspetos da sua construção e de características do friso.

9 Apesar da simetria do objeto inicial, o P/I anotou no DB a correção da resolução.

No TF, embora de forma não muito clara e nem sempre utilizando as designações exatas, G1 conseguiu explicar uma forma de obter um friso, tarefa que implica já um domínio interessante dos conceitos envolvidos e que alguns autores concluíram que se revela muito difícil (figura 16).

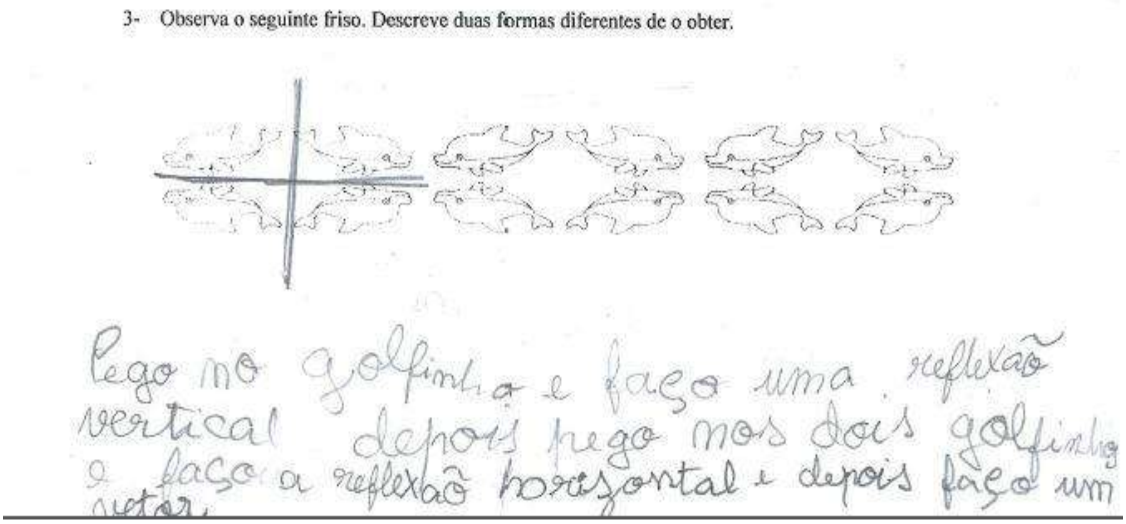


Figura 16. Resolução do par G1 da alínea 3 do TF

Assim, no que se refere à utilização do GeoGebra a par de outros materiais e ferramentas mais tradicionais para a aprendizagem das isometrias neste ciclo de ensino, parece poder concluir-se que apresenta vantagens, o que corrobora resultados idênticos obtidos por outros autores (Vieira, 2010), permitindo superar dificuldades retratadas na literatura (Coelho, 2013; Gomes, 2012; Oliveira, 2012).

Atitudes em relação à geometria

No que respeita às atitudes face à Matemática, no início do estudo, os alunos do par G1 revelaram já gostar de matemática, como referiram no QI e como o investigador registou no DB. No entanto, até ao final do mesmo, o seu interesse pela disciplina e, em particular pela Geometria, aumentou. De facto, ao longo da aplicação da sequência de tarefas, G1 mostrou-se muito empenhado na resolução e discussão de todas as propostas de trabalho, como se registou no DB, por diversas vezes. Pese embora tenha sentido algumas dificuldades na resolução de algumas tarefas, o par revelou vontade de progredir. Tal evolução concretizou-se e ficou patente no TF, onde se esforçou por resolver empenhadamente todas as questões, tendo comentado:

> André - Este teste é muito mais fácil…
> Tadeu - Nós agora já sabemos isto! E gostamos! (DB, 23-03-2012)

No QF, relativamente às ferramentas, ambos os alunos assinalaram ‘concordo’ ou ‘concordo fortemente’ com as afirmações *‘foi importante ter trabalhado com “papel e lápis”’; ‘foi importante ter utilizado outros instrumentos de medida e de desenho – régua, esquadro, compasso e transferidor’; ‘foi fácil a familiarização com o GeoGebra’; ‘Este software permite uma aprendizagem mais ativa e dinâmica da Geometria’; ‘Este software facilita o trabalho com as transformações geométricas’; ‘Este software promove a autonomia dos alunos nas aprendizagens’*.

Por fim, concordaram fortemente que a forma como trabalharam este tópico contribuiu para ‘*uma visão mais positiva da Geometria*’ e para ‘*aumentar o meu interesse pela Matemática’*.

Todas as respostas dadas apontam no sentido de que, para estes alunos, a forma como decorreu o processo de aprendizagem deste tópico, por recurso sistemático ao GeoGebra e a outros materiais e ferramentas mais tradicionais, constitui-se um fator de motivação acrescido, o que vai na mesma linha de resultados obtidos por outros investigadores (Jacinto & Carreira, 2013; Vieira, 2010).

Reflexão final

Para o par de alunos em causa, o estudo realizado, aliando a utilização do GeoGebra com outros materiais manipuláveis e ferramentas mais tradicionais, parece ter provocado um impacto positivo no conhecimento, capacidades e atitudes matemáticas, dada: i) a correção matemática que imprimiram às resoluções apresentadas; ii) a facilidade que revelaram em executar tarefas que, somente com a utilização de lápis e papel, seriam extremamente complicadas (como referido por Laborde, 2000); e iii) a motivação com que sempre o fizeram. O acréscimo de motivação tem sido frequentemente referido na literatura quando os estudos envolvem a utilização de ADGD (veja-se, p.e. Coelho, 2013). Por outro lado, notou-se que a utilização do GeoGebra contribuiu para um maior domínio das técnicas necessárias ao uso das ferramentas mais tradicionais, graças à manipulação e discussão das construções realizadas. Assim, em relação ao valor da utilização complementar da tecnologia na aprendizagem das isometrias, o investigador sente algum conforto em o confirmar sem hesitações, dado que lhe foi possível constatá-lo por observação direta, pelos registos no Diário de Bordo e através da análise ao QF.

Outro aspeto evidente neste estudo foi a evolução das atitudes dos alunos face à geometria, assumida de forma explícita pelos próprios alunos no QF.

No entanto, será necessário estudar-se estes aspetos de modo mais aprofundado e abrangente para que se possa inferir das reais vantagens de se aliarem ambientes de geometria dinâmica com tecnologias mais tradicionais.

Referências bibliográficas

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A matemática na educação básica*. Lisboa: ME.

APM (2009). *Renovação do currículo de Matemática* (ed. comemorativa). Lisboa: APM.

Bastos, R. (2007). Notas sobre o ensino da geometria – Transformações geométricas. *Educação e Matemática*, *94*, 23-27.

Berger, M. (2012). One computer-based mathematical task, different activities. In T.Y. Tso (Ed.), *Proceedings of the 36th Conf. of the Int.l Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 59-66). Taipei, Taiwan: PME.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Breda, A., Serrazina, L., Menezes, L., Sousa, L., & Oliveira, P. (2011). *Geometria e medida no ensino básico*. Lisboa: ME-DGIDC.

Brunello, P. (2010). ICT for education projects: A look from behind the scenes. *Information Technology for Development*, *16*(3), 232-239.

Cabrita, I., Almeida, J., Amaral, P., Gaspar, J., Malta, E., Nunes, M., Vizinho, I., Coelho, A., Pinheiro, J., Pinheiro, L., Sousa, O., & Vieira, C. (2013). *52 Ideias para o Professor – Matemática, 1.º Ciclo*. Porto: Porto Editora.

Cabrita, I., Almeida, J., Coelho, A., Malta, E., Vizinho, I., Almeida, J., Gaspar, J., Pinheiro, J. Nunes, M., Sousa, O., & Amaral, P. (2011). *Novos desafios para uma matemática criativa*. Aveiro: Comissão Editorial da Universidade de Aveiro.

Cabrita, I., Neto, T., Breda, A., & Santos, J. (Eds.). (2013). *Revista Indagatio Didactica*, *5*(1).

Clements, D. (2003). Teaching and learning geometry. In J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (Eds.), *Research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 151-178). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Coelho, A. (2013). *Ferramentas tecnológicas e criatividade em geometria* (Dissertação de Mestrado). Universidade de Aveiro, Aveiro, Portugal.

Costa, C. (2001). *Visualização, veículo para a educação em geometria*. Acedido em 21 março 2014 em http://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/2000/2000_08_CCosta.pdf

Costa, F. A. (2007). Tecnologias educativas. Análise das dissertações de mestrado realizadas em Portugal. *Sísifo*, *3*, 7-24.

Coutinho, C. P. (2011). *Metodologia de investigação em ciências sociais e humanas: Teoria e prática*. Coimbra: Edições Almedina.

Del Grande, J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic Teacher*, *37*(6), 14-20.

Fernandes, D. (1991). Notas sobre os paradigmas de investigação em educação. *Noesis, 18*, 64-66.

Gaspar, J. M. P. (2013). *Abordagem criativa das isometrias para a criatividade em matemática* (Dissertação de Mestrado). Universidade de Aveiro, Aveiro, Portugal.

Goldenberg, E. P., Scher, D., & Feurzeig, N. (2008). What lies behind dynamic interactive geometry software? In G.W. Blume & M. K. Heid (Eds), *Research on technology and the teaching and learning of Matematics*. *Cases and perspectives* (vol 2, pp. 53-87). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Gomes, A. (2012). Transformações geométricas: Conhecimentos e dificuldades de futuros professores. Acedido em 21 março 2014 em http://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/20835/1/Gomes_%20SIEM%20Actas_2012.pdf

Guimarães, L., Belfort, E., & Bellemain, F. (2002). *Geometry: Back to the future?* Acedido em 21 março 2014 em http://www.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/pap384.pdf

Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the international group for the psychology of mathematics education* (pp. 70-95). Cambridge: Cambridge University Press.

Hohenwarter, M. (2013). GeoGebra 4.4 – From desktops to tablets. *Revista Indagatio Didáctica*, *5*(1), 8-18.

Jacinto, H., & Carreira, S. (2013). "Ah, boa! Geometria! Vou pôr isto tudo direitinho." – Literacia tecno-matemática na resolução de problemas com o GeoGebra. Acedido em 21 março 2014 em http://www.apm.pt/files/_S5-C3-Jacinto_529d2bcb1fe6c.pdf

Jonassen, D., Howland, J., Marra, R. M., & Crismond, D. (2008). *Meaningful learning with technology* (3rd ed.). Boston: Pearson Education.

Laborde, C. (2000). Why technology is indispensable today in the teaching and learning of mathematics. Acedido em 21 março 2014 em http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.139.8182&rep=rep1&type=pdf

Lévy, P. (1990). *Les technologies de l'intelligence: L'avenir de la pensée à l'ère informatique*. Paris: Éditions La Découverte.

Ludke, M., & André, M. (1986). *Pesquisa em educação: Abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU.

Matos, J. F. (2005). *As tecnologias de informação e comunicação e a formação inicial de professores em Portugal: Radiografia da situação em 2003*. Lisboa: GIASE-ME.

Matos, L. (2011). *Abordagem das rotações centrada nos padrões – Um estudo de caso com alunos do 9.º ano* (Dissertação de Mestrado). Universidade de Aveiro, Aveiro, Portugal.

Mehanovic, S. (2009). Learning based on dynamic software GeoGebra. Acedido em 21 março 2014 em https://isis.ku.dk/kurser/blob.aspx?feltid=229084

Misfeldt, M. (2009). Semiotic instruments: Considering technology and representations as complementary. Acedido em 21 março 2014 em http://www.geogebra.org/publications/2008-Misfeldt-Cerme6.pdf

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM.

Nóvoa, A. (2009). *Professores – Imagens do futuro presente*. Lisboa: Educa.

Oliveira, M. M. (2012). *Utilização do Geogebra no tópico Reflexão, Rotação e Translação – Um estudo no 6.º ano de escolaridade* (Dissertação de Mestrado). Instituto Politécnico de Leiria, Leiria, Portugal.

Piteira, G., & Matos, J. F. (2000). *Ambientes dinâmicos de geometria como artefactos mediadores para a aprendizagem da geometria*. Acedido em 21 março 2014 em http://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/2000/2000_03_GCPiteira.pdf

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, *25*, 105-132.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, G., & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa: ME-DGIDC.

Ponte, J., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no ensino básico*. Lisboa: ME- DGIDC.

Schattschneider, D. (2009). Enumerating symmetry types of rectangle and frieze patterns: How Sherlock might have done it. In T. Craine (Ed.), *Understanding geometry for a changing world – Seventy-first yearbook* (pp. 17-32). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Serrazina, L., Lopes A., Oliveira H., Sousa, H., Segurado, M., Teixeira, P., Carrapiço, R., & Candeias, R. (2010). *Metas de aprendizagem*. Lisboa: DGE-MEC.

Silva, G. (2012). Ambientes de geometria dinâmica: Potencialidades e imprevistos. *R.B.E.C.T.*, 5(1), 16-38.

Veloso, E. (1999). Ensino da geometria: Ideias para um futuro melhor. In E. Veloso, H. Fonseca, J. P. Ponte & P. Abrantes (Orgs.), *Ensino da geometria no virar do milénio* (pp.17-32). Lisboa: Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Veloso, E. (2012). *Simetria e transformações geométricas*. Lisboa: APM.

Viana, O. (2004). *As atitudes de alunos do ensino médio em relação à geometria: Adaptação e validação de escala*. Acedido em 21 março 2014 em http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/03/CC00596629800.pdf

Vieira, S. D. P. (2010). *Decorar a minha escola – Tecnologias informáticas e padrões geométricos* (Dissertação de Mestrado). Universidade de Aveiro, Aveiro, Portugal.

Resolução de problemas do campo aditivo: Um estudo sobre dados quantitativos de uma pesquisa

José Fernando Fernandes Pereira[1], *Edda Curi*[2]
[1]Universidade Cruzeiro do Sul, jnandopereira@gmail.com
[2]Universidade Cruzeiro do Sul, edda.curi@gmail.com

Resumo. *O presente texto tem por objetivo identificar saberes e dificuldades apresentados por alunos de uma escola pública da rede estadual da cidade de São Paulo, durante a resolução de problemas do campo aditivo. Os problemas propostos envolvem as relações de base expressas na Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud, ajustados para o ano pesquisado e buscando estabelecer quais são os principais dificultadores na resolução dos problemas no que refere à ideia envolvida e à localização do termo desconhecido. Como pesquisa documental, a partir dos protocolos dos alunos, os dados foram categorizados com o propósito de investigar as principais dificuldades na identificação da operação que resolve o problema. Algumas situações apresentam-se como desafiadoras e suas causas são abordadas com base no referencial teórico utilizado.*

Abstract. *This text aims to identify knowledge and difficulties presented by students of public school State network of São Paulo during the troubleshooting of the additive. The proposed issues involve basic relations expressed in the theory of Conceptual Fields of Gérard Vergnaud, adjusted for the year researched and seeking to establish what are the key process in the resolution of problems in regard to the idea involved and the location of unknown term. As desk research, from the protocols of the students, the data were categorized with the purpose of investigating the main difficulties in the identification of the operation which solves the problem. Some are challenging situations and their causes are addressed on the basis of the theoretical framework used.*

Palavras-chave: Teoria dos campos conceituais; Resolução de problemas; Congruência semântica.

Introdução

Participo de um grupo de pesquisa, na cidade de São Paulo, que desenvolve, desde 2010, o Projeto "Prova Brasil de Matemática: revelações, possibilidades de avanços nos saberes de alunos de 5º ano e indicativos para a formação de professores". Sou bolsista CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, e tenho minha pesquisa de mestrado enraizada nas discussões promovidas no grupo, pela abordagem teórica de conceitos e pela criação de sequências de problemas que permitiram identificar saberes e dificuldades que os alunos de 5º ano revelam, quando resolvem problemas do Campo Aditivo.

Dentre as seis escolas participantes do Projeto, escolhi, para minha pesquisa, a que envolvia a maior quantidade (seis) de salas de 5º ano, permitindo um considerável espaço amostral (189 alunos) para análise. É uma escola pública da rede estadual, na cidade de São Paulo, com duas professoras de 5º ano envolvidas no Projeto e que se disponibilizaram a mobilizar as colegas das outras salas a participarem da pesquisa.

O texto para esta comunicação é fruto dos estudos realizados para escrever minha dissertação de mestrado e apresenta apenas a análise das respostas dadas pelos alunos no que refere à identificação (ou não) da operação que resolve o problema. A análise relativa aos procedimentos por eles desenvolvidos, apesar de não ser objeto deste texto, é parte integrante da dissertação.

Contextualização

O grupo de pesquisa se reune a cada quinze dias com o objetivo de analisar o currículo prescrito, o apresentado, o praticado e o avaliado nos vários temas do ensino de matemática e, em seguida, levados para a escola, pelas professoras, para serem, posteriormente, analisados na pesquisa. Faz parte desse projeto a análise da Prova Brasil, no que refere aos seus objetivos e itens de avaliação. No nosso país, a Prova Brasil faz parte do Sistema de Avaliação da Educação Básica – SAEB, uma avaliação em larga escala, censitária, destinada a alunos de 5º ano e 9º ano do Ensino Fundamental e 3º ano do Ensino Médio. Em um primeiro momento, os itens são analisados pelo grupo. Em seguida, são construídas questões abertas baseadas nos itens de avaliação para que as crianças resolvam. Após essa discussão, é preparada uma sequência de atividades para desenvolvimento em sala de aula e intervenção dos professores.

Para nossa pesquisa foram elaboradas, pelo grupo, sequências de problemas que envolvessem as mesmas habilidades requeridas na Prova Brasil. A cada reunião foram discutidas as sequências de problemas relativos às relações de base do campo aditivo, segundo a Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud (1996). Essas sequências foram ajustadas, após negociação, em relação ao contexto, à forma final de escrita do enunciado e, principalmente, à ordem de grandeza dos números. Após o ajuste foram desenvolvidas com os alunos e analisadas por nós.

O campo conceitual aditivo

Para a elaboração dos problemas usamos, como Fundamentação Teórica, os estudos de Vergnaud sobre o Campo Conceitual Aditivo que serão apresentados a seguir. Para a análise dos dados utilizamos, também, outros pesquisadores que discutem a resolução de problemas de adição e subtração. Trechos de estudos desses pesquisadores serão citados no decorrer das nossas análises.

Segundo Vergnaud (1996), o campo conceitual das estruturas aditivas é o conjunto das situações cujo tratamento implica uma ou várias adições e subtrações, agregado ao conjunto dos conceitos e teoremas que permitem analisar tais situações como tarefas matemáticas e representado pelo conjunto dos símbolos que dão sentido ao tratamento da situação. O aluno deve construir a base para as relações com novas situações por meio dos domínios constituídos nas primeiras situações enfrentadas.

Vergnaud (1996) classifica as seguintes relações de base, na estrutura aditiva:

- Composição de duas medidas em uma terceira;
- Transformação (quantificada) de uma medida inicial em uma medida final;
- Relação (quantificada) de comparação entre duas medidas;
- Composição de duas transformações;
- Transformação de uma relação;
- Composição de duas relações.

A seguir apresentamos uma forma sucinta de reconhecer as relações aditivas de base, expressas por Vergnaud (1996).

A ideia de composição está relacionada ao espaço e acontece no mesmo ambiente. São elencados o todo e suas partes e, assim, trabalhadas as relações entre eles. Já a ideia de transformação está relacionada ao tempo, de modo que, a partir de uma situação, ocorre uma ação que a transforma em uma nova situação. São elencados dois estados (inicial e final) e uma ação que transforma um no outro. A ideia de comparação está associada à quantidade, ou seja, quanto a mais ou a menos uma medida tem em relação à outra. São elencados dois valores (de referência e referido) e uma relação entre eles. Diz-se que a comparação é positiva quando o valor referido é maior que o valor de referência e a comparação é negativa quando o valor referido é menor que o valor de referência. A ideia de composição de duas transformações está, também, relacionada com o tempo (não necessariamente dois tempos distintos), de forma que, a partir de uma situação, ocorre uma ação que a transforma e, a seguir, uma nova ação que a transforma outra vez. No caso da composição de duas transformações, pode ocorrer dos estados inicial e final não interessarem à resolução do problema. Isso se dá quando a pergunta do problema refere-se a uma das transformações ou à composição das duas transformações.

A quinta categoria refere-se a uma transformação que opera sobre um estado relativo e a sexta categoria à composição de dois estados relativos em um estado relativo, envolvendo subclasses mais numerosas e considerando as possibilidades que existem para o sinal do número e o valor absoluto, segundo Vergnaud (2009). Considerando que, na fase escolar em que foi realizada a pesquisa, as crianças não conhecem os números inteiros, essas duas relações de base não foram utilizadas.

Metodologia de pesquisa

Trata-se de uma pesquisa documental, pois nossa busca é feita em documentos primários, ou seja, que não receberam tratamento científico anterior a sua utilização na pesquisa em questão, conforme Oliveira (2012). No caso de nossa pesquisa, os documentos se referem aos protocolos dos alunos, nos quais eles resolvem os problemas propostos, deixando todos os caminhos utilizados na resolução vísíveis para nossa pesquisa.

Em cada uma das relações de base estudadas (composição, transformação positiva, transformação negativa, comparação positiva e comparação negativa) destacamos três situações de busca pelo termo desconhecido (estado inicial, estado intermediário e estado final). Isso nos conduz ao estudo de 5 X 3 X 189 = 2835 protocolos. Indicamos por estado final “o todo”, na composição; “o valor transformado”, na transformação; e “a relação entre as medidas”, na comparação. Os protocolos dos alunos foram organizados por problema e categorizados, segundo a identificação (ou não) da operação que resolvia o problema. A partir dessa organização, inferimos quatro categorias de análise:

- Identificaram a operação que resolve o problema;
- Não identificaram a operação que resolve o problema;
- Não resolveram;
- Apenas colocaram a resposta.

Esses dados são o objeto de estudo para este texto.

Apresentação dos dados da pesquisa por tipo de problema

Na sequência, apresentaremos os dados da pesquisa, tabulados segundo as categorias preestabelecidas, sequencialmente dispostas, conforme os problemas relativos às ideias classificadas por Vergnaud foram sendo aplicados.

Composição

Busca do Estado Final

Problema proposto: Numa festa de aniversário havia 1120 brigadeiros e 1285 beijinhos. Quantos doces havia nessa festa?

Tabela 1. Dados quantitativos (estado final) – composição

Categorias	Frequência	Freq. Relativa
Identificaram a operação que resolve o problema	157	91,3%
Não identificaram a operação que resolve o problema	5	2,9%
Não resolveram	2	1,1%
Apenas colocaram a resposta	8	4,7%
Σ	172	100%

Fonte: Dados coletados pelo pesquisador

Busca do Estado Intermediário

Problema proposto: Na festa da Escola Pinguinho há 1250 doces, sendo 810 brigadeiros e os demais beijinhos. Quantos são os beijinhos?

Tabela 2. Dados quantitativos (estado intermediário) – composição

Categorias	Frequência	Freq. Relativa
Identificaram a operação que resolve o problema	97	56,4%
Não identificaram a operação que resolve o problema	64	37,2%
Não resolveram	2	1,2%
Apenas colocaram a resposta	9	5,2%
Σ	172	100%

Fonte: Dados coletados pelo pesquisador

Busca do Estado Inicial

Problema proposto: Numa festa de casamento há alguns brigadeiros e 723 beijinhos. No total são 1335 doces. Quantos são os brigadeiros?

Tabela 3. Dados quantitativos (estado inicial) – composição

Categorias	Frequência	Freq. Relativa
Identificaram a operação que resolve o problema	91	52,9%
Não identificaram a operação que resolve o problema	68	39,5%
Não resolveram	2	1,2%
Apenas colocaram a resposta	11	6,4%
Σ	172	100%

Fonte: Dados coletados pelo pesquisador

Considerações sobre a ideia de composição

Os dados da pesquisa mostram que as crianças não encontram dificuldade em resolver os problemas de composição quando a busca é pelo estado final (o todo). Percebemos uma sensível diferença nos resultados da pesquisa quando a busca é pelos estados intermediário ou inicial (as partes). As professoras relataram que não requerem, habitualmente, de seus alunos que resolvam problemas onde a busca é pelo estado intermediário ou pelo estado inicial.

Segundo Magina, Campos, Nunes, & Citirana, V (2008), os problemas de composição em que as duas partes do todo são dadas e é pedido que se encontre o todo (Tabela 1) constituem os primeiros problemas que a criança domina, não apresentando dificuldade em resolvê-los, até antes dos seis anos, tornando-se a primeira representação de adição que ela forma. Sua solução é, em geral, associada ao processo de contagem. Os problemas em que são dados o todo e uma das partes e é pedido que se encontre a outra parte (Tabela 2 e Tabela 3) constituem uma extensão do problema anterior, e sua solução envolve a operação subtração, desconstruindo a ideia de que a situação parte-todo está sempre relacionada com a operação adição. Algumas vezes é resolvido com o procedimento da complementação (Magina et al., 2008).

Transformação positiva

Busca do Estado Final

Problema proposto: Marcos coleciona figurinhas. Ele tem 1538 figurinhas e ganhou 71 de seu tio. Com quantas figurinhas ele ficou?

Tabela 4. Dados quantitativos (estado final) – transformação positiva

Categorias	Frequência	Freq. Relativa
Identificaram a operação que resolve o problema	164	86,8%
Não identificaram a operação que resolve o problema	8	4,2%
Não resolveram	2	1,1%
Apenas colocaram a resposta	15	7,9%
Σ	189	100%

Fonte: Dados coletados pelo pesquisador

Busca do Estado Intermediário (a transformação)

Problema proposto: Marcos tinha 1609 figurinhas. Ganhou algumas e ficou com 1651. Quantas figurinhas Marcos ganhou?

Tabela 5. Dados quantitativos (estado intermediário) – transformação positiva

Categorias	Frequência	Freq. Relativa
Identificaram a operação que resolve o problema	112	59.3%
Não identificaram a operação que resolve o problema	56	29,6%
Não resolveram	1	0,5%
Apenas colocaram a resposta	20	10,6%
Σ	189	100%

Fonte: Dados coletados pelo pesquisador

Busca do Estado Inicial

Problema proposto: Marcos tinha algumas figurinhas. Ganhou 140 e ficou com 1724. Quantas figurinhas ele tinha inicialmente?

Tabela 6. Dados quantitativos (estado inicial) – transformação positiva

Categorias	Frequência	Freq. Relativa
Identificaram a operação que resolve o problema	105	55,5%
Não identificaram a operação que resolve o problema	57	30,2%
Não resolveram	4	2,1%
Apenas colocaram a resposta	23	12,2%
Σ	189	100%

Fonte: Dados coletados pelo pesquisador

Transformação negativa

Busca do Estado Final

Problema proposto: Tiago coleciona figurinhas. Ele tinha 1550 figurinhas, mas perdeu 55. Quantas figurinhas Tiago tem agora?

Tabela 7. Dados quantitativos (estado final) – transformação negativa

Categorias	Frequência	Freq. Relativa
Identificaram a operação que resolve o problema	144	76,2%
Não identificaram a operação que resolve o problema	24	12,7%
Não resolveram	2	1,1%
Apenas colocaram a resposta	19	10,0%
Σ	189	100%

Fonte: Dados coletados pelo pesquisador

Busca do Estado Intermediário (a transformação)

Problema proposto: Tiago tinha 1605 figurinhas. Deu algumas para seu irmão e ficou com 1522. Quantas figurinhas ele deu para o irmão?

Tabela 8. Dados quantitativos (estado intermediário) – transformação negativa

Categorias	Frequência	Freq. Relativa
Identificaram a operação que resolve o problema	140	74,1%
Não identificaram a operação que resolve o problema	28	14,8%
Não resolveram	4	2,1%
Apenas colocaram a resposta	17	9,0%
Σ	189	100%

Fonte: Dados coletados pelo pesquisador

Busca do Estado Inicial

Problema proposto: Tiago tinha algumas figurinhas. Perdeu 193 e ficou com 1401. Quantas figurinhas ele tinha inicialmente?

Tabela 9. Dados quantitativos (estado inicial) – transformação negativa

Categorias	Frequência	Freq. Relativa
Identificaram a operação que resolve o problema	91	48,1%
Não identificaram a operação que resolve o problema	70	37,1%
Não resolveram	5	2,6%
Apenas colocaram a resposta	23	12,2%
Σ	189	100%

Fonte: Dados coletados pelo pesquisador

Considerações sobre a ideia de transformação

Os dados da pesquisa mostram que as crianças não encontram dificuldade em resolver os problemas de transformação quando a busca é pelo estado final. Percebemos uma sensível diferença nos resultados da pesquisa quando a busca é pelo estado intermediário (a transformação) ou pelo estado inicial.

A influência da congruência semântica (quando a ação sugere a operação que resolve o problema) é claramente observada nos problemas em que se procura o valor intermediário (a transformação), como mostram a Tabela 5 e a Tabela 8. A Tabela 5 representa um problema em que há "ganho de figurinhas" e a operação que resolve o problema é uma subtração e indica apenas 59,3% dos alunos identificando a operação. A tabela 8 representa um problema em que há "perda de figurinhas" e a operação que resolve o problema é uma subtração e indica 74,1% dos alunos identificando a operação. A diferença entre os percentuais de acerto se dá pela falta de congruência semântica na situação representada na Tabela 5.

Para as situações de transformação (positiva ou negativa), crianças de sete anos já não devem ter dificuldade na resolução dos problemas em que são dados o estado inicial e uma transformação (de ganho ou de perda) e é pedido o estado final. A associação de "ganho" com a operação adição e a de "perda" com a operação subtração, além da situação de juntar partes, são adquiridas antes do início da educação formal, a partir da experiência do dia-a-dia da criança (Magina et al, 2008). Nesse sentido, Van de Walle (2009) sugere que os problemas devam ser expressos em forma de equação semântica, enquanto as crianças trabalham com números de pequena ordem de grandeza, para que possam ser escritas as respectivas equações equivalentes, facilitando a verificação da equivalência.

No problema relativo à Tabela 5, temos 1609 + ? = 1651 como equação semântica e 1651 – 1609 = ? como equação equivalente. No problema relativo à Tabela 8, temos 1605 - ? = 1522 como equação semântica e 1605 – 1522 = ? como equação equivalente. Nos problemas em que se busca o estado inicial, Chapin & Johnson (2006) enfatizam que é importante notar se o aluno sabe representar a expressão numérica corretamente e se consegue pensar numericamente como encontrar a resposta, uma vez que a ação de "ganhar" será resolvida por uma subtração, enquanto a ação de "perder" será resolvida por uma adição. Novamente, a falta de congruência semântica provocou baixos índices na identificação da operação que resolve o problema: 55,5%%, na Tabela 6 e 48,1%, na Tabela 9.

Comparação positiva

Busca da relação entre as medidas

Problema proposto: João e Pedro colecionam chaveiros. João tem 607 e Pedro 528. Quantos chaveiros João tem a mais que Pedro?

Tabela 10. Dados quantitativos (relação entre as medidas) – comparação positiva

Categorias	Frequência	Freq. Relativa
Identificaram a operação que resolve o problema	113	68,9%
Não identificaram a operação que resolve o problema	31	18,9%
Não resolveram	0	0%
Apenas colocaram a resposta	20	12,2%
Σ	164	100%

Fonte: Dados coletados pelo pesquisador

Busca do valor referente

Problema proposto: Lucas tem alguns chaveiros e Ricardo tem 210. Se Ricardo tem 80 chaveiros a mais que Lucas, quantos chaveiros tem Lucas**?**

Tabela 11. Dados quantitativos (valor referente) – comparação positiva

Categorias	Frequência	Freq. Relativa
Identificaram a operação que resolve o problema	80	48,8%
Não identificaram a operação que resolve o problema	66	40,2%
Não resolveram	0	0%

Apenas colocaram a resposta	18	11,0%
Σ	164	100%

Fonte: Dados coletados pelo pesquisador

Busca do valor referido

Problema proposto: Fábio tem 420 chaveiros e Camila tem 185 a mais que Fábio. Quantos chaveiros tem Camila?

Tabela 12. Dados quantitativos (valor referido) – comparação positiva

Categorias	Frequência	Freq. Relativa
Identificaram a operação que resolve o problema	108	65,9%
Não identificaram a operação que resolve o problema	42	25,6%
Não resolveram	0	0%
Apenas colocaram a resposta	14	8,5%
Σ	164	100%

Fonte: Dados coletados pelo pesquisador

Comparação negativa

Busca da relação entre as medidas

Problema proposto: João e Pedro colecionam chaveiros. João tem 1393 e Pedro 1268. Quantos chaveiros Pedro tem a menos que João?

Tabela 13. Dados quantitativos (relação entre as medidas) – comparação negativa

Categorias	Frequência	Freq. Relativa
Identificaram a operação que resolve o problema	140	82,9%
Não identificaram a operação que resolve o problema	10	5,9%
Não resolveram	3	1,8%
Apenas colocaram a resposta	16	9,4%
Σ	169	100%

Fonte: Dados coletados pelo pesquisador

Busca do valor referente

Problema proposto: Lucas tem alguns chaveiros e Ricardo tem 815. Se Ricardo tem 112 chaveiros a menos que Lucas, quantos chaveiros tem Lucas?

Tabela 14. Dados quantitativos (valor referente) – comparação negativa

Categorias	Frequência	Freq. Relativa
Identificaram a operação que resolve o problema	52	30,8%
Não identificaram a operação que resolve o problema	97	57,4%
Não resolveram	4	2,4%
Apenas colocaram a resposta	16	9,4%
Σ	169	100%

Fonte: Dados coletados pelo pesquisador

Busca do valor referido

Problema proposto: Fábio tem 743 chaveiros e Camila tem 102 a menos que Fábio. Quantos chaveiros tem Camila?

Tabela 15. Dados quantitativos (valor referido) – comparação negativa

Categorias	Frequência	Freq. Relativa
Identificaram a operação que resolve o problema	128	75,7%
Não identificaram a operação que resolve o problema	21	12,5%
Não resolveram	6	3,5%
Apenas colocaram a resposta	14	8,3%
Σ	169	100%

Fonte: Dados coletados pelo pesquisador

Considerações sobre a ideia de comparação

Os dados da pesquisa mostram que as crianças encontraram sua maior dificuldade em resolver os problemas relativos a essa ideia, principalmente, quando a busca é pelo valor referente, na comparação negativa, situação que apresenta o mais baixo percentual (30,8%) de crianças que identificaram a operação que resolve o problema. Também na comparação positiva, quando se busca o valor referente, a pesquisa apresenta baixo percentual (48,8%) de crianças que identificaram a operação que resolve o problema.

Quando se busca a relação entre as medidas, independente de ser comparação positiva ou negativa, a operação que resolve o problema é sempre uma subtração, ocasionando a falta de congruência semântica, no caso de ser comparação positiva. Encontramos nessa justificativa, referendada por Van de Walle (2009), a diferença apresentada entre a

Tabela 10 (Transformação positiva – 68,9%) e a Tabela 13 (Transformação negativa – 82,9%).

Magina et al. (2008) consideram que, embora os problemas de comparação positiva e comparação negativa se refiram a representações diferentes, quando se busca o valor referido, as pesquisas mostram que as crianças resolvem ambos, mais ou menos com a mesma idade. Afirmam, ainda, que na situação em que se busca a relação entre as medidas, é importante que a criança entenda que a pergunta se refere à diferença entre as quantidades.

Considerações finais

Ficou evidenciado que a busca pelo estado final é o tipo de problema que torna mais visível ao aluno a identificação da operação que o resolve. As professoras declararam ser esse o tipo de problema mais proposto a seus alunos, em sala de aula, tanto por elas como pelos livros didáticos. Nesse mesmo sentido, de frequência na resolução, confessaram propor mais problemas de composição e transformação do que de comparação. Nossa pesquisa corrobora tal afirmação, na leitura dos resultados apresentados.

Outra evidência é a dificuldade na identificação da operação que resolve o problema quando não há congruência semântica entre o enunciado e essa operação. O resultado se agrava quando há intercorrência das dificuldades expostas acima, haja vista a baixa frequência na Tabela 14, que retrata um problema que busca o valor referente (não é o valor final, como de costume); é um problema de comparação (pouco exigido em sala de aula) e, também, não há congruência semântica entre o enunciado e a operação que resolve o problema (no enunciado há a expressão "tem a menos", enquanto a operação necessária para resolver o problema é uma adição). Acreditamos, como Chapin & Johnson (2006), que o procedimento mais eficiente, na resolução de um problema referente à estrutura do campo aditivo, seja reconhecer a ação correspondente à situação, representar a expressão numérica correspondente à situação e pensar numericamente como encontrar a resposta.

É do nosso entendimento que algumas situações podem ser generalizadas, evitando, assim, dificuldades na identificação da operação que resolve o problema. Uma dessas situações é representada pela ideia de transformação, quando se busca o estado intermediário, ou seja, o valor da transformação. Sem importar se houve "ganho" ou “perda”, o valor da transformação é sempre a diferença entre os valores apresentados no problema e diferença é resultado de subtração, o que permite isentar o aluno da possibilidade do confronto com a falta de congruência semântica. Outra situação é representada pela ideia de comparação, seja positiva ou negativa, quando se busca a relação entre as medidas. Sem importar se um “tem a mais” ou “tem a menos” que o outro, o valor da relação entre as medidas é sempre a diferença entre os valores apresentados no problema e, portanto, o resultado da subtração entre eles. Com esse raciocínio, a falta de congruência semântica pode não interferir no resultado. As duas situações apresentadas acima podem ser resolvidas, primeiramente, com números de pequena ordem de grandeza, conforme Magina et al. (2008), permitindo ao aluno validar o resultado e, posteriormente, valer-se dessa estratégia de ação, como eficiente, na busca de estender seu raciocínio e ampliar conceitos envolvidos nas estruturas aditivas.

Observamos a importância da participação das professoras envolvidas no projeto, no que tange à formação continuada a que se propuseram, demonstrando, no decorrer das atividades, capacidade na elaboração de sequências de problemas que contemplem todas as relações de base do campo aditivo e com variadas localizações do termo desconhecido, possibilitando, dessa forma, que seus alunos pudessem adquirir habilidades, anteriormente inatingíveis.

Referências bibliográficas

Chapin, S. H., & Johnson, A. (2006). *MathMatters*. Sausalito, CA: MathSolutions.

Curi, E. (2010) *Projeto Prova Brasil de Matemática: Revelações, possibilidades de avanços nos saberes de alunos de 4ª série/5º ano e indicativos para formação de professores*. São Paulo: CAPES.

Magina, S., Campos, T., Nunes, T., & Citirana, V. (2008). *Repensando adição e subtração: Contribuições da teoria dos campos conceituais* (3ª ed.). São Paulo: PROEM.

Oliveira, M. M. (2012). *Como fazer pesquisa qualitativa* (4ª ed.). Petrópolis: Vozes.

Van de Walle, J. A. (2009). *Matemática no ensino fundamental – Formação de professores e aplicação em sala de aula* (6ª ed.). Porto Alegre: Artmed.

Vergnaud, G. (1996). A teoria dos campos conceituais. In J. Brun (Dir.), *Didácticas das Matemáticas*. Lisboa: Instituto Piaget.

Vergnaud, G. (2009). *A criança, a matemática e a realidade: Problemas do ensino da matemática na escola elementar*. Curitiba: UFPR.

Etnomatemática em uma comunidade quilombola

José Roberto Linhares de Mattos[1], *Elma Daniela Bezerra Lima*[2]
[1]Universidade Federal Fluminense (Brasil), jrlinhares@vm.uff.br
[2]Instituto Federal do Amapá (Brasil), elma.lima@ifap.edu.br

Resumo. *Este trabalho é parte de uma pesquisa desenvolvida em uma comunidade quilombola na cidade de Macapá, no Estado do Amapá, no Brasil. Nosso objetivo é mostrar como os processos de produção e comercialização de farinha podem se relacionar com os conteúdos ministrados durante as aulas de matemática. Procuramos descrever o modo como o professor de matemática da escola da comunidade pode ministrar suas aulas, buscando aproximar a escola do dia a dia dos moradores da comunidade, fazendo com que os alunos participem de atividades desenvolvidas na escola que se fundamentam nas concepções da etnomatemática. Mais precisamente, mostramos uma atividade, realizada com os alunos do 9º ano do ensino fundamental da escola da comunidade, que envolveu todo o processo de produção e comercialização da farinha produzida pelos moradores da comunidade.*

Abstract. *This work is part of a research carried out in a maroon community in Macapa city, in Amapa state, Brazil. Our goal is to show how the processes of production and marketing of flour can relate to content taught during mathematics lessons. We have described how the mathematics teacher of the school of the community can teach his classes, seeking to approach the school of the daily of community residents, making students participate in school activities that are based on conceptions of the ethnomathematics. More precisely, we show an activity conducted with students in the 9th grade of elementary teaching of community school, which involved the whole process of production and marketing of flour produced by the residents of the community.*

Palavras-chave*:* Etnomatemática; Comunidade quilombola; Ensino de matemática; Curiaú.

Introdução

Neste artigo abordamos a etnomatemática presente no processo de produção e comercialização de farinha, que é uma atividade laboral dos moradores de uma comunidade quilombola do Brasil, denominada comunidade quilombola do Curiaú. Para isso, descrevemos uma atividade escolar que envolveu todo o processo citado. A atividade foi desenvolvida no decorrer das aulas de matemática da escola de ensino fundamental localizada dentro da comunidade, da qual participaram os alunos do 9º ano desta escola.

O objetivo foi mostrar como uma atividade (neste caso, o processo de produção e comercialização da farinha) que faz parte do dia a dia de uma comunidade pode ser relacionada a conteúdos ministrados nas aulas de matemática na escola da comunidade. O trabalho encontra-se estruturado em cinco seções. Na primeira seção apresentamos as comunidades quilombolas do Brasil. Na segunda seção descrevemos a Comunidade Quilombola do Curiaú. Na terceira seção descrevemos a metodologia utilizada na pesquisa. Na quarta seção apresentamos a escola dessa comunidade quilombola. Na quinta seção contamos como ocorrem os processos de ensino e de aprendizagem de matemática na escola da comunidade do Curiaú. E na sexta seção mostramos o processo de produção de farinha.

Finalmente, apresentamos as nossas considerações finais, onde mostramos a relevância dos resultados, que acreditamos possa contribuir para que entendamos as relações existentes entre a atividade desenvolvida pelos moradores de uma comunidade e a escola, associando essa relação com o ensino de matemática e o modo como o professor de matemática dessa escola consegue planejar e ministrar os conteúdos das suas aulas, de acordo com o que está proposto nas Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação das Relações Étnico-raciais e para o Ensino de História e Cultura Afro-Brasileira e Africana, conforme o que é estabelecido na Lei n.º 10.639 (2003)[1].

As comunidades quilombolas do Brasil

Estima-se que entre os anos de 1550 e 1850 tenham chegado ao Brasil quatro milhões de negros, trazidos a força do continente africano, em especial das regiões onde hoje estão situadas: Guiné, Benin, Costa do Marfim, Mali, Congo, Angola e Moçambique (Editora Abril, 2013a, p. 310). Os negros chegavam ao Brasil amontoados nos porões dos navios negreiros, muitos morriam durante a viagem, e os que sobreviviam eram vendidos como escravos para trabalharem na agricultura e na mineração. Durante mais de 300 anos, a mão de obra escrava foi a principal força de trabalho no país e a base de toda a atividade econômica.

A formação de quilombos, que são comunidades formadas por escravos foragidos que tentavam sobreviver fora da sociedade colonial, no Brasil, foi um movimento de

[1] Altera a Lei n.º 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, para incluir no currículo oficial da Rede de Ensino a obrigatoriedade da temática “História e Cultura Afro-Brasileira”, e dá outras providências.

resistência à escravidão. No século XX, quando surgiram os movimentos e entidades para defender os direitos da população negra, o Quilombo dos Palmares, fundado por seu líder Zumbi, surge como referência histórica a esses movimentos.

No Brasil ainda sobrevivem algumas comunidades negras que foram originadas de quilombos; hoje essas comunidades são denominadas de comunidades quilombolas. Essas comunidades quilombolas, desde o ano de 1970, são identificadas, em todos os estados brasileiros, pela Fundação Palmares, ligada ao Ministério da Cultura. A maior parte dessas comunidades encontra-se localizada nas regiões Norte e Nordeste (Editora Abril, 2013b, p. 120).

A Constituição Brasileira de 1988 reconhece o direito de posse da terra dessas populações negras, oriundas dos quilombos. Este processo de reconhecimento teve início no ano de 1995. A maioria dessas comunidades é formada por dezenas de famílias, e algumas reúnem milhares de habitantes, principalmente nos estados do Maranhão e da Bahia. Geralmente essas comunidades estão localizadas em locais isolados. Como são remanescentes de quilombos, essas comunidades têm um modo de vida em que predominam a posse coletiva da terra, a agricultura de subsistência e a criação de animais.

Desde o ano de 2003 que o critério utilizado para o reconhecimento de uma comunidade quilombola passou a ser o da autoidentificação, dispensando-se a apresentação de documentos que comprovem a ascendência de antigos escravos e a posse ininterrupta sobre o território. Porém, os problemas relacionados à demarcação das terras quilombolas acontecem em diversos estados, onde os moradores dessas comunidades muitas vezes entram em conflito com fazendeiros e proprietários de terras desses locais.

A comunidade quilombola do Curiaú

Em Morais (2011) encontramos que a comunidade do Curiaú recebeu oficialmente o título de Comunidade Quilombola no dia 3 de novembro de 1999, conferido pela Fundação Palmares, tornando-se a única comunidade quilombola reconhecida no estado do Amapá.

Para Morais (2009), a contribuição africana está presente na sociedade amapaense desde o período colonial, quando vários africanos vieram para o Amapá, misturando-se e adaptando-se aos padrões culturais existentes, construindo e mantendo uma cultura até hoje manifestada nas festas religiosas, na música, na culinária, na linguagem e outras práticas artísticas como, por exemplo, nas manifestações de: marabaixo, batuque, tambor, candomblé, capoeira, ladainhas, procissões, folias e tradições dos antepassados da comunidade negra que fazem parte da formação cultural do Amapá. Segundo este autor, foi com a organização dos quilombos em locais de difícil acesso que centenas de negros viveram muitos anos como viviam livres na África. E, assim como aconteceu em todo território brasileiro, um grupo de negros foragidos, da região de Belém, no ano de 1749, fundaram um quilombo às margens do rio Anauerapucu. No período entre os anos de 1750 a 1782, aumentou muito a quantidade de escravos trazidos para a região. Negros que não aceitaram a escravidão rebelaram-se e fugiram, formando os quilombos de Maruanum, Igarapé do Lago, Ambé, Cunani, Curiaú e Goiabal.

Morais (2011) nos informa que a origem do nome Curiaú está associada a uma das finalidades da área, que é a criação de gado (cria) e o mugido das vacas (mu), resultando no termo *criamu*, que posteriormente passou a ser denominada Criau e atualmente se chama Curiaú. Remanescente do antigo Quilombo Afro-Brasileiro, a comunidade do Curiaú, composta predominantemente por afrodescendentes, mantém preservados seus costumes e tradições culturais, despertando o interesse e atraindo pessoas para prestigiarem seus festejos aos santos: São Sebastião, São Lázaro, Santa Maria, São Joaquim e outros, nos meses de janeiro, fevereiro, maio e agosto, respectivamente, preservando a integridade de seus valores e raízes etnoculturais.

Ainda em Morais (2011), encontramos que o principal produto cultivado é a mandioca, para produção artesanal de farinha, e cultivam também hortaliças (alface, cebolinha, coentro, repolho, melancia, maracujá, limão, laranja, abacate e outros) em pequena escala para o consumo local, cultivadas em pequenas propriedades. A comercialização do açaí é uma atividade realizada na comunidade; o açaí e a farinha também são componentes que fazem parte da alimentação diária da população local.

Metodologia da pesquisa

A pesquisa foi realizada durante uma atividade escolar, desenvolvida por um professor de matemática de uma escola pública estadual em Macapá, capital do estado do Amapá, localizada na comunidade quilombola do Curiaú. A escola atende um total de 268 alunos que moram na comunidade ou no entorno da mesma.

Os sujeitos da pesquisa são os alunos de uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental da escola e o professor de matemática da referida turma.

Usamos como metodologia a observação de uma atividade de participação da turma no processo de produção de farinha, realizado pelos membros da comunidade, e relatos do professor de matemática da turma, em conversas informais sobre os processos de ensino e de aprendizagem nas suas atividades de campo e de sala de aula.

A atividade começou às cinco horas da manhã, quando é feita a colheita da mandioca nas plantações. Os alunos acompanharam tudo de perto registrando em seus cadernos as informações, fornecidas pelos produtores da farinha. Anotaram todos os custos da produção, a quantidade de mandioca colhida e trazida para a produção da farinha, o total, em quilos, de farinha produzida a cada fornada, bem como as despesas com o transporte e embalagem, informado pelos produtores que participavam do processo de produção; e ainda o valor de venda, informado por aqueles que vendem a farinha no mercado local.

Ao final, os alunos produziram redações sobre todos os registros realizados. Estes registros serviram para eles criarem questionários, como, por exemplo: qual a quantidade x, em quilos, de mandioca necessária para se produzir y quilos de farinha?; qual o lucro obtido ao final?. Estes registros geraram tabelas que, segundo o professor, serviriam para ensinar os conteúdos de funções e gráficos, em aulas subsequentes.

A escola da comunidade quilombola do Curiaú

A escola da comunidade quilombola do Curiaú foi fundada no ano de 1943, mas a mudança para o prédio onde funciona atualmente se deu no ano de 1992. A escola oferece, aos filhos dos moradores da comunidade, ensino fundamental do 1º ao 9º ano, pelo período da manhã no horário de 07:30 às 12:00, e no período da tarde no horário de 13:30 às 18:00. A mesma também possui uma turma da 3ª Etapa da Educação de Jovens e Adultos (EJA), no horário de 13:30 às 18:00. Esta escola possui nas suas dependências: diretoria, secretaria, sala dos professores, banheiros masculino e feminino, ginásio, cozinha, pátio, salas de aula e biblioteca.

Quando os alunos concluem o ensino fundamental, eles são matriculados nas escolas do centro da cidade. A escola conta com recursos oriundos do governo estadual, que ajuda os estudantes, disponibilizando o transporte escolar fluvial e terrestre (barco e autocarros) gratuitamente para todos os alunos matriculados na escola, de acordo com a relação encaminhada pela diretora da escola à Secretaria de Educação Estadual.

Os professores e funcionários da escola que moram na própria comunidade são denominados de “filhos da comunidade” e os demais professores e os outros funcionários moram em bairros bem próximos ao Curiaú como: Jardins, Jardim Felicidade, Açaí, Infraero I e II, Brasil Novo, Boné Azul, Pedrinhas, Goiabal e Renascer.

Os professores da escola buscam contextualizar suas aulas com as atividades do dia a dia dos moradores da comunidade. Esses moradores, que são pais de alunos, contribuem com a merenda escolar fazendo doações de alimentos cultivados nas próprias propriedades. Esses pais agricultores doam frutas, verduras, hortaliças, temperos e animais de pequeno porte para ajudar no preparo das refeições diárias que seus filhos fazem na escola.

Os conteúdos das aulas estão fundamentados na Lei n.º 10.639 (2003), que altera a Lei n.º 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, determinando que no currículo oficial da rede de ensino será obrigatória a inclusão dos conteúdos programáticos referentes ao estudo da temática “História e Cultura Afro-Brasileira”, a luta dos negros no Brasil, a cultura negra brasileira e o negro na formação da sociedade nacional, resgatando a contribuição do povo negro nas áreas social, econômica e política, pertinentes à História do Brasil, que serão ministrados no âmbito de todo currículo escolar.

A escola desenvolve diversos projetos que procuram envolver os alunos e propiciar que os mesmos permaneçam mais tempo na escola. Entre esses projetos, destacamos os principais, que são: o *Programa Mais Educação*, *Reforço Escolar*, *Saberes Orais*, *Música e Percussão*, *Aulas de Francês*, *Projeto de Artes*, *Tranças de Cabelo* e o *Projeto Curiaú Mostra a Tua Cara*. Todos esses projetos têm como eixo central o resgate da cultura dos valores afrodescendentes, a valorização do negro e a integração da cultura Africana no cotidiano da comunidade e da escola.

O ensino e a aprendizagem de matemática na escola da comunidade

Brasil/SEF (1997), quando se refere às ações educativas de combate ao racismo e discriminações, diz que os sistemas de ensino e os estabelecimentos de Educação Básica, nos níveis de Educação Infantil, Educação Fundamental, Educação Média, Educação de Jovens e Adultos e Educação Superior precisam incluir nos conteúdos de disciplinas e em atividades curriculares “conhecimentos de matriz africana e/ou que dizem respeito à população negra" (Brasil/SEF, 1997, p. 24). Por exemplo: em matemática, contribuições de raiz africana, identificadas e descritas pela etnomatemática.

Para Costa (2009), as ideias, conhecimentos e fazeres relacionados à classificação, inferência, ordenação, explicação, modelação, contagem, medição e localização espacial e temporal se originam, vivem e se renovam a partir das necessidades que um grupo de pessoas sente em relação a sua sobrevivência e transcendência. Este fato sempre ocorre num contexto histórico e cultural indissociável da linguagem utilizada pelo grupo, dos códigos de comportamento adotados, das práticas sociais, dos valores, dos mitos, dos ritos, dos conhecimentos modificados ou apreendidos por meio da dinâmica cultural do encontro, das relações de poder que se estabelecem entre o grupo e a natureza, entre as pessoas do próprio grupo e entre o grupo e outros grupos, da arte e da religiosidade do próprio grupo, bem como de outros conhecimentos e manifestações culturais compartilhados coletivamente.

Trindade (2006) nos apresenta algumas propostas didático-pedagógicas em matemática que podem ser trabalhadas em sintonia com os eixos norteadores dos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN, no que se refere à valorização da diversidade étnico-cultural, com a intenção de propiciar aos alunos a oportunidade de conhecerem, reconhecerem e ressaltarem os valores civilizatórios afro-brasileiros interligando matemática, cultura, educação e sociedade.

O professor de matemática da escola do Curiaú nos informou que, para o planejamento das aulas de matemática do 9º ano do Ensino Fundamental, ele relaciona os conteúdos de matemática com as manifestações culturais africanas e afro-brasileiras usando informações sobre países africanos pesquisados pelos próprios alunos na Internet e em livros disponíveis na biblioteca da escola. Ao desenvolver esses conteúdos, ele também utiliza valores e números da própria comunidade, como por exemplo: dados sobre a produção e comercialização de alimentos, cultivados por moradores da comunidade, no mercado e nas feiras do centro da cidade. Ele nos explicou que os moradores da comunidade plantam e comercializam hortaliças, frutas, produzem tucupi e farinha d'água, e ainda criam animais de pequeno porte para venda.

O processo de produção de farinha

Brasil/SEF (1997), ao abordar a Pluralidade Cultural, afirma que a construção e a utilização do conhecimento matemático não são feitas apenas por matemáticos, cientistas ou engenheiros, mas, de formas diferenciadas, por todos os grupos socioculturais, que desenvolvem e utilizam habilidades para contar, localizar, medir, desenhar, representar, jogar e explicar, em função de suas necessidades e interesses. Valorizar esse saber matemático, intuitivo e cultural, aproximar o saber escolar do universo cultural em que o aluno está inserido, é de fundamental importância para os processos de ensino e de aprendizagem. Segundo D'Ambrósio (2011):

> O cotidiano está impregnado dos saberes e fazeres próprios da cultura. A todo instante, os indivíduos estão comparando, classificando, quantificando, medindo, explicando, generalizando, inferindo e, de algum modo, avaliando, usando os instrumentos materiais e intelectuais que são próprios à cultura (p. 22).

Por outro lado, ao dar importância a esse saber, a escola contribui para a superação do preconceito de que a matemática é um conhecimento produzido exclusivamente por determinados grupos sociais ou sociedades mais desenvolvidas. A história da matemática, bem como os estudos da etnomatemática, são importantes para explicitar a dinâmica da produção desse conhecimento, histórica e socialmente. Frankenstein & Powell (1997) e Knijnik (1996) afirmam que a etnomatemática reconhece que todas as culturas produziram e produzem conhecimentos matemáticos, consideram relevante a inserção desses conhecimentos no currículo escolar para que possam ser contemplados e compreendidos em sua diversidade, em conformidade com a visão da Pluralidade Cultural, apontada pelos PCN.

De acordo com Mattos & Brito (2012):

> O trabalho do campo é repleto de saber matemático, dando-nos a oportunidade de atravessarmos as fronteiras da sala de aula, para conhecermos a realidade do nosso aluno e, assim, compreendermos as dificuldades que eles enfrentam na escola, quando da aplicação dos conteúdos distanciados de seu contexto (pp. 969-970).

Brasil/SEF (1997) sugere que cada escola desenvolva projetos envolvendo questões relacionadas às relações étnico-raciais, diversidade racial e pluralidade cultural, consideradas de relevância para a comunidade. Temas relacionados à educação e diversidade cultural, por exemplo, são contextos privilegiados para o desenvolvimento de conteúdos que estabelecem uma relação histórico-cultural com o senso numérico, registros do processo primitivo de contagem, medida, porcentagem, sistema monetário, legitimando as origens africanas do conhecimento, ressaltando os valores civilizatórios afro-brasileiros.

De acordo com o recomendado em Brasil/SEF (1997), na escola do Curiaú, durante o planejamento das aulas de matemática, os professores buscam relacionar os conteúdos com as manifestações culturais africanas e afro-brasileiras. Por exemplo, os professores trabalham os conteúdos de matemática em sala de aula utilizando informações de países africanos, como população, extensão territoriais, densidade demográfica, bandeiras etc. Esses dados são pesquisados em livros e atlas, disponíveis na biblioteca da escola.

O professor de matemática do 9º ano do Ensino Fundamental, ao desenvolver os conteúdos, utiliza valores e números da própria comunidade, como a quantidade de farinha produzida e comercializada no mercado e nas feiras do centro da cidade, os custos dessa produção e o lucro obtido na venda. Esse processo é estendido para a produção e venda do tucupi, para a colheita e venda do açaí e de outras frutas, como acerola, abacaxi, laranja, limão, manga, melancia, maracujá, muruci e taperebá. Entre as hortaliças, eles plantam e comercializam alface, repolho, cebolinha, cheiro verde, quiabo e a própria mandioca, que é a raiz de onde eles extraem o tucupi e a farinha d'água.

Durante a aula de matemática, o professor do 9º ano do Ensino Fundamental levou seus alunos para conhecerem, observarem e participarem de todo o processo da produção de farinha em uma "Casa de Farinha", de propriedade de um dos moradores da comunidade, que é o local onde se processa a mandioca e que consiste em uma barraca coberta com palha de inajá, de chão batido, sem paredes, onde estão o forno (tacho redondo de latão, onde é torrada a mandioca para fazer a farinha) e os demais utensílios necessários para o processamento da mandioca. Normalmente, localiza-se próximo aos roçados e cursos d'água; porém, atualmente pode estar localizada às proximidades das residências pela facilidade para se utilizar energia elétrica (ver figura 1.a).

Os alunos aprenderam que, após descascarem a mandioca, os produtores a ralam em uma máquina denominada de "catitu" (ver figura 1.c), que é uma peça cilíndrica, em madeira, ornada com serrilhas de aço no sentido longitudinal, utilizada para ralar (cevar) a mandioca, e que para extrair o "tucupi" (sumo de coloração amarelo intenso extraído da mandioca descascada, ralada e espremida,) eles utilizam o "tipiti" (ver figura 1.b), que é um objeto de forma cilíndrica, alongada, confeccionado com talas de guarumã ou jacitara entrelaçadas, dotado de elasticidade, usado para espremer a massa da mandioca, para a retirada do tucupi.

Figura 1. a) Casa de farinha, b) Tipiti e forno, c) Catitu
(Fonte: Acervo fotográfico dos pesquisadores)

Considerações finais

Incrementar o ensino e a aprendizagem da matemática por meio da cultura, representada em sala de aula pelos alunos e professores e fora dela pela comunidade a qual a escola está inserida, é uma das essências da educação matemática na ótica da etnomatemática.

Aqui, não se trata apenas de contextualização de conteúdos curriculares da matemática. Trata-se de associar estes conteúdos às atividades econômicas e culturais da comunidade na qual a escola está inserida. Conteúdos de matemática foram abordados em sala de aula utilizando registros dos alunos durante a atividade desenvolvida.

Também percebemos uma participação crítica dos alunos. Segundo o professor de matemática, os alunos concluíram que o valor final de comercialização da farinha, que é cerca de €3,00 (três euros) o quilo, é muito barato se levarmos em consideração o trabalho e desgaste físico, pois a cada fornada são obtidos no máximo 20 quilos, e durante o processo em que a farinha é torrada no forno os trabalhadores se revezam mexendo, para que a farinha não queime ou não embole.

O trabalho de pesquisa aqui apresentado mostra a importancia de vivenciar junto com o educando a realidade matemática disponibilizada pelo meio que os cerca. O professor não deve ter como cenário apenas a sala de aula, e sim levar o ensino para além das fronteiras da escola. Isto pode (e deve) ser feito em qualquer escola, independentemente do local onde a escola esteja inserida.

A realização desse trabalho permitiu verificarmos que a etnomatemática presente no processo de produção da Comunidade do Curiaú pode ser relacionada aos conteúdos das aulas de matemática na escola da Comunidade, produzindo um saber que procura aplicabilidade na sua forma de conhecimento estabelecida na parceria com os trabalhadores que produzem e vendem a farinha, comercializada por eles, contribuindo substancialmente para os processos de ensino e de aprendizagem da matemática.

Percebemos que o professor de matemática da escola tem consciência da importância das contribuições emergentes da cultura dos povos de origem africana, de acordo com o que está proposto na Lei n.º 10.639 (2003). Percebemos, também, que as diretrizes curriculares emanadas desta lei possibilitam aos professores de matemática abordagens históricas, interculturais, que ampliam o foco do currículo escolar brasileiro para a diversidade cultural, marcada por uma origem africana, cujas raízes se encontram no período colonial que produziu as heranças étnicas e culturais.

Referências bibliográficas

Brasil - Secretaria de Educação Fundamental (SEF) (1997). *Parâmetros curriculares nacionais: Matemática*.. Brasília, DF: MEC/SEF.

Costa, W. N. G. (2009). As histórias e culturas indígenas e as afro-brasileiras nas aulas de matemática. *Educação em Revista*, *25*(2), 175-197.

D'Ambrósio, U. (2011). *Etnomatemática – Elo entre as tradições e a modernidade*. Belo Horizonte: Autêntica Editora.

Editora Abril (2013a). História: A exploração dos africanos. *Almanaque Abril 2013*, *12*, 310.

Editora Abril (2013b). Sociedade: Quilombo. *Almanaque Abril 2013*, *5*, 120.

Frankenstein, M., & Powell, A. (1997). *Ethnomathematics: Challenging eurocentrism in mathematics education*. Albany: State University of New York Press.

Knijnik, G. (1996). *Exclusão e resistência: Educação matemática e legitimidade cultural*. Porto Alegre: Artes Médicas.

Lei n.º 10.639, de 9 de janeiro de 2003 (2003). Diário Oficial da União 10/01/2003 Seção 1, p.1. Brasília, DF: Ministério da Educação. Recuperado em 17 março, 2014, de http://www.jusbrasil.com.br/diarios/418044/pg-1-secao-1-diario-oficial-da-uniao-dou-de-10-01-2003/pdfView

Mattos, J. R. L., & Brito, M. L. B. (2012). Agentes rurais e suas práticas profissionais: Elo entre matemática e etnomatemática. *Ciência & Educação*, *18*(4), 965-980.

Morais, P. D. (2009). *História do Amapá – O passado é o espelho do presente*. Macapá: JM.

Morais, P. D. (2011). *Amapá em perspectivas – Municípios do Amapá*. Macapá: JM.

Trindade, A. (2006). *Em busca da cidadania plena*. Rio de Janeiro: Fundação Roberto Marinho.

Os erros "comuns" dos alunos como eixo detonador para uma reflexão sobre a prática do professor de matemática

Leticia Sosa Guerrero[1,3], *José Luis Huitrado Rizo*[2], *C. Miguel Ribeiro*[3,4]
[1]Universidade Autónoma de Zacatecas (México), lsosa19@hotmail.com
[2]Secretaria de Educação do Estado de Zacatecas (México), jlhuitrado@gmail.com
[3]Centro de Investigação sobre o Espaço e as Organizações (CIEO), Universidade do Algarve; [4]UNESP, Rio Claro (Brasil), cmribeiro@ualg.pt

Resumo. *Neste artigo discutimos alguns aspetos de uma investigação levada a cabo numa formação de professores, e que tem como um dos seus objetivos promover uma discussão e reflexão sobre o papel dos erros dos alunos na prática letiva. Focamo-nos, em particular, num estudo de caso envolvendo uma professora do ensino secundário, e nas suas discussões e reflexões sobre os erros cometidos pelos alunos. Os resultados preliminares salientam a experiência do professor como aprendiz e investigador da sua própria prática ao analisar e refletir sobre os erros dos seus alunos como fonte geradora de uma reflexão em, na e para a ação. Essa reflexão nos erros dos alunos é fonte de enriquecimento do seu conhecimento (e formas) de ensinar para colmatar as dificuldades dos alunos. Além disso, este tipo de trabalho focado na discussão e reflexão sobre os erros dos alunos parece permitir um uso dos erros como fonte de uma aprendizagem efetiva e significativa dos diferentes tópicos abordados.*

Abstract. *In this paper we report some aspects of a research in the context of a continuous teachers' training program. Such program had as one of its main goals to discuss and reflect on the role of students' errors in teachers' practices. We focus, particularly, on a secondary teacher's discussions and reflections when analysing students' errors. Preliminary results show evidence that being simultaneously a learner and researcher of his own practice, through analysing students errors, is a generator of reflection in, on and for practice. In addition this work, focused on discussing and reflecting on students' errors seems to allow the use of errors as a source for learning.*

Palavras-chave: Erros dos alunos; Reflexão do professor; Conhecimento profissional.

Introducción

Hoy por hoy podemos percibir que muchas de las veces se subestima el proceso de enseñanza-aprendizaje, sin considerar que el proceso no es sencillo porque en él se fusionan diversos factores complejos (e.g. sociales, culturales, científicos, cognitivos, individuales, grupales, afectivos, contextuales, institucionales y económicos). Asumimos que, para enseñar matemáticas, saber el contenido es una condición necesaria pero no es una condición suficiente, pues existen casos en los que el profesor cuenta con un buen dominio de la matemática pero no es capaz de desarrollar un proceso adecuado de enseñanza (Sosa, 2011). Más aún, socialmente el profesor tiene la encomienda principal de enseñar y, por consiguiente, es él quien ha de atender profesionalmente las tareas que su labor conlleva y para ello ha de poseer un determinado conocimiento profesional, puesto que uno de los aspectos que caracteriza a los profesionales es disponer de un conocimiento específico para los problemas propios de su labor. Por su parte, Schön (1983) considera que la reflexión es característica de una buena práctica y en su estudio sobre la formación de profesionales reflexivos diferencia dos tipos de reflexión que pueden ocurrir y que determinan el conocimiento profesional del profesor: reflexión en la acción y reflexión sobre la acción.

En este sentido, es fundamental tanto un entendimiento como una comprensión más amplia (pero profunda) sobre el conocimiento profesional del profesor, en todas sus dimensiones, sobre el rol de su reflexión en la forma como encara (y podrá empezar a encarar) el proceso de enseñanza, su papel y el de los alumnos. Una de las tareas de enseñanza (Ball, Thames, & Phelps, 2008) que todos los profesores deberían desarrollar, y que debería implicar aspectos de su conocimiento profesional (si pretenden que los alumnos entiendan lo que hacen y porqué), corresponde a atribuir sentido a las resoluciones y sus alumnos. Así, además de identificar los errores de los alumnos, en cada uno de los contenidos matemáticos que le corresponde abordar en un determinado nivel, el profesor deberá entenderlos, de manera que pueda proporcionar una retroalimentación (Santos & Pinto, 2009) que contribuya a que los alumnos puedan ir construyendo efectivamente una red de nociones y conceptos matemáticos. Por eso, resulta sumamente importante un análisis de los errores de los alumnos de modo que esos errores puedan asumirse como un punto de partida para aprendizajes matemáticos adecuados y no como un punto de llegada. En esa línea, y tratando de tener una visión y un conocimiento más amplio sobre los factores que potencien un entendimiento por parte del profesor sobre los motivos que conducen a esos errores, nos interesa enfocarnos en la siguiente cuestión: ¿Qué reflexiones pueden surgir en el profesor de matemáticas acerca de su práctica a partir del análisis de los errores de sus estudiantes?.

En este artículo discutimos y reflexionamos sobre la importancia de identificar, conocer, comprender y atender a los errores comunes de los estudiantes cuando el profesor imparte un determinado contenido (en este caso concreto un contenido de Álgebra). Este foco en los errores de los alumnos pretende también contribuir para generar una reflexión en el profesor respecto a esas problemáticas y en su aprendizaje, viendo al error como una oportunidad de aprendizaje de los estudiantes y con miras a enriquecer su propio conocimiento profesional.

Fundamentos teóricos

Entendemos al error de la siguiente forma: “Hablamos de error cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar” (Godino, Batanero, & Font, 2003, p. 69), asumiendo que los errores no aparecen al azar sino que surgen en un marco conceptual consistente, basado sobre conocimientos adquiridos previamente (Abrate, Pochulu, & Vargas, 2006). De acuerdo con Huitrado (2012), a pesar de la atención que se ha dado por parte de la literatura al estudio de los errores de los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas, todavía quedan pendientes algunos aspectos. Socas (2011) reconoce tres fases en los trabajos enfocados en los errores. La primera caracterizada por el recuento de respuestas erróneas, su clasificación y asociación con causas, principalmente relativas al contenido matemático (e.g., Rico, 1998); en la segunda, la década de los ochentas, se sabe del error como elemento normal del proceso de enseñanza y aprendizaje, se enfatiza en la construcción de los conceptos matemáticos para tratar de comprender lo que los alumnos estaban pensando (Brousseau, Davis, & Werner, 1986); en esa época se reconocen otras causas, como el currículo, el profesorado o el contexto y se manifiesta la necesidad de marcos teóricos para su análisis. Socas (2011) reconoce que a pesar de que se consiguen clasificaciones más completas sobre los errores, no se obtiene información sobre sus orígenes y por tanto no se consiguen elementos para un trato sistemático de los mismos. El mismo autor refiere que “el lenguaje algebraico no es ajeno a este proceso de estudio, una parte destacada de los estudios cognitivos en lenguaje algebraico se organizan en torno al análisis de las dificultades y errores en Álgebra”. En la tercera etapa sobresalen los trabajos enfocados en el Enfoque Lógico Semiótico, donde no solo se clasifican los errores, sino que sirve de soporte para el diseño de instrumentos que ayudan a los alumnos a corregir sus errores (e.g., Socas, 2007; Palarea, 1998; Ruano, Socas, & Palarea, 2008). Recientemente este grupo de investigación con sede en la Universidad de la Laguna, España, concluye la necesidad de que los profesores interpreten de manera adecuada los errores de los alumnos, pero hay poca información de cómo ir más allá de la identificación y la clasificación de los errores con una u otra taxonomía. En el panorama elaborado por Socas (2011) no se evidencian estudios sobre el conocimiento de los profesores en el análisis de los errores.

El conocimiento profesional se refiere al cuerpo de conocimiento y habilidades que son necesarios para funcionar con éxito en una profesión particular (Tamir, 1991). Para Compagnucci y Cardós (2007), el conocimiento profesional del profesor es una categoría que involucra el saber teórico y práctico del docente, es un sistema complejo que se va constituyendo en función de saberes, creencias, destrezas, habilidades y capacidades. Aunado a lo anterior, asumimos que el conocimiento profesional del profesor consiste en la conjunción de todos los saberes y experiencias que éste posee y de los que hace uso en el desarrollo de su trabajo docente, conocimiento que se va adquiriendo y construyendo desde su formación inicial y continua durante toda su carrera (Climent, 2005).

En términos de los dos tipos de reflexión que pueden ocurrir y que determinan el conocimiento profesional del profesor, Schön (1983) establece que la reflexión en la acción es un proceso de comunicación continuo a partir del cual se va formando una teoría, se emprende una búsqueda de especificaciones adaptadas a la situación, se definen de manera interactiva los medios y los fines, además de redefinir y evaluar continuamente los procedimientos (Yinger, 1986). La reflexión sobre la acción se refiere a la reflexión que realiza el profesor en un momento posterior a la clase, en un contexto más tranquilo en el que el profesor está liberado de las urgencias de las decisiones interactivas. El profesor reflexivo confronta los esquemas teóricos y sus creencias implícitas, enfrentándose a una situación de enseñanza, lo cual le permite analizar lo que hace y modificar sus decisiones de manera consciente sobre la marcha. Más aún, en cuanto a la reflexión, tratando de hacer una analogía de las consideraciones de Chapman (2009) para el formador de profesores pero que también acomoda a la reflexión del profesor, podemos tomar en cuenta que la autora afirma que la reflexión "se inicia cuando el educador se encuentra con algún aspecto problemático de la práctica, y trata de darle sentido" (p. 125). Aunque también agrega que además de la indagación de la práctica se requiere investigar sobre sus propios estilos de enseñanza para "determinar su efectividad o la relación entre dicho enfoque y un aprendizaje efectivo y significativo" (p. 122). Es decir, consideramos que para que el profesor reflexione, también es necesario que se encuentre ante una problemática de su práctica y trate de solucionarla, aparte de investigar sobre sus propias formas de enseñanza y que se cuestione sobre la efectividad de ésta en términos del aprendizaje efectivo y significativo de sus estudiantes.

Diseño de la investigación

Esta investigación se enfoca en el paradigma interpretativo (Latorre, Del Rincón, & Arnal, 1996), es de corte cualitativa en términos de Erickson (1986), quien pone de relieve a la característica que más distingue a la indagación cualitativa, la interpretación. El método consiste de un estudio de caso (Stake, 2005) porque nos interesa profundizar en la interpretación de la reflexión que una profesora pone en acción en torno al conocimiento de los errores cometidos por los estudiantes. El caso está constituido por una profesora (Roco) de bachillerato con 20 años de experiencia de enseñanza en México. Roco es reconocida como una buena profesora por las autoridades de su institución, sus ex alumnos y sus pares.

El caso que aquí nos ocupa es parte de una investigación más amplia cuyo objetivo es obtener una mayor comprensión sobre algunos de los fenómenos que aparecen durante un taller en el que participaron 15 profesores de nivel medio superior realizado durante una semana, 2 horas al día. Se les asignó a los profesores una misma tarea en el ámbito de Álgebra, ya que este taller en concreto se enfocaba en discutir los errores de los alumnos en este dominio. Se les pidió que identificaran un error "común" de los alumnos en un contenido matemático concreto, luego deberían tratar de explicar los posibles pensamientos matemáticos que le permiten al estudiante dar esa respuesta errónea y finalmente hacer una propuesta concreta para subsanar ese error en los estudiantes. También se les pidió que presentaran lo realizado ante el grupo y que entregaran un reporte escrito sobre todas sus observaciones y reflexiones en cuanto al error común y cómo atender a ese error en la enseñanza.

Los datos se refieren a las videograbaciones de las clases donde los profesores implementaban la tarea propuesta, a las producciones escritas de la profesora al contestar las tareas propuestas y un cuestionario enfocado en los aspectos aprendidos/explorados en el taller. El instrumento para analizar la información está constituido principalmente por el estudio de Shön (1983).

Análisis y resultados

Se analizaron tanto la videograbación donde la profesora Roco presenta la realización de la tarea encomendada como su reporte escrito donde plasmaba sus observaciones y reflexiones. La intención era provocar la reflexión del profesor discutiendo el análisis de los errores cometidos por sus estudiantes, a partir de la puesta en común en el taller. Es decir, al presentar el error que la profesora consideraba común y argumentando los posibles pensamientos matemáticos que produjeron dicho error, así como el tratamiento didáctico para aprovechar ese error en el aprendizaje del estudiante (Santos & Pinto, 2009), los otros profesores (pares) aportaban sus puntos de vista, con base en sus conocimientos y su experiencia, de tal forma que se establecía una discusión grupal gestionada y moderada por el investigador (Jaworski, 2008). A continuación mostramos algunos resultados.

Roco expresa en la presentación de su tarea que:

> Los problemas de aprendizaje que presentan mis alumnos y a los que pretendo enfrentarme son variados, en este pequeño trabajo me referiré a la aplicación de la fórmula general para la ecuación cuadrática.

Posteriormente Roco muestra la siguiente tabla abordando los distintos tipos de errores que ella considera comunes en sus estudiantes cuando en un examen les da la instrucción de resolver la ecuación $x^2 - 8x + 15 = 0$ usando la fórmula general.

Tabla 1. Análisis de errores elaborado por Roco

Estudiante	Error	*Ideas que suponemos* [Roco] *que usó el estudiante*
A	$a = x^2$ b=-8x c=15	"Como no aparece ningún número junto a x^2, entonces el coeficiente debe ser x^2"
B	a=1 b=8 c=15	"El signo indica resta, no tiene nada que ver con el número"
C	$x = \frac{-8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(15)}}{2(1)}$	"Si la fórmula dice –b entonces debe ser -8, debe ser negativo"
D	$x = \frac{-8 \pm \sqrt{-64 - 60}}{2}$	"Si el cuadrado de 8 es 64, el de -8 debe ser -64"
E	$x = 8 \pm \frac{\sqrt{(-8)^2 - 4(1)(15)}}{2(1)}$	"Creo que la fórmula era así "

Roco, ante la realización de esta tabla, reconoce que:

> En todo proceso educativo formal, los estudiantes se someten a dos tipos de procesos: informativo, mediante el que accede de manera sistemática al conjunto de conocimientos, y formativo, a través del que se aplican los conocimientos adquiridos.

Y Roco agrega:

> Desde este punto de vista, mi labor como docente se queda meramente en lo informativo, en el mejor de los casos. Desde otro punto de vista, mi trabajo ni siquiera está ubicado en la construcción del conocimiento, puesto que no me detengo a revisar los conocimientos previos. […] de ahí la necesaria diferenciación de las actividades que se le ofrecen al estudiante.

Con esto último, consideramos que Roco da pequeños indicios de que intenta reflexionar sobre su rol en la enseñanza y aprendizaje. Más aún, posteriormente expresa durante su presentación de la tarea, reflexiones en cuanto los errores de los estudiantes:

> Los alumnos de la preparatoria [bachillerato] en general tienen dificultades en el estudio de las matemáticas, algunos tienen que ver con problemas de aprendizaje que vienen arrastrando desde la primaria, o con la incapacidad de comunicación interactiva en el aula. Este curso me enseñó la importancia que tiene el error cometido por el estudiante como parte de la generación de conocimiento. En ocasiones el error puede significar que el problema se ha comprendido, aunque las herramientas con las que se pretende resolverlo no se apliquen adecuadamente. Para que un alumno ofrezca una solución equivocada, su mente tuvo que efectuar procesos con conocimientos que para él fueron válidos en algún momento.

En el reporte escrito, Roco nos permite detectar más elementos de su reflexión en cuanto a la necesidad de tender a la profesionalización docente, a diseñar actividades para los estudiantes a partir de los conocimientos previos (lo cual también puede permitir cambiar posibles conocimientos erróneos) tratando de que los estudiantes le den significado al contenido matemático que se aprenda, a conocer la cultura, contexto y prejuicios del estudiante:

> Un profesor de matemáticas debe tender a la profesionalización, eso implica que además de conocer las áreas de matemáticas que imparte, ubicarlas dentro de un gran mapa de conocimientos, conocer la didáctica específica, debe también conocer la forma en que el estudiante aprende según su edad. Diseñar actividades que partan del conocimiento previo para construir significados de lo que se aprende. Por otra parte, la cultura que rodea al estudiante es importante en tanto que ya ha desarrollado significados, por ejemplo el temor a las matemáticas por considerarse de antemano que es difícil comprender los temas y que no sirve para nada aprender, además los

> profesores son especialmente intransigentes. Éstos y otros prejuicios afectan las condiciones en el aula.

Roco agrega:

> A partir de la reflexión sistemática de nuestro quehacer y de los resultados que se producen, cada actividad, cada tarea debe tener un sentido definido, puesto que nuestro alumno deberá, además de reunir toda la información que se requiera, tendrá que construir significados a partir de su aplicación. Con la formación académica sobre la enseñanza, con la experiencia compartida entre profesores, en la actividad misma de la enseñanza cuando se hace de manera reflexiva. Creo que también habrá que introducir la duda en nuestro trabajo, ¿lo hacemos realmente bien?, ¿lo que digo, es realmente lo que quiero o debo decir?, ¿y qué entienden los alumnos?, ¿qué les estoy enseñando realmente?, etc.

Por la propia naturaleza de los instrumentos de análisis, los resultados obtenidos corresponden más a evidencias de la reflexión sobre la acción; sin embargo, algunas de éstas pueden haber surgido a partir de reflexiones en la acción. Reconocemos que el taller impartido a los profesores fue corto, pero muchas de las veces son esas las únicas ocasiones en las que apoyan las autoridades educativas para "formar a los profesores de bachillerato". Sin embargo, Roco nos deja ver que el estudio consciente de los errores comunes de los estudiantes puede funcionar como eje detonador para la reflexión del profesor sobre su práctica.

Conclusiones

Un elemento primordial para el conocimiento profesional del profesor consiste en comprender la naturaleza del error y sus razonamientos, ya que estos errores se basan en conocimientos anteriores (Abrate et al., 2006), y posteriormente darle un tratamiento que favorezca el aprendizaje matemático efectivo y significativo del estudiante.

Sin embargo, para que el profesor logre dar un tratamiento efectivo a los errores, requiere de conocimientos, actitudes y concepciones que le ayuden a ver en un error la oportunidad de aprender, ya que solo de ese modo podrá desarrollar las tareas de enseñanza (Ball et al., 2008) enfocadas en que sus alumnos entiendan lo que hacen y porqué lo hacen a cada momento – y luego entiendan el origen del error. La experiencia que vive el profesor al sentirse aprendiz e investigador de su propia práctica al analizar los errores de sus estudiantes puede causar en él no sólo una reflexión en la acción o sobre la acción (en términos de Schön, 1983), al tratar de enriquecer sus formas de enseñanza para atender posteriores errores similares en sus próximos cursos, sino además, puede causar una reflexión para la práctica, especialmente cuando se plantea y trata de diseñar el tratamiento de los errores para desarrollar en el estudiante un aprendizaje efectivo y significativo. Esa reflexión sobre la práctica sustenta su desarrollo profesional (Climent, 2005), basado también en las preguntas que se plantea y en el nivel de preocupación que revela. Por tanto, el análisis consciente y detallado de los errores de los estudiantes representa una oportunidad de aprendizaje para el profesor, lo cual le puede servir para promover y enriquecer su propio conocimiento profesional (Sosa, Huitrado, Hernández, Borjón, & Ribeiro, 2013). Por último, queremos agregar que el papel de las tareas que se les asignen a los profesores es sumamente importante, cuando se basan en el aprendizaje de la enseñanza desde el estudio de la práctica (Zazlavsky, 2008), pues depende de la tarea asignada serán los tipos de respuesta que den los profesores, además de considerar que otro aspecto elemental es la gestión que el formador haga de la tarea o actividad instruccional (Zazlavsky, 2007) y la relación entre formador y estudiante (Sanchez & García, 2004).

Agradecimientos

Esta investigación es apoyada por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT, México) y ha sido parcialmente financiada por la Fundación para la Ciencia y Tecnología (FCT, Portugal).

Referências bibliográficas

Abrate, R., Pochulu, M., & Vargas, J. (2006). *Errores y dificultades en Matemática. Análisis de causas y sugerencias de trabajo*. Villa María: Universidad Nacional de Villa María.

Ball D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Brousseau, G., Davis, R. Y., & Werner, T. (1986). Observing students at work. En B. Christiansen, G. Howson & M. Otte (Eds.), Perspetives on mathematics education. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Chapman, O. (2009). Educators reflecting on (researching) their own practice. In R. Evan & D. L. Ball (Eds.), *The professional education and development of teachers of mathematics. The 15th ICMI Study* (pp. 121 - 126). New York: Springer.

Climent, N. (2005). *El desarrollo profesional del maestro de Primaria respecto de la enseñanza de la matemática. Un estudio de caso*. Tesis doctoral publicada en www.proquest.co.uk

Compagnucci, E., & Cardós, P. (2007). El desarrollo del conocimiento profesional del profesor en psicología. *Orientación y sociedad [online]*, *7*, 103-114. Disponible en http://www.scielo.org.ar/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1851-88932007000100005&lng=es&nrm=iso (visitado el 22 de octubre de 2010).

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research of teaching. En M. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 119-161). Nueva York, Macmillan.

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y aprendizaje de la Matemática para maestros*. Recuperado el día 12 de Junio de 2012 de http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

Huitrado, J. L. (2012). Los profesores evaluadores olímpicos ante los errores relativos al álgebra de los alumnos de secundaria (tesis de maestría no publicada). Universidad de Huelva, España.

Jaworski, B. (2008). Mathematics teacher educator learning and development. In B. Jaworski & T. Wood (Eds.), *The mathematics teacher educator as a developing professional*. *Handbook of mathematics teacher education* (Vol. 4, pp. 1-13). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Latorre, A., Del Rincón, D., & Arnal, J. (1996). Bases metodológicas de la investigación educativa. Barcelona: Hurtado Ediciones.

Palarea, M. (1998). La adquisición de lenguaje algebraico y la detección de los errores comunes cometidos en el álgebra por alumnos de 12 a 14 años. Universidad de la Laguna. Tenerife, España.

Rico, L. (1998). Errores y dificultades. En J. Kilpatrick et al (Edit.). *Educación matemática: Errores y dificultades de los estudiantes, resolución de problemas, evaluación e historia* (pp. 69-108). Bogotá: Una Empresa Docente.

Ruano, R. M., Socas, M., & Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA 2*(2), 61-74.

Sanchez, V., & García, M. (2004). Formadores de profesores de matemáticas: Una aproximación teórica a su conocimiento profesional. *Revista de Educación*, *333*, 481-493.

Santos, L., & Pinto, J. (2009). Lights and shadows of feedback in mathematics learning. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd IGPME* (Vol. 5, pp. 49-56). Thessaloniki, Greece: PME.

Schön, D. A. (1983). *The reflective practitioner: How professionals think in action*. New York: Basic Books.

Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. En M. Camacho, P. Flores & M. P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática* (pp. 19-52). San Cristóbal de la Laguna, Tenerife: SEIEM.

Socas, M. (2011). La enseñanza del álgebra en la educación obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números*, *77*, 5-34.

Sosa, L. (2011). *Conocimiento matemático para la enseñanza en bachillerato*. *Un estudio de dos casos*. Tesis doctoral publicada en http://hdl.handle.net/10272/4509

Sosa, L., Huitrado, J. L., Hernández, J., Borjón, E., & Ribeiro, M. (2013). Uma oportunidade para o professor aprender analisando os erros dos alunos – Um exemplo de Álgebra. In *Atas XIX Encontro Nacional de Professores de Matemática (ProfMat 2013)* (s/ pp.). Lisboa: APM.

Stake, R. E. (2005). *Qualitative case studies*. *The Sage handbook of qualitative research* (*3rd ed*.).Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Tamir, P. (1991). Professional and personal knowledge of teachers and teachers educators. *Teacher and Teaching Education*, *7*(3), 263-268.

Yinger, R. (1986). Investigación sobre el conocimiento y el pensamiento de los profesores. Hacia una concepción de la actividad profesional. *Actas del I Congreso Internacional sobre Pensamiento del Profesor*. Sevilla.

Zaslavsky, O. (2007). Mathematics-related task, teacher education, and teacher educator. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*(4-6), 433-440.

Zaslavsky, O. (2008). Meeting the challenges of mathematics teacher education through design and use of task that facilitate teacher learning. In B. Jaworski & T. Wood (Eds.), *The mathematics teacher educator as a developing professional*. *Handbook of mathematics teacher education* (Vol. 4, pp. 93-114). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Uma tarefa de investigação em organização e tratamento de dados no 1.º ciclo: Realização da tarefa e reflexão da professora

Luciano Veia[1], Joana Brocardo[2], João Pedro da Ponte[3]
[1]Escola Superior de Educação e Comunicação da Universidade do Algarve, lveia@ualg.pt
[2]Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal, joana.brocardo@ese.ips.pt
[3]Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, jpponte@ie.ulisboa.pt

Resumo. *Esta comunicação procura compreender a forma como uma professora do 1.º ciclo conduz os alunos na realização de uma tarefa de organização e tratamento de dados e a reflexão que realiza. Trata-se de um trabalho no âmbito de um estudo que segue uma metodologia de investigação interpretativa e qualitativa na modalidade de estudo de caso. Os resultados mostram que, na exploração da tarefa, a prática de ensino da professora contempla de modo diferenciado as diversas fases do ciclo investigativo estatístico. A professora revela particular atenção à participação dos alunos nas tomadas de decisão sobre os procedimentos a seguir. Na sua reflexão, identifica os principais momentos da aula, valoriza as decisões tomadas e destaca a fase de recolha de dados como o momento mais significativo.*

Abstract. *In this paper, we analyze how a primary school teacher leads students in doing a task involving data handling, as well as the reflection. The paper is carried in the framework of a larger study that follows an interpretative and qualitative research methodology with a case study design. The results indicate that, in the exploration of the task, the practice of this teacher includes in different ways the phases of a statistical investigation. The teacher showed particular concern with the participation of the students in making decisions about the procedures to follow. During her reflection, she identifies the main moments of the lesson, values the decisions made and highlights the phase of data collection as the most meaningful moment.*

Palavras-chave: Práticas profissionais; Organização e tratamento de dados; Tarefas; Reflexão.

Introdução

A realização de tarefas seguindo o ciclo investigativo constituiu uma metodologia apropriada para o desenvolvimento do raciocínio e o pensamento estatístico dos alunos numa abordagem de ensino da Estatística 'orientado para os dados' (Martins & Ponte, 2010). A realização de investigações estatísticas permite aos alunos viver a sua 'experiência estatística' envolvendo-se nas tomadas de decisão durante as várias fases do processo (Canavarro, 2013). De facto, quando os alunos analisam dados reais na aula, podem tomar decisões sobre os métodos de recolha de dados tendo em conta as questões a responder e considerar como esses métodos afetam a qualidade dos resultados e o tipo de análise que é adequada (Garfield & Ben-Zvi, 2008). Por outro lado, a reflexão,

Martinho, M. H., Tomás Ferreira, R. A., Boavida, A. M., & Menezes, L. (Eds.) (2014).
Atas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática. Braga: APM., pp. 229–242

fornecendo oportunidades para voltar atrás e rever acontecimentos e práticas, contribui para o desenvolvimento profissional dos professores e permite melhorar as práticas profissionais (Oliveira & Serrazina, 2002).

Esta comunicação tem por base uma investigação em curso num contexto de trabalho colaborativo, em que participam o primeiro autor e três professores a lecionar nos 3.º e 4.º anos, cujo objetivo é analisar a evolução das suas práticas profissionais relativamente ao ensino da organização e tratamento de dados (OTD). Apresenta-se uma primeira análise do caso de Ana Maria, relativa ao modo como esta professora conduz uma tarefa de OTD, e a sua reflexão sobre a condução dessa tarefa.

Organização e tratamento de dados na aula de Matemática

São vários os documentos curriculares que enfatizam abordagens para o ensino da Estatística no sentido de promover outras capacidades para além da compreensão dos conceitos e procedimentos (Batanero, Arteaga, & Contreras, 2011; Martins & Ponte, 2010). Valorizando o trabalho estatístico na sala de aula, muitas recomendações curriculares sugerem um ensino da Estatística, desde os primeiros anos, envolvendo a realização de investigações pelos alunos, que formulam questões de pesquisa, recolhem dados, descrevem e compararam conjuntos de dados, e, com base nisso, propõem e justificam conclusões e previsões (Franklin & Garfield, 2006; NCTM, 2000). Trabalhando com contextos significativos e adotando uma postura crítica sobre a análise e interpretação de dados, pretende-se que os alunos, progressivamente, sejam capazes de olhar para um conjunto de dados como um todo.

A utilização de dados reais em Estatística permite que os alunos relacionem a análise e interpretação dos dados com o contexto do estudo e constitui uma estratégia adequada para os envolver na compreensão dos dados e conceitos estatísticos. O trabalho com dados reais pode ajudá-los a aprender a formular questões adequadas e a utilizá-los nas suas respostas (Franklin & Garfield, 2006). As decisões sobre os dados a recolher e como fazer essa recolha são aspetos fundamentais numa investigação estatística. A recolha de dados serve de base à sua análise, pois qualquer conclusão só pode ser confiável e relevante se também o forem os dados em que se baseia (Pfankuch & Wild, 2004). Segundo o NCTM (2000), os professores devem ajudar os alunos "a desenvolver formas de recolha de informação com o fim de responder às questões, de modo que eles aprendam quando e como tomar decisões baseando-se em dados" (p. 127).

Reflexão sobre a prática

A realização de investigações estatísticas, a partir de situações do quotidiano dos alunos, implica a disponibilidade do professor para lidar com situações abertas. A sua reflexão sobre a condução das tarefas pode ajudá-lo a gerir as situações imprevistas com que pode ser confrontado durante a sua prática.

A reflexão sobre a prática, possibilitando que o professor analise, reflita e questione a sua prática, constitui um importante fator para o desenvolvimento profissional dos professores (Oliveira & Serrazina, 2002). Muitos professores, ainda que informalmente, pensam e falam sobre as suas aulas, não passando, muitas vezes, da descrição dos factos ocorridos. Para Stein e Smith (1998), "cultivar hábitos de reflexão ponderada e sistemática pode ser a chave, tanto para melhorar o seu ensino, como para sustentar o seu desenvolvimento profissional ao longo da vida" (p. 268).

A reflexão pode ser concebida como uma forma especializada de pensamento, implicando uma análise ativa e voluntária das experiências pessoais, sendo caracterizada por movimentos constantes entre os acontecimentos e a tentativa de os compreender, procurando atribuir significado às suas ações. Segundo Oliveira e Serrazina (2002), "a capacidade para reflectir emerge quando há o reconhecimento de um problema, de um dilema e a aceitação da incerteza. O pensamento crítico ou reflexivo tem subjacente uma avaliação contínua de crenças, de princípios e de hipóteses face a um conjunto de dados e de possíveis interpretações desses dados" (p. 31). A reflexão surge, assim, como um importante recurso para que o professor se sinta capaz de enfrentar situações novas na sua prática e de tomar as decisões apropriadas.

Para Schön (1992), o processo reflexivo inclui: a reflexão-na-ação, que engloba a atividade de pensamento e que ocorre durante a prática; a reflexão sobre a ação, que se desenvolve após o acontecimento, permitindo a reconstrução mental da ação; a reflexão sobre a reflexão-na-ação, surgindo também após a ação, mas com um poder analítico de ordem superior, possibilitando ao professor olhar retrospetivamente para o que aconteceu e contribuindo para definir a sua ação futura.

Na perspetiva de Korthagen (2001), a reflexão incide sobre os conhecimentos e práticas, quando nos confrontamos com situações de natureza problemática e nos afastamos de ações de rotina. Para o autor, a reflexão permite ao professor desenvolver uma nova compreensão da sua prática de ensino, através de um "processo mental que tenta estruturar ou restruturar uma experiência, um problema ou conhecimento ou perspetiva" (p. 58).

Metodologia

Para concretização do estudo, foi constituído um grupo de trabalho de natureza colaborativa, formado pelo investigador e por três professores do 1.º ciclo a lecionar o 3.º ano em 2012/2013 e o 4.º ano em 2013/2014. As sessões de trabalho conjunto contemplaram a seleção e preparação de 6 tarefas de OTD para realização em sala de aula e a discussão e reflexão sobre o modo como elas foram exploradas a partir de episódios de sala de aula. A preparação das tarefas incluiu a sua seleção e construção, a antecipação de possíveis resoluções dos alunos, a elaboração dos materiais necessários e a discussão sobre a sequência dos vários momentos da aula e o modo como iria ser explorada. Nos momentos de reflexão, após o visionamento dos episódios, cada um dos professores apresentava um pequeno relato sobre as principais ocorrências, a que se seguia um debate entre todos os participantes.

Tendo como referência o objetivo definido e as questões formuladas, o estudo segue uma metodologia de investigação qualitativa de natureza interpretativa. Dado que esta investigação assume características essencialmente descritivas e interpretativas, adota-se a modalidade de estudo de caso (Stake, 2007). Esta comunicação refere-se a um dos três casos de estudo – Ana Maria (nome fictício) – e tem por base a análise dos dados recolhidos através da observação da aula em que foi explorada a tarefa "algibeiras no vestuário", das reflexões da professora sobre a condução desta tarefa nas sessões de trabalho colaborativo, nos momentos pós-aula, e na entrevista final. Analisamos, ainda, materiais produzidos pelos alunos.

Ana Maria tem como formação inicial o curso do Magistério Primário, complementado com o curso de Estudos Superiores Especializados na área de Computadores no Ensino. Durante o seu percurso profissional, apenas frequentou módulos de organização e tratamento de dados na formação contínua. No início do estudo, tinha 33 anos de serviço, estando colocada há 24 anos na escola onde atualmente leciona.

A condução da tarefa

A tarefa "algibeiras no vestuário" [Anexo 1] foi previamente preparada numa sessão de trabalho do grupo colaborativo. Numa primeira parte, solicitava-se um comentário sobre uma afirmação (incorreta) de um aluno do 3.º ano. Na segunda parte, pretendia-se que os alunos investigassem o número de algibeiras existentes no seu vestuário. A primeira parte tinha como objetivo focar a atenção dos alunos na análise de dados representados num gráfico circular e desenvolver o seu sentido crítico, via elaboração de argumentos que pudessem justificar o seu acordo ou desacordo com o comentário apresentado. Tinha, ainda, o objetivo de servir como 'fio condutor' para a segunda parte, onde se pretendia que os alunos recolhessem e analisassem dados de forma autónoma.

Após a distribuição da ficha de trabalho e da sua leitura em voz alta, Ana Maria pede aos alunos que respondam à questão e que justifiquem as suas respostas:

> Bento: Aqui vê-se logo quem é que tem mais.
> Professora: Então?
> Bento: É o quarto ano, porque se vê ali que o traço não está [gesticula com a mão na vertical].
> Professora: Vai lá ali [ao quadro] e explica, que eu não estou a perceber bem.

Ana Maria procura que o aluno clarifique o seu raciocínio pedindo-lhe que o explique, a partir do gráfico projetado no quadro interativo, tendo igualmente a preocupação que os restantes alunos acompanhem a explicação e que a percebam. Após a explicação de Bento, pergunta se concordam com a opinião do colega e solicita a participação de outros alunos:

> Professora: Quem descobriu doutra maneira? Quem é que tem razão? Será o Bento ou este vosso colega do 3.º ano?
> Alunos: O Bento.
> Professora: Então e alguém pensou noutra maneira, sem ser a forma do Bento? Eu já vi alguém pegar no lápis.

Para além de confrontar a explicação de Bento com a afirmação do aluno do 3.º ano, Ana Maria pede contributos de mais alunos. Mário diz que adicionava o número de algibeiras das turmas do 3.º e do 4.º anos e comparava os resultados. Patrícia compara os algarismos das dezenas (6, 6, 7 no 4º ano e 5, 6, 6 no 3º). Emílio diz que somava todos os valores e achava a metade. Por fim, Mário refere uma nova estratégia em que compara os setores do gráfico. Esta fase da aula termina com uma resposta negativa, por parte dos alunos, à questão: "É aceitável a frase?".

No seguimento desta discussão, a professora lança o desafio de como continuar o trabalho. Os alunos optam por procurar saber quantos bolsos tem a turma. Ana Maria escreve a questão no quadro e fornece algumas indicações de como realizar o trabalho:

Vou fazer uma proposta, a proposta é: cada grupo vai-se organizar, vai arranjar maneira (…) vão pensar sobre o assunto, “quantos bolsos tem a nossa turma?” ou “quantas algibeiras tem a nossa turma?”, vão pensar como é que vão recolher estes dados e o que é que vão fazer com eles. Agora orientem-se.

Organizados em grupo (2 grupos de 5 e 2 grupos de 4), os alunos discutem o processo de recolha de dados. Ana Maria acompanha o trabalho dos grupos, coloca questões procurando clarificar o raciocínio dos alunos e, passado algum tempo, partilha as ideias ouvidas nos grupos com toda a turma:

Professora: Ouvi basicamente duas propostas. A primeira proposta, do Mário, que é igual à proposta do grupo do Bento e à do grupo do António, e a proposta é: vamos ver a cada um dos alunos, vamos contar …

Mário: Primeiro metemos todo o grupo aqui, o grupo do Mário, a Rute tem 2, o Emílio tem 2, o Mário tem 6. Depois vai somar-se tudo.

Professora: Sim.

Mário: Depois dava um resultado.

Professora: Mas vais somar para quê?

Mário: Para depois saber.

Professora: [Olha para o quadro, para a questão] Ok, isso tem toda a lógica para a nossa questão. Saber o total.

Mário: E depois no fim podemos fazer um gráfico de barras.

Os alunos decidem construir um gráfico de barras com indicação do número de algibeiras dos vários grupos. A professora distribui uma folha de papel quadriculado para a construção do gráfico. Depois de construídos os gráficos, pergunta se já conseguem responder à questão que tinham formulado: “Quantos bolsos tem a turma?”. Um aluno diz que falta “fazer a conta” para encontrar o número de algibeiras. Depois de calculado o número de algibeiras da turma (16+12+22+14=66), a professora coloca novas questões procurando uma explicação para o número de algibeiras verificado para cada grupo e o seu significado:

Professora: (…) Agora tenho outra pergunta: “qual é o grupo que tem mais algibeiras?”.

Sandra. É o grupo C.

Professora: É o grupo C. Luís, achas que há alguma razão para isso? Qual é a tua opinião? Por que é que achas que eles têm mais bolsos do que os outros?

Luís: Porque as calças deles têm mais algibeiras.

David. É porque o António tem logo 12.

António: Tenho só 7.

Professora: São 7, afinal. Alguém sabe indicar outra razão?

Duarte: Porque eles são 5.

António: Eu contei com os bolsos do casaco.

Bento: Se eu também contasse, teria mais bolsos do que vocês.

Alunos: Pois era (Yah)

Professora: Calma aí, temos aqui duas discordâncias. Uma, aquele grupo tem só 4 elementos, este tem 5, aquele tem 5. Outra, não foi definido um critério para contar as algibeiras, ou seja (…), antes de fazermos uma recolha de dados temos que estabelecer um critério e aqui devíamos ter estabelecido logo. Vamos contar os bolsos do vestuário que temos vestido? Vamos ver os casacos que estão pendurados no cabide? Vamos ver os casacos que temos na mochila? Esta definição de critérios é muito importante na recolha e na organização dos dados (…) Para além disso, reparem que não podemos comparar os grupos por aquilo que o David disse, porque há grupos que só têm 4 alunos e há grupos que têm 5. Podíamos comparar os dois grupos de 5 alunos e os dois grupos de 4 alunos, mas entre todos não podemos fazer comparação (…)

Ana Maria confronta os alunos com duas situações. Por um lado, estão a comparar o número de algibeiras de grupos com um número diferente de alunos. Por outro lado, parece não existir uniformidade no processo de recolha de dados. Alguns alunos contam o número de algibeiras incluindo a roupa pendurada nas cadeiras ou que trazem na mochila, enquanto outros contam apenas as algibeiras na roupa que trazem vestida. Ana Maria procura explicar aos alunos a necessidade de seguirem um critério comum na contagem do número de algibeiras, salientando a importância da correção no processo de recolha de dados. Por sugestão da professora, os alunos contam apenas as algibeiras da roupa que trazem vestida. No seguimento, Ana Maria reformula a questão de estudo no sentido de se chegar à distribuição do número de bolsos pelos alunos da turma:

> Agora vou fazer outra proposta: o que é que eu quero saber? Quero saber como estão distribuídas as algibeiras ou os bolsos pelos alunos da turma. O que é que eu quero perguntar com isto? Quero que se estude quantos alunos têm 0 algibeiras, quantos alunos têm 3, quantos alunos têm 8, quantos alunos têm 20, quantos alunos têm 10, perceberam? [No quadro escreve: Como estão distribuídos os bolsos na nossa turma] (…) a questão que eu estou a pôr agora é: "Como estão distribuídos os bolsos na nossa turma?". Como é que querem fazer agora a tabela de frequências, como vão fazer a recolha de dados, cada grupo vai-se orientar sozinho. No final, quero que digam assim: "na nossa turma há 4 alunos com x bolsos, na nossa turma há y alunos com, há 8, 9 ou 10 alunos com y bolsos ou algibeiras".

Depois de deixar passar algum tempo para que os grupos discutissem e decidissem o processo de recolha de dados, Ana Maria abre um novo espaço de diálogo:

Professora: Ouviram a proposta da Ester? A Ester diz: "eu comando aqui as operações e mando os alunos com 2 bolsos para o quadro". Quem diz vão para o quadro, diz põe o dedo no ar. É o método que ela propõe para recolher os dados. Os meninos que têm 3 vão para o quadro ou põem o dedo no ar. O Bento tem outra proposta.

Bento: Eu vou pelas mesas perguntar e depois venho para o lugar e digo o tal tal tem tantos bolsos. Depois vou a outra mesa e faço o mesmo.

Professora: Quem tem outra proposta para recolher os dados? Mário, qual é a tua proposta?

Mário: Podemos perguntar a todos quantos bolsos têm.

Professora: E depois, o que é que fazemos a seguir? Qual é a forma que acham mais funcional? Se calhar é essa. Diz lá, Duarte.

Duarte: Pomos o nome de cada um no quadro e, à frente, os bolsos.

Professora: A proposta do Duarte é pôr o nome do aluno e colocar à frente quantos bolsos tem. O António?

António: Íamos perguntar quantos alunos tinham dois bolsos e púnhamos um traço, perguntávamos quantos tinham dois, quantos tinham um.

Professora: Vai lá tentar fazer ali [no quadro] uma tabela. Vais tentar escrever o que estás a dizer. Vejam lá a ideia do António.

[No quadro, o aluno escreve, numa coluna, números de 0 até 10]

António: Perguntamos quantos têm 4 algibeiras e colocamos à frente do 4, traços. Fazemos o mesmo para zero algibeiras.

Professora: Ok. Já há aqui várias propostas de recolher e organizar os dados, cada grupo vai fazer aquela que quiser.

Os alunos começam a recolher os dados de cada grupo circulando pela sala. Passado algum tempo e existindo alguma confusão, Ana Maria decide intervir e fazer o ponto da situação desta fase da aula:

> O que é que está a acontecer? Cada grupo escolheu um método diferente de recolher os dados. Houve grupos que não se souberam organizar. Então o que é que aconteceu? O Bento foi perguntar os dados, o Luís quis ir receber os dados, a Ester, porque eu mandei, levantou-se e foi recolher os dados, e isso fez com qua alguns colegas dos outros grupos tivessem que responder 3 e 4 vezes para o mesmo grupo. Aquele grupo resolveu cada um levantar-se à sua vez e ir recolher os dados. Não funcionou como grupo (…) neste grupo, a Sandra tomou a liderança, resolveu pegar no cadernão e foi perguntar. Foi só uma. Então, a Sandra já tem os dados todos. Este grupo distribuiu tarefas. Sabem o que é que isto dá? Quem está a fazer a recolha de dados não se organizou e vários grupos têm dados que não condizem, ou seja, alguém diz que o António tem 7 bolsos e há outros que dizem que tem 12. Então, para se fazer um estudo, os dados têm de coincidir (…) mesmo perguntando a cada um, se houver muita confusão na sala, os dados podem ser deturpados, podem ser alterados, podem não corresponder à verdade. Então eu vou propor, uma vez que há grupos que estão 'encalhados', vamos utilizar a tabela que o António tinha proposto e vamos ver se a recolha está certa…

Numa tentativa de confirmar se todos os grupos têm os mesmos valores, Ana Maria pede ao António para registar os dados na tabela que tinha construído no quadro. Começa por perguntar quantos alunos têm zero algibeiras. Dois alunos levantam o braço, pelo que

António coloca dois traços à frente do zero. O processo contínua até 10 algibeiras, número máximo de algibeiras encontrado. Os alunos constroem o *tally-chart* e transformam-no posteriormente em tabela de frequências [Figura 1].

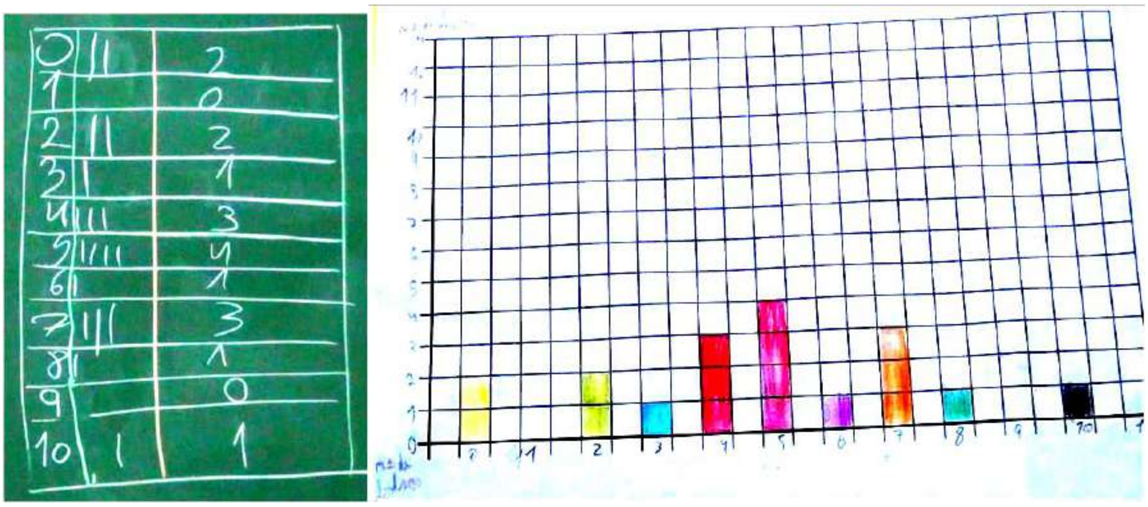


Figura 1. Tabela de frequências e gráfico representativo do número de bolsos por aluno

A partir dos dados constantes na tabela de frequências, cada grupo vai construir um gráfico de barras. Ana Maria distribui uma folha quadriculada e acompanha o trabalho dos vários grupos. Construído o gráfico [Figura 1], segue-se a fase da interpretação de resultados. Solicita aos alunos que formulem as suas conclusões, acompanha as várias intervenções e repete-as como forma de toda a turma acompanhar e perceber as conclusões formuladas. Pergunta "qual é a moda" e questiona os alunos por possíveis razões para se ter verificado um maior número de alunos com 5 algibeiras. Na continuação do pedido de conclusões, questiona os alunos sobre indicadores de variação da distribuição. Os alunos indicam o número máximo e o número mínimo de algibeiras.

Após exploração do gráfico, coloca questões que vão para além da sua leitura, como a procura de justificações para existirem alunos com zero algibeiras e o que aconteceria se o estudo fosse realizado noutra época do ano.

A reflexão da professora

Na reflexão realizada após a conclusão da aula, Ana Maria manifesta o seu agrado relativamente ao decorrer da aula e ao envolvimento dos alunos na resolução da tarefa. Faz uma apreciação global positiva sobre o trabalho desenvolvido, embora reconheça a existência de "alguma confusão". Começa por referir que: "a parte da discussão da primeira questão inicial também achei muito interessante", acrescentando a seguinte apreciação:

> Não pensei que vissem tantas formas (…), pensei: bom, vão ver pela metade, como fez o Bento, ou vão fazer o total; não estava à espera que fizessem sector a sector. Aquela das dezenas também não.

Ana Maria mostra-se agradavelmente surpreendida com as várias estratégias apresentadas. Valoriza o desempenho de alguns alunos, durante a resolução da primeira parte da tarefa, quando acrescenta mais alguns comentários:

> [Bento] é assim, o que lhe der menos trabalho (…) ele olha e tem logo a primeira perceção, é sempre a mais fácil. Nunca faz coisas muito elaboradas. Depois os outros não, o Mário, por exemplo, já 'rebusca', o António já 'rebusca', o David 'rebusca' mas ele é logo assim. O Mário foi comparar sector a sector e houve vários que fizeram as contas por escolaridade e depois viste a do Emílio, somamos tudo, achamos a metade, 'rebuscadíssimo'.

Estes comentários evidenciam uma preocupação em compreender a forma como os alunos pensam e as estratégias que utilizam na resolução da tarefa. Embora reconheça que os seus alunos têm algum sentido crítico relativamente a situações com que são confrontados, Ana Maria considera que deverão ser trabalhadas tarefas que "tivessem uma situação a nível da sociedade, em geral, que tem implicações para a vida do dia-a-dia e do mundo". No entanto, esta sua intenção deverá ter em conta a maturidade dos alunos, referindo "mas eles apenas têm 9 anos. Lá chegarão".

Durante a aula, ocorre uma situação que não tinha sido antecipada durante a preparação da tarefa. No momento em que lança o desafio de como continuar o trabalho, os alunos decidem investigar "quantos bolsos tem a nossa turma?". Ana Maria refere-se a este momento da aula e à decisão que tomou no sentido de contornar a situação inesperada com que se confrontou:

> E depois somaram, e respondia à questão "Quantas algibeiras tem a turma?" (…) não era propriamente o que a gente queria [risos]. Mas nós queríamos saber, para além disso, como é que estão distribuídas pelos alunos (…) pois assim, como foi a proposta deles eu nem me apercebi, só depois ao longo [da resolução], quando começamos a fazer é que eu vi, não era isto que a gente queria (…) eles queriam responder como a turma, como o gráfico circular. Pois, realmente como é que se enquadrava ali, como é que podíamos ver? Eu até acho que foi bom, porque assim eles viram duas realidades diferentes.

Ana Maria valoriza a sua opção, surgida no momento, em aceitar a proposta dos alunos para calcular o número de algibeiras da turma, quando a intenção inicial era estudar a distribuição das algibeiras pelos alunos. Assume como correta a sua decisão em respeitar a opinião dos alunos e considera que "se tivesse proposto logo a primeira questão não tínhamos feito dois trabalhos".

Mesmo considerando que alguns alunos revelaram atitudes que perturbaram o funcionamento da aula, em parte justificáveis pela composição dos grupos, Ana Maria valoriza, em termos globais, o trabalho realizado, reconhecendo as potencialidades desta tarefa para o desenvolvimento de competências relacionadas com o trabalho de grupo:

> Eu acho que teve mais-valias para eles. Pode ter havido muita confusão (…) acho que foi bom porque eles não têm poucos tempos de trabalho de grupo, por várias razões, e, por exemplo, há aqui miúdos que me surpreenderam, porque são miúdos que normalmente não participam na aula mas que depois a nível de grupo dão as suas ideias (…) o Álvaro surpreendeu-me, porque é um aluno com muitas dificuldades, com apoio, e, no entanto, ali naquele grupo, foi o que disse: então tu vais para aquele grupo, tu vais para o outro e tu vais para o outro, pronto, nas questões práticas afinal até soube orientar-se.

Estes comentários surgem na sequência da reflexão realizada sobre a fase de recolha de dados em que Ana Maria sentiu necessidade de intervir e fazer o ponto da situação.

> Para tentarmos que, no fim, a pergunta fosse respondida, senti necessidade de fazer essa pausa, essa quebra, para esclarecer mesmo as ideias deles, mesmo a forma como eles se estavam a organizar (…). Porque um grupo resolveu distribuir tarefas, um ia contar as algibeiras em cada grupo, registava e trazia para o grupo. Depois havia outro que resolveu registar o seu grupo, depois ia perguntar ao outro grupo e registava do outro, e recolhiam assim os dados. Até estava mais ou menos. Não esperava que houvesse depois esta disparidade com a recolha, eles próprios se enganavam.

Para além da disparidade verificada na recolha de dados, Ana Maria aponta, como elemento justificativo para a sua decisão de chamar a atenção dos alunos, a situação ocorrida com a contagem do número de algibeiras. Refere que, no momento, sentiu a necessidade em definir um critério que orientasse o trabalho dos alunos nesta fase da aula:

> Porque nós vimos que realmente havia miúdos que, nos grupos, estavam a recolher as algibeiras e os números não coincidiam. Dum grupo para o outro não coincidia e depois enganava o outro grupo que registava menos (…) e é a partir daí que aparece a história dos critérios e seguir uma linha de orientação para a recolha dos dados.

Ana Maria valoriza o seu pensamento durante a ação quando identifica uma decisão que contribui para resolver a situação de impasse que se verificava e fornecer orientação para o prosseguimento do trabalho. Reconhece a importância da fase de recolha de dados, a necessidade de os alunos seguirem procedimentos adequados e de recorrer a dados reais quando refere que este tipo de trabalho, de "começar na questão, naquilo que se quer e levar até ao fim", constitui novidade nas suas práticas.

A concluir

Em vários momentos da realização da tarefa, é visível a intenção de Ana Maria em "dar voz" aos seus alunos para tomadas de decisão. Esta situação verifica-se logo no início da tarefa, quando pede o comentário sobre a afirmação incorreta, prossegue quando lança o desafio sobre como pensam continuar o estudo e quando pede propostas de como recolher os dados, e termina com a solicitação de conclusões a partir da interpretação dos dados. Durante as fases do estudo, revela preocupação em compreender as estratégias seguidas pelos alunos. Valoriza os seus raciocínios e dedica-lhes particular atenção através da colocação de questões para clarificação. De igual modo, escuta atentamente as várias intervenções e, em muitas ocasiões, repete-as, para que todos os alunos percebam e acompanhem as opiniões dos colegas.

A reflexão de Ana Maria incide, sobretudo, na descrição dos factos ocorridos (na terminologia de Oliveira & Serrazina, 2002). Salienta-se uma tendência de focar a reflexão no que os alunos dizem e fazem, o que pode ter sido induzido ou reforçado pelas discussões no grupo colaborativo. Além disso, a professora salienta os aspetos que diferem da sua prática habitual, identificando como momento mais significativo da aula a discussão sobre a forma de recolher os dados. Refletindo sobre a importância deste processo, valoriza a sua intervenção, em que chama a atenção dos alunos para os procedimentos dos vários grupos, para a necessidade de seguir uma metodologia correta de recolha de dados e definir um critério para a contagem do número de algibeiras. Finalmente, a ênfase que dá à decisão que tomou no sentido de gerir a situação inesperada com que se confrontou ao considerar a possibilidade de investigar o número de bolsos da turma, pode ser interpretada como indo ao encontro do que Schön (1992) refere sobre a dificuldade da reflexão-na-ação. De facto, Ana Maria realça uma ação que acaba por se mostrar adequada e que também valoriza por ter vivido a dificuldade de decidir no momento.

Os resultados deste estudo sugerem que a organização e tratamento de dados, nos primeiros anos, pode ir mais além da análise e interpretação de dados 'prontos a utilizar' e fornecidos pelo professor. Professores e alunos podem realizar experiências que contemplem todo o ciclo investigativo, onde se inclui a tomada de decisões sobre os dados necessários para responder à questão formulada, processos adequados para os recolher, registar e analisar. Isto coloca à investigação em Didática da Matemática o desafio de desenvolver estudos visando conhecer como os alunos se envolvem em investigações estatísticas e como podem ser apoiados pelos seus professores.

Referências

Batanero, C., Arteaga, P., & Contreras, J. (2011). El currículo de estadística en la enseñanza obligatoria. *TEIA*. *Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, *2*(2). Disponível em http://www.ugr.es/~batanero/publicaciones%20index.htm

Canavarro, A. P. (2013). Sobre estudos estatísticos: Do questionar à recolha de dados. *Educação e Matemática*, *122*, 34-36.

Franklin, C., & Garfield, J. (2006). The GAISE Project: Developing statistics education guidelines for grades Pre-K-12 and college courses. In G. Burrill (Ed.), *Thinking and reasoning with data and chance: NCTM 2006 Yearbook* (pp. 345-375). Reston, VA: NCTM.

Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students' statistical reasoning: Connecting research and teaching practice*. Springer Publishers

Korthagen, F. (2001). A reflection on reflection. In F. A. J. Korthagen, J. Kessels, B. Koster, B. Lagerwerf, & T. Wubbels (Eds.), *Linking practice and theory: The pedagogy of realistic teacher education* (pp. 51-68). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Martins, M. E., & Ponte, J. P. (2010). *Organização e tratamento de dados*. Lisboa: ME/ DGIDC.

NCTM (2000). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM.

Oliveira, I., & Serrazina, L. (2002). A reflexão e o professor como investigador. In GTI (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 30-42). Lisboa: APM.

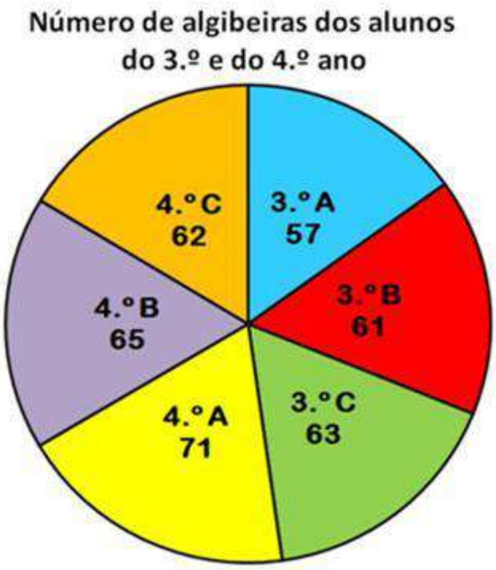
Pfannkuch, M., & Wild, C. (2004). Towards an understanding of statistical thinking. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 17-46). Kluwer Publishers.

Schön, D. (1992). Formar professores como profissionais reflexivos. In A. Nóvoa (Ed.), *Os professores e a sua formação*. Lisboa: Dom Quixote.

Stake, R. (2007). *A arte da investigação com estudos de caso*. Lisboa: Fundação Calouste Gulhenkian.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3(*4), 268-275.

Anexo 1. Tarefa «Número de algibeiras»



Numa escola do 1.° ciclo perguntou-se aos alunos das turmas do **3.°** e do **4.°** ano quantas algibeiras tinham no seu vestuário.

Recolhidos os dados e calculados os totais de algibeiras por cada turma construiu-se o gráfico circular que se apresenta ao lado.

Perante estes resultados um aluno do **3.°** ano fez a seguinte afirmação: "*Os alunos do 3.° ano têm tantas algibeiras como os alunos do 4.° ano*".

Tendo em conta o gráfico consideras esta afirmação aceitável?

Dá uma explicação que justifique a tua resposta.

Conhecimento de Geometria de estudantes da Licenciatura em Educação Básica

Luís Menezes[1], Lurdes Serrazina[2], Lina Fonseca[3], António Ribeiro[1], Margarida Rodrigues,[2], Isabel Vale[3], Ana Barbosa[3], Ana Caseiro[2], Ana Martins[1], Cristina Loureiro[2], Fátima Fernandes[3], Graciosa Veloso[2], Helena Gomes[1], Lina Brunheira[2], Pedro Almeida[2], Tiago Tempera[2]

[1]Escola Superior de Educação de Viseu, menezes@esev.ipv.pt

[2]Escola Superior de Educação de Lisboa, lurdess@eselx.ipl.pt

[3]Escola Superior de Educação de Viana do Castelo, linafonseca@ese.ipvc.pt

Resumo: *Este estudo quantitativo tem como objetivo avaliar o desenvolvimento do conhecimento de geometria de mais de duas centenas de estudantes do ensino superior a frequentar o curso de Educação Básica em três ESE. Através de um teste com 21 questões, passado antes e após a formação em Geometria, avaliaram-se os estudantes num conjunto de categorias. Os resultados revelam que, embora os estudantes manifestem conhecimentos de conceitos elementares à partida, com percentagens em torno dos 70%, e evolução nas três escolas, com aumentos médios de 5%, revelam, ainda, aspetos críticos relativos a conceitos básicos contemplados no teste.*

Abstract: *This quantitative study aims to assess the development of geometry knowledge of over two hundred students attending Basic Education course in three Schools of Education. Through a test with 21 questions, handed over before and after training in Geometry, students are assessed in a set of categories. The results reveal that although students demonstrate knowledge of elementary concepts at the outset, with percentages of success above 70%, and evolution at the three schools, with an average increase of 5%, also reveal critical aspects related to basic concepts covered in the test.*

Palavras-chave: Conhecimento matemático; Geometria; Formação inicial de professores e educadores.

Introdução

Esta comunicação surge no âmbito de um projeto de investigação envolvendo três Escolas Superiores de Educação (ESE) (Lisboa, Viana do Castelo e Viseu), que visa compreender de que modo o atual modelo de formação inicial dos educadores de infância e dos professores dos 1.º e 2.º ciclos do ensino básico está a contribuir para o desenvolvimento do conhecimento matemático do professor/educador.

Atualmente, em Portugal, a formação matemática dos futuros educadores de infância e dos professores dos 1.º e 2.º ciclos do ensino básico pressupõe que façam pelo menos 30 ECTS em Matemática na Licenciatura em Educação Básica (LEB), sendo a forma e o conteúdo desta formação da responsabilidade de cada instituição de ensino superior que ministra o curso. Ora, a forma e o conteúdo das unidades curriculares (UC) são determinantes para o desenvolvimento do conhecimento matemático dos futuros professores e educadores, na medida em que criam condições de aprendizagem mais ou menos poderosas e produtivas (Ponte, 2012).

A Geometria é uma área de conhecimento matemático na qual os professores e futuros professores dos primeiros anos revelam habitualmente muitas dificuldades (Viseu, Menezes, & Almeida, 2013; Tempera, 2010). Contudo, o reforço que a Geometria ganhou nos currículos portugueses, fruto das alterações nos programas de Matemática da última década, apesar dos estudos realizados (Monteiro, Costa, & Costa, 2004; Tempera, 2010), está ainda grandemente por avaliar.

Neste quadro, esta comunicação foca o desenvolvimento do conhecimento de conteúdo de Geometria de estudantes do curso de LEB das três instituições já indicadas após a frequência de unidades curriculares de Geometria, avaliado através das respostas dadas a um teste escrito, aplicado antes e depois da unidade curricular de Geometria. Assim, procuramos identificar as aprendizagens realizadas por estudantes de Educação Básica no âmbito da Geometria em seis tópicos: raciocínio espacial, classificação, congruência, equivalência, semelhança e propriedades de figuras 2D, bem como apontar os aspetos em que revelam mais dificuldades.

Conhecimento de Geometria

Saber Matemática para poder ensiná-la envolve uma compreensão em profundidade que garanta o domínio dos significados e dos fundamentos de cada conceito e/ou procedimento (Albuquerque et al., 2008). Kilpatrick, Swafford, e Findell (2001) entendem por conhecimento de Matemática: conhecimento dos factos, dos conceitos, dos procedimentos, das relações entre eles e respetivos fundamentos; conhecimento da forma como as ideias matemáticas podem ser representadas; e conhecimento da Matemática como uma disciplina – em particular, como o conhecimento matemático é produzido. Estes autores referem, ainda, ser pouco provável que os professores consigam que os seus alunos compreendam os conceitos matemáticos se eles próprios não os compreenderem. Assim, o ensino de Matemática num curso de formação de professores apresenta particularidades em relação ao ensino desta disciplina em outros cursos, como, por exemplo, na engenharia. Nesta perspetiva, o professor precisa de ter conhecimento da Matemática, nomeadamente em Geometria, envolvendo um conhecimento aprofundado de conceitos e procedimentos, bem como a compreensão profunda da Matemática como uma ciência que possui uma natureza própria, que envolve, por exemplo, o papel das definições e da demonstração matemática e a importância das generalizações e abstrações.

Blanco e Barrantes (2003) apelam à necessidade de se prestar mais atenção à formação inicial dos professores como elemento-chave para se produzir mudanças no panorama educativo. Concluem ainda que, frequentemente, os alunos em formação inicial repetem as mesmas concetualizações erradas, relativas aos conceitos geométricos, adquiridas durante a sua escolaridade anterior, e estas ideias têm tendência a tornar-se implícitas, estáveis e resistentes à mudança. Outros autores reforçam esta ideia referindo que os futuros professores parecem não estar em condições de promover um ensino significativo de Geometria, na medida em que não apresentam conhecimentos científicos neste domínio suficientes e adequados aos conteúdos programáticos que têm de lecionar (Gomes & Ralha, 2005; Sousa & Fernandes, 2004; Viseu et al., 2013).

Também o estudo realizado por Tempera (2010), focado na caracterização do conhecimento de Geometria dos estudantes da Licenciatura em Educação Básica, revelou que os estudantes possuíam conhecimentos muito elementares de Geometria, mesmo após terem frequentado unidades curriculares desta área no decorrer do curso. Os resultados deste estudo são convergentes com outros estudos empíricos, evidenciando que existe dificuldade: (i) na concetualização das convenções necessárias no desenho e interpretação de representações 2D de objetos 3D (Pittalis, Mousoulides, & Christou, 2009); (ii) nas classificações de polígonos, sendo estas baseadas essencialmente em protótipos de figuras, nos quais a posição, o aspeto e a dimensão das figuras pareceram sobrepor-se ao conhecimento das propriedades de uma classe de figuras (Clements & Battista, 1992); (iii) acrescida na identificação de figuras planas congruentes que tenham sofrido uma transformação geométrica de reflexão, comparativamente à de rotação (Jacobson & Lehrer, 2000); e (iv) na compreensão dos conceitos de equivalência, área, semelhança, ângulo e simetria.

Evidencia-se, assim, a importância da formação inicial como ponto de partida para a mudança concetual dos alunos, sendo tanto ou mais justificada pelo facto de vários estudos mostrarem que os professores em exercício apresentam as mesmas dificuldades concetuais em Geometria das dos seus alunos (Owens & Outhred, 2006; Swafford, Jones, & Thornton, 1997; Viseu et al., 2013), transmitindo-lhes conceitos errados (Zaslavsky, 1991). Entre as fragilidades concetuais incluem-se, por exemplo, a classificação de figuras com base em protótipos e não nas respetivas propriedades (Clements & Battista, 1992), ou ainda a dificuldade de compreensão da reflexão quando esta apresenta um eixo oblíquo (Schultz & Austin, 1983).

Formação em Geometria nas ESE

Nas três ESE participantes neste estudo, os estudantes têm formação em Geometria. Os conceitos são trabalhados a partir da resolução de problemas e de tarefas investigativas com recurso a materiais manipuláveis ou outros. Partindo do princípio que a Matemática é uma atividade humana e desenvolvida através da interação social (Edwards & Harper, 2010), grande parte do trabalho de sala de aula é feito em grupo, seguido de discussão coletiva. Considerando que a Geometria é um tema matemático em que os alunos revelam dificuldades e sobre o qual tiveram menos experiências na escolaridade anterior, comparativamente com outros temas, as aprendizagens seguem uma perspetiva construtiva e a natureza das tarefas é similar daquelas que se pretende venham a ser realizadas com alunos do ensino básico. A abordagem construtiva permite partir dos conhecimentos dos estudantes, organizando-os progressivamente em conhecimentos em Geometria, desenvolvendo em paralelo capacidades de resolução de problemas, de visualização e de representação. Esta abordagem, que parte do conhecimento comum para a formalização, tem um forte sentido didático e permite estabelecer analogias e conexões entre o que se aprende e a forma como se aprende. Deste modo, os estudantes passam também a conhecer e a saber utilizar com sentido um conjunto de recursos didáticos (materiais manipuláveis, *applets* com atividades interativas, AGDs,…) com os quais muitos deles pouco contactaram anteriormente. Atende-se ao facto de os estudantes possuírem níveis de escolaridade em Matemática diferentes e conhecimentos em Geometria diversificados, pelo que o recurso a materiais manipuláveis se torna um elemento imprescindível na abordagem dos conceitos, sendo facilitador no apoio à concretização das estruturas geométricas importantes para a construção dos conceitos geométricos (Clements & Battista, 1992). É de sublinhar que os materiais são considerados como um meio e não um fim, ou seja, são valorizadas principalmente as atividades desenvolvidas, nas quais os materiais assumem um papel de apoio e representativo da estrutura geométrica subjacente.

Na ESEVC, a matemática escolar serve de mote aos temas a tratar nas diferentes UC da LEB. Os temas abordados na UC de Geometria (4º semestre, 7 ECTS, 64h de contacto) distribuem-se entre a Geometria euclidiana no plano – triângulos e quadriláteros, congruência e semelhança, áreas de alguns polígonos e do círculo; lugares geométricos no plano – e a Geometria euclidiana no espaço – poliedros, superfícies, superfícies e sólidos de revolução, áreas e volumes de sólidos geométricos.

Na ESEV, os estudantes têm duas UC de Geometria, uma no 2.º e a outra no 5.º semestre do curso (8,5 ECTS no total, 105h de contacto). Na Geometria I abordam conteúdos semelhantes aos que são trabalhados na ESEVC, incluindo a abordagem das transformações geométricas, recorrendo a materiais manipuláveis e ao *software Cabri-Géomètre*. A Geometria II completa o estudo das figuras bi e tridimensionais, desenvolvido na Geometria I, numa perspetiva analítica (aproveitando o trabalho realizado na UC de Álgebra). Para além disso, no final da unidade, os estudantes tomam conhecimento da existência de outras Geometrias. Os temas da UC são: (i) orientação e referenciação; (ii) objetos geométricos em referenciais do plano e do espaço; e (iii) Outras Geometrias.

Na ESELx, a UC de Geometria (4.º semestre, 6 ECTS, 54h de contacto) está centrada no estudo da visualização espacial, representação, classificação, decomposição e composição de figuras, relações entre figuras (congruência, equivalência, semelhança, transformações geométricas), figuras no plano (2D) e no espaço (3D) com especial relevo para a classificação de polígonos e poliedros, e relações entre famílias de polígonos e poliedros. A unidade curricular visa desenvolver: (i) a compreensão da Geometria e da sua natureza no que se refere à definição, demonstração e formalização; (ii) a capacidade de resolução de problemas; (iii) capacidades de visualização e de representação; e (iv) competências geométricas que contribuam para a valorização do ensino da Geometria e das capacidades que lhe estão ligadas, na educação de infância e na escolaridade básica.

Metodologia

Dada a natureza do problema em estudo e o número elevado de sujeitos envolvidos, adotou-se uma metodologia quantitativa. Os dados recolhidos resultam da aplicação de um teste a estudantes das três ESE. O teste foi resolvido individualmente e em sala de aula, administrado antes (1.º T) e imediatamente após (2.º T) a frequência de uma/da primeira unidade curricular de Geometria. O teste não foi analisado, discutido ou corrigido com os estudantes entre as duas aplicações. Os alunos que na ESELx não fizeram o 2.º teste correspondem aos alunos que, nas várias turmas, faltaram à última aula de Geometria em que foi aplicado o teste. O Quadro 1 apresenta os números de alunos que realizam os testes em cada uma das instituições:

Quadro 1. Alunos que realizam os testes

Instituição	N.º de alunos no 1.º teste (1.º T)	N.º de alunos no 2.º teste (2.º T)
ESE de Lisboa (ESELx)	158	124
ESE de Viana do Castelo (ESEVC)	54	54
ESE de Viseu (ESEV)	39	39
Totais	**251**	**217**

O teste foi construído de modo a apresentar questões que envolvem conceitos essenciais no ensino da Geometria nos primeiros anos e a permitir ser respondido em cerca de 30 minutos. É constituído por 21 questões de resposta de escolha múltipla e procura avaliar conhecimento de Geometria elementar, bem como conhecimentos relacionais, já que em algumas questões é necessário que se identifiquem e relacionem propriedades geométricas. Para a análise do teste, as questões foram agrupadas em sies categorias: "Raciocínio espacial", "Classificação", "Congruência", "Equivalência/área", "Semelhança" e "Propriedades de figuras 2D" e "Simetria". Embora haja questões que correspondem a mais do que uma categoria, foi feita a opção por uma delas. Por exemplo, a questão 7, incluída na "Congruência", também implica "Raciocínio espacial". Em cada categoria, as questões foram gradadas em três níveis, correspondendo a graus de dificuldade crescentes (1, 2 e 3). As questões foram inspiradas nos testes de 1995, 1999 e 2003 do TIMSS (National Center for Education Statistics [NCES], n.d.), nas tarefas incluídas em Clements, Swaminathan, Hannibal, & Sarama (1999), Gutiérrez (1996) e Hannibal (1999), nas orientações dos *Princípios e Normas para a Matemática escolar* do NCTM (2007) e no teste utilizado no estudo de Tempera (2010).

Em algumas questões houve necessidade de explicitar conceitos para que isso não constituísse entrave à resposta, por exemplo nas categorias "Congruência" e "Semelhança". Na primeira questão de cada categoria é definido o conceito, na segunda questão é utilizada apenas a definição na formulação da questão, e na terceira questão da categoria aparece somente a referência ao conceito. No Quadro 2 apresenta-se a identificação das questões de acordo com o seu nível e categoria.

Quadro 2. Estrutura do teste

Questão	Nível	Categoria
1	1	Raciocinio Espacial
2	2	
3	3	
4	1	Classificação
5	2	
6	3	
7	1	Congruência
8	2	
9	3	
10	1	Equivalência
11	2	
12	3	
13	1	Semelhança
14	2	
15	3	
16	1	Propriedades de Figuras 2D
17	2	
18	3	
19	1	Simetria
20	2	
21	3	

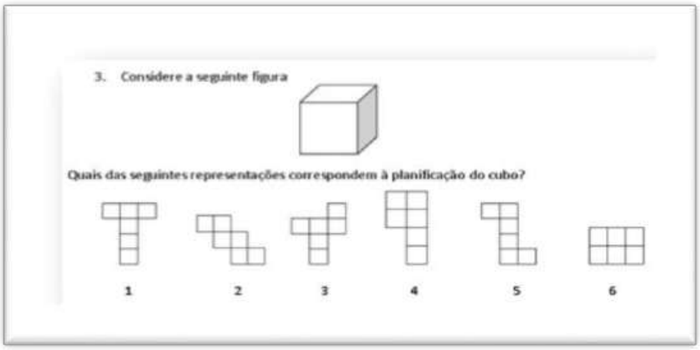
Para analisar os dados pretendeu-se saber, num primeiro momento, quantos estudantes selecionavam a(s) opção(ões) correta(s), mas também se selecionavam alguma opção incorreta ou se não assinalavam opções corretas. Assim, usaram-se dois indicadores para cada questão: (indicador 1) a percentagem de estudantes que selecionou as opções corretas em cada uma das questões do teste; e (indicador 2) a pontuação total obtida por cada aluno. Para a obtenção desta pontuação foram ponderadas a(s) opção(ões) correta(s), as omissões e os erros na seleção da(s) opção(ões) – esta pontuação foi convertida numa percentagem que compara o número de pontos obtido por um estudante numa dada questão com o número máximo de pontos possíveis. Para os dois casos foram calculados valores médios por questão, em cada um dos testes, para cada uma das ESE e para o conjunto das ESE. Estes indicadores utilizados na apreciação de cada um dos testes permitem verificar a evolução de cada aluno e de cada grupo de estudantes em cada uma das categorias do teste.

Apresentação e análise de resultados

Nesta secção apresentam-se os resultados obtidos nos dois testes nos itens que se revelaram mais problemáticos para os estudantes envolvidos. Não são apresentados dados relativos à categoria "Simetria" porque este tema não havia sido trabalhado, até à altura do 2.º teste, em todas as ESE. Optamos por colocar a média da percentagem de acerto das três instituições (indicador 1), destacando uma instituição sempre que os resultados se afastam dessa média. Indicamos também perguntas em que a percentagem de respostas erradas é elevada. Para além disso, apresentam-se valores relativos ao indicador 2, que pondera, para além da escolha das opções corretas, omissões e incorreções na resposta dos estudantes.

Raciocínio espacial

A questão 3 (nível 3) é relativa a planificações:



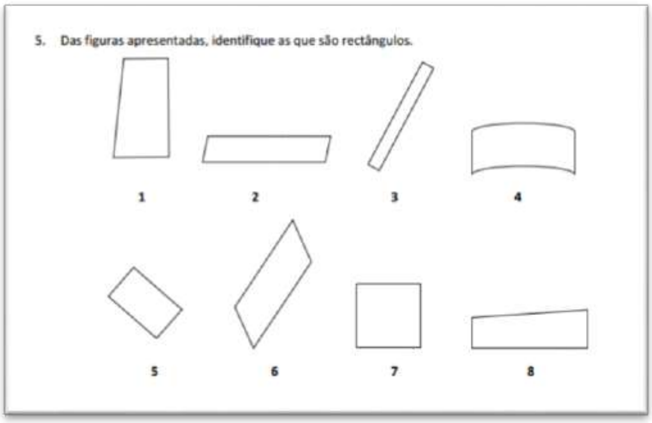
3ª Questão	1	2	3	5
1º Teste	83,74%	9,22%	36,31%	40,73%
2º Teste	89,91%	12,82%	40,85%	48,67%

Figura 1. Enunciado e resultados da Questão 3

As respostas dos estudantes a esta questão (indicador 1) revelam uma evolução não muito significativa do 1.º para o 2.º teste, como se pode observar na tabela. A opção 1, que corresponde à planificação prototípica, apresenta um número de respostas corretas bastante superior às restantes, enquanto a 2.ª opção é a que apresenta um número menor de respostas corretas. As outras duas opções, 3.ª e 5.ª, têm um número aproximado de respostas corretas, apesar de mais estudantes identificarem a 5.ª opção como uma planificação do cubo. Realça-se, ainda, o facto de mais de 50% dos estudantes não identificarem as opções 2 (neste caso, cerca de 90%), 3 e 5 como planificações do cubo. A utilização do 2.º indicador mostra que, ponderados os acertos, os erros e as omissões nas respostas, os estudantes passam de um valor médio de 42% (T1) para 47% (T2), não havendo diferenças substanciais entre as três ESE.

Classificação

A questão 5 (nível 2) é relativa à identificação de retângulos:



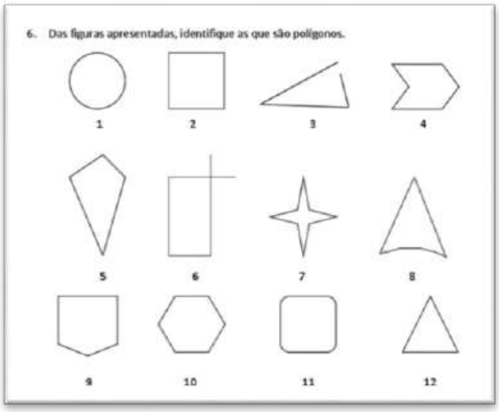
5ª Questão	3	5	7
1º Teste	92,40%	96,47%	36,63%
2º Teste	96,33%	96,10%	60,43%

Figura 2. Enunciado e resultados da Questão 5

Nesta questão, uma parte muito significativa dos estudantes seleciona as respostas 3 e 5 em ambos os momentos. Verifica-se, ainda, uma evolução significativa no número de estudantes que reconhece o quadrado como sendo, também, um retângulo. Esta evolução é mais nítida nos estudantes da ESELx e da ESEVC. Na ESEV, e apesar de também ter havido evolução, continua a ser uma opção muito pouco escolhida (passou-se, neste caso, de 26% para 38%). Aparentemente, a posição da figura parece não ter tido influência na seleção dos estudantes. O indicador 2 revela uma evolução em cerca de 10% do primeiro para o 2.º teste, passando os valores de 66% para 76% (como ligeiro ascendente na ESELx).

Nesta questão 5, as percentagens de respostas incorretas são importantes, destacando-se a opção do paralelogramo obliquângulo identificado como retângulo. Os estudantes que escolheram esta opção parecem ter olhado para o paralelismo dos lados, não assumindo um retângulo como uma figura que tem 4 ângulos retos. Apesar de no 2.º teste essas percentagens terem diminuído, continuam a ser significativas (entre 30% e 50%). O indicador 2 revela melhorias, passando de uma média a rondar os 60% (1.º T) para próximo dos 75% (2.º T).

Na pergunta 6 (nível 3), relativa à identificação de polígonos, obtiveram-se os seguintes resultados:



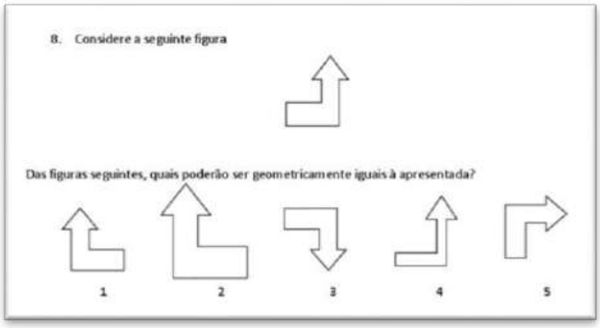
6ª Questão	2	4	5	7	9	10	12
1º Teste	61,87%	50,53%	60,50%	28,97%	71,53%	80,40%	57,47%
2º Teste	86,37%	66,23%	76,40%	51,53%	73,70%	93,57%	81,03%

Figura 3. Enunciado e resultados da Questão 6

Nesta questão, as opções mais escolhidas correspondem às respostas corretas. Apesar da evolução verificada, no caso da ESEV o número de estudantes que optou, no 2.º teste, pelas respostas 4 e 7 continuou abaixo dos 50% (44 e 31%, respetivamente). No caso da ESEVC o número de estudantes que selecionou a figura 7 continuou abaixo dos 50% (43%). Em qualquer dos casos parece existir, no 1.º teste, alguma tendência para selecionar apenas algumas figuras convexas. Essa tendência parece decrescer, passando os estudantes a considerar, também, figuras côncavas (opções 4 e 7) e triângulos (opção 12).

Congruência

A questão 8 (nível 2), relativa a congruência no plano, apresentou os seguintes resultados:

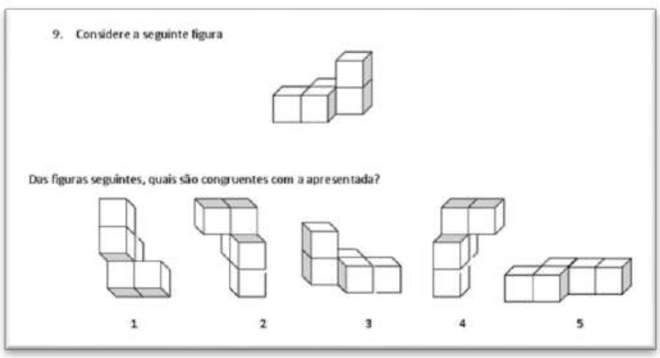


8ª Questão	1	3	5
1º Teste	89,33%	92,87%	83,73%
2º Teste	71,37%	85,40%	76,77%

Figura 4. Enunciado e resultados da Questão 8

A maior parte dos estudantes identifica corretamente as três figuras geometricamente iguais à dada. Verifica-se, no entanto, uma diminuição de respostas corretas do 1.º para o 2.º teste em todas as questões, mais acentuada em relação à figura 1. A figura 3 é a que apresenta a maior percentagem de respostas corretas. As diferentes escolas evidenciam resultados e variações muito próximos, no que diz respeito às três opções. O indicador 2, ao ponderar respostas incorretas e omissões, apresenta resultados semelhantes, dando conta de um abaixamento de pontuação nas diversas escolas a rondar os 10%, com um valor inicial médio de 86% da pontuação máxima da pergunta.

Na questão 9 (nível 3) obtiveram-se os resultados seguintes:



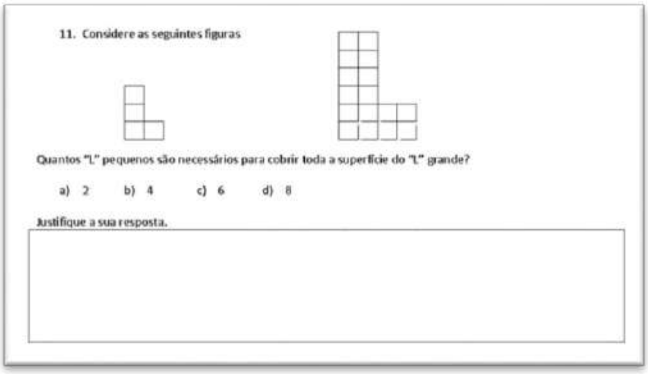
9ª Questão	1	2
1º Teste	74,63%	82,27%
2º Teste	78,07%	82,87%

Figura 5. Enunciado e resultados da Questão 9

Nesta questão, a maioria dos estudantes identifica as duas respostas corretas. Contudo, a percentagem daqueles que seleciona incorretamente as opções 3 e 4 é elevada, acima dos 50%. Por isso, ponderando a escolha dos estudantes pelas opções corretas e as incorretas (indicador 2), o valor médio fica-se por 50%/53% (ESELx, ESVC) da cotação da questão (destacando-se a ESEV com um valor médio superior em cerca de 10%), sensivelmente o mesmo nos dois testes.

Equivalência

A questão 11 (nível 2) incide sobre a decomposição de figuras.


11. Considere as seguintes figuras

Quantos "L" pequenos são necessários para cobrir toda a superfície do "L" grande?

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8

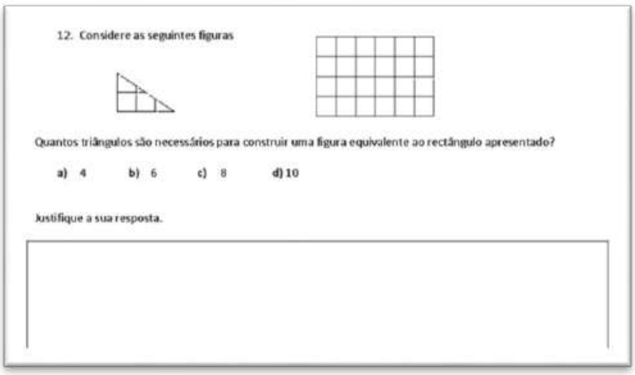
Justifique a sua resposta.

11ª Questão	b
1º Teste	89,57 %
2º Teste	92,53 %

Figura 6. Enunciado e resultados da Questão 11

Uma percentagem elevada escolhe acertadamente o item b, melhorando ligeiramente os valores do 1.º para o 2.º teste nas três ESE. O indicador 2 também confirma estes bons resultados (com valores médios em ambos os testes superiores a 90% e melhorando no segundo deles). A maioria dos estudantes justifica a opção escolhida por via geométrica, dividindo o "L maior em L menores".

A questão 12 (nível 3) incide, igualmente, sobre a decomposição de figuras.


12. Considere as seguintes figuras

Quantos triângulos são necessários para construir uma figura equivalente ao rectângulo apresentado?

a) 4 b) 6 c) 8 d) 10

Justifique a sua resposta.

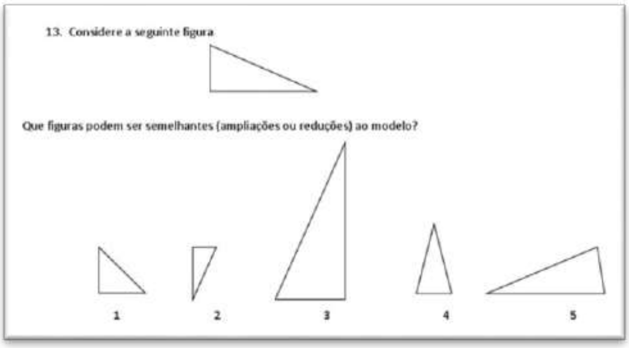
12ª Questão	c
1º Teste	86,87 %
2º Teste	87,80 %

Figura 7. Enunciado e resultados da Questão 12

Uma percentagem elevada responde acertadamente em ambos os testes, sendo esses valores mais elevados na ESELx (86%/92%) e na ESEVC (92,6%/94,4%). Esses valores, confirmados pelo indicador 2 como valores em ambos os testes um pouco acima dos 90%, denotam uma ligeira evolução do 1.º para o 2.º teste. As justificações apresentadas pelos estudantes dividem-se entre uma abordagem geométrica (divisão do retângulo em triângulos) e uma abordagem numérica (comparação entre medidas de áreas).

Semelhança

A resposta à questão 13 (nível 1), relativa a semelhanças, originou os resultados seguintes:

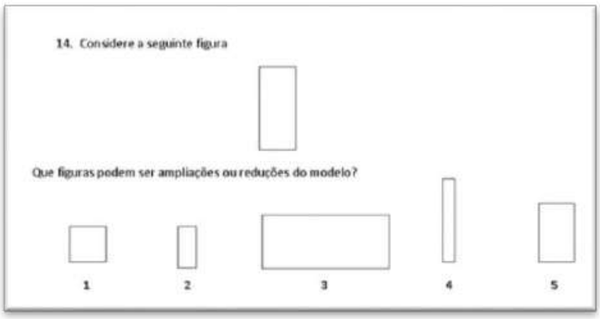


13ª Questão	2	3
1º Teste	90,23%	93,47 %
2º Teste	96,37%	62,87%

Figura 8. Enunciado e resultados da Questão 13

Uma percentagem elevada de estudantes reconhece a semelhança selecionando a opção 2, havendo melhoria no 2.º teste (mais expressiva na ESEV, que passa de 82% para 92%). No caso da opção 3, estranhamente o valor desce drasticamente na ESEVC, passando quase a metade no 2.º teste (98,1% para 56%). Na ESEV o valor também desce, embora mais ligeiramente: de 100% para 90%. Uma percentagem mais reduzida mas, ainda assim, elevada, escolhe a opção 1, que aumentou, e a opção 5. Esse facto faz com que, em termos médios, os estudantes tenham obtido em ambos os testes um valor médio de 80% da cotação da pergunta.

A questão 14 (nível 2) é relativa a semelhanças.



14ª Questão	2	3
1º Teste	97,43 %	94,47 %
2º Teste	94,77 %	89,57 %

Figura 9. Enunciado e resultados da Questão 14

Uma percentagem elevada identifica as figuras semelhantes escolhendo acertadamente a opção correta (2), e com decréscimo (mais acentuado na ESEV, que passa de 97% para 87%) a opção 3. Contudo, uma percentagem elevada de estudantes escolhe opções incorretas (em particular a 4), o que faz com que o indicador 2 dê valores um pouco acima de 60% em todas as escolas.

A terceira pergunta sobre semelhanças (nível 3):

15. Quais dos pares de figuras geométricas são sempre semelhantes?

a) Dois triângulos equiláteros

b) Dois triângulos isósceles

c) Dois triângulos rectângulos

d) Dois rectângulos

e) Dois quadrados

f) Dois losangos

15ª Questão	a	e
1º Teste	40,33 %	63,43 %
2º Teste	64,07 %	72,6 %

Figura 10. Enunciado e resultados da Questão 15

Os resultados obtidos revelam que a identificação de pares de figuras semelhantes constitui uma tarefa em que os estudantes revelaram mais dificuldades do que nas precedentes, notando-se melhorias (mais acentuadas na opção a) no 2.º teste. Na ESEV os resultados andam em torno dos 50% e só registando melhorias na opção e). Salienta-se o facto da seleção das opções incorretas ter aumentado do 1º para o 2º teste. As opções incorretas mais selecionadas foram as c e d, não se notando uma tendência comum nas três ESE, do 1.º para o 2.º teste, relativamente a essas opções. Ainda assim, o indicador 2 dá conta de um aumento do 1.º para o 2.º teste na ordem dos 10%, atingido no 2.º T cerca de 70% da cotação da pergunta (esta melhoria é maior na ESELx).

Propriedades de figuras 2D

Confrontados com algumas afirmações sobre as propriedades dos triângulos (questão 16), verifica-se que uma grande percentagem de estudantes reconhece que a soma das amplitudes dos ângulos é sempre igual, a mesma em todos os triângulos, e essa percentagem melhora no 2.º teste. Já no que diz respeito à existência de diagonais, os resultados são relativamente baixos em ambos os testes, parecendo que os estudantes assumem que todos os polígonos terão diagonais. O indicador 2 revela melhoria do 1.º para o 2.º teste em todas as ESE, com incrementos que oscilam entre os 15 e os 20%, atingindo-se um valor médio de cerca de 75% da cotação da questão (2.º teste).

16. Assinale as afirmações verdadeiras para TODOS os triângulos:

a) Todos os lados são iguais.

b) Todos os ângulos são agudos.

c) A soma da amplitude dos ângulos é sempre igual.

d) Não possuem diagonais.

16ª Questão	c	d
1º Teste	71,67%	37,23%
2º Teste	93,10 %	38,83%

Figura 11. Enunciado e resultados da Questão 16

Apresenta-se a seguir os resultados na questão 17 (nível 2), relativa a propriedades de retângulos:

17. Assinale as afirmações verdadeiras para TODOS os rectângulos

a) Os lados opostos são diferentes.

b) Todos os ângulos são rectos.

c) As diagonais são iguais.

d) As diagonais são perpendiculares.

17ª Questão	b	c
1º Teste	82,20%	37,10%
2º Teste	90,53%	52,30%

Figura 12. Enunciado e resultados da Questão 17

Nesta questão verifica-se uma elevada escolha da opção b – *Todos os ângulos são retos* – e que esse bom desempenho se mantém no 2.º teste. Pelo contrário, verifica-se que uma percentagem elevada dos estudantes não reconhece que as diagonais do retângulo são iguais. Ponderando a seleção, pelos estudantes, de opções corretas, incorretas e omissões (indicador 2), registam-se valores muito semelhantes nas três instituições, com um aumento de 10% do 1.º para o 2.º teste, atingindo-se neste último um valor próximo dos 65% da cotação da pergunta.

A questão 18 (nível 3) foca as propriedades dos paralelogramos:

18. Assinale as afirmações verdadeiras para TODOS os paralelogramos:

a) Os lados opostos são paralelos.

b) Os lados opostos são iguais.

c) Todos os ângulos são rectos.

d) As diagonais são iguais.

18ª Questão	a	b
1º Teste	69,83%	31,40%
2º Teste	85,80%	47,03%

Figura 13. Enunciado e resultados da Questão 18

Nesta questão verifica-se uma melhoria dos resultados no 2.º teste se comparado com o 1.º. Ainda assim, a opção b – *Os lados opostos são iguais* – continuou a ser escolhida por um número muito reduzido de estudantes. Neste caso, tanto na ESEV como na ESELx, houve uma evolução para níveis superiores a 50% (62 e 55%, respetivamente), mas na ESEVC, apesar de uma ligeira evolução, o nível manteve-se bastante reduzido, passando-se de 22% para 24%. Também na ESEV e na ESELx, a opção incorreta d foi escolhida por uma considerável percentagem de estudantes, aumentando no 2.º teste (ESEV de 28% para 36% e ESELx de 15% para 32%). Nesta questão, o indicador 2 dá conta de um aumento de cerca de 10%, atingindo-se no 2.º T cerca de 60% da pontuação máxima da pergunta.

Para que se tenha uma visão mais completa dos resultados nos dois testes, apresentamos, em anexo, o quadro com os valores obtidos em cada questão (incluindo as que não foram apresentadas anteriormente) de acordo com o indicador 2.

Considerações finais

Este estudo procura avaliar a evolução do conhecimento de conteúdo de Geometria de estudantes do curso de Educação Básica das ESE de Lisboa, Viana do Castelo e Viseu na sequência da frequência de unidades curriculares desta área de conhecimento. Para isso, foi realizado um teste, antes e após a formação, estruturado em sete categorias. Para cada uma das questões analisou-se a percentagem de alunos que escolheu as diversas opções de resposta (indicador 1) e a percentagem da cotação da pergunta obtida ponderando a seleção de opções corretas, incorretas e omissões (indicador 2).

O estudo revela que, de modo geral, o conhecimento de tópicos elementares de Geometria dos estudantes que frequentam a Licenciatura em Educação Básica nas três ESE tem lacunas acentuadas (em todas as ESE, a percentagem, de acordo com os indicadores 1 e 2, anda em torno de 70%, quando se esperariam valores mais elevados, tendo em conta os conhecimentos testados), observando-se em grande parte das questões uma melhoria de resultados na sequência da formação matemática realizada (embora o valor de incremento médio seja de 5%). Essa melhoria é ligeiramente maior na ESELx, que passa de um valor médio de pontuação das respostas de 75% para 81%, enquanto na ESEV e na ESEVC os valores sobem cerca de 5%, atingindo, respetivamente, 73% e 75%. Estes resultados, que têm associados insucesso escolar nas unidades curriculares de Geometria das três ESE, devem ser olhados tendo em linha de conta os conhecimentos testados – aqueles que se espera que os alunos do ensino elementar venham a adquirir. Assim, os erros detetados devem ser motivo de preocupação para todos os envolvidos na formação.

A evolução do conhecimento de Geometria dos estudantes é diferente nas várias categorias testadas. Na questão 3 do raciocínio espacial, relativa à planificação do cubo, algumas opções de resposta apresentam valores bastante baixos. A classificação de figuras corresponde a uma categoria em que a formação realizada parece ter contribuído de forma substancial para a melhoria de resultados dos estudantes (questões 5 e 6).

Na congruência, os estudantes obtêm bons resultados nos dois testes, principalmente na congruência no plano, com valores em torno de 90%. Sem razão plausível, os resultados baixam no 2.º teste na questão 8 (11%) e mantêm-se não muito elevados na questão 9, atendendo ao indicador 2 (57%, 56%). Este aspeto leva à necessidade de, em cada ESE, se refletir sobre o modo de trabalhar o conceito.

A equivalência de figuras é um tópico com bons resultados nos dois testes, com percentagens de acordo com o indicador 2 em torno dos 90% e com baixa seleção de respostas erradas. Já em relação às semelhanças, os estudantes obtêm bons resultados sempre que se desenham as figuras, o que lhes permite recorrer à experimentação, não se observando o mesmo quando se enunciam simplesmente pares de figuras e a resposta necessita do conhecimento das suas propriedades (cf. Clements & Battista, 1992; Tempera, 2010). No entanto, as opções incorretas nas figuras (triângulo e retângulo) escolhidas por uma percentagem considerável de estudantes evidenciam que os mesmos não atendem à proporcionalidade dos lados, conceptualizando uma figura semelhante como uma figura com a mesma forma mas de área menor ou maior. Os resultados da formação são importantes nas questões relativas às propriedades de figuras 2D, onde os estudantes e professores encontram habitualmente dificuldades (Pittalis et al., 2009; Viseu et al., 2013), que sobem em média mais de 10%.

A análise global dos resultados obtidos, embora com indicadores positivos, deve ter em conta as caraterísticas do teste, nomeadamente o seu grau de dificuldade, que, de maneira geral, é relativamente reduzido. Por exemplo, quando analisamos uma das alíneas corretas da questão 3, percebemos que apenas 9% dos estudantes a identifica no 1.º teste, evoluindo apenas para 13% no 2º. Da mesma forma, ao nível dos conceitos percebemos alguma insuficiência no conhecimento dos estudantes quando tratamos de alguns casos sensíveis, como é percetível na quantidade de estudantes que persiste em considerar semelhantes quaisquer dois triângulos retângulos (cerca de 30%). Estas dificuldades vêm na linha do apontado em outros estudos realizados com professores e futuros professores que ensinam Matemática (Owens & Outhred, 2006; Tempera, 2010; Viseu et al., 2013), o que indicia alguma persistência.

Em suma, apesar dos resultados globalmente positivos, indicando que se pode ir mais longe em termos do aprofundamento destes conceitos geométricos, os mesmos indicam também que as dificuldades concetuais, mesmo que presentes numa reduzida percentagem de estudantes, devem ser objeto de uma contínua atenção, atendendo a que muitos destes estudantes podem vir a ser docentes e que, tal como é apontado por Zaslavsky (1991), professores com um insuficiente conhecimento concetual transmitem conceitos errados e incompletos aos seus estudantes.

Referências bibliográficas

Albuquerque, C., Veloso, E., Rocha, I., Santos, L., Serrazina, L., & Nápoles, S. (2008). *A matemática na formação inicial de professores*. Lisboa: APM.

Blanco, L., & Barrantes, M. (2003). Concepciones de los estudiantes para maestro en España sobre la geometría escolar y su enseñanza-aprendizaje. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *6*(2), 107-132.

Clements, D., & Battista, M. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420-464). NY: Macmillan Publishing Company.

Clements, D., Swaminathan, S., Hannibal, M., & Sarama, J. (1999). Young children's concept of shape. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*(2), 192-212.

Edwards, M., & Harper, S. (2010). Paint bucket polygons. *Teaching Children Mathematics*, *16*(7), 420-428.

Gomes, A., & Ralha, E. (2005). O conceito de ângulo: Experiências e reflexões sobre o conhecimento matemático de (futuros) professores do 1.º ciclo. *Quadrante*, *14*(1), 109-131.

Gutiérrez, A. (1996). Children's ability for using different plane representations of space figures. In A. R. Baturo (Ed.), *New directions in geometry education* (pp. 33-41). Brisbane: Centre for Math and Science Education.

Hannibal, M. A. (1999). Young children's developing understanding of geometric shapes. *Teaching Children Mathematics*, *5*(6), 353-357.

Jacobson, C., & Lehrer, R. (2000). Teacher appropriation and student learning of geometry through design. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(1), 71-88.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up*. Washington, DC: National Academy Press.

Monteiro, C., Costa, C., & Costa, C. (2004). Competências matemáticas à saída da formação inicial. In A. Borralho, C. Monteiro & R. Espadeiro (Org.), *A matemática na formação do professor* (pp. 169-197). Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática* escolar. Lisboa: APM.

Owens, K., & Outhred, L. (2006). The complexity of learning geometry and measurement. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 83-115). Rotterdam: Sense Publishers.

Pittalis, M., Mousoulides, N., & Christou, C. (2009). Levels of sophistication in representing 3D shapes. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd PME International Conference* (Vol. 4, pp. 385-392). Thessaloniki, Grécia: PME.

Ponte, J. P. (2012). Estudando o conhecimento e o desenvolvimento profissional do professor de matemática. In N. Planas (Ed.), *Educación matematica: Teoría, critica y prática*. Barcelona: Graó.

Schultz, K. A., & Austin, J. D. (1983). Directional effects in transformational tasks. *Journal for Research in Mathematics Education*, *14*(2), 95-101.

Sousa, M. V., & Fernandes, J. A. (2004). Dificuldades de professores estagiários de Matemática e sua relação com a formação inicial. *Quadrante*, *12*(1), 91-113.

Swafford, J. O., Jones, G. A., & Thornton, C. A. (1997). Increased knowledge in geometry and instructional practice. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(4), 467-483.

Tempera, T. (2010). *A Geometria na formação inicial de professores* (Tese de mestrado). Lisboa: APM.

Viseu, F., Menezes, L., & Almeida, J. (2013). Conhecimento de Geometria e perspetivas de professores do 1.º ciclo do ensino básico sobre o seu ensino. *Revemat*, *8*(1), 156-178.

Zaslavsky, O. (1991). In what ways are similar figures similar?. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th PME International Conference* (Vol. 3, pp. 378-385). Assisi, Itália: PME.

Anexo. Valores por questão (de acordo com o indicador 2)

Categoria	Questão	1.º Teste	2.º Teste
Raciocínio Espacial	1	91%	91%
	2	94%	94%
	3	42%	47%
Classificação	4	85%	87%
	5	66%	77%
	6	58%	73%
Congruência	7	86%	90%
	8	86%	75%
	9	57%	56%
Equivalência	10	86%	86%
	11	91%	93%
	12	91%	90%
Semelhança	13	79%	81%
	14	66%	62%
	15	62%	68%
Propriedades de Figuras 2D	16	59%	73%
	17	53%	63%
	18	49%	61%

Cálculo flexível e o raciocínio quantitativo aditivo em alunos dos 1.º e 2.º anos

Lurdes Serrazina[1], Margarida Rodrigues[2]
[1] Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa, lurdess@eselx.ipl.pt
[2]Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, margaridar@eselx.ipl.pt

Resumo. *Esta comunicação insere-se no Projeto "Pensamento numérico e cálculo flexível: Aspetos críticos". Começa por discutir o que se entende por flexibilidade de cálculo e raciocínio quantitativo aditivo, discutindo depois os resultados de entrevistas individuais realizadas com quatro alunos (dois do 1.º ano e dois do 2.º ano) quando lhes foram propostas tarefas onde aqueles aspetos estavam presentes. Trata-se de um estudo exploratório cujo principal objetivo é compreender o raciocínio dos alunos quando resolvem tarefas numéricas envolvendo situações aditivas, e ainda identificar aspetos associados à flexibilidade de cálculo e ao raciocínio quantitativo. Os resultados mostram que, no caso dos alunos do 1.º ano, o seu desempenho parece estar relacionado com o seu desenvolvimento do sentido do número e com as relações que dominam. Para os alunos do 2.º ano, o raciocínio inversivo constituiu um aspeto crítico, que conseguiram mobilizar depois de superadas as dificuldades iniciais. Os resultados sugerem, ainda, que estes alunos concebem a diferença como uma relação invariante numérica.*

Abstract. *This communication is part of the Project "Adaptive thinking and flexible computation: Critical issues". It begins by discussing what is meant by flexible computation and additive quantitative reasoning, after it discusses the results of individual interviews with four pupils (two of 1st Grade and two of 2nd Grade) when tasks, where those aspects were present, were proposed to them. This is an exploratory study whose main objective is to understand students' reasoning when solving numerical tasks involving additive situations, and also identify features associated with the flexible computation and quantitative reasoning. The results show that, in the case of 1st Grade pupils, their performance appears to be related to the development of number sense and to the relationships that they dominate. For the 2nd Grade pupils, the inverse reasoning constituted a critical issue, which they could mobilize after overcoming the initial difficulties. The results also suggest that these pupils see the difference as an invariant numerical relationship.*

Palavras-chave: Cálculo flexível; Raciocínio quantitativo aditivo; Relações numéricas.

Introdução

Esta comunicação insere-se no Projeto "Pensamento numérico e cálculo flexível: Aspetos críticos" que está a ser desenvolvido por docentes das Escolas Superiores de Educação de Lisboa e Setúbal e tem como objetivos: (i) identificar os conhecimentos conceptuais dos alunos que estão em jogo nos diferentes níveis de compreensão das operações/relações numéricas; (ii) analisar se e como estes conhecimentos lhes permitem usar flexivelmente o cálculo mental; e (iii) retirar implicações para a construção e exploração de tarefas, a formação de professores e a avaliação diagnóstica do desenvolvimento do cálculo mental. Nesta comunicação discutiremos as diferentes perspetivas sobre flexibilidade de cálculo/raciocínio quantitativo no que se refere à adição e subtração, presentes na literatura, e apresentamos resultados preliminares resultantes da resolução de quatro tarefas por alunos dos 1.º e 2.º anos de escolaridade, obtidos através da realização de entrevistas (tipo clínicas) individuais a quatro alunos (dois do 1.º e dois do 2.º ano) de uma escola do 1.º ciclo de um bairro de Lisboa. Pretendemos compreender o raciocínio dos alunos quando resolvem tarefas numéricas envolvendo situações aditivas e identificar aspetos associados à flexibilidade de cálculo e ao raciocínio quantitativo.

Fundamentação teórica

Na última década, a flexibilidade de cálculo tem sido considerada uma capacidade que todos os alunos devem desenvolver na escola elementar (Anghileri, 2001; NCTM, 2000). Em 2000, o NCTM afirmava que ser proficiente num domínio complexo como a Matemática implica a capacidade de usar o conhecimento de modo flexível, aplicando, de modo apropriado, o que é aprendido numa situação, numa outra (NCTM, 2000).

A ideia de flexibilidade aparece associada ao cálculo mental e à resolução de problemas aritméticos. Existem diferentes maneiras de resolver um problema aritmético mentalmente, designadas normalmente por estratégias. Flexibilidade estratégica em cálculo mental refere-se ao modo como o problema é afetado pelas circunstâncias ao ser resolvido (Threlfall, 2009). Estas circunstâncias tanto podem relacionar-se com características específicas das tarefas como relacionar-se com características individuais ou, ainda, com variáveis contextuais. Threlfall (2009) designa o mecanismo subjacente à flexibilidade estratégica de *zeroing-in*, referindo que o mesmo não é totalmente consciente nem racional, envolvendo cálculos exploratórios parciais que decorrem de reparar em aspetos específicos dos números em causa e respetivas relações: “The calculation-strategy is not selected and applied, it is arrived to” (Threlfall, 2009, p. 548).

Numa perspetiva diferente, Star e Newton (2009) definem flexibilidade como conhecimento de múltiplas soluções, assim como a capacidade e tendência para escolher a mais adequada para um dado problema e um objetivo particular de resolução de problemas. Estes autores afirmam ainda que flexibilidade existe num *continuum*: quando os alunos ganham flexibilidade, eles podem primeiro mostrar um maior conhecimento de múltiplas estratégias, depois preferências particulares, e, por último, o uso adequado da estratégia preferida. O termo adequado refere-se à estratégia mais eficiente, isto é, aquela que exige o menor número de passos intermédios de cálculo para chegar ao resultado.

Outros autores (Baroody & Rosu, 2006; Rathgeb-Schierer & Green, 2013) referem que a flexibilidade de cálculo está relacionada com o facto de os alunos terem, à medida que vão desenvolvendo o sentido do número, estabelecido relações e padrões entre eles, construindo assim uma teia de relações. Por exemplo, os alunos que reconhecem a propriedade comutativa da adição, perante a necessidade de calcular 3+9, sabem que podem fazer 9+3. Os alunos que compreendem as várias composições de um número, nas suas diferentes partes (por exemplo, 1+7, 2+6, 3+5 e 4+4 = 8…) e decomposições (e.g., 8 = 1+7, 2+6, 3+5, 4+4), é mais provável que desenvolvam formas de raciocínio como os “dobros+1” (e.g., 7+8 = 7+7+1 = 14+1) ou fazer uma “dezena” (9+7 = 9+1+6 = 10+6). À medida que aquela teia de relações vai sendo construída, os alunos vão adquirindo flexibilidade para usarem essas relações em situações concretas de cálculo, o que depende do seu conhecimento dos números e das operações (Rathgeb-Schierer & Green, 2013).

De acordo com Thompson (1993), o raciocínio quantitativo envolve raciocinar sobre relações entre quantidades. Consiste na análise de uma situação numa *estrutura quantitativa*, sendo que esta constitui uma rede de quantidades e de relações quantitativas. O autor chama a atenção para a distinção entre quantidade e número, não sendo de todo sinónimos. No âmbito do raciocínio quantitativo, o que importa são as relações entre as quantidades e não os números e as relações numéricas, e é nesse sentido que este tipo de raciocínio se aproxima do raciocínio algébrico. Para clarificar esta distinção, o autor liga a ideia de medida à noção de quantidade, embora esta não seja aplicável apenas a grandezas contínuas mensuráveis, e o raciocínio não dependa da sua medida:

> A person constitutes a quantity by conceiving of a quality of an object in such a way that he or she understands the possibility of measuring it. (…) Quantities, when measured, have numerical value, but we need not measure them or know their measures to reason about them. You can think of your

> height, another person’s height, and the amount by which one of you is taller than the other without having to know the actual values. Quantities are more concrete than numbers (Thompson, 1993, pp. 165-166).

Uma das aplicações da álgebra consiste na modelação de situações complexas. Uma situação relacionalmente complexa envolve, pelo menos, 6 quantidades e 3 operações quantitativas. Comparar duas quantidades para encontrar o excesso de uma em relação à outra é uma operação quantitativa. E o resultado da operação quantitativa de comparar aditivamente duas quantidades é o excesso encontrado, isto é, *a diferença quantitativa*. Vejamos um exemplo de uma situação relacionalmente complexa estruturada aditivamente, com o mínimo de quantidades e de operações quantitativas, que ilustra o facto de que cada resultado de uma operação quantitativa é simultaneamente uma quantidade:

3 quantidades iniciais (A, B, C)
3 operações quantitativas
3 diferenças quantitativas ou combinações (também são quantidades):
- A comparado com B
- B comparado com C
- (A comparado com B) comparado com (B comparado com C)

Figura 1. Situação relacionalmente complexa estruturada aditivamente

Além da distinção entre quantidade e número, Thompson (1993) sublinha, ainda, a distinção entre os conceitos de diferença numérica, enquanto resultado da operação subtração, e de diferença quantitativa. Por um lado, uma diferença quantitativa não é sempre encontrada através de uma subtração, e, por outro, a subtração pode ser usada para calcular quantidades que não sejam diferenças quantitativas.

A comparação aditiva está intimamente ligada ao raciocínio inversivo, implicando a mobilização do pensamento reversível: quando se compara A com B e se verifica que A é mais *n* do que B, então pode concluir-se a relação inversa, ou seja, que B é menos *n* do que A. De acordo com Greer (2012), a inversão assume uma importância central na aritmética dos números naturais e das quatro operações básicas envolvendo estes números, com implicações importantes no cálculo flexível. Relativamente aos problemas de comparação, o autor chama a atenção para o facto de que a relação inversa relaciona a diferença entre A e B com a diferença complementar entre B e A, o que constitui uma conceção bastante diferente. Assim, embora este autor se refira à relação inversa entre adição e subtração e o raciocínio quantitativo aditivo envolva operações quantitativas que são distintas destas operações aritméticas, podemos considerar que a inversão constitui um tópico intrinsecamente subjacente ao raciocínio quantitativo.

Metodologia

Este estudo segue uma abordagem metodológica qualitativa de paradigma interpretativo, visando a descrição e a explicação interpretativa de um fenómeno educacional (Erickson, 1986). Tendo como objetivo recolher informação alusiva às formas de os alunos abordarem tarefas, concebidas com o propósito de desenvolver quer o cálculo flexível quer o raciocínio quantitativo aditivo, para a construção posterior de uma cadeia de tarefas, procedeu-se à realização de entrevistas clínicas a alunos dos 1.º e 2.º anos.

Na entrevista clínica, o investigador suscita da parte do entrevistado a revelação de indícios que elucidem o problema em questão. Trata-se de uma técnica que é dirigida pelo investigador e que visa a descrição das formas de pensamento dos entrevistados, através do levantamento de informações (Lessard-Hebert, Goyette, & Boutin, 1990; Tavares, 2000).

As entrevistas individuais foram realizadas a 13 de fevereiro de 2014 pelas autoras do presente artigo, ambas elementos da equipa de investigação do Projeto. Os quatro alunos estavam a frequentar pela primeira vez os respetivos anos de escolaridade. Os alunos foram selecionados pelas professoras titulares das turmas mediante a indicação, pelas investigadoras, do critério de serem alunos que habitualmente expressassem o que pensam e com desempenho razoável a Matemática. As entrevistas foram audiogravadas e ocorreram numa sala, fora da sala de aula dos alunos. Foi respeitado o princípio ético de confidencialidade, tendo sido usados nomes fictícios para as crianças entrevistadas.

Apresentação de alguns resultados

Aos dois alunos do 1.º ano, Ana e Rui, foi proposta uma única tarefa envolvendo cartões com expressões representativas de somas e diferenças. Aos dois alunos do 2.º ano, Gonçalo e João, foram propostas duas tarefas com um contexto de jogo de berlindes, embora apenas uma seja comum. Quer um quer outro referiram ter o hábito de jogar a este jogo.

Tarefa "Cartões com números"

Foram dispostos sobre a mesa cartões, onde estavam registadas as seguintes expressões, uma em cada cartão:

19 + 10	14 + 15	19 - 10	20 + 10	10 + 22
5 + 15	17 + 5	20 - 10	13 + 7	11 + 22
20 - 8	22 - 10	50 - 30	15 + 16	50 - 28

Figura 2. Tarefa *Cartões com números*

O objetivo desta tarefa é usar factos conhecidos para estabelecer relações numéricas e calcular de modo flexível. Para que os alunos conheçam as características dos números implica que usem, de modo dinâmico, o conhecimento do número e das suas relações. Pretende-se que os alunos vejam as expressões apresentadas como números e não como um cálculo a efetuar, daí o terem aparecido sem o sinal de igual no final da expressão. Assim, esta tarefa visa que os alunos sejam capazes de utilizar relações numéricas do tipo n+1 e n-1, ou n+2 e n-2. Por exemplo, em 14+15, os alunos podem reconhecer que 14 é menos 1 que 15, podendo, por isso, usar o dobro de 15 e tirar 1. A relação dobro/metade está presente em várias situações. Também, noutras expressões, podem arredondar para a dezena mais próxima. Por exemplo, em 50-28, ao reparar que 28 é menos 2 que 30, podem utilizar factos básicos ao nível das dezenas.

Foi pedido aos alunos que colocassem os cartões em duas colunas, pondo numa os que achassem fáceis e na outra os que considerassem difíceis, justificando a escolha feita.

A Ana apenas considerou como difíceis os cartões: 50-30, 20-8 e 50-28. Para os cartões que considerou fáceis, conseguiu chegar, de um modo geral com alguma facilidade, a uma outra representação do número, por vezes recorrendo à contagem e usando, de forma discreta, os dedos das mãos, como se evidencia no seguinte diálogo:

> I: Para cada caso, vais dizendo alto como chegaste ao número.
> A (*pegando no cartão 17+5*): Este é 22.
> I: Porquê?
> A: Contei 5 a partir do 17.
> A (*pegando, de seguida, no cartão 10+22*): 10+22 é 32, pois 10+20 são 30.
> A: 20-8 é 12.
> I: Porquê?
> A: Contei (*mais uma vez Ana usou os dedos de forma discreta*).

Voltou depois ao cartão 20+10, dizendo:

> A: Este é 30, pois 2 mais 1 é 3, então este [10+22] é 32, e este [11+22] é 33, porque é +1 e +2. (...) Este [19+10] é 29, pois é -1.

Agora este 20-10 é 10, pois é 2-1, logo, 22 -10 é mais 2, por isso 12.

A Ana conseguiu perceber que todos estes cartões estavam relacionados e foi capaz de os relacionar com rapidez e à vontade. Mostrou entender as unidades do sistema de numeração, compreendendo que para 20+10, basta aplicar o facto básico 2+1.

Em seguida, olhou para o cartão 50-30 e hesitou um pouco.

I: Olha bem para os números.
A: É 20, pois é 5-3 (*disse, sem hesitar*).

Bastou a investigadora chamar-lhe a atenção para os números envolvidos para a Ana conseguir dizer o número representado pela expressão.

Faltava-lhe o 50-28. Depois de alguma hesitação, respondeu: "é 32". Perante o olhar de surpresa da investigadora, disse: "é 22, pois se 50-30 é 20, aqui tiro 28, que é menos 2". A Ana conseguiu, utilizando outros factos dos quais já sabia os resultados, e, com alguma flexibilidade, obter uma nova representação do número apresentado no cartão, retificando o que tinha acabado de dizer ("32").

O Rui, perante o mesmo conjunto de cartões, selecionou como difíceis (que não sabia) os seguintes: 50-30, 22-10, 11+22, 10+22 e 50-28. Para os que considerou fáceis, apresentou as seguintes justificações:

R: 20 mais 10 é 30, porque 2 mais 1 é 3. 19 menos 10 é 9.
I: Porquê?
R: Agora é que não sei dizer...
I: Então?
R: É este 9 aqui (*apontando para o 9 no 19*).
R (*passando logo para um novo cartão*): 5 mais 15 é 20, porque 15 é uma dezena e meia, mais meia... 20 menos 8 é 12, contei.
I: Contaste o quê?
R: Contei 8 a partir do 20.
R (*indo logo para o cartão seguinte*): 20 menos 10 é 10, pois 2 menos 1 é 1.

Virando-se para os cartões que tinha considerado difíceis, começou por 22-10: "é 12, pois aqui (*aponta para o 22, comparando com 20-10*) é mais 2". Em seguida, voltou de novo ao cartão 19-10, colocado na coluna dos fáceis, e disse: "é 9, pois é menos 1".

O Rui manifesta flexibilidade de cálculo, conseguindo, por sua iniciativa, estabelecer a relação com 20-10, através da estratégia de compensação, compreendendo que juntar 2 ao aditivo implica juntar também 2 ao resto. É, ainda, de salientar o facto de após ter usado 20-10 para chegar a 22-10, ter compreendido que o podia também usar para explicar por que motivo 19-10 é 9, lembrando-se que antes não tinha conseguido verbalizar esse motivo ("Agora é que não sei dizer..."). Este é um exemplo ilustrativo do processo não totalmente consciente subjacente à flexibilidade estratégica de *zeroing-in* (Threlfall, 2009) já que o Rui parece ter estabelecido relações numéricas, quando assumiu 19-10 como 9, que não conseguiu explicitar de modo imediato, fazendo-o posteriormente, ao verbalizar a compensação aplicada na situação anterior de 22-10: 19-10 "é 9, pois é menos 1". Efetivamente, na altura, o Rui limitou-se a indicar o 9 no 19 como justificação, dando alguma evidência de constatação de uma regularidade: sempre que se retira 10 de um número entre 11 e 19, inclusive, o resto é igual ao algarismo das unidades. Só depois de ter usado o cartão 20-10 como recurso para calcular de modo flexível 22-10 é que o Rui revisita o cartão anterior 19-10 e toma consciência de que 20-10 constitui igualmente um recurso para calcular 19-10, apresentando uma justificação matemática de compensação, com mobilização do facto básico 20-10: retirar 1 ao aditivo implica retirar também um ao resto.

Voltou depois ao 11+22, mas ficou hesitante.

> I: Sabes quanto é este [20+10]?
> R: Sim. É 30.
> I: Então?
> R: Estou a pensar...

Depois de alguma hesitação, arrisca, sem grande segurança:

> R: 33.
> I: Porquê?
> R: É mais 3.

Neste caso, foi a investigadora que sugeriu o cartão a usar como facto básico. Após esta sugestão, o Rui conseguiu novamente estabelecer uma relação numérica, compensando com mais três, e usando, também, de forma implícita, a propriedade comutativa (20+10 = 10+20). Faltavam ainda os cartões 50-30 e 50-28, mas o Rui disse:

> R: Estes são muito difíceis, não quero fazer.
> I: Não são nada...
> R: Sim, são. Já não quero fazer mais.

A investigadora não insistiu e deu por terminada a entrevista.

Estes alunos já compreenderam que, quando têm dezenas exatas, basta adicionar as dezenas, usando um raciocínio dedutivo por analogia – por exemplo: se 1+2 é 3, então 10+20 é 30. Ana parece ter esta ideia consolidada, tanto para a adição como para a subtração, o mesmo não acontecendo com o Rui para a subtração. Ana não teve nenhuma dúvida perante a situação 50-30 é 20, pois 5-3 é 2, mas apesar de o Rui ter resolvido bem 20-10, usando o mesmo tipo de raciocínio, considerou a situação 50-30 difícil e acabou por não a resolver. Tal pode ter-se devido à ordem de grandeza do número 50, atendendo a tratar-se de um aluno do 1.º ano entrevistado em fevereiro. Ambos os alunos conseguiram estabelecer relações numéricas a partir de factos básicos.

Tarefa "Jogo de berlindes I"

A primeira tarefa, *Jogo de berlindes I*, foi proposta a ambos os alunos, tendo sido lida primeiro pela investigadora, e foi a seguinte:

A Ana e o Luís jogaram um jogo de berlindes juntos. No início tinham ambos o mesmo número de berlindes. A Ana ganhou 3 berlindes do Luís e ficou com 7. Quantos berlindes tinha o Luís no final do jogo, sabendo que ele não ganhou berlindes?

Figura 3. Tarefa *Jogo de berlindes I*

Esta tarefa visa desenvolver um raciocínio inversivo em duas situações: (i) início e final do jogo, obrigando os alunos a partir do ponto de chegada, final do jogo, e raciocinar inversamente para o início do jogo; e (ii) relação entre os ganhos e perdas no decurso do jogo (se a Ana ganha *x* berlindes do Luís, então este perde *x* para a Ana). Implica ainda atender à relação de igualdade entre a quantidade de berlindes de um e de outro no início do jogo.

Inicialmente, o Gonçalo não entendeu o problema, pelo que a investigadora foi conversando com ele sobre o enunciado, tendo chegado a sugerir que registasse à direita o número de berlindes da Ana no final do jogo e à esquerda o do início do jogo.

> G: Quantos berlindes é que eles tinham antes?
> I: Pois, não sabemos. Mas sabemos que ela ficou… Com quantos é que ela ficou?
> G: Com 7.
> I: Com 7. Regista lá aqui (*apontando para uma localização à direita)*. No final, ela ficou com 7. (…) Ganhou 3. Quantos é que ela teria no princípio?
> G: 10.
> (…) *A investigadora sugere que ele registe à esquerda do 7.*
> I: Então, se ela tem 10… vê lá se ela perde ou ganha berlindes para ficar com 7.
> G: Perde.
> I: Perde. Ela não perdeu! Ela ganhou!
> G: Pois, ela tem 13.

Apesar da sugestão da investigadora para o registo à direita da quantidade de berlindes do final do jogo, o Gonçalo raciocinou aditivamente mediante a ideia de ganhar berlindes, juntando, primeiro, três a sete, e depois a dez (em reação à interpelação da investigadora ao confrontá-lo com o "10" colocado à esquerda e correspondente à quantidade de berlindes no início do jogo). O aluno teve dificuldade em mobilizar um pensamento reversível do final para o início do jogo. A necessidade de partir de um valor inicial ficou evidenciada na sua questão "Quantos berlindes é que eles tinham antes?". Mesmo quando foi confrontado com o facto de ter 10 berlindes antes e 7 no final, não conseguiu inverter o pensamento. Tanto assumiu que a Ana teria perdido berlindes como respondeu que teria 13, ao ser conduzido para a ideia de que ganhou berlindes. Passamos a apresentar o extrato seguinte.

> I: Tenta lá representar os berlindes. No final, ela ficou com sete berlindes.
> G: Só sete berlindes? (*O Gonçalo desenha 7 círculos)*
> I: (…) Destes sete, houve três que ela ganhou ao Luís. Representa lá de outra maneira.
> G: Posso fazer com cruzes?
> I: Podes pôr uma cruzinha nos que ela ganhou ao Luís. (*o Gonçalo desenha mais 3 cruzes)* Mas estás a meter mais. Destes sete, destes sete, houve três que ela ganhou ao Luís, não é mais, destes sete! (*o Gonçalo marca então cruzes dentro de três dos círculos desenhados antes*). Então quantos seriam os que ela tinha no princípio?
> (…)
> G: Quatro.
> P*or sugestão da investigadora, regista por baixo do desenho os números 4 e 7, e escreve ao lado o nome Ana*.
> I: Agora vamos lá pensar no Luís. O Luís, o Luís, no início, ambos tinham o mesmo número de berlindes. Então, quantos é que o Luís tinha?
> G: Também 4.
> I: E o que teria agora acontecido no jogo? Com quantos é que ele teria acabado o jogo? Pensa lá.
> G: Um. (*escreve "1" por baixo de 7*)
> I: Como viste que era 1?
> G: Quatro menos três!

O Gonçalo manteve um raciocínio unidirecional tanto nas reações às interpelações da investigadora como na representação icónica da situação. Por insistência da investigadora, parece ter chegado à compreensão do problema quando aquela lhe fez notar que os 3 berlindes ganhos da Ana estariam incluídos nos 7 finais, representados iconicamente. Nesta altura, o Gonçalo registou as cruzes, pela segunda vez, dentro dos círculos desenhados antes. A inversão relativa aos ganhos e perdas não foi um aspeto crítico. Depois de ter chegado ao número 4 do início do jogo, rapidamente o Gonçalo subtraiu 3, percebendo que o Luís teria perdido 3.

Figura 4. Resolução do Gonçalo da tarefa *Jogo de berlindes I*

O João, assim que a investigadora terminou a leitura, respondeu prontamente “10” e registou na folha, tal como se pode verificar na seguinte figura:

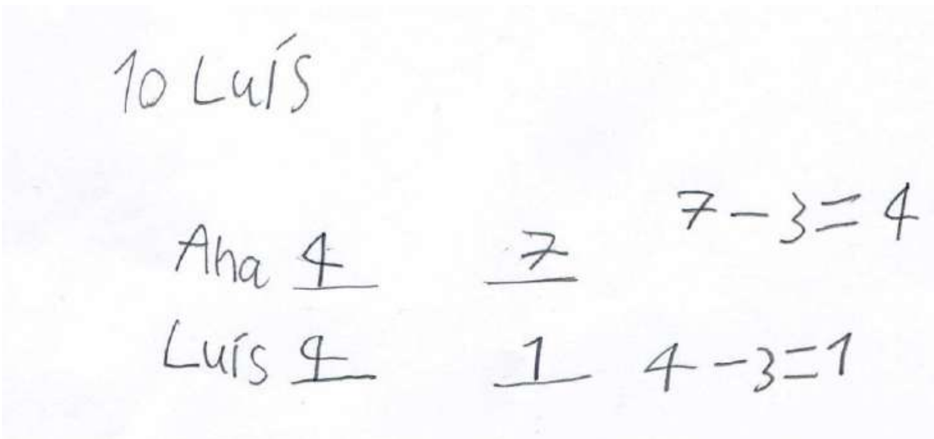


Figura 5. Resolução do João da tarefa *Jogo de berlindes I*

Seguidamente, a investigadora focou a Ana, sugerindo igualmente um registo tabelado para marcar o início e o final do jogo. Vejamos o extrato do diálogo que se seguiu:

I: No final do jogo, ela ficou com 7. E quantos berlindes é que ela ganhou ao Luís?
J: Três.
I: Quantos teria no princípio?
J: (*pausa*) Quatro.

O João começou por responder incorretamente 10, tendo também associado à adição a ideia de ganhar 3. Trata-se de uma resposta precipitada, atribuindo ao Luís os dados respeitantes à Ana. Assim que a investigadora começou a orientar no sentido de se focar primeiro na Ana, o João utilizou a relação inversa e não manifestou dificuldades na resolução desta tarefa, embora tivesse precisado de tempo para pensar de modo inversivo. A tarefa foi resolvida mentalmente e as subtrações colocadas ao lado foram registadas na sequência do pedido da investigadora para ele registar como tinha pensado.

Tarefa "Jogo de berlindes II"

A segunda tarefa proposta apenas ao Gonçalo, *Jogo de berlindes II*, foi a seguinte:

A Ana e o Luís fizeram um jogo de berlindes.
A Ana ganhou 6 berlindes do Luís e ficou com 10 berlindes no final do jogo.
O Luís não ganhou nada e ficou com 3 berlindes no final do jogo.
Compara o número de berlindes da Ana e do Luís antes do jogo e no final do jogo.

Figura 6. Tarefa *Jogo de berlindes II*

Esta tarefa exige para ambas as situações (Ana e Luís) um raciocínio inversivo do final do jogo para antes do jogo e apresenta uma formulação mais aberta de solicitação de comparação de quantidades. Apela ao raciocínio reversível, nos mesmos termos descritos para a tarefa anterior. Ao ser pedida explicitamente a comparação das quantidades de berlindes antes e no final do jogo, esta tarefa foca-se no raciocínio quantitativo aditivo.

Esta tarefa já foi resolvida com facilidade pelo Gonçalo, pois já tinha entendido a inversão necessária do final para o início do jogo. A figura 7 apresenta a sua resolução:

Figura 7. Resolução do Gonçalo da tarefa *Jogo de berlindes II*

Rapidamente, utilizou a relação inversa, concluindo que a Ana teria 4 berlindes no início do jogo:

> I: Como é que viste que era 4? Como pensaste?
> G: Dez menos seis.

Depois de ter registado os 3 berlindes finais do Luís, a investigadora chamou a atenção para os berlindes que a Ana tinha ganho ao Luís:

> I: Ela tinha ganho quantos ao Luís?
> G: Seis.
> I: Quantos agora é que o Luís teria no princípio? Não sabes, pois não? (…)
> G: Nove!
> I: Como fizeste?
> G: Fiz na cabeça! (…) Três mais seis!

Depois da chamada de atenção da investigadora para os berlindes ganhos da Ana, rapidamente o Gonçalo percebeu que o Luís teria perdido o mesmo número e mobilizou mais uma vez a reversibilidade de pensamento, compreendendo que, antes do jogo, o Luís teria mais seis berlindes.

Tarefa "Jogo de berlindes III"

A tarefa proposta apenas ao João, *Jogo de berlindes III*, avança em complexidade, já que aumenta o número de jogadores e, consequentemente, também as relações entre ganhos e perdas a considerar. Tem como principal objetivo acentuar a noção de diferença quantitativa como sendo significativamente independente do conhecimento dos valores do aditivo e do subtrativo. Contrariamente às tarefas anteriores, em que os alunos podiam saber o número de berlindes antes e no final dos jogos, nesta tarefa, por não se conhecer o número de berlindes que cada um tinha antes dos jogos, os alunos têm de lidar unicamente com a mudança relativa, e não com quantidades absolutas.

A Ana, o Luís e o André jogaram dois jogos de berlindes juntos.

A Ana ganhou 3 berlindes do Luís e 7 do André.

O Luís ganhou 4 berlindes do André e 9 da Ana.

O André não ganhou berlindes.

a) Qual o menor número de berlindes que o André tinha no início dos jogos?

b) Compara o número de berlindes do Luís antes e depois destes dois jogos.

Figura 8. Tarefa *Jogo de berlindes III*

O João seguiu o mesmo tipo de registo tabelado da tarefa anterior e começou por registar para cada um dos jogadores os ganhos totais de berlindes. Seguidamente, registou as perdas totais para cada um dos jogadores, através da leitura das frases alusivas aos ganhos, mobilizando o raciocínio inversivo. A sua resolução pode ser observada na seguinte figura:

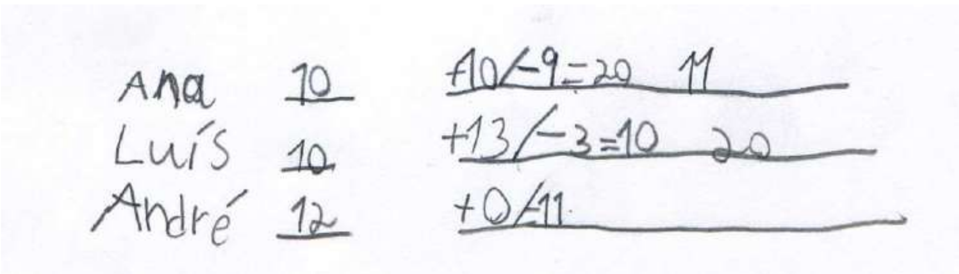


Figura 9. Resolução do João da tarefa *Jogo de berlindes III*

Depois, focou-se na questão a), considerando que o André teria no início dos jogos o número mínimo de 12 berlindes para ter perdido 11. Levantou outras hipóteses para esse número inicial como 20 ou 30.

I: E menos que 12, não?
J: Não, ele tinha de ter berlindes.

Esta questão foca a quantidade absoluta de berlindes. O João considerou diversas hipóteses para os números de berlindes do André antes dos jogos, sabendo que ele perdeu 11, todas superiores a 11, mas assumiu que, no mínimo, ele teria de ter 12. Pensamos que ele não equacionou o 11 por ter descartado a possibilidade de, no final, ficar sem nenhum berlinde. Interpretamos a sua resposta "Não, ele tinha de ter berlindes" como referindo-se à pretensão, em termos afetivos, de acabar os jogos com berlindes (neste caso, com um). No entanto, tal também pode ser interpretado como referindo-se à necessidade de, no início, ter berlindes suficientes para poder dar 11. Esta segunda hipótese interpretativa tem uma explicação de natureza matemática e não afetiva, já que, neste caso, não viu que o número mínimo corresponde ao número igual de berlindes perdidos.

Em seguida, registou o balanço de ganhos e perdas no caso do Luís, concluindo que este teria ficado com mais 10 berlindes no final do jogo. No traço correspondente ao início do jogo, registou 10.

> J: [No final] o Luís ficou com mais 10. (…)
> I: No princípio, o Luís tinha 10 ou mais 10?
> J: Tinha 10 berlindes.

No ponto mais localizado à direita da linha do Luís, registou 20 como sendo o número total de berlindes no final do jogo. Seguidamente, a investigadora orientou para o caso da Ana:

> I: E a Ana? Ganhou 10 e perdeu 9. Afinal, ficou com mais ou menos berlindes no final do jogo?
> J: Com menos. Antes tem 10 berlindes.
> I: Se começasse os jogos com 10 berlindes, ganhava 10, ficava com quantos?
> J: Com 20.
> I: E depois perdia 9...
> J: Ficava com 11.

O João não conseguiu fazer o balanço entre ganhos e perdas para o caso da Ana, tendo concluído que ficaria com menos berlindes sem referir quantos. Colocou também 10 no traço correspondente ao início do jogo, tendo depois registado o 20 como sendo o número de berlindes da Ana depois dos 10 berlindes ganhos nos dois jogos, e finalmente registou o número 11, após as perdas, correspondendo ao número total de berlindes da Ana no final do jogo. Depois deste registo final, não o confrontou com o que tinha dito anteriormente nem verbalizou que a Ana teria ficado com mais um berlinde no final dos dois jogos.

O aspeto crítico inerente a esta tarefa é a distinção entre a diferença quantitativa e o valor absoluto. Embora o João não tenha feito confusão entre uma coisa e outra, já que distingue, no segundo traço da linha do Luís, alusivo ao final dos jogos, a mudança relativa (mais 10) do valor absoluto (20), não consegue exprimir a diferença quantitativa para o início dos dois jogos (menos 10), necessitando de colocar números absolutos. Não se percebe bem o motivo de ter colocado 10 tanto para o Luís como para a Ana. Foi um número hipotético como poderia ter sido outro? Usou o número resultante do balanço de ganhos e perdas do Luís? Há, ainda, a referir que o João usou a mesma simbologia na linha da Ana e na do Luís (=20; =10) com significados distintos: na Ana, o 20 é valor absoluto e, no Luís, o 10 é mudança relativa. A necessidade de se referir aos números concretos de berlindes também se encontra evidente no modo como conclui depois o valor absoluto dos berlindes no final dos dois jogos.

Considerações finais

O cálculo flexível prende-se com o conhecimento e a utilização de relações numéricas, sendo mais rico à medida que os alunos são capazes de utilizar a teia de relações que vão construindo e vão desenvolvendo o seu sentido do número (Baroody & Rosu, 2006). Relativamente aos dois alunos que resolveram a tarefa com os cartões, a Ana evidencia uma maior flexibilidade de cálculo, levando-nos a concluir que a sua teia de relações é mais rica. O Rui confirma, de algum modo, que a flexibilidade para usar essas relações em situações concretas de cálculo depende do seu conhecimento dos números e das operações (Rathgeb-Schierer & Green, 2013), pois apesar de ter resolvido com facilidade os cálculos com números menores, não o conseguiu fazer quando os números aumentaram na sua ordem de grandeza. Tal como defendido por Threlfall (2009), o Rui parece não escolher uma estratégia: reparando nos aspetos específicos dos números propostos e suas relações com os números conhecidos, Rui *chega* a uma estratégia.

A exploração das tarefas pelos alunos de 2.º ano fez ressaltar a inversão como um aspeto crítico, que as crianças conseguem mobilizar depois de superadas as dificuldades iniciais. Consideramos que este é um tópico de fundamental importância no desenvolvimento do cálculo flexível (Greer, 2012) e do raciocínio quantitativo aditivo. As diferenças quantitativas das tarefas *Jogo de berlindes I* e *II* envolvem o valor absoluto do aditivo e do subtrativo, enquanto a tarefa *Jogo de berlindes III* avança com a ênfase na noção de diferença quantitativa como mudança relativa independente do conhecimento dos valores do aditivo e do subtrativo (Thompson, 1993). Esse desconhecimento constitui também um aspeto crítico, pois apesar de o aluno em causa, João, não ter confundido as noções de diferença quantitativa e de valor absoluto de berlindes, precisou de se ancorar em números concretos de berlindes. Por terem sentido necessidade de saber o valor dos números iniciais, os alunos mostram conceber a diferença como uma relação invariante numérica.

Um outro aspeto a relevar tem a ver com o modo com estas duas dimensões se inter-relacionam, o cálculo flexível e o raciocínio quantitativo aditivo. Por este se focar na descrição e modelação de situações e nas relações comparativas envolvidas, acaba por estar na base do desenvolvimento do cálculo flexível enquanto cálculo que mobiliza relações numéricas, de um modo inteligente e adaptativo às situações e aos próprios números.

Referências bibliográficas

Anghileri, J. (2001). Intuitive approaches, mental strategies and standard algorithms. In J. Anghileri (Ed.), *Principles and practices in arithmetic teaching* (pp. 79-94). Buckingham: Open University Press.

Baroody, A. J., & Rosu, L. (2006). Adaptive expertise with basic addition and subtraction combinations – The number sense view. In A. J. Baroody & T. Torbeyns (Chairs), *Developing adaptive expertise in elementary school arithmetic*. Symposium conducted at: The annual meeting of the American Educational Research Association.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (3ª ed.). New York: Macmillan.

Greer, B. (2012). Inversion in mathematical thinking and learning. *Educational Studies in Mathematics Education*, *79*, 429-438.

Lessard-Hebert, M., Goyette, G., & Boutin, G. (1990). *Investigação qualitativa: Fundamentos e práticas*. Lisboa: Instituto Piaget.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Rathgeb-Schierer, E., & Green, M. (2013). Flexibility in mental calculation in elementary students from different math classes. Paper presented in CERME 8. Antalya, Turquia.

Star, J. R., & Newton, K. J. (2009). The nature and development of experts' strategy flexibility for solving equations. *ZDM Mathematics Education*, *41*, 557-567.

Tavares, M. (2000). A entrevista clínica. In J. A. Cunha (Org.), *Psicodiagnóstico V* (5ª ed.) (pp. 45-56). Porto Alegre: ArtMed.

Thompson, P. W. (1993). Quantitative reasoning, complexity, and additive structures. *Educational Studies in Mathematics Education*, *25*, 165-208.

Threlfall, J. (2009). Strategies and flexibility in mental calculation. *ZDM Mathematics Education*, *41*, 541-555.

Uma investigação sobre a Atividade Aritmética no Ensino Fundamental

Maria Helena Marques Loth[1], *Amarildo Melchiades da Silva*[2]
[1]Prefeitura de Juiz de Fora/NIDEEM/BRASIL, maria.loth@terra.com.br
[2] Universidade Federal de Juiz de Fora/NIDEEM/BRASIL, xamcoelho@terra.com.br

Resumo. *Esse texto apresenta uma pesquisa sobre o tema aritmética escolar. A proposta fundamenta-se em uma investigação, segundo uma abordagem qualitativa, realizada no programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, Brasil. Nessa pesquisa buscamos entender o processo de produção de tarefas aritmética que pudessem estimular a produção de significados de alunos do sexto ano do Ensino Fundamental. Com o propósito de avaliar seus limites e potencialidades, as tarefas produzidas foram aplicadas a estudantes do sexto ano de uma escola pública municipal. Nesse texto, faremos comentários sobre os significados produzidos por uma dupla de alunos para uma dessas tarefas e, também, apresentaremos aspectos do processo de elaboração das mesmas.*

Abstract. *This text presents a research about scholar arithmetic. The proposal is based on an investigation according to a qualitative approach, which was realized at the post graduate in Mathematics Education course from Federal University of Juiz de Fora, Brazil. The researchers tried to understand the arithmetic tasks production process that could stimulate the production of meanings of students from the sixth grade at elementary school. The aim was to evaluate their limits and potentiality by applying the tasks to sixth grade students from a municipal public school. This text comments about what was produced to these tasks by a couple of students and it will also present aspects of their elaboration process.*

Palavras-chave: Educação matemática; Aritmética escolar; Produção de significado; Ensino Fundamental.

Introdução

A presente comunicação é fruto de uma pesquisa desenvolvida no Programa de Mestrado em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, Brasil. O objetivo do estudo foi a produção de tarefas aritméticas, referenciadas teoricamente, que se caracterizassem por serem situações-problema que pudessem estimular a produção de significados para a matemática de estudantes do Ensino Fundamental de escolas públicas brasileiras.

Para definir o tema de investigação tomamos como ponto de partida nossa prática docente como professora da Educação Básica que apontava para a importância de desenvolver um trabalho em sala de aula que fosse fundamentado em uma teoria de

Educação Matemática e não apenas em ações rotineiras que, muitas vezes, são baseadas no senso comum.

Começamos a pesquisa fazendo uma revisão de literatura, que se constituiu numa análise dos documentos oficiais brasileiros do Ministério da Educação, em particular os Parâmetros Curriculares Nacionais brasileiros (PCN), que são as diretrizes curriculares da Educação Básica. Num segundo momento, analisamos alguns textos sobre avaliação em larga escala como, por exemplo, a proposta de uma dessas avaliações brasileira denominada Prova Brasil e o Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA). A motivação para tal estudo residiu no fato de que essas avaliações possam vir a influenciar a matemática ensinada nas salas de aula, numa tentativa de melhorar os índices por elas apontados. Num terceiro momento, analisamos livros didáticos brasileiros, e finalizamos nossa revisão com a análise das pesquisas em Educação Matemática sobre aritmética escolar.

Decidimos que nosso foco estaria nos problemas aritméticos que envolvessem adição e subtração de números naturais. Essa decisão foi tomada considerando, em especial, a análise de livros didáticos, como veremos a seguir. Além disso, várias pesquisas e documentos do governo vêm informando que um grande número alunos está concluindo o Ensino Fundamental sem conseguir resolver operações simples de adição e subtração de números. Outras tantas pesquisas têm evidenciado que os alunos possuem muitas dificuldades de entender o enunciado de problemas matemáticos. Assim, nossa primeira preocupação ao desenvolver a revisão foi ter um entendimento sobre como o ensino de aritmética era sugerido nos PCN.

De acordo com os PCN, muitos dos conteúdos aritméticos que são tratados no 6.º ano do Ensino Fundamental, tais como sistema de numeração decimal, números naturais e racionais, operações com números naturais e racionais, já foram explorados nas séries anteriores, o que leva ao desinteresse do aluno quando se encontra na mesma situação de aprendizagem e muitas vezes aprendendo numa abordagem que se pauta em exercícios repetitivos desvinculados de situações cotidianas (Brasil/SEF, 1998). Outro ponto destacado nos PCN é que o trabalho nessa fase deve objetivar o desenvolvimento do pensamento numérico e que um dos aspectos do trabalho com os números é o seu uso como ferramentas a serem utilizadas na resolução de situações-problema. Com relação às operações, o documento sugere ênfase aos vários significados de cada operação e as relações entre elas (Brasil/SEF, 1998). O que podemos observar nos PCN é que eles propõem conteúdos a ensinar e sugerem diferentes metodologias de ensino como diretrizes para o professor. Mas a sua importância para nosso estudo foi possibilitar a nossa constatação de que poucas sugestões apresentadas no seu texto foram acatadas pelos autores de livros didáticos, como discutiremos a seguir.

A Prova Brasil, avaliação que compõe o sistema de avaliação da Educação Básica no Brasil, na parte da avaliação em Matemática se constitui em quatro grandes temas: Espaço e Forma; Grandezas e Medidas; Números e Operações/Álgebra e Funções e Tratamento da Informação. Observamos que o foco da avaliação está em analisar as competências e habilidades esperadas dos estudantes de acordo com sua faixa etária. Nessa direção, nossa análise identificou uma priorização do tema Números e Operações/Álgebra e Funções. Tal fato veio confirmar a importância de se investigar caminhos para que alunos brasileiros possam melhorar sua competência nesse tema.

Com relação ao PISA, a informação que julgamos importante considerar em nosso estudo foi a estrutura das questões: "um conjunto articulado de itens a partir de um texto-base ou estímulo, que pode ser composto de um texto escrito e/ou de um quadro, uma tabela, um gráfico, uma figura" (INEP, 2008, p. 23).

As pesquisas em Educação Matemática sobre o tema aritmética analisadas no estudo revelaram, entre outras coisas, que os pesquisadores concordam com o disposto nos PCN no que diz respeito a uma abordagem de ensino focada na valorização de estratégias pessoais de resolução de problemas (Araujo & Soares, 2002; Carraher, Carraher, & Schliemann, 2010; Lins & Gimenez, 1997). Outro ponto que julgamos relevante destacar é a concordância de vários pesquisadores que um dos focos da aritmética escolar deva ser o desenvolvimento do sentido numérico (Cebola, 2002; Lins & Gimenez, 1997; Ponte, Brocardo, & Oliveira, 2003). Salientamos, ainda, que Lins e Gimenez (1997) destacam o uso de números em diferentes contextos como uma importante estratégia a ser utilizada para potencializar a aprendizagem do sentido numérico.

Uma parte importante de nosso estudo aconteceu quando confrontamos as indicações apresentadas por pesquisadores sobre o ensino de aritmética nas pesquisas em educação matemática com o que encontramos nos principais livros didáticos de matemática de nosso país. Observamos que, apesar de os pesquisadores e de os documentos oficiais apontarem para a importância de se trabalhar com ênfase no desenvolvimento do sentido numérico, identificamos que nos livros didáticos atuais os autores não vão nessa direção, optando por um ensino baseado em exercícios de repetição apresentado apenas numa roupagem de uma contextualização artificial.

Para os problemas envolvendo adição e subtração de números naturais, detectamos que nesses livros, em geral, duas estratégias de resolução de problemas aritméticos são apresentadas aos alunos: uma propõe a análise das palavras-chave do problema. Por exemplo, sugere-se ao aprendiz que, se aparecer no enunciado do problema a palavra "reunir", então o problema seria de adição (cf. Dante, 2010; Giovanni Júnior & Castrucci, 2009; Imenes & Lellis, 2009; Iezzi, 2009). Outra forma de abordar esses problemas é a utilização de forma explícita, ou não tão explícita, em alguns casos, das quatro fases de resolução de problemas propostas por Polya, em seu livro *A arte de resolver problemas* (1995), que são indicadas como um roteiro que pode facilitar a busca da resposta solicitada (Dante, 2010; Giovanni Júnior & Castrucci, 2009). Cabe salientar que os autores, em geral, apenas propõem as fases de Polya inicialmente e não voltam a destacá-las no restante da coleção.

Sobre o uso da estratégia de observar a palavra-chave na resolução de problemas, Vasconcelos (2003) ressalta que, quando há ênfase nessa estratégia, a solução do problema passa a ser resultado da dica fornecida pela palavra-chave, e não de uma compreensão das relações entre os dados do problema. Nossa postura, nesse estudo, é de concordância com a autora.

Onuchic e Botta (1998) enfatizam que há muitos problemas que podem ser modelados pela adição e subtração e que não podem ser associados às ideias de juntar coisas de mesma natureza ou de retirar uma quantidade de outra. Para as autoras, é preciso desenvolver nos alunos a consciência de que uma mesma operação pode ser utilizada para resolver diferentes tipos de problemas. Destacam, ainda, que para os alunos "as idéias subjacentes a estas operações não são tão simples, são complexas" (Onuchic & Botta, 1998, p. 19).

Pesquisadores como Vasconcelos (2003) e Moreira e David (2005) destacam a importância de que, em situação escolar, a memorização de regras dê lugar à compreensão advinda de uma exploração e do uso de representações simbólicas adequadas. Selva (2003), por outro lado, destaca que nas escolas os alunos são orientados a utilizar estratégias copiadas das ensinadas com o objetivo de demonstrar conhecimento ao professor – questões centrais com as quais concordamos e que deveriam ser objeto de atenção dos professores em sala de aula.

Além disso, para nós, tanto a ênfase na palavra-chave como o uso das estratégias de Polya têm, de acordo com nossos pressupostos teóricos, a função de facilitar a vida do aluno, que passa a priorizar a memorização de regras, procedimentos e formas de operar em detrimento à compreensão e elaboração de seus próprios métodos de resolução de problemas. Esse processo de facilitação parece contribuir para inibir as possibilidades do uso de estratégias próprias em situações de aprendizagem, que, segundo pesquisadores que investigam Educação Aritmética (Cebola, 2002; Lins & Gimenez, 1997; Lopes & Gimenez, 2009), devem ser estimuladas. Por isso, tal facilitação constitui-se num aspecto negativo no processo de aprendizagem.

Como resultado da revisão da literatura, tomamos algumas decisões para direcionar nossa pesquisa. Uma delas, influenciada pelo nosso referencial teórico, foi que nosso foco na elaboração das tarefas não estará dirigido a promover nos alunos as competências e habilidades, como pretendem as avaliações em larga escala ou os documentos oficiais, mas a estimular a produção de significados dos estudantes. O interesse em analisar os documentos oficiais na revisão foi esclarecer que não temos a intenção de desconsiderar as orientações curriculares. Além disso, nosso objetivo é que as tarefas para a sala de aula de Matemática estimulem os estudantes a produzirem suas próprias estratégias de resolução de problemas.

Fundamentação teórica e questão de investigação

Nosso estudo foi norteado pelo Modelo dos Campos Semânticos (MCS) proposto por Lins (1999, 2004, 2012). A escolha do MCS como referência teórica é justificada pela clareza que tivemos de que seus pressupostos e noções fornecem uma base sólida de entendimento dos diversos fatores envolvidos nos processos de ensino e de aprendizagem da matemática.

Pela limitação de espaço nessa comunicação, apresentaremos apenas as noções do modelo que nos permitirão analisar as ações enunciativas dos sujeitos de pesquisa da investigação. Sendo assim, uma noção essencial em nosso estudo é a noção de significado, entendido como "aquilo que <u>efetivamente</u> se diz a respeito de um objeto no interior de uma atividade" (Lins, 2012, p. 28, grifo do autor). Desse modo, o significado não é o conjunto de todas as coisas que poderiam ser ditas por uma pessoa sobre o objeto, e, sim, o que *efetivamente ela diz* sobre ele no interior de uma atividade (Lins & Gimenez, 1997). Como consequência, dizer que um sujeito produziu significados é dizer que ele produziu ações enunciativas a respeito de um objeto no interior de uma atividade (Silva, 2003). Dessa forma, os objetos – coisas sobre as quais sabemos dizer e dizemos algo – não existem de forma independente, eles são constituídos no processo de produção de significados.

O MCS possui duas características consideradas fundamentais para nosso estudo: uma delas é nos proporcionar, enquanto pesquisadores, pressupostos teóricos, que orientam nossa investigação, como por exemplo o fato de que conhecimento é do domínio da enunciação, isto é, que sempre há um sujeito do conhecimento; e, ainda, o pressuposto de que somos todos cognitivamente diferentes, indicando claramente uma aproximação das concepções de Vygotsky e um afastamento das concepções de Piaget.

Lins (1999) esclarece que não se trata de reconhecer que não somos, no sentido biológico, cópias uns dos outros, nem tão pouco de reconhecer que a personalidade de cada um tem características próprias; não é essa a questão. Ele, então, explica:

> Para mim, "somos todos diferentes" refere-se ao fato indicado por Vygotsky, de que, dada a plasticidade do cérebro humano, a menos que algo/alguém intervenha, nosso caminho natural é divergirmos fortemente nas constituições de nosso funcionamento cognitivo (p. 79).

Por outro lado, através do que são denominadas noções-categorias descritas a seguir, temos, enquanto pesquisadores, elementos metodológicos de análise das ações enunciativas dos sujeitos de pesquisa. Isto é, a partir do momento em que uma pessoa se propõe a produzir significados para um enunciado, por exemplo um problema aritmético, é possível observar o desencadeamento de um processo – o processo de produção de significados – que envolve: i) a constituição de objetos – coisas sobre as quais o sujeito sabe dizer algo e diz –, que permite observar tanto os novos objetos que estão sendo constituídos quanto os significados que estão sendo produzidos; ii) a formação de um núcleo, isto é, quando uma pessoa produz significados, existem algumas afirmações que ela faz e que, tomando-as como absolutamente válidas, não sente necessidade de justificá-las; a essas crenças-afirmações chamamos de estipulações locais e ao conjunto das estipulações locais constituídas no interior de uma atividade denominamos núcleo; iii) a maneira de operar das pessoas e suas lógicas; iv) os interlocutores, que são "direções" para onde o sujeito produz significados; e v) as legitimidades, isto é, o que é legítimo ou não para o sujeito dizer no interior de uma atividade (Silva, 2003, p. 66).

Como observa Silva (2003), a apresentação dessa lista de elementos – usualmente chamada de noções categorias – em uma determinada ordem não significa que estamos determinando uma sequência de procedimentos, uma ordem de leitura, e, sim, que é esse conjunto de coisas que estaremos considerando ao fazer a leitura das ações enunciativas dos sujeitos de pesquisa. Assim, com base no MCS, nossa questão de investigação toma como ponto de partida vários aspectos observados na revisão da literatura e que determinaram nossas convergências e rupturas com as perspectivas lá apresentadas – por exemplo, nossa discordância com a perspectiva apresentada nos livros didáticos de matemática analisados, em particular a proposta de facilitação da resolução de problemas através da proposição de estratégias, tais como a análise das palavras-chave ou pelos passos sugeridos por Polya. Desse modo, nossa proposta de investigação foi a de desenvolver um conjunto de tarefas, referenciadas teoricamente, que estimulassem a produção de significados de estudantes do 6.º ano do Ensino Fundamental para problemas aritméticos envolvendo adição e subtração.

Metodologia de pesquisa

O presente estudo foi caracterizado como uma abordagem qualitativa de investigação, conforme proposto por Bogdan e Biklen (2010), e foi dividido em duas fases. Na primeira fase nos concentramos na elaboração do conjunto de tarefas. Na segunda fase, as tarefas foram aplicadas a alunos do 6.º ano de escolas públicas municipais da cidade de Juiz de Fora, no estado de Minas Gerais, e, em seguida os significados por eles produzidos foram analisados.

Na fase de elaboração das tarefas fixamos algumas características gerais que orientaram nosso trabalho, que foram: i) que as tarefas pudessem estimular a produção de significados dos alunos quando eles se propusessem a resolvê-las; ii) que elas proporcionassem uma ampliação nas possibilidades de estratégias de resolução dos alunos, ao invés de reduzi-las; iii) que possibilitassem que vários elementos do pensar matematicamente estivessem em discussão, como, por exemplo, a análise da razoabilidade dos resultados, a busca de padrões nas resoluções e o desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas; e iv) elas deveriam ser familiares (no sentido de que os alunos pudessem resolvê-las com a formação matemática que possuíam) e não usuais – ou seja, elas deveriam exigir um esforço cognitivo maior dos estudantes do que aquele que se exige em um exercício de fixação de conceitos, por exemplo.

Como consequência dessas características, as situações-problema propostas resultaram em tarefas abertas, de modo que o aluno poderia analisá-la de diferentes perspectivas. Além disso, para estimular a leitura e interpretação de textos, tão deficientes na formação dos alunos de escolas públicas, a resolução das tarefas deveria exigir dos alunos a leitura de textos. Uma decisão importante também que tomamos foi a de criar um conjunto de tarefas sobre uma mesma temática. Optamos por discutir o consumo e o desperdício de água. Assim, os enunciados dos problemas trouxeram em sua formulação valores reais de consumo e desperdício de água.

A estrutura matemática subjacente às situações-problema envolveu as operações de adição e subtração de números naturais. Ao dizer isso, queremos deixar claro que estivemos olhando para o pensamento aritmético dos estudantes e para os objetos envolvidos naquela produção de significados.

Os recursos utilizados na recolha de dados foram, principalmente, um caderno de campo, no qual a professora/pesquisadora registrou suas observações, e a vídeografia. Além disso, os alunos entregaram as fichas com o registro escrito dos significados que produziram para as tarefas propostas.

Em nossa pesquisa elaboramos quatro tarefas abordando o tema água. Porém, na presente comunicação apresentaremos apenas a primeira delas, intitulada “Torneiras Pingando”, cujo enunciado é apresentado a seguir.

Torneiras Pingando

Veja a quantidade de água que é desperdiçada com as torneiras pingando. A figura mostra o gasto de água durante um mês.

Fonte:http://www.uniagua.org.br/publichtml/website/default.asp?tp=3&pag=dicas.htm

Vamos calcular:

a) Se em sua casa há três torneiras pingando, qual a quantidade de água que elas estão desperdiçando?

b) Se você fechar a 1ª torneira de modo que ela não pingue, quantos litros de água serão desperdiçados?

c) Se você fechar a 1ª e a 2ª torneiras de modo que elas não pinguem, quantos litros de água serão desperdiçados? E economizados?

d) Qual é a quantidade de água que a 3ª torneira gasta mais que a 2ª torneira?

e) Se você conseguir fechar totalmente a 3ª torneira e apertar a 2ª torneira de forma que ela fique pingando como a 1ª, quantos litros de água serão desperdiçados? E economizados? (Loth, 2011, p. 82).

Vejamos a seguir a produção de significados dos sujeitos de pesquisa para a tarefa proposta.

Os significados produzidos para a tarefa "Torneiras Pingando"

Em nossa pesquisa, apresentamos a tarefa para duas duplas de estudantes e depois aplicamos em uma turma do 6.º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública. A seguir, nos limitaremos a apresentar os significados produzidos pela dupla, que usaram os pseudônimos Guigo e Carioca.

Após a entrega de uma ficha com o enunciado da tarefa, passamos a observar os estudantes Guigo e Carioca. Já na leitura do texto eles interagem, como mostra o diálogo abaixo:

> Guigo: "Gotejamento lento. 400... Quê que significa esse L, cê sabe? [Olha para Carioca, que olha para a folha de Guigo]
> Carioca: 400 litros por mês / por mês/.

Guigo imediatamente apresenta uma resposta para o item a) das perguntas e procura explicar os seus significados produzidos para Carioca:

> Guigo: 1 200 litros. Porque aqui ó. Tem 3 torneiras. Tem 3 torneiras [repete, com ênfase na fala]. Aí aqui pode ser 3 desse daqui [aponta para a primeira torneira da figura], 3 desse daqui [aponta para segunda torneira da figura] ou 3 desse daqui [aponta para a terceira torneira da figura]. Na sua casa a torneira pinga ou não. Ela pinga?
> Carioca: É na nossa opinião, professora?

Note que Carioca, ao ouvir o comentário de Guigo, questiona a professora, fonte de autoridade, para expressar a sua opinião. Porém, Guigo parece convicto do propósito de fazer Carioca compartilhar seus significados. Eles continuam a conversa durante longo tempo, mas, apesar da resposta imediata dele e de todo o processo de convencimento feito por Guigo, eles registraram valores diferentes em suas fichas. Isso sugere que eles não compartilham os mesmos interlocutores. O interessante é que, mesmo após ter registrado por escrito a resposta, Guigo volta a pensar na impossibilidade de responder a questão, alegando que em sua casa as torneiras não pingam. Ele diz:

> Guigo: Então. E se minha casa não pingasse igual minha... Por exemplo, a torneira lá de casa não pinga, como é que ia fazer? Não tinha como fazer, ué!

Eles passam então para o item b) da tarefa. Apesar de apresentarem registros escritos distintos para o item a), nossa leitura indica que a dupla fala na mesma direção quando se propõe a produzir significados para o item b). Ambos, rapidamente, retiram 400 litros do valor encontrado no item a e se dão por satisifeitos. Assim, passam a discutir o item c). Imediatamente após a leitura, Guigo apresenta os significados que produziu. Demonstra continuar operando da mesma maneira anterior, ou seja, considerando que as três torneiras são a torneira que goteja lentamente, o que nos sugere uma maneira de operar segundo alguma lógica. Por exemplo, ele pode estar operando com o fato de que na casa dele torneiras não pingam e estar escolhendo a que pinga menos para aproximar da sua situação real.

Vejamos a continuação do diálogo:

> Guigo: Então. Se você fecha a 1ª e a 2ª. Tá. A 1ª e a 2ª da sua casa, mas é lento. Sua casa num pinga lento? [Fala com muita ênfase]
> Carioca: Hã?
> Guigo: Então vai fechar 2 torneiras da sua casa que pinga lento.

Carioca, por sua vez, parece não falar na mesma direção. Parece não considerar legítimo que 1ª e 2ª torneiras possam ser a mesma torneira.

> Carioca: Porque a 1ª e 2ª [aponta para a 2ª e 1ª torneiras da figura] é 1 400. Ó... Porque tá assim ...

Guigo é enfático e segue tentando convencer Carioca a pensar com ele. Logo depois, Carioca esclarece a sua maneira de operar; ele diz:

> Carioca: (...) Quer dizer que é para fechar as duas torneiras, aí vai dar 1400. Tipo assim, essa 1ª e essa 2ª [A caneta aponta para as duas torneiras na figura]. A 1ª gasta 400 e a 2ª gasta 1 000, aí vai dá 1 400. Aí você vai tirar do seu [aponta para a folha de Guigo] 1 400.

Ao que parece, para Carioca não está claro o que fazer. Observamos que eles continuaram em um longo processo de negociação. Um tentava convencer o outro a mudar a direção de sua fala. Em um dado momento percebemos que Carioca passa a falar na direção de Guigo como indica os grifos do fragmento abaixo.

> Carioca: Ah! Acho que entendi. Acho que... acho que... aqui tá falando que, que a primeira torneira *cada torneira é ela* é, *é três dela*, num é? É, tipo assim: "se em sua casa há 3 torneiras", é assim *três torneiras de cada que eu escolher* aqui, num é? [Busca confirmação da professora]. *Tipo assim de 400 litros.* É, então, aí, aqui tá pedindo. Se você... *Igual o Guigo* falou, se você fechar a 1ª e a 2ª vai sobrar uma, aí vai sobrar uma, tipo assim, 800 eu tiro, eu tiro 800, tipo assim vou tirar duas vezes. É assim, professora?

Guigo e Carioca continuam o diálogo, mas não conseguem avançar muito. E encerram registrando uma resposta em suas fichas. Quando passam a discutir o item d), Guigo mantém a direção de sua fala, ou seja, considera que a primeira, segunda e terceira torneiras são torneiras de gotejamento lento. Observamos que Guigo volta a incorporar elementos de sua vida real na discussão e Carioca parte do enunciado proposto, e em um momento Guigo parece se tornar um interlocutor de Carioca:

> Carioca: (...) Mas num tá falando assim "qual é a quantidade de água que a terceira torneira gasta a mais que a segunda torneira" na sua casa [fala na sua casa com muita ênfase]. Na torneira só quer dizer essas, essas torneiras [bate a mão sobre a figura da folha de Guigo]. Se aqui tem 6500 menos 1000.
> Guigo: Ah, tá!

Nesse momento nos perguntamos: o que permite com que Guigo veja esta resposta como legítima? O que faz com que ele aceite operar com ela? A resposta a essa questão surge quando Guigo replica a dúvida de Carioca.

> Guigo: (...) Num tá falando *da sua casa nem da minha*, então, *é daqui* / então / então? Vai dar 5 500 /calma/ num vai dá não?

Os dois continuam confusos e passam a conversar sobre o item e). A produção de significados apresentada por Guigo sugere que ele usa o valor encontrado no item a) e que 1ª, 2ª e 3ª torneiras têm relação com as que têm em sua casa e não com as que estão no desenho. Já a fala de Carioca demonstra que considera as torneiras da figura na ordem em que aparecem da esquerda para a direita.

> Guigo: (...) Lá em casa. A terceira torneira pinga 6 500, a segunda pinga 400 e a primeira pinga 400 (...).
> Carioca: (...) "Quantos litros de água serão desperdiçados?". Então, esquece a 3ª torneira. Vamos para a 2ª. Se a *2ª* tem *1000 litros*, aí a gente vai apertar, é / ela que, ela vai ficar pingando / Quantos é 1000 menos 400, 1000 menos 400 vai dá quantos? / 600 / Olha só.

Eles não vão muito longe falando e ficam dando voltas sobre a mesma questão.

É importante observar que o resultado da fala dos sujeitos de pesquisa decorre da maneira como conduzimos a entrevista. Nosso interesse foi o de intervir o menos possível em suas enunciações para observar até onde eles iriam sozinhos falando.

Um dos pontos mais interessantes da entrevista foi a incorporação de Guigo de sua experiência pessoal em sua casa, onde as torneiras não pingam, e trazer essa informação para o problema, sugerindo que esse fato se constituía em uma possível estipulação local e que influenciou sua maneira de operar na resolução do problema.

Algumas considerações

A tarefa apresentada acima também foi aplicada em uma sala de aula como atividade do dia. Houve intensa discussão entre os alunos e diferentes modos de produção de significados surgiram. Como aconteceu com Guigo e Carioca, a tarefa cumpriu o seu objetivo de estimular a produção de significados dos alunos. Ressaltamos que, a nosso ver, propor uma tarefa que não tenha resposta única e que seja familiar e não usual pode, de fato, ampliar de forma considerável as falas dos alunos, suas estratégias de resolução e, principalmente, estimular que compartilhem dos diferentes modos de produção de significados dos colegas que surgem naquele momento em sala de aula.

Por outro lado, um ponto que deve ser destacado é que em nenhum dos casos – nas entrevistas e na sala de aula – uma análise do desperdício de água tratado pelo problema surgiu espontaneamente dos estudantes. Eles encerravam a tarefa e já queriam passar para a próxima. Para nós, esta análise e reflexão que o enunciado traz é parte importante desse tipo de tarefa. Assim, o que fica como observação é que a maneira como o professor conduzirá os alunos na resolução da tarefa é importante na busca de uma mudança real no ensino de matemática. E só assim a tarefa pode maximizar a aprendizagem dos estudantes e ampliar sua compreeensão de temas que vão além da simples resolução de um problema matemático.

Referências bibliográficas

Araujo, D. A., & Soares, E. S. (2002). Calculadoras e outras geringonças na escola. *Revista Presença Pedagógica*, *8*(47), 13-27.

Bogdan, R., & Biklen, S. (2010). *Investigação qualitativa em educação. Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Brasil/Secretaria de Educação Fundamental (1998). *Parâmetros curriculares nacionais: Matemática*. Brasília: MEC/SEF.

Carraher, T. N., Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2010). *Na vida dez, na escola zero*. São Paulo: Cortez Editora

Cebola, G. (2002). Do número ao sentido do número. In J. P. Ponte et al. (Eds.), *Actividades de investigação na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 233-239). Disponível em http://www.spce.org.pt/sem/15GracaCebola.pdf (acesso em 22 ago. 2010).

Dante, L. R. (2010). *Tudo é Matemática – 6.º ano* (3ª ed.). São Paulo: Ática.

Giovani Júnior, J. R., & Castrucci, B. (2009). *A conquista da Matemática – 6º ano*. São Paulo: FTD.

Iezzi, G., Dolce, O., & Machado, A. (2009). *Matemática e realidade – 6º ano*. São Paulo: Atual.

Imenes, L. M. P., & Lelis, M. C. (2009). *Matemática – 6º ano*. São Paulo: Moderna.

INEP (2008). *Resultados nacionais – PISA 2006: Programa Internacional de Avaliação de Alunos*. Brasília: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais.

Lins, R. C. (1999). Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a educação matemática. In M. A. V. Bicudo (Org), *Pesquisa em educação matemática: Concepções e perspectivas* (pp. 75-94). São Paulo: Editora da UNESP.

Lins, R. C. (2004). Matemática, monstros, significados e educação matemática. In M. A. V. Bicudo & M. Borba (Orgs.), *Educação matemática: Pesquisa em movimento* (pp. 93-120). São Paulo: Cortez.

Lins, R. C. (2012). O modelo dos campos semânticos: Estabelecimentos e notas de teorizações. In *Modelo dos campos semânticos e educação matemática: 20 anos de história* (pp. 11-30). São Paulo: Midiograf.

Lins, R. C., & Gimenez, J. (1997). *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI*. Campinas: Papirus.

Lopes, A. J., & Gimenez, J. R. (2009) *Metodologia para o ensino da aritmética: Competência numérica no cotidiano*. São Paulo: FTD.

Loth, M. H. M. (2011). *Uma investigação sobre a produção de tarefas aritméticas para o 6º ano do ensino fundamental* (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, Brasil.

Moreira, P. C., & David, M. M. (2005). *A formação matemática do professor: Licenciatura e prática docente escolar*. Belo Horizonte: Autêntica.

Onuchic, L. R., & Botta, L. S. (1998). Reconceitualizando as quatro operações fundamentais. *Revista de Educação Matemática*, *6*(4), 19-25.

Polya, G. (1995). *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência.

Ponte, J. P., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2003). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica.

Selva, A. C. V. (2003). Discutindo o uso de materiais concretos na resolução de problemas de divisão. In A. L. D Schliemann & D. W. Carraher (Org.), *A compreensão de conceitos aritméticos: Ensino e pesquisa* (pp. 95-119). Campinas, SP: Papirus.

Silva, A. M. (2003). *Sobre a dinâmica da produção de significados para a Matemática* (Tese de Doutorado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, Brasil.

Vasconcelos, L. (2003). Problemas de adição e subtração: Modelos teóricos e práticas de ensino. In A. L. D Schliemann & D. W. Carraher (Org.), *A compreensão de conceitos aritméticos: Ensino e pesquisa* (pp. 53-72). Campinas, SP: Papirus.

Identificação de figuras no plano por alunos do 1º ano de escolaridade

Maria Paula Pereira Rodrigues[1], Lurdes Serrazina[2]
[1]Agrupamento Conde de Oeiras, EB 1 Joaquim Matias, rodriguesm.paula@gmail.com
[2]Escola Superior de Educação de Lisboa & Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, lurdess@eselx.ipl.pt

Resumo. *Neste estudo exploratório, baseado em Clements, Swaminathan, Hannibal, e Sarama (1999), pretendeu-se identificar quais os conhecimentos que três alunos do 1º ano de escolaridade, com idades compreendidas entre os seis e sete anos de idade, manifestam na identificação de círculos, quadrados, triângulos e retângulos. Foram realizadas três entrevistas individuais audiogravadas, onde foram colocados à disposição dos alunos quatro conjuntos de figuras distintos em que, no primeiro, teriam de identificar os círculos; no segundo, os quadrados; no terceiro, os triângulos; e, no último, os retângulos. Foram feitas as transcrições dos diálogos entre a investigadora e as crianças, analisados os aspetos subjacentes às suas escolhas, na tentativa de identificar o tipo de conhecimento que os três alunos manifestaram sobre propriedades e características das figuras reconhecidas. Como conclusões sobressai o facto de os alunos articularem protótipos visuais com atributos conhecidos para reconhecer as formas apresentadas; utilizarem uma classificação do tipo partitivo; identificarem, por ordem de dificuldade, o círculo, o quadrado, o retângulo e o triângulo; a dificuldade em identificar algumas formas particulares devido à existência de propriedades topológicas que não deixam reconhecer propriedades específicas; e, por último, o facto de um maior tempo de permanência na escola não influenciar um tipo de classificação baseado em propriedades, atributos e características das formas.*

Abstract. *This exploratory study, based on Clements, Swaminathan, Hannibal, and Sarama (1999), intended to identify the knowledge that three students from the 1st grade, aged between six and seven years, manifested in identifying circles, squares, triangles and rectangles. Three audio recorded individual interviews were made, four sets of different figures were made available to students when they had, first, to identify circles; second, squares; third, triangles; and, at last, rectangles. After the transcriptions of conversations between the researcher and the children, were analyzed the underlying aspects of their choices in an attempt to identify the type of knowledge that this three students expressed about the properties and characteristics of recognized figures. As conclusions emerges the facts that students articulate known visual prototypes to recognize shapes and used a partitive classification type. In order of difficulty, children identify the circle, square, rectangle and triangle; furthermore it's understandable that some particular forms, as rectangles, can offer difficulties to be identifying because of some topological properties that prevent the recognition of specific properties; and, finally, it seems possible to say that the fact of a long period spent at school does not affect a figure classification based on properties, attributes and forms characteristics.*

Martinho, M. H., Tomás Ferreira, R. A., Boavida, A. M., & Menezes, L. (Eds.) (2014).
Atas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática. Braga: APM., pp. 295–310

Palavras-chave: Visualização; Identificação de figuras no plano; Pensamento intuitivo.

Introdução

Este artigo corresponde a um estudo exploratório efetuado para preparar o terreno para a recolha de dados de uma investigação no âmbito do Doutoramento em Didática da Matemática, intitulada *Classificação de figuras: Uma experiência de ensino nos primeiros anos de escolaridade*.

Esta investigação tem como objetivos identificar as noções intuitivas que alunos dos primeiros anos de escolaridade possuem sobre figuras no plano, o conhecimento que utilizam para classificar essas figuras, identificando propriedades das mesmas, e compreender como é possível levar os alunos a fazer classificações de figuras no plano.

O estudo exploratório que aqui se apresenta baseia-se numa investigação de Clements, Swaminathan, Hannibal, e Sarama (1999), intitulada *Young Children's Concepts of Shape*, e pretendeu apenas identificar quais os conhecimentos que três alunos do 1º ano de escolaridade, com idades compreendidas entre os seis e sete anos de idade, manifestam na identificação de círculos, quadrados, triângulos e retângulos.

Ideias teóricas subjacentes à elaboração do estudo

Quando é apresentado um conjunto de figuras com o intuito de identificar as formas que o constituem, de acordo com Clements et al. (1999), é possível que os alunos revelem conhecimentos que se relacionam com um pensamento de caráter intuitivo, baseado em protótipos visuais, sem considerar atributos ou propriedades das mesmas. Este conhecimento relaciona-se com as experiências anteriores e promove diferentes níveis de desenvolvimento, segundo Burger e Shaughnessy (1986) e Fuys, Geddes, e Tischler (1988).

Ainda, de acordo com os autores referidos anteriormente, alguns alunos poderão apoiar o seu conhecimento no reconhecimento de propriedades de uma figura ou conjunto de figuras e, outros, articularão protótipos visuais com propriedades conhecidas, para reconhecer as formas apresentadas.

Tendo presente a conceção de Fisher (1965), as propriedades topológicas, estruturas que permitem a concretização mental de uma forma, como por exemplo a configuração ou aparência, podem não deixar alguns alunos chegar à identificação de uma determinada figura, dado não serem capazes de considerar propriedades específicas da mesma.

Segundo Clements e Sarama (2007), os alunos tenderão para um tipo de classificação partitiva, onde os vários subconjuntos de conceitos são disjuntos uns dos outros, ao contrário de uma classificação hierárquica, onde os conceitos mais particulares formam subconjuntos dos mais gerais (De Villiers, 1994). Num processo de classificação partitiva, os alunos poderão identificar o nome das figuras apresentadas sem nunca lhes ter sido dada a possibilidade de refletir sobre o seu nome, atributos ou propriedades, e apenas uma pequena minoria será capaz de apresentar contraexemplos.

Perante conjuntos de figuras distintos, onde o objetivo é identificar círculos, quadrados, triângulos e retângulos, segundo Clements et al. (1999) e Sandhofer e Smith (1999), as figuras mais fáceis de identificar serão, por ordem de dificuldade, o círculo, o quadrado, o retângulo e o triângulo.

Metodologia

Opções metodológicas

Este estudo baseia-se em três entrevistas individuais, realizadas no final do ano letivo 2012-2013, pela primeira autora do artigo, onde foi pedido a cada um dos participantes que, em conjuntos de figuras distintos, todos formados por figuras manipuláveis, identificassem, justificando as suas opções: círculos; quadrados, triângulos e retângulos.

A cada um dos alunos foi sempre pedido, inicialmente, que identificasse círculos, quadrados, triângulos e retângulos. As restantes questões colocadas a cada um, embora próximas, resultaram das formas escolhidas por cada uma das crianças, e serão apenas parcialmente apresentadas nesta comunicação.

As entrevistas foram realizadas fora da sala de aula e tiveram, aproximadamente, a duração de 45 minutos cada uma. Em todas elas foram utilizadas as figuras apresentadas no estudo *Young Children's Concepts of Shape*, (Clements et al., 1999); contudo, este material não foi apresentado desenhado em papel, como no estudo original, e as crianças puderem sempre, como referido anteriormente, manipular as figuras.

Após as entrevistas, foi analisado o conteúdo das respostas dos alunos e, de acordo com as ideias sugeridas pelos autores consultados, foi feita uma análise qualitativa dos dados para tentar identificar os conhecimentos que os três alunos entrevistados revelavam sobre as formas apresentadas.

Participantes

As crianças participantes neste estudo frequentavam, no ano letivo 2012-2013, uma turma de 1º ano de escolaridade, numa escola pública situada no concelho de Oeiras, e tinham entre seis e sete anos de idade, todos alunos da primeira autora.

As entrevistas foram realizadas a duas raparigas e um rapaz e, por uma questão ética, os seus nomes serão preservados, utilizando para os identificar nomes fictícios.

A seleção das três crianças teve em conta o seu desenvolvimento global e o seu aproveitamento escolar, ao longo do ano letivo. Assim, foi escolhida uma aluna com aproveitamento bom, outra com aproveitamento suficiente e um terceiro com aproveitamento fraco, no sentido de perceber até que ponto os conhecimentos intuitivos ou relacionados com as vivências das crianças podem ou não influenciar a identificação de figuras no plano.

Caracterização dos alunos participantes no estudo

A Bia, com 6 anos e 11 meses, frequentou o jardim-de-infância durante três anos e é uma aluna com um bom aproveitamento escolar. Revelou, ao longo de todo o ano letivo, muita perspicácia, atenção e interesse pelas tarefas propostas. Para além disso, é uma criança que revela estímulo familiar e que apresenta algumas vivências.

O Fran, com 7 anos e 6 meses, é uma criança com muitas dificuldades de concentração e emocionalmente muito instável. Frequentou o jardim-de-infância durante quatro anos e é um ano mais velho que todos os colegas de turma, dado, por opção parental, ter ficado mais um ano no jardim-de-infância. O seu aproveitamento escolar é fraco e, no início do ano letivo, revelou dificuldades de adaptação à nova escola e regras da mesma.

A Rana, com 6 anos e 4 meses, frequentou o jardim-de-infância apenas um ano, entre os 5 e os 6 anos de idade, é uma aluna com um aproveitamento suficiente, de origem cigana, e que revela muito poucas vivências. Manifestou sempre grande interesse pelas tarefas escolares e vontade de aprender.

Identificação de figuras

Identificação de círculos

Esta tarefa foi apresentada com o objetivo de perceber se as três crianças entrevistadas reconheciam círculos e identificar quais os conhecimentos que revelavam ter sobre esta forma e o tipo de justificações que apresentavam para provar as suas escolhas.

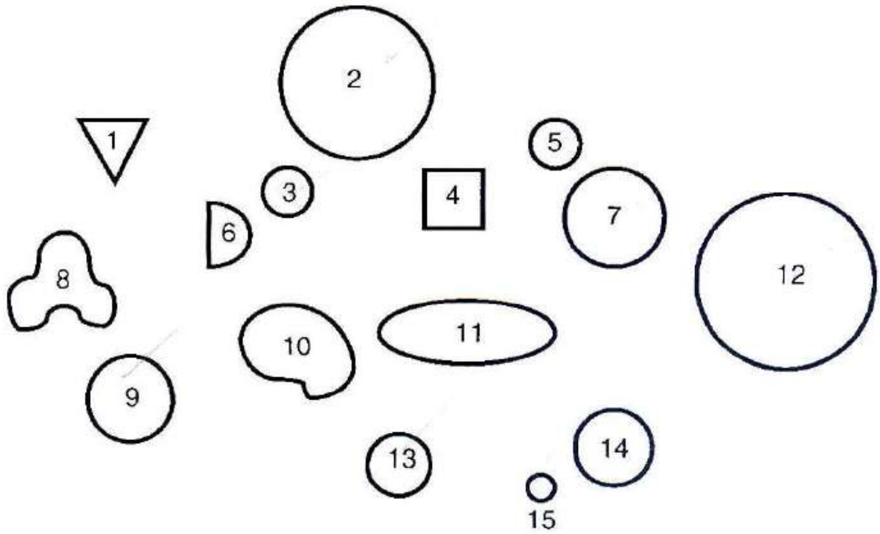


Figura 1 – Conjunto de figuras para identificação de círculos B1 (Razel & Eylon, 1991)

Bia

Durante o processo de identificação dos círculos, Bia recorreu com frequência à comparação de círculos e não círculos para justificar as suas opções e associou sempre a ideia de redondo à ideia de círculo.

> Paula: Por que achas que estas figuras são círculos? *(figuras 2, 3, 5, 7, 9, 12, 13, 14 e 15)*
>
> Bia: Porque são redondos.
>
> Paula: E esta figura, por que não a escolheste? *(figura identificada com o número 8)*
>
> Bia: Porque não é redonda. Queres ver?
>
> *Vai buscar a figura identificada com o número 9 e, por comparação, contornando a fronteira de ambas as figuras, responde:*
>
> Bia: Vês, este *(figura identificada com o número 11)* não é da mesma forma que este *(figura identificada com o número 9).*

Bia parece apresentar as suas escolhas baseando-se num protótipo visual de círculo que não lhe permite identificar outras características ou atributos da mesma figura. No entanto, foi capaz de excluir das suas escolhas todos os não círculos.

Fran

O aluno selecionou como círculos as figuras 3, 5, 7, 9, 12, 14 e 15, mas não selecionou a figura com o número 13 e, embora relacione o círculo com o conceito de redondo, a sua perceção desta forma não parece ainda muito definida. Subjacentes às suas escolhas parecem estar propriedades topológicas da forma redonda que aparentam não o deixar chegar ao reconhecimento de atributos ou propriedades específicos dos círculos.

> Paula: E a figura com o número 6, o que me dizes?
> Fran: Esta não, porque não está redonda.
> Paula: Será da família da figura com o número 11?
> Fran: Sim, porque não tá todo redondo. *(passando o dedo na fronteira)*
> Paula: Explica melhor.
> Fran: É redonda mas não é toda redonda, como as outras que eu escolhi.

Na última resposta apresentada, o aluno percebe que a figura 6, embora seja formada por uma linha curva, não completa uma volta e, de acordo com o seu protótipo de círculo, ela não corresponde a um círculo. No entanto, ao afirmar que a mesma pode pertencer à família da figura 11, elipse, revela não identificar atributos ou propriedades que o ajudem a selecionar figuras não poligonais formadas apenas por linhas curvas.

Rana

Rana identificou como círculos as figuras com os números 2, 3, 5, 7, 9, 13, 12, 14 e 15. Ao analisar as figuras escolhidas, parece haver em Rana um protótipo visual bem definido de redondo. A aluna utiliza não só o gesto, como a comparação com objetos das suas vivências (a bola) para justificar a forma que está a identificar.

> Paula: A figura com o número 11 também é redonda?
> Rana: Não é assim tão redonda, é assim… *(com os dedos, faz o gesto de alongamento da elipse)*.
> Paula: E a figura com o número 6?
> Rana: Esta não é, porque tem dois biquinhos.
> Paula: E a figura com o número 10, será um círculo?
> Rana: Não porque não é uma bola e tem aqui uma coisa *(apontando para a concavidade)*.
> Paula: E a figura com o 8, pode ser um círculo?
> Rana: Esta não, a bola tinha de ser assim *(faz o gesto de redondo com as mãos)* e esta tem umas coisas.

Ao longo deste diálogo, a aluna manifesta ter presente um forte protótipo da forma circular, associado à forma de uma bola. Assim, justifica o facto de as figuras 8 e 10, pelo facto de conterem concavidades e não "parecerem" uma bola, não poderem ser identificadas como círculos.

Identificação de quadrados

Esta tarefa foi apresentada com o objetivo de perceber se as três crianças entrevistadas reconheciam a forma quadrada e identificar quais os conhecimentos que revelavam ter sobre o quadrado e o tipo de justificações que apresentavam para justificar as suas escolhas.

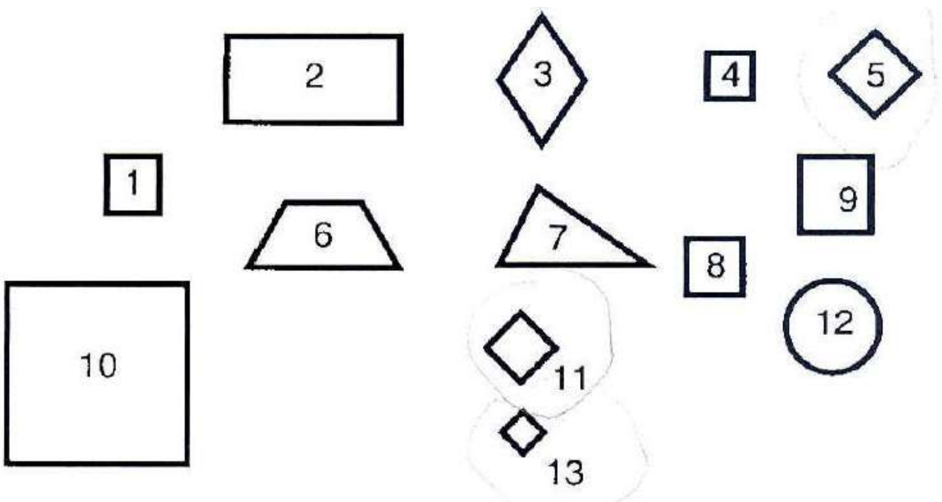


Figura 2 – Conjunto de figuras para identificação de quadrados B2 (Razel & Eylon, 1991)

Bia

A aluna escolheu como quadrados as figuras 1, 4, 8, 9, 10, 11 e 13 e pareceu associar o quadrado a uma figura com dois lados horizontais e dois lados verticais, aparentemente desprezando os quatro vértices que o constituem.

> Paula: Sim, é! Mas olha, por exemplo, esta figura *(figura 5)* será um quadrado?
>
> Bia: Não escolhi esse porque não é um quadrado. Olha *(vai buscar a figura identificada com o número 4 e, por comparação, refere)*, se eu rodar assim *(efetuando uma rotação de 45°)* fica como este *(figura identificada pelo número 4)*, e assim já podia ser um quadrado. Só é quadrado se for assim.

A posição das figuras aparece como fator relevante para a identificação de quadrados, podendo supor-se que o contacto da aluna com a forma quadrada terá sido, na maioria das vezes, subjacente uma invariância de posição. No entanto, identificou como quadrados as figuras 11 e 13, que estão na mesma posição que o quadrado identificado com a figura 5.

> Bia: Este *(figura identificada com o número 3)* não é um quadrado porque os lados são diferentes.
> Paula: Porque não escolheste a figura 2?
> Bia: Porque este *(agarrando na figura)* é um retângulo… é mais grande… mais comprido *(fazendo o gesto de esticar para os lados)*. O outro *(figura identificada com o número 4)* é mais… apertado… mais estreito.

A distinção entre retângulo e quadrado é feita a partir da ideia do primeiro apresentar dois lados mais compridos. A aluna distingue retângulo de quadrado numa perspetiva partitiva e não integradora, por ainda não ser capaz de identificar a propriedade comum a ambas as figuras, os quatro ângulos retos.

Fran

O aluno parece não dispor de um protótipo visual relativo à forma quadrada, pois, quando lhe foi pedido que identificasse os quadrados, selecionou as figuras com os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 e 11. Esta seleção aparece associada à ideia do atributo quatro vértices e a uma ideia mais global, de mancha topológica, que apenas disponibiliza a ideia da forma como figura fechada.

> Paula: Olhaste durante muito tempo para a figura com o número 3. Queres dizer-me porquê?
> Fran: Porque parece um triângulo.
> Paula: Por que te parece um triângulo?
> Fran: Porque tá assim, assim e depois assim *(passando com o dedo na fronteira e fazendo referência aos vértices)*.
> Paula: Mas então por que achaste, no final, que era um quadrado?
> Fran: Porque tá como a 6 e a 9 aqui nas pontas *(fazendo referência aos quatro vértices)*.

O atributo quatro vértices parece ser determinante na escolha da forma quadrada; contudo, a indecisão na escolha, associada à posição da figura, parece revelar que a posição ainda é um fator que cria insegurança na determinação das formas.

Rana

A Rana, ao identificar como quadrados as figuras 1, 4, 5, 8, 9, 10, 11 e 13, revela possuir uma forte imagem mental da forma quadrada, associada ao atributo quatro vértices. Para além disso, inconscientemente, também revela possuir um conhecimento intuitivo da igualdade dos lados no quadrado.

Rana: Estes, figuras identificadas anteriormente, são todos quadrados porque têm quatro biquinhos. Este tem quatro biquinhos mas é diferente *(figura com o número 6)*.
Paula: Por que dizes que é diferente?
[…]
Paula: E a figura com o número 2?
Rana: Se fosse mais assim, já era *(colocando a mão a meio para encurtar os lados mais compridos)*. Mas como é mais esticado, já não é.

Na escolha dos quadrados, para além do reconhecimento do atributo quatro vértices, parece ter sido muito importante a igual medida dos lados, pois as figuras 2 e 6 são colocadas de parte pelo facto de o comprimento dos lados não ser igual.

Identificação de triângulos

Esta tarefa foi apresentada com o objetivo de perceber se os alunos entrevistados identificavam a forma triangular e conhecer quais os saberes que revelavam sobre esta forma, nas vertentes triângulo equilátero, isósceles e escaleno, e o tipo de razões que apresentavam para justificar as suas escolhas.

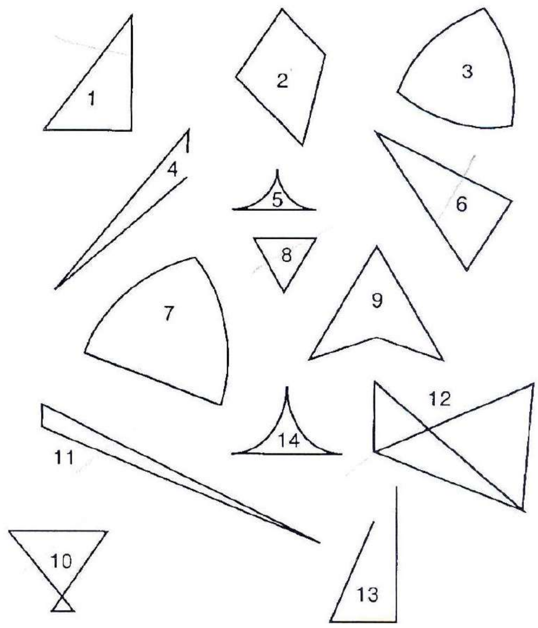


Figura 3 – Conjunto de figuras para identificação de triângulos B3
(Burger & Shaughnessy, 1986; Clements & Battista, 1992a)

Bia

A escolha de triângulos, para além de ter criado maior hesitação, levou a aluna à verbalização de atributos como o número de lados que constituem um triângulo.

Contudo, o protótipo visual construído para esta forma parece exercer uma maior influência, quando a aluna tem de decidir incluir ou não incluir a figura identificada com o número 13, no conjunto dos triângulos.

Paula: Por que escolheste esta figura? *(identificada com número 13)*
A aluna, agarrando na figura e contornando os lados da mesma com os dedos, responde:
Bia: Porque tem três lados mas… espera, este aqui não está completo!! Então, só tem dois lados e meio e, por isso, não deve ser um triângulo.
Professora: … é um triângulo?
Paula: Gostaria que fosses tu a decidir, Bia.
Bia: Está bem. Ele parece um triângulo mas só tem dois lados e meio… mas como parece, eu acho que é. Deixa estar.

Para além disso, parece ser possível afirmar, durante a decisão de incluir ou não incluir a figura com o número 11 no conjunto dos triângulos, que o protótipo visual de que a aluna dispõe corresponde ao do triângulo equilátero, na posição tradicional, onde existem dois vértices no lado inferior e um vértice no topo. Contudo, percebe-se que as ideias não estão suficientemente claras e provocam hesitações nas escolhas efetuadas.

Paula: Podemos passar a outro conjunto de figuras ou tens mais algum triângulo para me mostrar?
Bia: Não, estão todos. Os triângulos são estes.

Figura 4 – Triângulos identificados por Bia

Paula: Queres dizer que a figura com o número 11 não tem a forma de um triângulo?
Bia: Assim, não *(posição identificada na figura 5)*.

Em seguida, roda a figura e afirma:

Bia: Assim já é *(posição identificada na figura 6)* mas, para ser mesmo, também tinha de ser mais pequeno.
Paula: Então achas que é um triângulo ou não?
Bia: Não, não é.

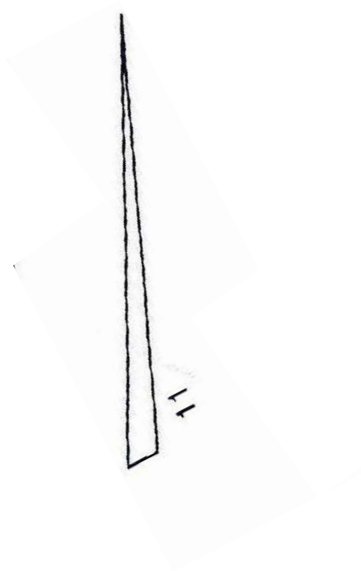


Figura 5 – Triângulo rodado pela aluna

Para além do protótipo visual do triângulo equilátero e da posição influenciarem a identificação de triângulos, também o afilamento da forma parece ter sido um constrangimento à sua identificação. Estes protótipos parecem comprometer a identificação das propriedades necessárias e suficientes para a identificação de triângulos, pois a aluna nunca refere o número de vértices ou de ângulos como uma propriedade importante da forma triangular.

Fran

Na identificação e escolha de triângulos parece haver um reconhecimento do atributo três vértices, que conduz toda a ação. No entanto, o cansaço e falta de concentração do aluno eram já bastante notórios, fazendo com que não fossem identificados outros atributos como linhas poligonais e linhas não poligonais, na figura com o número 5, ou outros triângulos em que poderiam ser destacados os três vértices.

Neste conjunto, o aluno apenas identifica como sendo triângulos as figuras 1, 5 e 11, referindo que são todos triângulos porque têm 3 bicos, assinalando-os com as pontas dos dedos.

> Paula: Não queres escolher outras figuras?
> Fran: Não, os triângulos que tu pediste estão todos aí.

Rana

A posição do triângulo assinalado com o número 8 parece não causar interferência na identificação da forma, dado ter sido um dos primeiros triângulos a identificar.

Contudo, ao identificar as figuras assinaladas com os números 4 e 13, revela não ter ainda definido a ideia de figura fechada como propriedade fundamental das figuras planas. Contudo, caso as mesmas figuras lhe tivessem sido apresentadas desenhadas em papel, talvez a aluna não as tivesse identificado com triângulos, dado a forma triangular ser sempre reconhecida partindo dos atributos número de vértices e número de lados.

Rana: Estes são todos triângulos porque têm três bicos. Os fininhos, são fininhos mas também são triângulos porque têm três biquinhos.
Paula: A figura com o número 7 será também um triângulo?
Rana: Este também é, mas é mais gordo.
Paula: Mas entra no grupo dos triângulos ou não?
Rana: Entra, mas é mais gordo.
Paula: E a figura com o número 14?
Rana: Também é *(indo de seguida retirar as figuras com os números 5 e 10)*. Mas o 10 só era se não tivesse aquela coisa *(fazendo o gesto de corte da parte assinalada na figura 6)*.

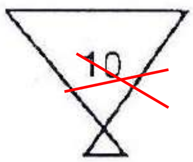


Figura 6 – Figura com corte

O 14 também é mas parece uma tenda de circo, em cima.

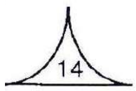


Figura 7 – Tenda de circo

Nas escolhas de Rana parecem estar presentes as propriedades número de vértices e número de lados.

Paula: A figura com o número 10 é um triângulo?
Rana: Este não é triângulo porque tem quatro lados.

Todavia, a aluna ainda não considera linhas não poligonais como um atributo apenas existente em figuras não poligonais, ao identificar as figuras 7 e 14 como triângulos, revelando, assim, a incapacidade de identificar os triângulos como polígonos.

Identificação de retângulos

A tarefa de identificação de retângulos foi apresentada com o objetivo de perceber se os alunos entrevistados identificavam retângulos e conhecer qual o entendimento que revelavam ter sobre esta forma e o tipo de justificações que apresentavam para provar as suas escolhas.

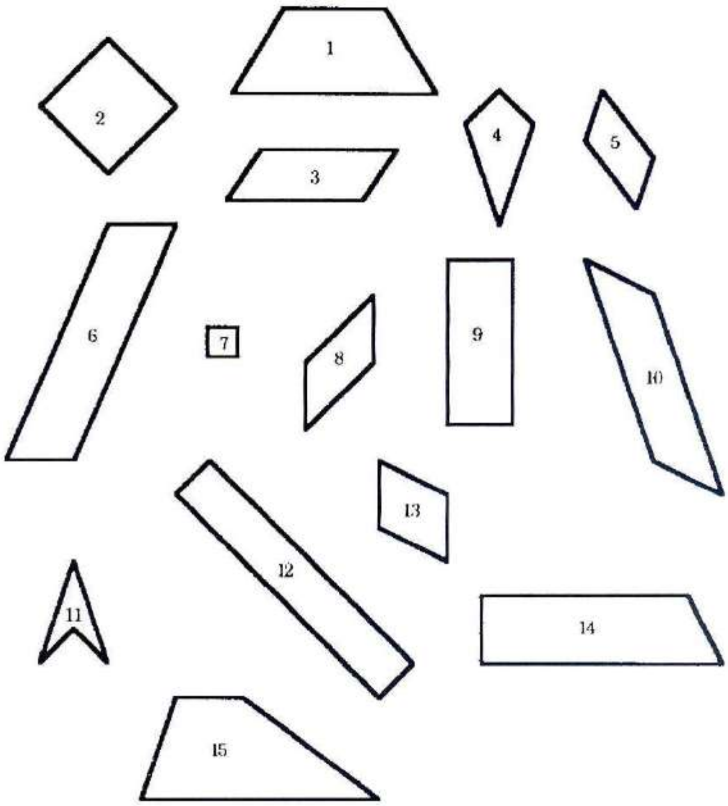


Figura 8 – Conjunto de figuras para identificação de retângulos F4 (Razel & Eylon, 1991)

Bia

As escolhas da aluna (figuras 6, 12 e 14) parecem ter subjacente um protótipo visual de retângulo que tem em conta a ideia de dois lados compridos e dois lados curtos opostos, sem interferência da propriedade necessária e suficiente para ser retângulo: quatro ângulos retos.

Para além disso, é ainda de salientar o reconhecimento do atributo número de lados e, mais uma vez, a necessidade de recorrer à comparação para justificação das opções.

> Paula: Por que escolheste estas figuras?
> Bia: Porque têm os mesmos lados.
> Paula: O que quer dizer "têm os mesmos lados"?
> Bia: Olha *(por comparação, agarrando nas figuras identificadas com os números 6 e 12 e justapondo lados com maior comprimento e lados com menor comprimento)*, estes dois lados são compridos e estes dois são curtos. As duas têm dois lados compridos e dois lados curtos.

A justificação de Bia, para a identificação dos retângulos, parece ser suportada pela ideia da igualdade da medida dos lados opostos e paralelos.

Fran

Perante conjunto de figuras para a identificação de retângulos, Fran puxa todas as figuras para si e diz:

> Fran: Estes já fizemos! Os quadrados já fizemos.
> Paula: Mas queres dizer-me se vês algum retângulo?
> Fran: Todos, só o 2 e o 7 é que são quadrados.
> Paula: Mas primeiro disseste que eram todos quadrados. Por que mudaste de ideias?
> Fran: Enganei-me, o 2 e o 7 são quadrados e os outros é que são todos retângulos.

Nas escolhas e afirmações do aluno, parecem não estar definidas ideias das formas quadradas e retangulares. Também na identificação dos retângulos, aparece apenas uma ideia mais global da forma como figura fechada, desprezando qualquer tipo de características ou atributos.

Rana

As figuras escolhidas (figuras 3, 6, 9, 10, 12, 14) apontam para a ideia de pertença a uma família de figuras de quatro lados, como o quadrado. No entanto, existe sempre presente a ideia de que os retângulos são diferentes porque têm lados mais compridos.

> Rana: Porque são assim… mais esticados *(vai passando os dedo na fronteira)*. Têm quatro lados mas são diferentes dos outros *(referindo-se aos quadrados)*.

Tal como Bia, Rana parece ter como referência para a identificação de retângulos, a medida igual dos lados opostos.

Considerações finais

Indo ao encontro de Clements et al. (1999), Bia articulou protótipos visuais com atributos conhecidos, para reconhecer as formas apresentadas, e utilizou repetidamente a comparação, para apresentar exemplos e contraexemplos das figuras por si identificadas.

Fran, em termos de reconhecimento da forma, parece ter apenas disponível o protótipo visual de redondo, dado em relação aos triângulos ter justificado as sua escolhas pela existência de três "bicos" e, relativamente à identificação de quadrados e retângulos, ter evidenciado que algumas propriedades topológicas, confirmando a ideia de Fisher (1965), não o deixaram chegar à identificação das figuras, por incapacidade de reconhecer propriedades específicas, pois quando lhe foi pedido que identificasse todos os retângulos puxou para si todas as figuras disponíveis e afirmou: "Estes, já fizemos!", referindo-se aos quadrados.

Rana pautou as suas escolhas, na maior parte das vezes, recorrendo a atributos das formas apresentadas, e poucas vezes recorreu à utilização de um protótipo visual, sendo exceção a identificação do círculo. Além disso, a posição das figuras pareceu não afetar a identificação das formas. Assim, as vivências e contactos informais com as formas, no dia-a-dia ou em momentos de brincadeira, de acordo com diferentes autores, como Burger e Shaughnessy (1986) e Fuys, Geddes, e Tischler (1988), parecem ser o fator impulsionador das escolhas efetuadas – ou seja, Rana, com menor tempo de permanência na escola e apresentando um pensamento mais intuitivo, conseguiu de forma mais frequente classificar as figuras apresentadas, utilizando propriedades e atributos conhecidos, enquanto Bia e Fran, com mais tempo de permanência na escola e mais expostos a questões formais, baseiam uma grande parte das suas escolhas em protótipos visuais, deixando-se influenciar pela posição das figuras ou propriedades topológicas.

Na perspetiva da identificação de quadrados e triângulos, os alunos apoiaram o seu conhecimento na articulação de protótipos visuais e atributos conhecidos, para reconhecerem as formas apresentadas, confirmando tanto a ideia de Clements et al. (1999), como a de Burger e Shaughnessy (1986) e Fuys, Geddes, e Tischler (1988).

Os alunos, durante a seleção de quadrados e retângulos, tendencionalmente, tal como Clements e Sarama (2007) referem, inclinaram-se para uma classificação do tipo partitivo.

Todos os alunos entrevistados, de acordo com Clements et al. (1999), na identificação dos círculos, revelaram conhecimentos sobre as figuras que se relacionam com protótipos visuais, sem considerarem atributos ou propriedades da forma.

Em síntese, este estudo exploratório confirma a ideia de Clements et al. (1999) e Sandhofer e Smith (1999) sobre as figuras mais fáceis de identificar, quando, também para estes três alunos, foram, por ordem de dificuldade, identificados o círculo, o quadrado, o retângulo e o triângulo.

Referências bibliográficas

Burger, W. F., & Shaughnessy J. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, *17*, 31-48.

Clements, D. H., Swaminathan, S., Hannibal, M. A. Z., & Sarama, J. (1999). Young children's concepts of shape. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*(2), 192-212.

Clements, D., & Sarama, J. (2007). The development of geometric and spatial thinking, students and learning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on Mathematics teaching learning* (pp. 489 -517). Reston, VA: NCTM.

De Villiers, M. (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the Learning of Mathemathics*, *14*(1), 11-18.

Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1988). The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education, Monograph 3*. *For the learning of mathematics*, *14*(1), 11-18.

O estudo de aula como processo de desenvolvimento profissional

Marisa Quaresma[1]*, João Pedro da Ponte*[2]*, Mónica Baptista*[3]*, Joana Mata-Pereira*[4]
[1,2,3,4]Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
[1]jpponte@ie.ulisboa.pt, [2]mq@campus.ul.pt, [3]mbaptista@ie.ulisboa.pt,
[4]joanamatapereira@campus.ul.pt

Resumo. *Esta comunicação tem por base um estudo de aula, um processo de formação e desenvolvimento profissional de professores de cunho colaborativo e centrado na prática letiva. Analisamos as aprendizagens dos professores sobre as dificuldades dos alunos e os processos de raciocínio (generalização e justificação), bem como o modo de os promover na sala de aula. A metodologia de investigação é qualitativa, com dados recolhidos através de um diário de bordo e gravação áudio das sessões. Os resultados mostram que os professores desenvolveram a sua capacidade de analisar dificuldades dos alunos e começaram a valorizar aspetos interessantes do trabalho destes. Os professores mostraram também começar a compreender como se pode analisar e promover o raciocínio dos alunos, nomeadamente durante as discussões coletivas.*

Abstract. *This communication is based on a lesson study, a collaborative process of professional development centered in teaching practice. We analyze the teachers' learning about students' difficulties and reasoning processes (generalization and justification), as well as ways to promote them in the classroom. The research methodology is qualitative, with data collected through a logbook and audio recording of sessions. The results show that teachers developed their ability to analyze students' difficulties at and began valuing interesting aspects of students' work. The teachers showed also to begin understanding how to analyze and promote students' reasoning, in particular during collective discussions.*

Palavras-chave: Desenvolvimento profissional; Formação de professores; Estudo de aula; Números racionais.

Introdução

O estudo de aula é um processo de desenvolvimento profissional de professores de cunho colaborativo e centrado na prática letiva. Teve a sua origem no Japão, difundiu-se através dos EUA (Stigler & Hiebert, 1999) e, nos últimos anos, tem vindo a ser amplamente usado em muitos países. Uma marca fundamental dos estudos de aula é a sua natureza reflexiva e colaborativa (Fernández, Cannon, & Chokshi, 2003; Perry & Lewis, 2009). Nesta atividade formativa, os professores trabalham em conjunto identificando dificuldades dos alunos, documentando-se sobre alternativas curriculares e preparando o que esperam vir a ser uma aula bem sucedida. Observam, depois, essa aula e analisam em que medida atinge os objetivos pretendidos e as dificuldades que se

Martinho, M. H., Tomás Ferreira, R. A., Boavida, A. M., & Menezes, L. (Eds.) (2014).
Atas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática. Braga: APM., pp. 311–325

manifestam. Trata-se, portanto, de um processo muito próximo de uma pequena investigação sobre a própria prática profissional, realizado em contexto colaborativo, e que é usualmente informado pelas orientações curriculares e pelos resultados de investigações relativas a um dado tema dos programas escolares.

Um estudo de aula pode proporcionar oportunidades para os professores participantes refletirem sobre as possibilidades de uma abordagem exploratória no ensino da Matemática. Esta abordagem procura levar os alunos a enfrentarem situações para as quais não possuem um método imediato de resolução, permitindo-lhes construir ou aprofundar a sua compreensão de conceitos, representações, procedimentos e outras ideias matemáticas. Na abordagem exploratória, os alunos são chamados a desempenhar um papel ativo na interpretação das questões propostas, na representação da informação dada e na conceção e concretização de estratégias de resolução que devem depois saber apresentar e justificar. Assim, a seleção das tarefas, a identificação dos aspetos do raciocínio a valorizar e o tipo de comunicação a desenvolver na sala de aula são desafios que se colocam na prática profissional dos professores que procuram concretizar esta abordagem e que podem ser objeto de reflexão num estudo de aula. Esta comunicação centra-se nas aprendizagens que os professores fazem num estudo de aula sobre as dificuldades dos alunos e os processos de raciocínio (generalização e justificação), bem como o modo de promover a aprendizagem e o raciocínio dos alunos na sala de aula durante a realização de discussões coletivas.

Aprendizagens dos professores em estudos de aula

O desenvolvimento profissional do professor refere-se aos processos de aprendizagem relacionados com o exercício da docência, envolve múltiplas etapas e, de algum modo, está sempre incompleto (Day, 2001; Ponte, 1998). Este processo decorre ao longo da vida profissional do professor e pressupõe investimento da sua parte em questões das mais diversas, incluindo as que se prendem diretamente com o ensino das disciplinas que lhe cabe ensinar. Marcelo (2009) refere-se ao desenvolvimento profissional do professor como "um processo individual e colectivo que se deve concretizar no local de trabalho do docente: a escola; e que contribui para o desenvolvimento das suas competências profissionais, através de experiências de índole diferente, tanto formais como informais" (p. 7).

Atendendo às suas fortes potencialidades como processo de desenvolvimento profissional de professores, as experiências de estudo de aula têm-se difundido em vários países, como o Brasil, EUA, Indonésia, Irlanda, Israel e Reino Unido, sofrendo, naturalmente, várias adaptações. Um exemplo é o trabalho desenvolvido por Perry e Lewis (2009) que apresenta um estudo de caso realizado num distrito dos EUA, onde desenvolve estudos de aula há mais de quatro anos e meio, contando com a participação de 63 professores. No final dos quatro anos, os participantes concluíram que os estudos de aula favoreciam: (i) o uso de tarefas que promovem o raciocínio dos alunos; (ii) a antecipação de dificuldades dos alunos; (iii) a discussão e comparação de respostas dadas pelos alunos às tarefas, incluindo análise de respostas incorretas; e (iv) e o uso de recolha de dados dos alunos para tomar decisões. Num outro estudo realizado nos EUA, Puchner e Taylor (2006) referem que a realização de estudos de aula levou os professores a reconhecerem que depende de si o envolvimento dos alunos na aula e a melhoraria da sua aprendizagem.

Muitos estudos têm sido feitos noutros países. Por exemplo, na Indonésia, Saito, Harun, Kubokic, e Tachibanad (2006) destacam a importância da colaboração, durante a realização de estudos de aula, entre professores e equipas do ensino superior. Indicam que, como resultado desta colaboração, os planos de aula dos professores passaram a ter em consideração os resultados da investigação e as aulas passaram a assumir um cariz mais exploratório, com a realização de discussão e trabalho em pequeno grupo. A partir desta experiência, os autores concluem que é possível mudar as tarefas que os professores propõem na sala de aula, a partir de estudos de aula colaborativos. Outra investigação realizada em Israel, de Robinson e Leikin (2012), centra-se numa professora que participou em três ciclos de estudo de aula, com mais quatro professores de Matemática. Esta investigação teve como foco duas aulas lecionadas pela professora, durante um dos ciclos de estudo de aula. Comparando as duas aulas lecionadas pela professora, as autoras consideram que a participação num ciclo de estudo de aula levou a importantes alterações na sala de aula, sobretudo na discussão e nas questões introduzidas pela professora. Consideram ainda que as fases de reflexão e replaneamento deram um forte contributo para a alteração das práticas da professora.

Estudos de aula realizados em Portugal (Baptista, Ponte, Costa, Velez, & Belchior, 2012; Ponte, Baptista, Velez, & Costa, 2012), com professores do 3.º e do 7.º anos, mostram que os professores podem realizar aprendizagens profissionais relativamente à seleção de tarefas a propor, à atenção a dar aos processos de raciocínio dos alunos e às suas dificuldades, bem como à comunicação na sala de aula, em especial à condução de discussões coletivas. Além disso, os resultados evidenciam possibilidades formativas dos estudos de aula no que se refere à sua visão da colaboração e reflexão profissional. O trabalho realizado mostra também que as aprendizagens que os professores realizam se relacionam estreitamente com a abordagem seguida na respetiva realização, nomeadamente durante fase de preparação.

Metodologia de investigação

Esta investigação é de natureza qualitativa com cunho interpretativo (Erickson, 1986), dado que se pretende conhecer os significados que os participantes de um processo formativo atribuem à experiência vivida. Resulta da realização de um estudo de aula em que os autores desta comunicação estão envolvidos no decorrer deste ano letivo, num agrupamento de escolas de Lisboa. Este estudo de aula tem origem num projeto desenvolvido pelo próprio agrupamento e para o qual a respetiva direção solicitou a colaboração do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa (IE) com o intuito de promover a formação dos professores de Matemática. A nossa proposta de realização de diversos estudos de aula foi prontamente aceite, tendo sido definido que um desses estudos seria realizado com professores do 5.º e do 6.º anos do agrupamento (Inês, Francisca, Luísa, Maria e Tânia). As professoras participantes foram selecionadas pela direção do agrupamento por lecionarem a disciplina de Matemática no 2.º ciclo, que também designou uma delas (Maria) como coordenadora do grupo. Em reunião prévia decidiu-se incidir sobre um tópico do 5.º ano, tendo em conta que a realização do estudo de aula, num ano em que está ser aplicado o programa de 2013, permitiria ajudar os professores a perceber melhor como lidar com este programa, em relação ao qual manifestavam bastantes receios. Assim, o estudo de aula envolve cinco professoras do 2.º ciclo, três das quais lecionam turmas de 5.º ano, sendo a dinamização das sessões habitualmente realizada por dois membros da equipa do IE (Joana e Marisa).

Tendo em vista ilustrar o trabalho realizado no estudo de aula e as aprendizagens dos professores, decorrentes desta atividade formativa, no que respeita às dificuldades dos alunos e aos seus processos de raciocínio (generalizações e justificações), bem como ao modo de os promover na sala de aula durante a realização de discussões coletivas, analisamos as sessões 2, 4 e 5, três das oito sessões previstas (Tabela 1). As sessões têm uma periodicidade aproximadamente quinzenal. A sessão 1 teve por objetivo conhecer o estudo de aula, as sessões 2 a 6 aprofundar o conhecimento sobre um tópico e preparar uma aula sobre esse tópico, a sessão 7 observar uma aula, e a sessão 8 refletir sobre a aula observada e sobre todo o processo do estudo de aula. Os dados aqui analisados foram recolhidos por observação participante e recolha documental através da elaboração de um diário de bordo (realizado por um membro da equipa) e de gravação áudio das sessões.

Tabela 1. As primeiras sessões do Estudo de Aula (marcadas a cinzento as sessões aqui analisadas)

Sessão	Pontos tratados	Propostas de trabalho para os professores
1	a) Apresentação do estudo de aula às professoras participantes; b) Planeamento e calendarização das sessões; c) Decisão do tópico específico a trabalhar durante o estudo de aula – Números racionais não negativos no 5.º ano.	
2	Reconhecimento geral do tópico.	a) Análise de documentos curriculares – programa, metas e planificação da escola; b) Resolução de tarefas sobre o tópico; c) Identificação de dificuldades dos alunos no tópico; d) Discussão de um artigo de investigação sobre o ensino-aprendizagem dos números racionais – discussão sobre os vários significados dos números racionais; e) Decisão sobre o conteúdo específico a trabalhar (comparação e ordenação de números racionais).
3	Elaboração de um diagnóstico dos conhecimentos dos alunos.	a) Definição dos objetivos para o diagnóstico – análise do programa de 2007 e do programa e metas de 2013; b) Elaboração e seleção de tarefas para o diagnóstico; c) Definição da forma de aplicação do diagnóstico.
4	1) Análise dos resultados do diagnóstico; 2) Reflexão sobre a natureza das tarefas; 3) Reflexão sobre o raciocínio dos alunos.	a) Partilha entre os professores dos resultados dos diagnósticos realizados em cada turma – cada professor indica: o que mais o surpreendeu na resolução dos alunos; as maiores dificuldades dos alunos e aquilo que os alunos já sabem e que pode ser usado como base para desenvolver novas aprendizagens; b) Análise de um conjunto de tarefas – identificação da natureza das tarefas, em que momentos podiam ser aplicadas e quais as suas vantagens; c) Análise de resoluções de alunos para identificar generalizações e justificações.

5	1) Conclusão da reflexão sobre o raciocínio; 2) Segmentos da aula – aula em 3 fases; 3) Seleção da tarefa a aplicar na aula observada; 4) Reflexão sobre a observação da aula.	a) Definição de casos possíveis de generalização na comparação e ordenação de números racionais; b) Análise de episódios de sala de aula e reflexão sobre o papel do professor na introdução da tarefa, no trabalho autónomo dos alunos e na discussão coletiva; c) Análise das propostas de tarefas apresentadas pelos professores.

Momentos de trabalho num estudo de aula

Identificação e análise de dificuldades dos alunos na aprendizagem dos racionais

Na sessão 2, a resolução de diversas tarefas matemáticas e a discussão das dificuldades dos alunos proporcionou uma viva discussão e envolveu bastante as professoras. Na verdade, este foi o ponto da sessão que demorou mais tempo e permitiu às professoras refletir em profundidade sobre as dificuldades dos alunos no trabalho com os números racionais. Maria assumiu um papel de coordenadora e impulsionadora do grupo, tentando levantar questões e convidar as restantes colegas a participar na discussão. Isso foi notório no caso da tarefa indicada na figura 1, em que começou por perguntar:

> Maria: Como é que abordavam isto? Isto é $\frac{3}{4}$ e agora como é que lhes pediam $\frac{1}{2}$? Como é que eles vão…?

A figura seguinte representa $\frac{3}{4}$ de uma tira de papel.

Representa agora, $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{3}$ e $\frac{3}{2}$ dessa tira.

Explica o teu raciocínio.

Figura 1. Tarefa analisada pelas professoras na sessão 2

Notou-se que era uma tarefa que as professoras não costumavam propor aos alunos e que tiveram que pensar elas próprias como resolver:

> Tânia: Primeiro tentar acrescentar…
> Inês: Divide-se esta parte…
> Marisa: Primeiro eles perceberem o que é que é então a…
> Professoras: [ao mesmo tempo] A unidade!

Tânia: Que isto não é uma unidade.

As professoras reconheceram que esta tarefa é difícil, requerendo aos alunos uma resolução com vários passos, o primeiro dos quais é a reconstrução da unidade. Depois de resolverem a tarefa, imaginando o que poderia ser uma resolução dos seus alunos, discutiram as suas possíveis dificuldades, indicando o que consideravam ser o erro mais comum:

Maria: Dividem logo em quatro.
Professoras: Pois, exatamente!
Tânia: E aí é porque ainda não sabem… Eles ainda não sabem a noção de… eles não têm a noção da fração como parte do todo.
Joana: É que muitas vezes eles trabalham ao contrário, ou seja, eles têm o todo e é para indicar uma parte, agora terem uma parte…
Marisa: E indicar o todo é um salto conceptual importante.
Luísa: Pois, pois.
Maria: Muito grande!

Maria referiu que os alunos teriam dificuldade em perceber que a tira apresentada não é a unidade e que, por isso, iriam começar por dividi-la em quatro partes iguais ao invés de a dividir em três e acrescentar $\frac{1}{4}$. Por sua vez, Tânia interpretou a sugestão de Maria à luz dos significados que as frações podem ter, referindo que os alunos ainda não têm consolidada a noção de fração no significado parte-todo e, por isso, têm grande dificuldade em reconstruir a unidade.

No final da sessão, as professoras conseguiram fazer um apanhado bastante completo das dificuldades na aprendizagem deste tópico, destacando: (1) marcação na reta numérica de frações com denominador diferente do número de divisões da reta; (2) compreensão de uma fração como representando um quociente; (3) compreensão do conceito de unidade – construção do todo e das partes; e (4) compreensão da relação entre uma parte e uma quantidade. Tendo por base este conjunto de dificuldades identificadas durante a resolução das tarefas, as professoras decidiram que o conteúdo específico da aula a observar seria a comparação e ordenação de números racionais, precisamente por ser um dos aspetos que mais dificuldades levanta aos alunos e por constituir um tópico que serve de base à compreensão de número racional.

Análise do raciocínio dos alunos: Identificação de justificações e generalizações

Na sessão 4 foram discutidos processos de raciocínio e analisados alguns exemplos de resoluções de alunos. A equipa do IE começou por fazer uma breve apresentação dos conceitos de generalização e justificação, dos quais as professoras se apropriaram com facilidade. Ao observar as resoluções dos alunos, Tânia e Inês identificam com facilidade generalizações e justificações. Assim, no caso da figura 2, Tânia identifica rapidamente que o aluno usou um contraexemplo para refutar uma afirmação e, por isso, está a fazer uma justificação:

Tânia: É mais uma justificação, ele vai arranjar um exemplo.

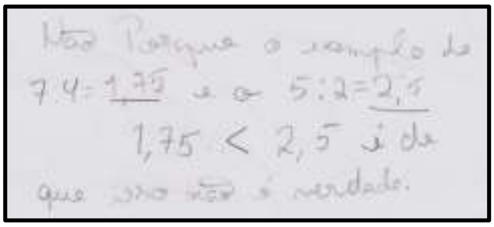


Figura 2. Justificação por contraexemplo

Ao analisar a resolução apresentada na figura 3 Inês identifica a justificação na alínea a):

Inês: Isto aqui é uma justificação.

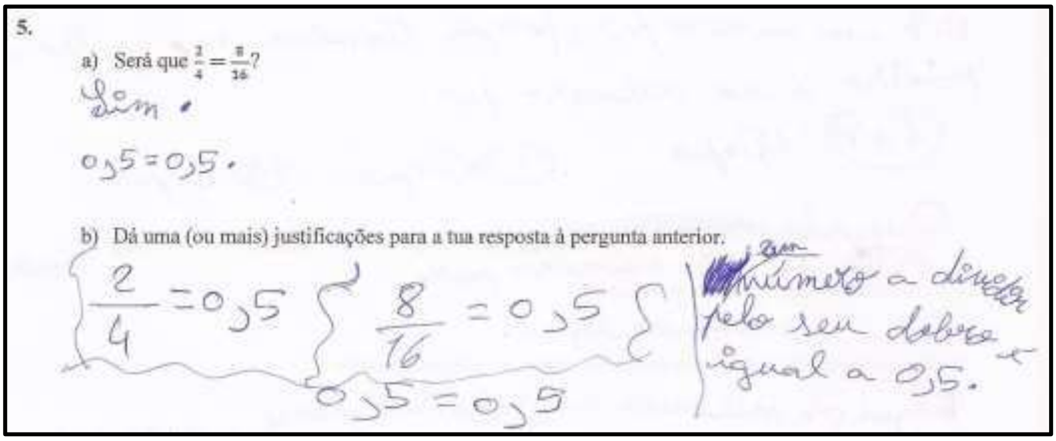


Figura 3. Justificação por mudança de representação e generalização

Inês reconhece que o aluno usou uma justificação válida ao mudar para outra representação para verificar a igualdade. Rapidamente Tânia passa à alínea b) e identifica a generalização:

Tânia: Mas depois na outra já têm aqui uma generalizaçãozinha.
Joana: Na outra tem uma generalizaçãozinha, sim. Que não é “zinha”.
Tânia: Já não é para todos.
Joana: Exatamente.

Perante esta descoberta e a forma como Tânia a enuncia, a equipa do IE decide valorizar, não só a sua descoberta, mas também o trabalho dos alunos, para salientar a dimensão deste trabalho e a importância de o analisarem nas suas salas de aula.

De seguida, Marisa desafia as professoras a refletirem sobre generalizações que se podem esperar na comparação e ordenação de números racionais:

> Luísa: Por acaso houve uma tarefa que eu encontrei num livro que tinha uma generalização. Eles, ao longo das várias questões que iam fazendo, depois encontravam a generalização da comparação.
>
> Marisa: A generalização da…?
>
> Luísa: Por exemplo, entre frações com o mesmo denominador em que aquela que representa o número maior é aquela que tem maior numerador. Portanto, era uma questão em que eles começavam por ter várias frações...
>
> Marisa: Então uma das coisas que podemos fazer com que eles generalizem é a regra para…
>
> Tânia: Para comparar frações com denominadores iguais e com numeradores iguais já são logo duas das que eles têm, e depois as frações unitárias eles também (Luísa: dão)
>
> . . .
>
> Luísa: Em que eles vão observando uma situação que se vai passando sempre e eles começam a perceber que aquilo é assim para todos os casos, não é?

Perante este desafio, Luísa recordou uma tarefa que tinha encontrado quando pesquisava tarefas para a aula que viria a ser observada, onde se pretendia que os alunos concluíssem a regra para a comparação de frações com o mesmo denominador. Tânia interveio de seguida para acrescentar que também é possível generalizar a regra para comparar frações com o mesmo numerador. Por fim, Luísa, usando a sua própria terminologia, reconheceu que se trata de uma generalização de caráter indutivo ao referir que os alunos observam vários casos particulares para fazerem a generalização.

Identificação de aspetos positivos nas resoluções dos alunos

Na sessão 3 foi elaborada uma tarefa de diagnóstico a aplicar pelas professoras a todos os alunos do 5.º ano. Assim, uma das propostas de trabalho da sessão 4 foi analisar os resultados desse diagnóstico. Procurando contrariar a tendência dos professores de se centrarem apenas nas dificuldades dos alunos, a equipa do IE começou por pedir às professoras que indicassem situações em que tinham ficado positivamente surpreendidas com o desempenho destes. Um dos membros da equipa do IE – Marisa – tinha ido assistir à aplicação do diagnóstico nas duas turmas de Maria e feito a análise dos resultados e, por isso, ofereceu-se para iniciar a discussão com a sua própria experiência:

> Achei muito interessante. Reconhecem as várias representações dos números racionais… surpreendeu-me que eles também conseguissem fazer muito bem a parte do 1/10. Não sei… Possivelmente já foi trabalhado… Como tinham a imagem, iam perceber que era 1 pintado em 10, no total, mas, depois, a conversão para decimal e para percentagem é que fiquei surpreendida que conseguissem fazer, porque os outros são frações de referência que eles às vezes, mesmo sem perceberem, estão habituados e fazem. Portanto, 1/4 é 0,25. Eles às vezes já têm esta coisa decorada. Mas no 1/10 era um bocadinho diferente e achei bastante interessante. Então agora falem-me dos vossos. Francisca?

Em resposta ao desafio lançado por Marisa, Francisca começa por referir um aspeto positivo, mas salienta logo de seguida diversas dificuldades no trabalho dos alunos:

> Em relação ao 5.º C os meninos pintaram com facilidade as frações, mas a representação em fração muitas vezes não a fizeram. Só leem metade, pronto. Depois, nesta da ligação [questão 3], onde eles tiveram mais dificuldade foi exatamente no 1/4 e no 1/8. Foi muito difícil para eles.

Desta forma, Marisa fez uma nova intervenção no sentido de reorientar a discussão para as surpresas positivas, o que leva Francisca a referir os aspetos que considerou muito significativos do trabalho dos alunos:

> Marisa: Se calhar fazíamos as surpresas primeiro e depois as dificuldades.
> Francisca: Surpresa, surpresa, foi no exercício 4: eles conseguiram facilmente chegar a 1/4 do chocolate. Eu achei giríssimo, porque já sabem fazer a conta [4/4 - 3/4 = 1/4]. Não estava à espera.

Tânia foi a última professora a apresentar as surpresas que teve no desempenho dos alunos. Teve mais facilidade em centrar-se apenas nestes aspetos e fez ainda uma interessante reflexão sobre as alterações introduzidas pelo programa de Matemática de 2007 e as consequências que isso trouxe para a prática dos professores:

> E é o facto de eles já representarem as frações equivalentes. Por exemplo, antigamente [antes do programa de 2007], quando eles chegavam aqui, nós tínhamos de começar por toda esta fase, porque eles sabiam o que era 1/4, 1/2, mas não passavam daí. Não, eles agora já sabem o que é 3/8, 3/5, portanto... esta primeira fase, eu acho que temos de passar isto à frente, porque temos de dar como adquirido, porque isto vê-se que já foi trabalhado.

Nesta intervenção, Tânia fez mesmo sugestões para o trabalho a realizar pelos professores pelo facto de os alunos já conhecerem frações equivalentes.

Verificamos que o discurso das professoras sobre os alunos tende a centrar-se de modo recorrente sobretudo nas suas dificuldades. No entanto, percebe-se como, com algum apoio, as professoras começam a identificar elementos interessantes do trabalho dos alunos.

Preparação da discussão coletiva

Um dos momentos mais importantes na sala de aula é a discussão coletiva das tarefas e, por isso, é importante que seja bem planeado. Com o objetivo de promover uma reflexão sobre este momento e de discutir elementos a ter em conta na preparação da aula a observar, na sessão 5, a equipa do IE desafiou as professoras a analisarem algumas resoluções de alunos e a sugerirem, de forma justificada, uma ordem pela qual podiam ser discutidas coletivamente. Após uma breve observação, Inês salienta o aspeto 'atrativo' de uma das resoluções: "A figura A (figura 4) é a que está mais atrativa e, depois, a legenda delas é parecida em todas...". Por sua vez, Luísa refere que escolhia a mesma resolução para começar, mas justifica a sua escolha com a existência de erros na resolução: "Eu acho que aquela que apresenta mais erros seria a figura A, e essa é aquela que eu escolhia…, não sei, digo eu". Francisca manifesta uma opinião idêntica. Depois de ouvirem estes argumentos, Inês e Tânia mudam de opinião e escolhem a figura B (figura 5) porque era a que tinha menos erros.

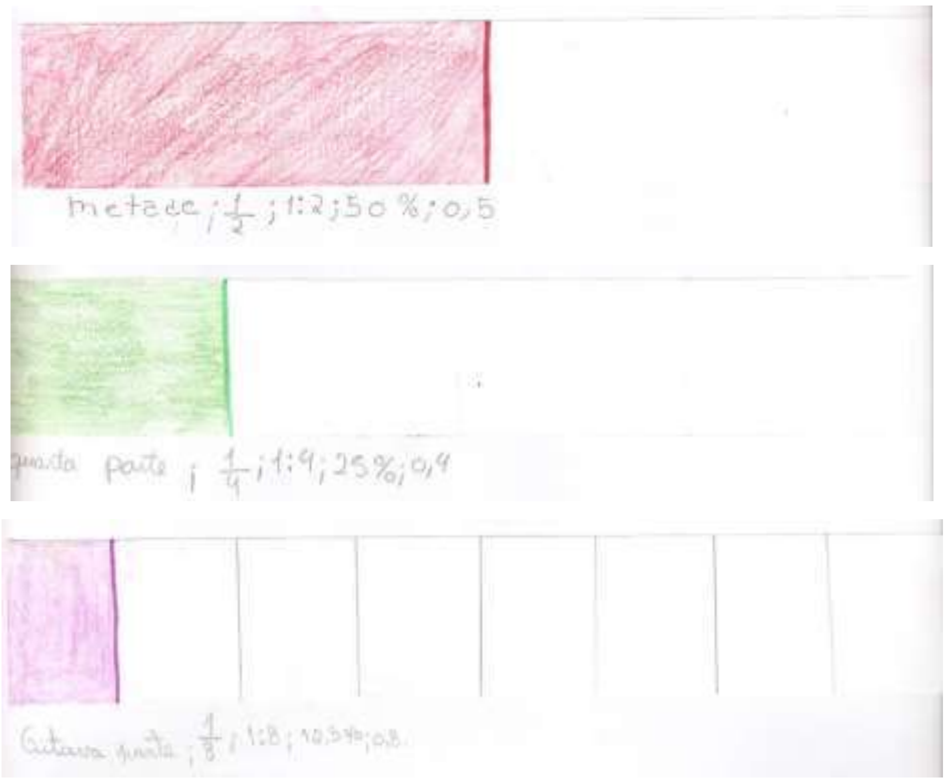


Figura 4. Resoluções dos alunos ("figura A") escolhida inicialmente por várias professoras

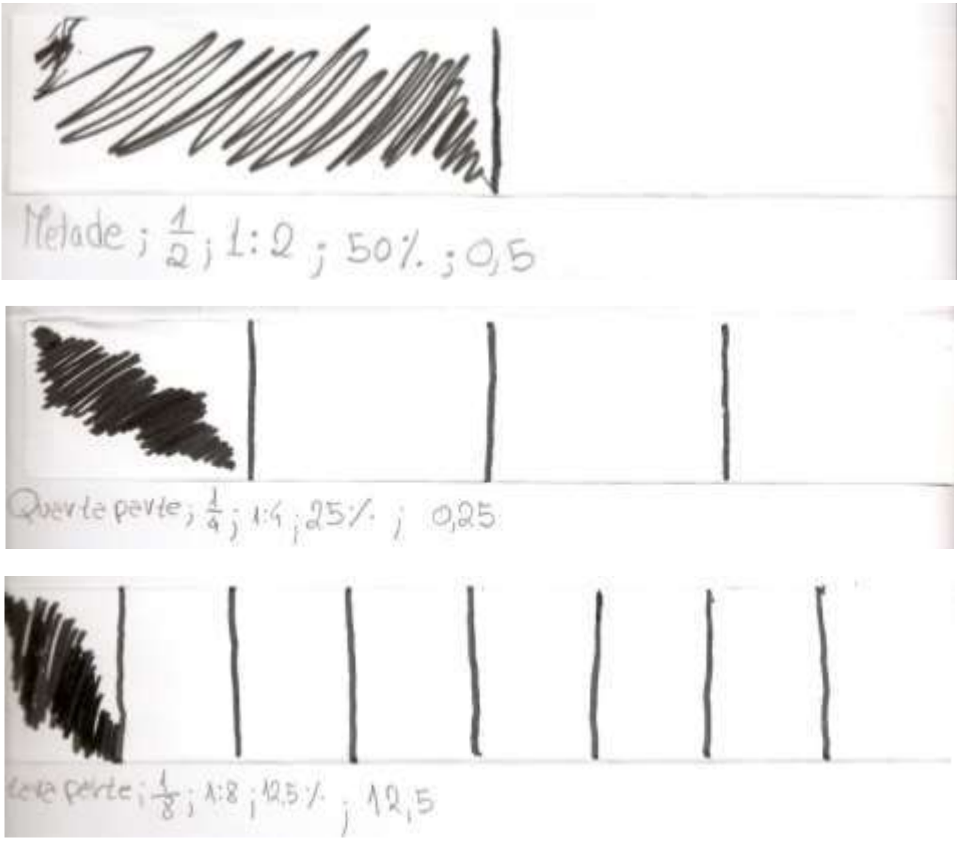


Figura 5. Resoluções dos alunos ("figura B") escolhida por Inês e Tânia

Depois de as professoras terem escolhido as resoluções por onde começavam a discussão coletiva e de terem dado alguns argumentos, Marisa desafiou-as a discutirem as escolhas feitas, uma vez que tinham fundamentos completamente opostos:

> Tânia: Ah! Porque é que escolheria o 3? Para já escolheríamos o 3 porque é o que está mais correto, matematicamente é o que está mais correto.
>
> Inês: Portanto, é o que está melhor a nível de apresentação e a nível da escrita também.

Por sua vez, Francisca e Luísa alertaram para a necessidade de dar atenção às resoluções que têm erros. Diz Francisca:

> Mas depois também se tem de chamar à atenção destas. Pegar pelos erros, na minha perspetiva, não é dizer que isto está errado, não é inferiorizar as crianças, não é nada disso. É tentar ver os erros e tentar esclarecer o maior número de alunos para aqueles erros, porque não são só estes que vão fazer este tipo de leitura, há muitos mais na turma que vão fazer exatamente o mesmo tipo de coisa. Se eu pegar logo no que está certo, quase que padronizo aquilo tudo e não tiro a ideia, a conceção, que lá está por detrás da tal metade, não é? Metade, metade, metade… aparece sempre a palavra metade, em vez de aparecer parte. E nesse sentido é tentar melhorar, não é dizer que aquilo está errado...

Na sequência, Tânia mostrou compreender os argumentos dados pelas colegas e destacou a importância das discussões coletivas. Referiu que também se podem apresentar várias resoluções, incluindo as totalmente corretas sem as avaliar. Desta forma, dá espaço aos alunos para avaliarem as resoluções dos colegas e, assim, proporcionar momentos de discussão entre os próprios alunos, onde não tem de ser o professor a autoridade:

> Colocamos isso no quadro (… faço isso muitas vezes) e se não dissermos nem que está correto, ou está, e perguntarmos quem é que tem igual e quem é que fez de maneira diferente então vamos ver... Então agora estamos nas percentagens, há imensas formas de eles fazerem com a proporcionalidade e chegam a um valor e eles começam: “Ah! Mas eu não fiz assim”, “Então como é que fizeste?”. Então vamos dividir o quadro e vamos pôr as maneiras de cada aluno; de cada aluno não, duas ou três, depende muito.

As professoras envolvem-se de uma forma muito ativa nesta discussão sobre a forma mais produtiva de discutir o trabalho dos alunos. Parecem convergir no reconhecimento do valor de haver uma verdadeira discussão do trabalho dos alunos e não apenas uma ‘correção’ através de um exemplo. Luísa e Francisca referem que essa discussão deve ter origem nos erros dos alunos, enquanto Tânia indica que essa discussão também pode surgir da necessidade de comparar várias resoluções. No final, o grupo aceitou as duas possibilidades, assumindo o interesse da discussão das várias resoluções e de os alunos compreenderem porque é que uma dada resolução está correta ou errada.

A concluir

Os momentos da formação aqui analisados indiciam diversas aprendizagens dos professores em vários momentos do estudo de aula. Assim, os professores dão indicações de ter desenvolvido a sua capacidade de analisar dificuldades dos alunos e perceberam a necessidade de propor tarefas que ponham à prova a compreensão de aspetos importantes da noção de número racional, como a reconstrução do todo a partir de uma parte. Nas primeiras sessões, o seu discurso sobre as resoluções dos alunos centrava-se essencialmente sobre as suas dificuldades, mas a partir de certa altura mostraram ser capazes de identificar e valorizar igualmente aspetos interessantes do trabalho dos alunos. Perceberam, também, como se pode analisar o raciocínio dos alunos, prestando especial atenção à realização de generalizações e justificações, e como se podem propor tarefas que criem oportunidade para a realização destes processos. Mostraram, ainda, começar a perceber o interesse de analisar coletivamente soluções erradas e como se pode tirar partido da comparação de diferentes estratégias de resolução usadas pelos alunos. Estes resultados estão na linha do que foi observado em estudos anteriores (e.g., Baptista, Ponte, Costa, Velez, & Belchior, 2012; Perry & Lewis, 2009; Ponte, Baptista, Velez, & Costa, 2012) e sugerem que este processo de desenvolvimento profissional é particularmente adequado para promover a aprendizagem dos professores sobre os processos de pensamento dos seus alunos.

O estudo de aula, permitindo combinar momentos de trabalho estruturado e trabalho exploratório dos professores, permitindo conjugar o conhecimento proveniente da investigação com o conhecimento experiencial dos professores, mostra constituir um promissor contexto para o desenvolvimento profissional dos professores sobre as questões relativas à aprendizagem dos alunos, e, indiretamente, também as questões relativas ao seu ensino. No entanto, a sua concretização requer um conjunto de condições bastante exigente, seja em contexto de formação contínua (Puchner & Taylor, 2006; Stigler & Hiebert, 1999), seja em contexto de formação inicial (Burroughs & Luebeck, 2010; Fernández, 2005). O conhecimento destas condições e da sua relação com os processos de trabalho usados nos estudos de aula e com as aprendizagens realizadas pelos professores constituem, portanto, matérias a aprofundar em futuras investigações.

Agradecimento

Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projeto "Práticas Profissionais dos Professores de Matemática" (contrato PTDC/CPECED/098931/2008).

Referências

Baptista, M., Ponte, J. P., Costa, E., Velez, I., & Belchior, M. (2012). Lesson study na formação de professores do 1.º ciclo do ensino básico. In *Actas do Seminário de Investigação em Educação Matemática XXIII* (pp. 11-30). Coimbra: APM.

Burroughs, E., & Luebeck, J. (2010). Pre-service teachers in mathematics lesson study. *The Montana Mathematics Enthusiast, 7*(2/3), 391-400.

Day, C. (2001). *Desenvolvimento profissional de professores: Os desafios da aprendizagem permanente*. Porto: Porto Editora.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of Research on Teaching* (pp. 119-161). New York, NY: Macmillan.

Fernández, C., Cannon, J., & Chokshi, S. (2003). A US-Japan lesson study collaboration reveals critical lenses for examining practice. *Teaching and Teacher Education, 19*, 171-185.

Fernández, M. L. (2005). Exploring "lesson study" in teacher preparation. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th PME Conference* (Vol. 2, pp. 305-310). Melbourne.

Marcelo, C. (2009). Desenvolvimento profissional docente: Passado e futuro. *Sísifo: Revista de Ciências da Educação, 8*, 7-22.

Perry, R., & Lewis, C. (2009). What is successful adaptation of lesson study in the US? *Journal Educational Change, 10*, 365-391.

Ponte, J. P. (1998). Da formação ao desenvolvimento profissional. In *Actas do ProfMat98* (pp. 27-44). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Baptista, M., Velez, I., & Costa, E. (2012). Aprendizagens profissionais dos professores de Matemática através dos estudos de aula. *Pesquisas em Formação de Professores na Educação Matemática, 5,* 7-24.

Puchner, L., & Taylor, A. (2006). Lesson study, collaboration and teacher efficacy: Stories from two school-based math lesson groups. *Teacher and Teaching Education, 22*, 922-934.

Robinson, N., & Leikin, R. (2012). One teacher, two lessons: The lesson study process. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *10*, 139-161.

Saito, E., Harun, I., Kubokic, I., & Tachibanad, H. (2006). Indonesian lesson study in practice: Case study of Indonesian mathematics and science teacher education project. *Journal of In-service Education, 32*(2), 171–184.

Stigler, J. W., & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom*. New York, NY: Free Press.

Estilos de Aprendizagem na Disciplina de Matemática em Alunos Portugueses do 10.º ano – Projeto de estudo

Miguel Figueiredo[1], *Henrique Manuel Guimarães*[2]
[1]Instituto de Educação – Universidade de Lisboa, mafigueiredo@campus.ul.pt
[2]Instituto de Educação – Universidade de Lisboa, hmguimaraes@ie.ul.pt

Resumo. *Esta comunicação apresenta um projeto de investigação em desenvolvimento no âmbito do doutoramento em Educação, na especialidade da Didática da Matemática, com os elementos principais do seu quadro teórico e os resultados preliminares de um estudo piloto já efectuado. O objetivo do estudo consiste na identificação das componentes que formam os estilos de aprendizagem da Matemática numa amostra de estudantes portugueses do 10.º ano e a sua relação com o desempenho escolar nesta disciplina. As componentes a considerar na composição de cada estilo de aprendizagem são definidas por quatro variáveis: estratégias de processamento, estratégias de regulação da aprendizagem, orientações motivacionais e crenças sobre a aprendizagem, de acordo com o modelo de regulação dos processos de aprendizagem proposto por Vermunt e Van Rijswijk (1988). O estudo, de natureza quantitativa, incidirá sobre uma amostra de alunos do 10.º ano, aos quais será submetido um questionário fechado, baseado no ILS (Inventory of Learning Styles) de Vermunt (1998), mas adaptado para alunos do ensino secundário e para a aprendizagem da Matemática. Os dados serão tratados através de análise correlacional, nomeadamente análise fatorial. Os resultados preliminares no estudo piloto realizado apontam para a confirmação dos estilos de aprendizagem definidos por Vermunt e para a pertinência da sua caracterização em função das quatro componentes do modelo de regulação dos processos de aprendizagem, acima referido.*

Abstract. *This document presents a research project, developed in the frame of a doctorate program in Didatics of Mathematics, explaining the core elements of its theoretical framework and some preliminary results of an already done pilot study. The object of the research is identifying the components that build the learning styles for Mathematics within a sample of 10th grade students and relating the styles to their performance. The components to be considered in the assembling of each learning style are defined through four variables: processing strategies, regulation strategies, motivational orientations and beliefs about learning, following the model of learning processes regulation proposed by Vermunt and Van Rijswijk (1988). Since those variables are composed by specific attitudes or behaviours in Maths learning, some information can also be obtained concerning those particular issues. The study is of a quantitative nature and will focus on a sample of 10th grade pupils who will answer a closed-answering questionnaire, based on Vermunt's (1998) ILS (Inventory of Learning Styles) and adapted to secondary school pupils and to mathematics learning. The obtained data will be subjected to correlation analysis, namely factorial analysis. The preliminar results of the pilot study*

Martinho, M. H., Tomás Ferreira, R. A., Boavida, A. M., & Menezes, L. (Eds.) (2014).
Atas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática. Braga: APM., pp. 327–341

point out to confirm the learning styles defined by Vermunt and to allow their description through the four components of the above mentioned learning process regulation model.

Palavras-chave: Estilos de aprendizagem; Matemática; 10.º ano.

Introdução

A motivação para o projeto é a de contribuir para que o ensino da Matemática possa ajudar os alunos a poderem afirmar: "eu gosto de Matemática" e "eu consigo aprender Matemática". Sendo observável que o sucesso na aprendizagem está fortemente ligado à forma como cada um aprende, o objetivo da investigação é a identificação das diversas componentes que formam os estilos de aprendizagem da Matemática numa amostra de estudantes portugueses do 10.º ano e a sua relação com o desempenho escolar nesta disciplina. O modelo a aplicar será o modelo construtivista de Vermunt (Vermunt & Van Rijswijk, 1988; Vermunt, 1996, 1998, 2005). Os autores analisaram outros modelos, nomeadamente da autoria de Kolb (Kolb,1984; Kolb & Kolb, 2005), Felder e Silverman (1988) e Honey e Mumford (1992), optando pelo modelo de Vermunt devido à forma como integra os diferentes conceitos ligados à aprendizagem e à fiabilidade do questionário construído com base no modelo.

O referido modelo é composto por quatro componentes, conforme a figura 1.

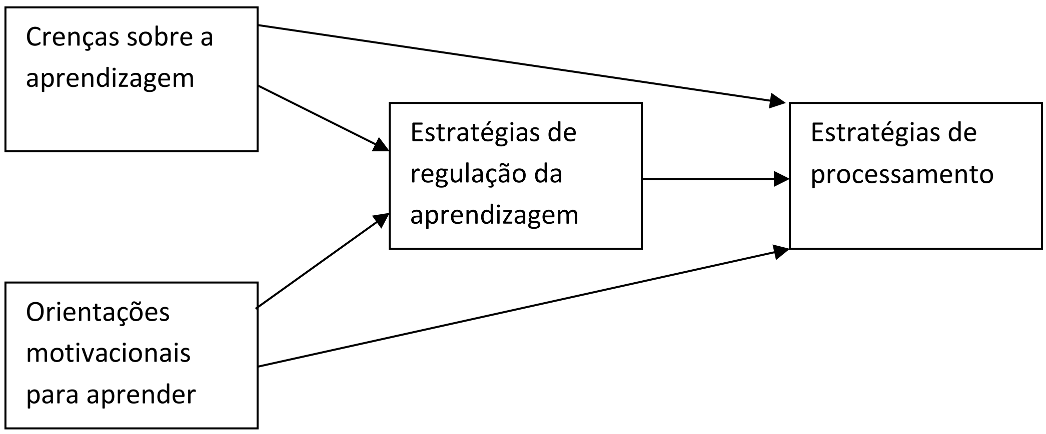


Figura 1. Modelo da regulação dos processos de aprendizagem construtiva (Vermunt, 1998)

As formas como estas componentes se agrupam entre si definem os quatro estilos de aprendizagem (Vermunt & Van Rijswijk, 1988; Vermunt, 1996, 1998, 2005): orientação para a reprodução, orientação para o significado, orientação para a aplicação e não-orientado. Havendo poucos trabalhos desenvolvidos em Portugal nesta temática e considerando o interesse em conhecer quais os estilos de aprendizagem dos alunos portugueses e como se estruturam ao nível das suas componentes, após a transição do ensino básico para o secundário, as questões do estudo são as seguintes:

Q1 – Que crenças sobre a aprendizagem da Matemática são predominantes em estudantes portugueses do 10.º ano?

Q2 – Quais são as orientações motivacionais para o estudo da Matemática em estudantes portugueses do 10.º ano?

Q3 – De que forma se processa a regulação da aprendizagem da Matemática por estudantes portugueses do 10.º ano?

Q4 – Quais são as estratégias de processamento cognitivo desenvolvidas por estudantes portugueses do 10.º ano na disciplina de Matemática?

Q5 – Que estilos de aprendizagem no âmbito da Matemática estão mais presentes em estudantes do 10.º ano?

Q6 – Que correlações existem entre o desempenho matemático e os estilos de aprendizagem encontrados ou entre o desempenho matemático e cada uma das quatro componentes do modelo de Vermunt, em estudantes portugueses do 10.º ano?

Quadro conceptual

Os estilos de aprendizagem, numa perspetiva socioconstrutivista (Goldin, 1989), que tomamos como paradigma, são evolutivos, estando a sua evolução dependente de fatores pessoais e de fatores contextuais. Apesar de o presente estudo não ser do tipo longitudinal e portanto se limitar a uma observação sincrónica dos estilos de aprendizagem, propõe-se um quadro conceptual onde surgem variáveis que, mesmo não sendo medidas no presente estudo, são consideradas no quadro por condicionarem as quatro componentes que definem o estilo de aprendizagem, conforme está esquematizado na figura 2. Desta forma, pretende-se contextualizar as questões do estudo, bem como deixar pistas para futuros estudos sobre a forma como os fatores que compõem os estilos de aprendizagem podem evoluir de acordo com diversas variáveis pessoais ou contextuais.

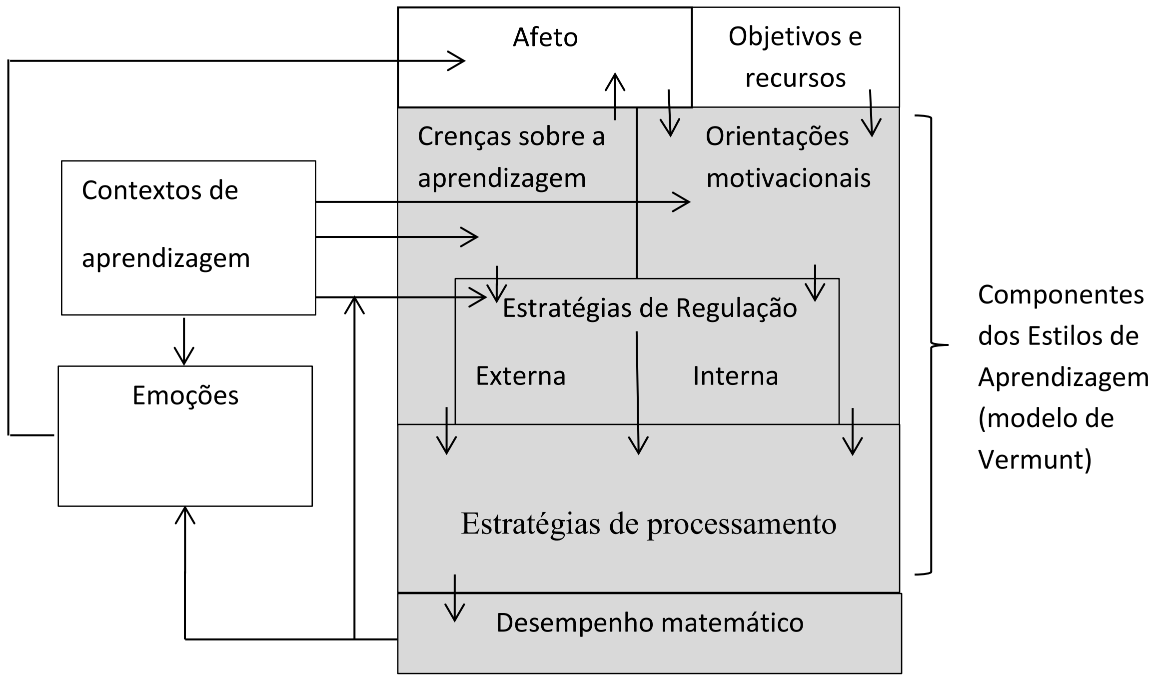


Figura 2. Quadro conceptual do estudo, com as variáveis a medir assinaladas a cinzento (esquema global de nossa autoria, contendo o modelo de Vermunt)

Crenças sobre a Aprendizagem e Orientações Motivacionais

No modelo de Vermunt e Van Rijswijk (1988) relativo aos estilos de aprendizagem, pressupõem-se cinco crenças principais dos alunos relativamente à aprendizagem:

- Tomada de conhecimento: a aprendizagem constitui uma absorção do conhecimento que é apresentado externamente, a qual se processa através da memorização, da recapitulação e da reprodução;

- Construção do conhecimento: a aprendizagem é tida como uma edificação do conhecimento e dos conceitos pelos estudantes, num processo em que o novo conhecimento se alicerça nos conhecimentos já aprendidos;

- Uso do conhecimento: a aprendizagem é vista como a aquisição de conhecimento utilizável, por via da concretização ou da personalização, ou seja, o conhecimento é construído numa base de utilidade pessoal;

- Ensino estimulante: a aprendizagem como decorrendo de um ensino que estimula o uso, pelos estudantes. de atividades de processamento dos conteúdos matemáticos e de regulação da forma de estudar;

- Aprendizagem cooperante: deve-se dar valor à realização de atividades de aprendizagem em grupos de alunos.

No que se refere a orientações motivacionais, é reconhecido que a motivação dos alunos depende das necessidades e objetivos (Hannula, 2006) e poderemos indicar como exemplo dessa ligação a pesquisa realizada por Hoyles (1982), na qual a investigadora observa que há alunos que estudam Matemática desejosos de a descobrir, outros que a tomam como um desafio às suas capacidades, outros apenas desejosos de obter soluções corretas, e outros apenas preocupados com as avaliações. Tais observações estão refletidas no modelo que irá ser utilizado na pesquisa sobre os estilos de aprendizagem (Vermunt & Van Rijswijk, 1988; Vermunt, 1996, 1998, 2005) e que está inserido no quadro conceptual da figura 2. O modelo considera os seguintes tipos de orientação motivacional:

- orientação para a certificação: a motivação do aluno para estudar consiste em ter as avaliações necessárias para a obtenção de um grau académico ou de um diploma;
- orientação para autodiagnóstico: o aluno estuda para mostrar a si próprio e aos outros que é capaz de atingir os objetivos curriculares;
- orientação vocacional: o aluno estuda para obter aptidões profissionais, que lhe permitam obter determinado tipo de emprego;
- interesse pessoal: o aluno estuda por gostar e ser curioso em relação às matérias em estudo e para se sentir enriquecido pessoalmente.
- orientação ambivalente: o aluno não tem uma atitude clara em relação ao estudo, hesitando em relação à área de estudo e às suas capacidades.

Estratégias de Regulação da Aprendizagem e Estratégias de Processamento Cognitivo

No modelo de Estilos de Aprendizagem a utilizar (Vermunt & Van Rijswijk, 1988; Vermunt, 1996, 1998, 2005), as estratégias de regulação dividem-se em três categorias:

- Regulação externa: o aluno deixa que o seu próprio processo de aprendizagem seja regulado por fonte externa como, por exemplo, o professor. Os objetivos, as formas de estudo e as questões colocadas não são geração do próprio aluno. Os autores distinguem ainda, no âmbito da regulação externa, a regulação dos processos e a regulação dos resultados da aprendizagem.

- Regulação interna: também designada por autorregulação, na qual o aluno define as suas próprias estratégias de processamento, e atua estabelecendo objetivos, planeando, monitorizando, corrigindo, avaliando e refletindo. Esta categoria é subdividida pelos autores em duas subcategorias: a regulação dos processos e dos resultados da aprendizagem e a regulação dos conteúdos da aprendizagem.

- Falta de regulação: não se trata propriamente de uma estratégia de regulação, mas sim da ausência de qualquer tipo de regulação, pelo que o aluno não sabe como poderá aprender.

Em relação ao processamento cognitivo, Vermunt (1998), na segunda versão do seu ILS (*Inventory of Learning Styles*), considera três categorias de estratégias:

- Processamento profundo: caracterizado por operações cognitivas de relacionamento e estruturação de objetos ou conceitos, bem como de apreciação crítica. Esta categoria gera ainda a subcategoria "relacionar e estruturar" e a subcategoria "processar criticamente".

- Processamento sequencial: assente na memorização e na análise elementar passo-a-passo. Esta categoria subdivide-se ainda em "memorizar e recapitular" e "analisar".

- Processamento concreto: focado nas matérias de utilidade prática, relaciona os respetivos conteúdos com as suas próprias experiências.

Na primeira versão (Vermunt & Van Rijswijk, 1988), os autores tinham utilizado os termos "aproximação profunda", "aproximação superficial" e "”aproximação elaborativa", respetivamente.

Estilos de aprendizagem

Uma das definições mais utilizadas de "estilo de aprendizagem" é a que foi elaborada por uma *task-force* da *NASSP* (*National Association of Secondary School Principals*), criada em 1979 para diagnosticar os estilos de aprendizagem nas escolas secundárias dos EUA:

> Estilo de aprendizagem é o conjunto de características dos domínios cognitivo, afectivo e fisiológico, que funcionam como indicadores relativamente estáveis de como um aluno percepciona o ambiente de aprendizagem, com ele interage e lhe responde (Keefe, 2001, p. 140).

O modelo que serve de base ao presente estudo, como referimos, assenta numa perspetiva construtivista (Vermunt & Van Rijswijk, 1988; Vermunt, 1996, 1998, 2005) e define os estilos de aprendizagem recorrendo a quatro componentes da aprendizagem: estratégias de processamento cognitivo, estratégias de regulação, perspetivas dos estudantes quanto à aprendizagem e orientações motivacionais. É a forma como estas componentes se agrupam que define cada um dos estilos de aprendizagem: orientação para a reprodução, orientação para o significado, orientação para a aplicação e não-orientado. Num dos poucos estudos em que foi aplicado o ILS (*Inventory of Learning Styles*) de Vermunt no domínio do ensino secundário, De Maeyer e Van Petegem (2003) levaram a cabo, na Bélgica, uma pesquisa na qual usaram o seguinte quadro analítico (Quadro 1).

Quadro 1 - Os estilos de aprendizagem e as respetivas componentes numa aplicação do modelo de Vermunt (Fonte: De Maeyer & Van Petegem, 2003)

ESTILO DE APRENDIZAGEM / COMPONENTES	ORIENTADO PARA O SIGNIFICADO	ORIENTADO PARA A REPRODUÇÃO	ORIENTADO PARA A APLICAÇÃO	NÃO-ORIENTADO
ESTRATÉGIAS DE PROCESSAMENTO COGNITIVO	Processamentos relacionais e críticos	Memorização e análise	Concretização e aplicação	Não especificáveis
ESTRATÉGIAS DE REGULAÇÃO DA APRENDIZAGEM	Autorregulação	Regulação externa	Mista (interna e externa)	Sem regulação
ORIENTAÇÕES MOTIVACIONAIS	Interesse pessoal	Certificação e realização de provas de avaliação	Ocupacional/laboral	Ambivalente
CRENÇAS SOBRE A APRENDIZAGEM	Construção do conhecimento	Absorção do conhecimento	Aplicação de conhecimentos	Ensino estimulado e trabalho de grupo

Também no ensino secundário, mas neste caso na sua variante profissional (Slaats, Lodewijks, & van der Sanden, 1999) utilizaram o modelo de Vermunt e detetaram diferenças significativas nos estilos de aprendizagem das diferentes áreas vocacionais. O instrumento utilizado foi o ILS-VLE, ou seja, o ILS adaptado para as escolas secundárias profissionais.

Em Portugal, um estudo sobre os estilos de aprendizagem no ensino superior (Rocha & Ventura, 2011) também obteve resultados consistentes com o modelo de Vermunt, numa amostra não-aleatória composta maioritariamente por alunos da Universidade Católica Portuguesa.

Opções metodológicas

Tendo em conta o objetivo e as questões de investigação estabelecidas, nomeadamente no que respeita à relação dos estilos de aprendizagem com as componentes do modelo de Vermunt e com o desempenho escolar, a estudar no universo dos alunos portugueses do Ensino Secundário, optou-se por um estudo quantitativo de análise correlacional, sendo a população-alvo constituída pelos alunos, de ambos os sexos, do 10.º ano, ou do 1.º ano do nível 4 do ensino profissional das escolas de Portugal continental. A escolha desta população-alvo reside no interesse em observar estudantes que se encontram perante um salto qualitativo na aprendizagem da Matemática e que tenham já uma presumível capacidade de interpretar devidamente as questões.

Para a constituição da amostra, consideram-se dois cenários alternativos: o primeiro será o de uma amostragem quasi-aleatória multi-etapas (duas etapas: sorteio das escolas secundárias; sorteio da turma em cada escola secundária); o segundo será o de uma amostragem de conveniência, portanto não-aleatória, por via dos contactos pessoais, tentando incluir vários extratos da população-alvo. A dimensão da amostra será calculada, em qualquer dos cenários, em função dos seguintes fatores: nível de confiança desejado, intervalos de confiança desejados e a máxima variância amostral detetada num estudo-piloto.

O instrumento de recolha de dados primários é um questionário de resposta fechada. Foi já efetuado um teste da fiabilidade, consistência e adequação ao público-alvo do questionário, junto de uma pequena amostra (duas turmas), cujos resultados preliminares apresentamos mais adiante. O questionário, que se pretende psicometricamente robusto, foi baseado no ILS (Vermunt, 1994) e adaptado, para fins do presente estudo, ao ensino secundário, bem como focado na disciplina da Matemática. Ou seja, o conjunto das variáveis e subvariáveis do ILS de Vermunt (1994) é utilizado como matriz para a elaboração do questionário a aplicar, no qual as questões foram concebidas, em termos comunicacionais, para um alvo constituído por alunos do ensino secundário, e, em termos de objeto, com orientação para a recolha de informação sobre as componentes dos estilos de aprendizagem, no âmbito da disciplina de Matemática.

Dado que a última questão do estudo procura obter resultados que possam associar em determinado grau os estilos de aprendizagem, ou as suas componentes, ao desempenho matemático dos alunos, optou-se por recolher três conjuntos de dados sobre o desempenho, a saber: os resultados do exame nacional de Matemática do 9.º ano; a média das notas já obtidas na disciplina, nos períodos ou nos módulos, no ano letivo corrente; e a própria autoavaliação dos alunos, esta como resposta a uma questão a adicionar ao questionário. Estes três conjuntos de dados serão tratados de forma independente na sua relação com as outras variáveis, dado que não faria qualquer sentido inventar uma avaliação composta.

O tratamento estatístico de dados incidirá principalmente na análise das correlações entre variáveis, incluindo análise fatorial.

Construção do questionário

Tendo em conta que o questionário deste estudo se destina ao ensino secundário, procurou-se uma solução de compromisso entre a fiabilidade das escalas e a dimensão do questionário, limitando-o a 20 escalas ou subescalas, cada uma com 4 questões, de acordo com o quadro 2. Apresentamos de seguida quatro exemplos das questões produzidas para o questionário, sendo dado um exemplo para cada componente a medir.

EP/PP/RE (49)
Perante um problema matemático, tento perceber como se relacionam os diversos dados do problema, antes de o começar a resolver.

Nunca ☐ Algumas vezes ☐ Muitas vezes ☐ Sempre ☐

ER/RE/PA (69)
Quando é apresentado um exercício ou um problema matemático para resolver em aula, espero primeiro que os meus colegas ou o professor mostrem como se faz.

Nunca ☐ Algumas vezes ☐ Muitas vezes ☐ Sempre ☐

OM/OAu (11)
Gosto de sentir a Matemática como um desafio a vencer.

Nunca ☐ Algumas vezes ☐ Muitas vezes ☐ Sempre ☐

CA/AC (47)
Quando discuto Matemática em grupo, fico com ideias mais claras sobre a matéria.

Nunca ☐ Algumas vezes ☐ Muitas vezes ☐ Sempre ☐

Quadro 2 - Escalas e subescalas do questionário

Componente	Escala	Subescala
Estratégias de Processamento (EP)	Processamento Profundo (PP)	Relacionar e Estruturar (RE)
		Processamento Crítico (PCR)
	Processamento Sequencial (PS)	Memorizar e Recapitular (MR)
		Analisar (A)
	Processamento Concretizante (PC)	
Estratégias de Regulação (ER)	Regulação interna (RI)	Processos e Resultados da Aprendizagem (PRA)
		Conteúdos da Aprendizagem (CA)
	Regulação Externa (RE)	Processos de Aprendizagem (PA)
		Resultados da Aprendizagem (RA)
	Falta de Regulação (FR)	
Orientações Motivacionais (OM)	Interesse Pessoal (IP)	
	Orientação para Certificação (OC)	
	Orientação para Autoteste (OAu)	
	Orientação Vocacional (OV)	
	Orientação Ambivalente (OAm)	
Crenças sobre a Aprendizagem (CA)	Tomada de Conhecimento (TC)	
	Construção do Conhecimento (CC)	
	Uso do Conhecimento (UC)	
	Educação Estimulante (EE)	
	Aprendizagem cooperante (AC)	

Resultados preliminares com o teste do questionário

O questionário foi submetido a duas turmas do 1.º ano do Ensino Profissional de nível 4 (10.º ano do Ensino Secundário), do polo Amadora-Centro da Escola Profissional Gustave Eiffel, uma do curso de Gestão e Programação de Sistemas Informáticos e outra do curso de Turismo. A amostra ficou composta por 50 alunos, de ambos os sexos.

Na determinação da fiabilidade do questionário através do parâmetro α de Cronbach (1951), utilizando o *software SPSS*, obteve-se α=0,881, o que revela uma boa consistência. No entanto, no que refere a cada uma das quatro componentes a medir, obtiveram-se dois resultados bastante aceitáveis (estratégias de processamento: α = 0,797; crenças sobre a aprendizagem: α = 0,789) e dois resultados fracos (estratégias de regulação: $\alpha = 0{,}539$; orientações motivacionais: $\alpha = 0{,}503$). Serão realizadas alterações ao questionário de forma a melhorar a fiabilidade de medida destas duas variáveis.

As observações que se seguem referem-se a resultados estatísticos obtidos na amostra atrás descrita e utilizada para teste do questionário, não sendo de forma alguma extrapoláveis para a população em estudo.

Efetuada uma análise fatorial, com vista à deteção dos fatores que agrupam variáveis fortemente correlacionadas entre si e que explicam a variância dos dados na amostra, não houve êxito na tentativa de convergir para poucos fatores de valor próprio superior a 1. O primeiro fator obtido explica 22% da variância da amostra e os seguintes explicam pequenas percentagens da variância. Ainda assim, considerando apenas os quatro primeiros fatores obtidos na análise, os quais explicam um total de 40% da variância, é possível observar uma correspondência entre os mesmos e os estilos de aprendizagem do modelo de Vermunt.

O primeiro desses fatores aponta para um estilo de aprendizagem orientado para o significado, fortemente associado ao gosto pela Matemática. Nota-se uma forte correlação positiva com as seguintes variáveis (correlações entre parêntesis):

- prazer em sentir a Matemática como um desafio (0,83);
- sentir-se pessoalmente enriquecido com a Matemática (0,74);
- gostar de Matemática (0,73);
- verificar se conseguiu fazer todos os problemas (0,73);
- perceber cada passo de resolução de um problema (0,72);
- descoberta pessoal de relação entre diferentes matérias (0,70);
- ver as avaliações como um desafio às capacidades (0,70);
- verificar se a solução de um problema faz sentido (0,69);
- quando erra, perceber a falha de raciocínio (0,69).

Coerentemente, este fator apresenta uma forte correlação negativa com a variável motivacional do estudo por obrigação (-0,67).

Explicando o estilo de orientação para o significado em termos das componentes do modelo aplicado, obtemos uma caracterização deste estilo pela autorregulação da aprendizagem, pelo uso de estratégias de processamento profundo, por uma orientação motivacional para o autoteste e pela crença da aprendizagem da matemática como uma construção do conhecimento.

O segundo fator aponta para um estilo de aprendizagem orientado para a reprodução, associado a muitas dificuldades em compreender. Verificam-se correlações positivas com:

- começar a resolver os problemas pelas partes mais fáceis sem ter decidido uma estratégia (0,61);
- dificuldade em acompanhar raciocínios dos colegas ou do professor (0,59);
- necessidade de apoio na aprendizagem (0,58);
- necessidade de reproduzir exemplos (0,57);
- espera por outros resolverem primeiro, para ver a resolução (0,54).

Este estilo aparece caracterizado por uma necessidade de regulação externa, por uma estratégia de processamento cognitivo sequencial, por uma orientação ambivalente e por uma crença da aprendizagem da Matemática como tomada de conhecimento.

O terceiro fator aparece essencialmente associado ao desinteresse pela aprendizagem da Matemática, apontando para um estilo de aprendizagem sem orientação. Observam-se correlações negativas com:

- desejo de uma profissão em que a Matemática seja útil (-0,51);
- dúvidas sobre o curso escolhido (-0,51).

Ainda em relação a esta variável, nota-se uma correlação positiva forte com a intervenção do aluno na aula apenas quando é interpelado (0,73).

Não vendo utilidade na aprendizagem da Matemática, a única motivação do aluno é a necessidade da disciplina na certificação do curso que escolheu.

O quarto fator parece apontar para um estilo de aprendizagem orientado para a aplicação, embora com uma tendência reprodutiva. Notam-se correlações positivas com:

- os problemas matemáticos só fazem sentido em situações reais (0,49);
- procura de problemas semelhantes para resolver da mesma forma (0,41);
- mais à vontade em resolver problemas de situações reais (0,40).

O estilo em causa define-se principalmente por uma estratégia de processamento cognitivo concretizante e pela crença de que a aprendizagem da Matemática só toma sentido com o uso do conhecimento alcançado.

Curiosamente, embora não configurando em concreto nenhum estilo de aprendizagem do modelo adotado neste estudo, os dois fatores seguintes pela ordem da variância explicada, cada um representando pouco mais de 3% da variabilidade dos dados recolhidos, estão fortemente relacionados com o processo cognitivo de memorização e com a regulação externa pelo professor, respetivamente, como se estas duas características constituíssem, cada uma delas, só por si, um estilo de aprendizagem específico.

A análise bivariada correlacional permitiu observar que, na contagem das correlações de valor absoluto superior a 0,50, a questão "gosto de sentir a Matemática como um desafio a vencer" é de longe a que surge mais correlacionada com outras questões, com 17 correlações. Tal aponta para um papel central da autoestima no relacionamento dos alunos com a aprendizagem da Matemática. De seguida surge o afeto manifesto pela Matemática, com 11 correlações. Note-se que as respostas a estas duas questões apresentam uma média amostral de cerca de 2,4, muito próxima do valor central da escala (2,5), com desvios-padrões amostrais de 1,14 e de 0,88, respetivamente, o que aponta para uma bipolaridade equilibrada da amostra ao nível da afetividade para com a Matemática.

No teste de igualdade de médias entre turmas, apenas cinco questões (em oitenta) apresentam médias significativamente diferentes, relacionadas com os momentos de resolução de problemas ou de avaliação por teste escrito.

No total da amostra e tendo em conta a escala de 1 a 4, a média amostral mais elevada (3,46) respeita à concordância com o papel do professor no encorajamento do aluno. A mais baixa (1,38) refere-se à escolha do curso, a qual, em geral, é assumida como bem efetuada. Aliás, as respostas a esta questão são também as menos dispersas, com um desvio-padrão amostral de 0,67. O estudo da Matemática por obrigação é o comportamento que apresenta um maior desvio-padrão amostral: 1,20.

Síntese conclusiva

Assim, e em síntese, no estudo preliminar realizado, os resultados obtidos apontam para estilos de aprendizagem diferenciáveis pela forma como se estruturam a partir das quatro componentes consideradas para esses estilos. O estilo de aprendizagem orientado para o significado, com uma forte associação ao gosto pela matemática, é o que surge melhor definido em termos das quatro componentes do modelo de regulação da aprendizagem e o que mais transparece da variabilidade dos dados obtidos no estudo piloto. Caracterizam-no a regulação interna da aprendizagem, as estratégias de processamento profundo, a orientação motivacional para o autoteste e a crença da aprendizagem da matemática como construção do conhecimento. O estilo de aprendizagem orientado para a reprodução surge marcadamente caracterizado por uma estratégia de processamento cognitivo sequencial e pela necessidade de regulação externa. No estilo orientado para a aplicação tem preponderância a influência da crença da aprendizagem da matemática como sendo essencialmente utilitária. Quanto ao estilo não-orientado, apenas se evidenciou a motivação para a certificação, traduzida, por um lado, pelo grau de certeza quanto ao curso escolhido, mas também pelo desinteresse quanto à matemática e à incompreensão quanto à necessidade da matemática para a certificação em causa.

Para além da identificação dos estilos de aprendizagem e da respetiva descrição, é também de salientar que os resultados apontam para um papel central da autoestima dos alunos na aprendizagem da matemática. Quanto à distribuição dos estilos de aprendizagem pela amostra, da análise de *clusters* efetuada resulta que 40% da amostra é predominantemente orientada para o significado, tal como também 40% para a reprodução. A maioria dos restantes inquiridos insere-se na categoria dos não-orientados.

Referências bibliográficas

Cronbach, L. (1951). Coefficient alpha and the internal structure of tests. *Psychometrika*, *16*(3), 297-334.

De Maeyer, S., & Van Petegem, P. (2008). *How an instrument for measuring learning styles can be used to evaluate an innovative policy*. Antwerp, Belgium: University of Antwerp.

Felder, R., & Silverman, L. (1988). Learning styles and teaching styles in engineering education. *Engineering Education*, *78*, 674-681.

Goldin, G. (1989). Constructivist epistemology and discovery learning in mathematics. *Proceedings of PME 13* (vol. 2, pp. 15-22). Paris, France: PME.

Hannula, M. S. (2006). Motivation in mathematics: Goals reflected in emotions. *Educational Studies in Mathematics*, *63*, 165-178.

Honey, P., & Mumford, A. (1992). *The manual of learning styles* (3rd ed.). Maidenhead, U.K.

Hoyles, C. (1982). The pupil’s view of mathematics learning. *Educational Studies in Mathematics*, *13*, 349-372.

Keefe, J. (2001). Assessment of learning style variables: The NASSP task force model. *Theory into Practice*, *24*(2), 138-144.

Kolb, A., & Kolb, D. (2005). *The Kolb learning style inventory – Version 3.1 – 2005 technical specifications*. Boston, U.S.A. and London, U.K.: Hay Group.

Kolb, D. (1984). *Experiential learning: Experience as the source of learning and development*. Englewood Cliffs, NJ, U.S.A.: Prentice-Hall.

Rocha, M., & Ventura, M. (2011). Vermunt's learning styles: Searching for portuguese college student's functioning. *Revista de Estilos de Aprendizaje*, *8*(8), 46-66.

Slaats, A., Lodewijks, H., & Van der Sanden, J. (1999). Learning styles in secondary vocational education: Disciplinary differences. *Learning and Instruction*, *9*, 475-492.

Vermunt J. (1994). *Scoring key for the Inventory of Learning Styles (ILS) in higher education – 120 item version*. The Nederlands: Tilburg University - Department of Educational Psychology.

Vermunt, J. (1996). Metacognitive, cognitive and affective aspects of learning styles and strategies: A phenomenographic analysis. *Higher Education*, *31*, 25-50.

Vermunt, J. (1998). The regulation of constructive learning processes. *British Journal of Educational Psychology*, *68*, 149-171.

Vermunt, J. (2005). Relations between student learning patterns and personal and contextual factors and academic performance. *Higher Education*, *49*, 205-234.

Vermunt, J., & Van Rijswijk, F. (1988). Analysis and development of students' skill in selfregulated learning. *Higher Education*, *17*, 647-682.

O conhecimento de futuros professores do 2.ºciclo sobre números racionais: O caso de Maria

Nádia Ferreira[1], *João Pedro da Ponte*[2]
[1]Instituto Superior de Ciências Educativas, Odivelas &
Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa,
nadiadferreira@gmail.com
[2]Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, jpponte@ie.ul.pt

Resumo. *O ensino e aprendizagem dos números racionais levanta dificuldades a alunos e professores. Esta comunicação apresenta resultados de um estudo de caso cujo objetivo é compreender o conhecimento de futuros professores de 2.º ciclo sobre o ensino e a aprendizagem dos números racionais no momento da sua prática supervisionada. Damos especial atenção às questões relativas à preparação da prática letiva como a seleção de tarefas e a antecipação da sua exploração. Os dados foram recolhidos das planificações das aulas, reflexões escritas e de entrevistas semiestruturadas. Os resultados evidenciam que a futura professora, na sua primeira experiência de prática supervisionada, mobilizou conhecimento do conteúdo (nem sempre de natureza conceptual) e conhecimento didático, nomeadamente sobre os alunos (dificuldades e estratégias possíveis na resolução de tarefas), as tarefas a propor e as questões a colocar. Além disso, reconhece que devido a esta antecipação, durante a sua prática letiva, mobilizou conhecimentos e melhorou a forma de explicitar as suas ações e as dos alunos.*

Abstract. *Teaching and learning rational numbers raises difficulties for students and teachers. This paper presents the results of a case study aimed at understanding the knowledge of future teachers (grades 5-6) on teaching and learning rational numbers at the practicum. We give special attention to matters relating to the preparation of teaching practice as the selection of tasks and the anticipation of students' and teachers' actions. Data were collected from lesson plans, written reflections and semi-structured interviews. The results show that the prospective teacher, in her first student teaching experience, mobilized content knowledge (not always of conceptual nature) and didactic knowledge, including knowledge about students (difficulties and possible strategies in solving tasks), tasks to propose and questions put to students. Furthermore, she recognizes that due to this anticipation, during her teaching practice, knowledge was mobilized and improved to explain her actions and students' actions.*

Palavras-chave*:* Prática letiva; Conhecimento profissional; Números racionais; Formação inicial.

Introdução

O conhecimento matemático e didático desenvolvido pelos futuros professores durante a sua formação inicial, de modo a realizar um ensino de qualidade para todos, constitui um campo de muitas dúvidas e controvérsias (Ball, Thames, & Phelps, 2008; Shulman, 1986, 1987; Silverman & Thompson, 2008). Em particular, é necessário perceber melhor que conhecimento de Matemática têm os futuros professores à entrada, durante e no final dos seus cursos de formação (Ponte & Chapman, 2008). Assim, consideramos importante compreender o conhecimento dos futuros professores no final da sua formação e no momento da sua prática supervisionada, assumindo nesse momento que o conhecimento do futuro professor é sujeito a circunstâncias que podem permitir a emersão de debilidades ou o seu reforço e desenvolvimento. Centramos a nossa atenção nos números racionais dado ser um tema matemático que levanta dificuldades na aprendizagem e desafia os professores a constituírem uma prática de cariz exploratório, promovendo uma aprendizagem significativa e de natureza conceptual (Lamon, 2006; Ma, 1999; NCTM, 2007).

Nesta comunicação apresentamos os resultados obtidos num estudo de caso único onde procuramos compreender o conhecimento de uma futura professora do 2.º ciclo sobre o ensino e a aprendizagem dos números racionais, a partir da sua prática supervisionada, analisando o conhecimento que manifesta e que reconhece como relevante para a prática letiva. Consideramos as seguintes questões: (i) que conhecimento mobiliza na sua prática letiva quando seleciona tarefas e antecipa a sua exploração?; (ii) que dificuldades se manifestam na planificação da prática letiva no ensino dos números racionais?; (iii) como ultrapassa tais dificuldades?

O conhecimento do futuro professor para ensinar números racionais no 2.º ciclo

O conhecimento do professor pode ser considerado sob distintas perspetivas, podendo considerar-se que o conhecimento do professor se constitui essencialmente no conhecimento matemático e didático (Ball, Thames, & Phelps, 2008; Shulman, 1986; Silverman & Thompson, 2008). Em especial, é importante analisar a natureza do conhecimento envolvido e compreender como é mobilizado quando o professor ensina (Ponte & Chapman, 2008).

Relativamente ao conhecimento de Matemática para ensinar, Ma (1999) refere que não basta ter o conhecimento sobre os tópicos a ensinar, é necessário que os professores estejam conscientes da rede de ligações que se constituem entre os tópicos e como se estabelecem estas redes. A falta deste conhecimento leva a uma abordagem essencialmente processual, centrada, portanto, na mecanização. Por exemplo, práticas que enfatizam os processos (para multiplicar números racionais na forma de fração basta multiplicar numeradores e denominadores), sem explorar os diversos significados das operações. Mesmo quando o professor acredita que lhe cumpre ensinar Matemática de forma a promover a compreensão, a sua ação fica limitada pelo tipo de conhecimento que detém. Deste modo, torna-se impossível o estabelecimento de conexões entre conceitos e a construção do conhecimento de forma compreensiva (Ma, 1999).

Um professor que não sabe não pode ensinar, mas um professor que não sabe como ensinar dificilmente promove um processo de ensino-aprendizagem com qualidade. É importante que o professor saiba como transformar o seu conhecimento em conhecimento para os alunos, como os apoiar, identificar o conhecimento que devem aprender, as suas dificuldades quando aprendem e as orientações curriculares para o ensino de um conteúdo (Shulman, 1986). Por exemplo, é importante que saiba que pode introduzir a multiplicação de racionais partindo de situações como a simplificação de adições sucessivas de um número racional representado por uma fração. Também é importante que os professores sejam capazes de antecipar os erros e equívocos comuns dos alunos, preverem resoluções dos alunos em tarefas específicas e, ainda, o que estes podem considerar desafiante e interessante ou, pelo contrário, o que pode ser confuso. Associado aos números racionais corresponde, por exemplo, a reconhecer que muitos alunos, quando somam números racionais na forma de fração, adicionam numeradores e denominadores, ignorando que devem somar partes iguais da unidade, tendo para o efeito que substituir as frações dadas por frações com o mesmo denominador (Norton, McCloskey, & Hudson, 2011). Os professores também têm que ser capazes de sequenciar tópicos estabelecendo um percurso de aprendizagem, reconhecendo os prós e contras da utilização de determinadas representações no processo de ensino-aprendizagem, e saber aproveitar para questões matemáticas as estratégias dos alunos estabelecendo uma sequência de ensino, ou seja, reconhecer as ações dos professores que influenciam as oportunidades de aprendizagem (Scherrer & Stein, 2012). Relativamente aos números racionais, é importante saber como equacionam a sua exploração a par das várias representações dos racionais (fração, numeral decimal, percentagem), permitindo que os seus alunos tenham uma compreensão global do conjunto numérico ou a importância da exploração das representações pictóricas na concretização das operações. Finalmente, é importante que reconheçam as características de determinadas abordagens, identificando quais os princípios do ensino destas e dos documentos curriculares (Alsawaie & Alghazo, 2010).

Silverman e Thompson (2008) propõem um quadro teórico para investigar o conhecimento e seu desenvolvimento, na prática, apresentando três ideias fundamentais: i) *o modelo transformativo*; ii) *desenvolvimento da compreensão chave* (*key development understanding* - KDU); iii) *abstração reflexiva* (*reflective abstraction*). Para analisar o desenvolvimento do conhecimento para ensinar Matemática, consideram que os conhecimentos matemático e didático não são independentes. Assim, começam por partir do *modelo transformativo*, onde se propõem experiências que permitam, aos professores, oportunidades para ampliar, integrando, o conhecimento matemático e didático de forma a criar novo conhecimento. A segunda ideia é o *desenvolvimento da compreensão-chave*, onde os indivíduos conseguem resolver uma variedade de problemas direta e indiretamente relacionados, em consequência da sua compreensão das ideias-chave. Contudo, esta capacidade pode não ser poderosa pedagogicamente. Assim, na sua perspetiva, desenvolver o conhecimento de Matemática para ensinar envolve a transformação do seu KDU sobre um determinado conceito matemático compreendendo dois aspetos: i) Como é que o seu KDU pode potenciar a aprendizagem nos seus alunos; ii) quais as ações que o professor tem que realizar para apoiar o desenvolvimento dos alunos e as razões pelas quais as suas ações podem resultar. Finalmente, a terceira ideia é a de *abstração reflexiva*, como um processo pelo qual novas e mais avançadas conceções se desenvolvem partindo das conceções existentes, envolvendo a generalização de ideias e ações coordenadas de modo a desenvolver novas estruturas cognitivas no contexto da educação matemática dos professores. Contudo, o facto de existir transformação do conhecimento não implica necessariamente que tenha efeitos no ensino destes professores. Para tal é necessário que estes conceptualizem pedagogicamente a Matemática, para depois tomarem consciência do seu desenvolvimento conceptual, transformando o conhecimento em conhecimento pedagogicamente poderoso.

Planificar: A antecipação da prática letiva

A prática letiva do professor pode ser caraterizada por dois aspetos fundamentais: as tarefas propostas aos alunos e a comunicação que se estabelece na sala de aula (Ponte, Quaresma, & Branco 2012). No que respeita às tarefas, o professor pode optar por propor exercícios ou por tarefas mais desafiantes como tarefas exploratórias, problemas e investigações, nas quais os alunos têm que conceber e concretizar estratégias de resolução a partir dos seus conhecimentos prévios (Ponte, 2005). A comunicação que se estabelece na sala de aula pode assumir um caráter sobretudo unívoco ou dialógico, dependendo do maior ou menor espaço dado ao professor ou aos alunos e ao do tipo de questões colocadas (inquirição, focalização ou confirmação) (Ponte, Quaresma, & Branco 2012).

A antecipação da atividade em sala de aula é fundamental, uma vez que o professor tem que transformar o conhecimento, preparando o que vai ensinar (analisando criticamente materiais, artigos e documentos curriculares), fazendo uso do seu reportório de representações e selecionando as ideias que considera importantes para o ensino do conteúdo adaptando-o às características do(s) seu(s) aluno(s) (Shulman, 1987). Quando o professor antecipa a atividade na sala de aula tem de prever explicações que possam apoiar as aprendizagens dos alunos. Note-se que uma boa explicação pode eliminar ideias, significados e processos, assim como promover modos de pensar e trabalhar nesta disciplina, estabelecendo normas e uma cultura de sala de aula. Assim, realizar uma explicação acarreta o uso de representações como ferramentas e associa quatro fatores: conhecimento sobre o conteúdo, reflexão ativa e intencional sobre a prática e a criação de imagens (Charalambous, Hill, & Ball, 2011). A prática de ensino é complexa e exige do professor um conhecimento de natureza conceptual e profundo (Ponte & Chapman, 2008), exigindo uma antecipação cuidada e pormenorizada (Ponte, 2005).

Metodologia

Esta comunicação emerge de um estudo piloto (caso único) de um estudo mais alargado que assume uma abordagem qualitativa e interpretativa (Erickson, 1986), seguindo uma metodologia de estudo de caso (Stake, 1995). Esta opção prende-se com a importância dada aos processos e significados na ação de uma futura professora quando leciona três aulas sobre números racionais a uma turma do 6.º ano. Maria está no ensino superior pelo regime “maiores de 23” e teve Matemática até ao 9.ºano. Reflete com facilidade, sem receio de explicitar as suas dificuldades. Afirma que as vai conseguir ultrapassar investindo mais e lendo literatura sobre o ensino e aprendizagem dos números racionais. Refere que as experiências vividas na formação inicial contribuíram para o seu conhecimento da Matemática e da sua didática. Acredita num ensino-aprendizagem por compreensão porque o ensino a que foi sujeita ao longo da sua escolaridade não a ajudou a ter gosto pela disciplina e a compreender o que fazia, apesar de ter resultados satisfatórios e bons. Já conhece a turma e já interagiu informalmente coma professora cooperante.

No âmbito da disciplina de Didática da Matemática, propôs-se a Maria a planificação e realização de três aulas sobre números racionais na sua prática supervisionada. Antes de se iniciar a recolha de dados, Maria observou uma aula e definiu com a professora cooperante os tópicos que iria lecionar. Ficou definido que as professoras iriam intercalar a sua ação, num total de seis aulas sobre números racionais, das quais três seriam lecionadas por Maria. Também ficou acordado que seria esta a introduzir os conceitos e que a professora cooperante concretizaria as aulas de consolidação.

Para o estudo de caso, e especificamente para esta comunicação, foram recolhidos e analisados dados das entrevistas semiestruturadas realizadas e todos os documentos produzidos por Maria (planificações e reflexões). As entrevistas foram transcritas na totalidade sendo analisadas através de análise de conteúdo com base em categorias de análise que emergiram da revisão de literatura e dos dados entretanto recolhidos (Bardin, 1977). A análise assume um cunho descritivo, procurando caracterizar diferentes momentos da prática letiva de Maria e evidenciar o seu conhecimento desta na prática.

Preparar a prática letiva, selecionando tarefas e antecipando a sua exploração

Reorganizar o conhecimento para antecipar a prática letiva

Na primeira reunião de preparação da lecionação, não foram facultadas planificações a Maria, mas a docente titular deu indicação do manual adotado como matriz para a preparação das aulas. Foi sugerido que usasse as tarefas propostas pelo manual e que trabalhasse determinados conteúdos. Maria afirma que parte para a planificação sem orientação relativa à estrutura a utilizar, mas parece conhecer os aspetos fundamentais a incluir.

De modo a planificar cada aula, consultou o programa de Matemática de 2007 e “vi os tópicos, vi tudo, sempre apoiada no que estava no livro de Matemática” (MEAA1). Também tinha em conta as aprendizagens prévias dos alunos, os objetivos para cada aula, e mobilizava os conhecimentos sobre como antecipar a sua prática, que iria adquirindo a cada experiência.

Para a antecipação das suas aulas, Maria – o que nem sempre está evidente nas suas planificações – sentia necessidade de antecipar resoluções e pensava, quando possível, que representações simbólicas e pictóricas podiam apoiar a exploração das tarefas. Ainda antecipava diálogos e como orquestrar as estratégias de resolução.

Seleção das tarefas a propor

Um dos aspetos relevantes na antecipação da prática era a seleção das tarefas a propor aos alunos. Maria desde o primeiro momento que considerou importante a proposta de tarefas desafiantes. Assim, pretendia introduzir os conceitos com uma tarefa exploratória porque "quando nós conseguimos concretizar a Matemática (…) conseguimos perceber muito mais" (MEAA1).

No entanto, a professora cooperante alertou que Maria teria que utilizar o manual e que teria que se "apoiar sempre nos exemplos do manual. Como o manual não tem esse tipo de exemplos, então não convinha dar" (MEAA1). Assim, nas três aulas, Maria optou por tarefas do manual. Nas primeiras duas aulas propôs apenas "exercícios" e na última aula as tarefas do manual eram " problemas, usando a multiplicação" (MEAA3). Assim, na última aula Maria pôde mobilizar mais o seu conhecimento didático, tendo apresentado tarefas mais desafiantes e pela ordem que é aconselhada pela "brochura [Monteiro & Pinto, 2009] (…) não segui a ordem como eles têm no manual!" (MEAA3). Porque explorou tarefas mais complexas, sentiu-se desafiada a fazer uma antecipação de resoluções e dos possíveis erros e dificuldades dos alunos.

Para além do tipo de tarefas a propor, Maria também teve que negociar os números envolvidos nos exercícios, o que trouxe consequências à abordagem que desejava concretizar. Na primeira aula, Maria deveria trabalhar as propriedades da operação adição. Nas aulas de Didática da Matemática foi aconselhada a estabelecer, no início de cada aula, uma rotina de cálculo mental que estivesse relacionada com os conceitos a trabalhar e, no estágio do ano letivo anterior, observou essa prática constatando as suas potencialidades. Assim, preparou quatro expressões com números racionais para resolver por cálculo mental de modo a discutir as propriedades comutativa, associativa e o elemento neutro da adição (figura1).

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{2}=\frac{5}{2}+? \quad \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}=1+? \quad 0{,}3+\frac{9}{10}=0{,}9+? \quad \left(0{,}3+\frac{2}{5}\right)+\frac{3}{5}=0{,}3+?$$

Figura1. Tarefa de cálculo

Quando apresentou a sua planificação à professora cooperante, esta fez apenas sugestões de alteração às expressões de cálculo mental, devendo colocar denominadores iguais e usar unicamente a representação fracionária. Maria, sobre a sugestão, considerou que algumas questões

> não vão ser desenvolvidas, porque o denominador é sempre o mesmo, eles nem vão ter de pensar na questão dos denominadores … se estão ou não estão iguais, eles já estão iguais e pronto. (…) [assim não têm que pensar] Eu vou ter de arranjar o mínimo múltiplo comum (…) Eu sei que eles mentalmente conseguem fazer isso e depois fazem a soma (MEAA1).

Nesta situação, Maria evidencia o seu conhecimento de conteúdo remetendo para questões processuais, mas percebendo-se que quer explorar questões mais complexas. Esta última questão remete-nos para um conhecimento didático relativo ao como ensinar e a como pensam os alunos.

Relativamente ao impedimento de utilizar várias representações dos racionais nas expressões, defende que é importante porque

> só no [instituto] é que percebi que haviam estas relações, porque para mim havia números… existiam percentagens, arrumadas na gaveta das percentagens, havia números fracionários, arrumados na gaveta dos fracionários e havia números decimais (…). Longe de mim alguma vez pensar que havia uma ligação… de pensar que eles representavam a mesma quantidade… Percebi que não tinha sentido de número! (MEAA1).

As situações descritas anteriormente colocam questões sobre o papel da professora cooperante na promoção da experimentação de determinados conceitos didáticos que poderiam ser mobilizados ou postos em causa na prática letiva. Ainda assim, Maria parece conseguir sustentar as suas opções evidenciando conhecimento didático e conhecimento de conteúdo de natureza conceptual.

Na última aula Maria introduziu a operação multiplicação com racionais e queria fazê-lo recorrendo a problemas passíveis de concretizar com representações pictóricas que, depois de exploradas, poderiam facilitar a compreensão dos conceitos e dos significados da operação multiplicação (sentido aditivo e produto cartesiano). Maria sabia que tinha de "em vez de simplesmente darmos a fórmula para chegar ao resultado… como e o porquê que dá… perceber o que está por detrás do conceito" (MEAA3).

Para tal, consultou bastante literatura e, apesar de ter lido brochuras e artigos sobre o ensino e aprendizagem da multiplicação com racionais, Maria não tinha compreendido totalmente o que deveria prever na sua planificação. Só quando a professora de álgebra “começou a fazer a representação pictórica, é que percebi! [Só quando] olhei para aquela representação é que associei” (MEAA3).

Neste episódio podemos perceber que as experiências vividas nas aulas sobre o conteúdo são fundamentais quando se fazem aportes ao conhecimento didático, pois nem sempre os futuros professores têm um conhecimento conceptual do conhecimento a ensinar. Mais uma vez, esta falta de conhecimento pedagogicamente poderoso pode impossibilitar uma antecipação das explorações a realizar na prática.

Planificar para orquestrar o ensino-aprendizagem

Maria, na sua primeira planificação, antes de ter uma experiência de prática letiva, antecipa descrevendo a sua prática de modo pouco organizado e negligencia as ações dos alunos. Contudo, as suas incursões à prática, o questionamento inerente à observação dos vídeos e as questões trabalhadas na Didática da Matemática levaram-na a alterar sucessivamente a estrutura da sua planificação. A estrutura das suas planificações começou por ser uma estrutura simples que consistia numa grelha com os tópicos, objetivos, páginas do manual, recursos, tempo e avaliação e, em anexo, pequenos pontos orientadores com a tarefa a propor e ações gerais do professor. As grelhas utilizadas foram mantidas mas o modo como foi descrevendo as ações do professor e dos alunos foi-se alterando. Ao longo do tempo, Maria percebe que é importante antecipar os diversos momentos da aula e começa também a tentar antecipar os contributos dos alunos, fazendo-o com uma eficácia crescente. No entanto, refere que lhe é muito difícil porque é “muito difícil transpor para os alunos o que vai acontecer… imaginá-los… é um exercício difícil [mas] muito necessário (…)” (MEAA2).

Estas alterações surgem da necessidade de comunicar com clareza e por escrito a antecipação da aula. Uma das razões relaciona-se com as entrevistas realizadas pós-aula, onde a futura professora é questionada, confrontando aquilo que aconteceu com aquilo que antecipou. Na primeira entrevista dessa natureza, chega a verbalizar que deveria ter antecipado as ações dos alunos permitindo que ouvisse melhor as intervenções. Também relembra que foi alertada para tal na Didática da Matemática mas que só no momento da prática fez sentido. No entanto, ainda coloca muito poucas hipóteses de respostas dos alunos e os respetivos *feedback* e justificação dos mesmos. A descrição é muito centrada no professor e relativa aos procedimentos, e não aos conceitos envolvidos (figura 2).

- Pedir para escrever a expressão:
  " A soma de 4 com a diferença entre 1 e um nono ".
  Dou o problema em linguagem natural e espero que me respondam em linguagem simbólica.

R.: Espero que respondam:

a) $4 + (1 - \frac{1}{9})$

b) $4 - (1 - \frac{1}{9})$.

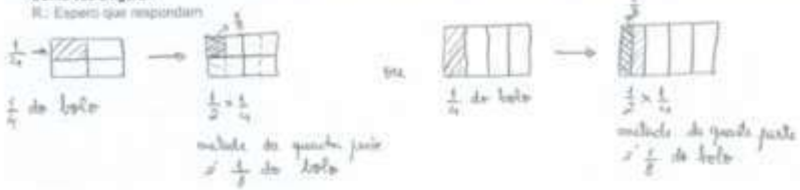
Tenho de explicar que em linguagem natural (problema) o que vem primeiro "a soma de 4" é a última operação a ser realizada, e que, a segunda parte do problema (linguagem natural) é a primeira a ser realizada " a diferença entre 1 e um nono", pois está entre ( ).

Figura 2. Plano da aula 2

Na planificação da terceira aula, Maria vai mais além e, porque introduz uma operação na representação fracionária, ou porque sentiu que tinha que fazer uma antecipação mais pormenorizada, introduz resoluções erradas dos alunos e a exploração pictórica e simbólica das tarefas (figura 3).

Como vês a figura?

R.: Espero que respondam



- Então podemos dizer que. $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ ou que $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

Possíveis respostas erradas:

C) $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$	Para multiplicar uma fração por uma fração, multiplicam-se os numeradores e mantêm-se o denominador maior.
d) $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$	Para multiplicar uma fração por uma fração, multiplicam-se os denominadores e mantêm-se os numeradores.

e) Para multiplicar uma fração deve-se encontrar o denominador comum e depois multiplicar o numerador e o denominador.

Será que encontraste alguma regularidade?

R.: a) Sim e explicam qual e como chegaram a essa conclusão.

b) Não e explica-se que "Para multiplicar frações, multiplica-se o numerador pelo numerador e multiplica-se o

Figura 3. Plano da aula 3

Note-se que esta última planificação já é mais sofisticada e evidencia conhecimento do conteúdo de natureza conceptual e o conhecimento didático sobre os alunos, ensino e currículo.

Maria sentiu necessidade de antecipar as dificuldades dos alunos para conseguir trabalhar melhor os erros – aspeto que considera que deve fazer diferente daquilo que foi feito consigo –, mas não se revelou uma tarefa fácil. Começou por pensar "Se me perguntarem isto, o que é que eu digo? Se eu lhes perguntar isto, o que é que eles me podem responder?" (MEAA2), e em seguida teve o cuidado de

> pensar em possíveis resoluções dos alunos (…) na multiplicação de frações, em vez de eles seguirem a regra que é denominador vezes denominador e numerador vezes numerador (…). Para multiplicar fração por fração, multiplicar os denominadores e manter os numeradores [ou transporem da] adição encontrando o mínimo múltiplo comum. [Se podem] fazer na adição… (MEAA3).

Nesta fala, Maria remete-nos para um conhecimento do conteúdo mas projetando-o para os conhecimentos dos alunos. Apesar de só estarem evidentes conhecimentos processuais, tenta prever momentos de discussão e como pretende geri-los em sala de aula construindo novo conhecimento.

Na terceira aula, Maria selecionou tarefas que lhe permitissem trabalhar representações pictóricas. Para tal, desenhou representações retangulares, em micas, de modo a sobrepor e a concretizar o conceito de multiplicação, e refere: "Por vezes… eu acho que nós fazemos as contas, damos os resultados, mas estamos a falar do quê? De que unidade? De que parte? Parte do quê?" (MEAA3).

Assim, podemos dizer que Maria mobilizou o seu conhecimento de conteúdo, quando nos remete para a questão da unidade de referência, e o seu conhecimento didático, quando refere a importância de explorar diversas representações das situações colocadas.

Reconceptualizando a antecipação

Maria faz um balanço bastante positivo do processo de aprendizagem vivido. No final, percebe que as suas planificações são mais completas e que o facto de antecipar as estratégias informais e formais dos alunos, antecipar erros e dificuldades e estruturar as suas planificações de modo mais organizado lhe permite ir mais segura para uma prática letiva. Assim, conclui: "a grande diferença foi sem dúvida nas planificações, de início eu só planificava as perguntas e as respostas e alguns nem a resolução do exercício eu coloquei! Da primeira planificação para última houve uma grande diferença!" (MEF).

Porque procurou melhorar a sua antecipação, a futura professora consegue também fazer um balanço mais cuidado sobre a própria prática, comparando a planificação construída com a prática efetiva, transformando as suas planificações de aula para aula. Na sua primeira reflexão escrita refere: "a forma como abordei as propriedades não foi a mais clara, principalmente a propriedade associativa, pois centrei-me na resolução do problema e não na propriedade em si [propósito da aula]" (MRA1).

Apesar de sentir que podia ter ido um pouco mais longe, Maria sente-se mais autónoma e capaz de inovar, indo ao encontro daquilo que lê na literatura. Considerando o acima referido, podemos afirmar que Maria reconhece que mobilizou o seu conhecimento do conteúdo e o seu conhecimento didático ao ter que tornar explícitos, nas suas planificações, os aspetos centrais para a prática letiva. Podemos também sublinhar que considera que melhorou a sua prática letiva no que diz respeito à gestão do conhecimento a ensinar e a aprender em virtude da qualidade da antecipação que foi fazendo.

Conclusão

Em cada planificação Maria teve de tomar decisões sobre as tarefas a propor, considerando aspetos como a sua natureza, o tipo de representações usadas, e as discussões que pretendia que emergissem de modo a construir o conhecimento pretendido. Teve que negociar com a professora cooperante as tarefas a realizar, nem sempre conseguindo levar para a sala de aula as que pretendia. Sentia necessidade de antecipar resoluções e discursos para além das representações simbólicas e pictóricas que podiam apoiar a exploração das tarefas propostas. Essa tarefa revelou-se difícil e nem sempre está evidente nas suas planificações; no entanto, foram-se notando melhorias.

A futura professora preparou a sua orquestração do processo de ensino-aprendizagem antecipando explicações a dar na sala de aula. Notou-se que a falta de conhecimento do conteúdo, onde ela própria reconhece diversas limitações, dificulta uma antecipação das explorações a realizar na prática. No entanto, na última planificação já teve oportunidade de mobilizar o seu conhecimento de conteúdo, ao remeter para a questão da unidade de referência, e o seu conhecimento didático, quando refere a importância de explorar diversas representações das situações colocadas.

Incidentalmente, este caso levanta questões sobre o papel do professor cooperante e sobre a influência que este tem na antecipação das suas práticas letivas, bloqueando ou promovendo o conhecimento dos futuros professores. Assim, as instituições de formação de professores são desafiadas a trabalhar junto dos professores cooperantes de modo a que todos tenham um discurso mais próximo uns dos outros. Também fica evidente que os futuros professores devem ser apoiados pelos docentes das instituições de formação, no momento da prática supervisionada, dando resposta a questões que por vezes só se colocam neste momento, revisitando conceitos que não estavam bem compreendidos.

Ao refletir sobre o processo de antecipação e confrontando-o com a prática letiva, Maria reconceptualiza a antecipação e mobiliza conhecimento para ensinar números racionais no 2.º ciclo. Faz um balanço positivo do processo de aprendizagem vivido nesta primeira experiência de prática letiva supervisionada. No final, refere que as suas planificações são mais completas e que o facto de antecipar as estratégias informais e formais dos alunos, antecipar erros e dificuldades e estruturar as suas planificações de modo mais organizado lhe permite ir mais segura para a prática letiva, melhorando-a no que diz respeito à gestão do conhecimento a ensinar e a aprender. Constatamos, assim, que o processo vivido pela estagiária neste estudo e o apoio prestado pelos professores da instituição durante a prática foram fundamentais para a evolução da qualidade na antecipação da prática.

Referências bibliográficas

Alsawaie, O., & Alghazo, I. (2010). The effect of video-based approach on prospective teachers' ability to analyze mathematics teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13*, 223-241.

Ball, D. L., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Bardin, L. (1977). *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70.

Charalambous, C. Y., Hill, H., & Ball, D. (2011). Prospective teachers' learning to provide instructional explanations: How does it look and what might it take? *Journal of Mathematics Teacher Education*, *14*, 441-463.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 119-161). New York, NY: Macmillan.

Lamon, S. (2006). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content and instructional strategies for teaching* (2nd ed.). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Ludke, M., & André, M. E. D. A. (1986). *Pesquisa em educação: Abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematic in China and the United States*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

ME (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa: DGIDC.

Monteiro, C., & Pinto, H. (2009). *Desenvolvendo o sentido de número racional*. Lisboa: APM.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM.

Norton, A., Mccloskey, A., & Hudson, R. (2011). Prediction assessments: Using video-based predictions to assess prospective teachers' knowledge of students' mathematical thinking. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *14*, 305-325.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2.ª ed., pp. 225-263). New York, NY: Routledge.

Ponte, J. P., Quaresma, M., & Branco, N. (2012). Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Avances en Investigación en Educación Matemática*, *1*, 67-88.

Scherrer, J., & Stein, M. K. (2012). Effects of a coding intervention on what teachers learn to notice during whole-group discussion. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16,* 105-124.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1-22.

Silverman, J., & Thompson, P. (2008).Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *11,* 499-511.

Stake, R. (1995). *A arte da investigação com estudos de caso*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Uma experiência de formação em Álgebra para futuros professores dos primeiros anos

Neusa Branco[1], *João Pedro da Ponte*[2]

[1]Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Santarém & Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, neusa.branco@ese.ipsantarem.pt

[2]Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, jpponte@ie.ul.pt

Resumo. *Esta comunicação tem por base um estudo realizado na formação inicial de professores dos primeiros anos numa experiência de formação em Álgebra, que segue uma abordagem de ensino exploratório articulando conteúdo e didática. O estudo visa compreender a perspetiva de três formandas sobre o contributo do trabalho proporcionado por esta experiência para o desenvolvimento do seu conhecimento matemático e didático. O estudo segue uma metodologia de design research e foca em detalhe três formandas com diferentes experiências anteriores em Matemática e com diferentes objetivos futuros. A recolha de dados é realizada por questionários, entrevistas, documentos produzidos pelos formandos e observação participante das aulas. Os resultados mostram que as atividades realizadas tiveram forte influência no desenvolvimento do conhecimento de todas as formandas, em especial pela natureza das tarefas propostas e pelo modo de trabalho na sala de aula. Destacam-se também situações de formação particularmente significativas para o desenvolvimento do conhecimento das formandas que envolvem a articulação entre o conteúdo e a sua didática.*

Abstract. *This communication is based on a study of preservice teachers education in a teacher education experience in algebra, which follows an exploratory teaching approach articulating content and didactics. The study aims to understand the perspective of three perspective teachers on the contribution of the work provided by this experience to the development of their mathematical and didactic knowledge. The study follows a design research methodology and focuses in detail on three participants with different previous experiences in mathematics and with different future goals. Data collection is made by questionnaires, interviews, documents produced by prospective teachers and participant observation in classes. The results show that the activities undertaken, in particular the nature of the proposed tasks and the way of working in the classroom had strong influence on the development of knowledge of all the participants. There are also teacher education situations particularly significant for the development of the participants' knowledge which involve the articulation between content and its didactics.*

Palavras-chave: Formação inicial de professores; Álgebra; Pensamento algébrico; Conhecimento matemático; Conhecimento didático.

Introdução

A formação em Álgebra proporcionada aos futuros professores dos primeiros anos e educadores de infância deve ter em consideração o contributo que pretende dar para o desenvolvimento do seu conhecimento profissional. Com o particular relevo dado pelas orientações curriculares para o ensino-aprendizagem da Álgebra (ME, 2007; NCTM, 2000) e a investigação em educação nacional e internacional (Canavarro, 2007; Kaput, 2008) ao desenvolvimento do pensamento algébrico, torna-se pertinente abordar o modo como este é integrado na formação inicial destes docentes. Assim, importa estudar o modo de proporcionar a estes formandos experiências de aprendizagem relativas ao pensamento algébrico, contribuindo para o desenvolvimento do seu conhecimento algébrico e do seu conhecimento sobre o ensino-aprendizagem desta temática.

Esta comunicação tem por base uma experiência de formação em Álgebra que decorre no 3.º ano da Licenciatura em Educação Básica, em que participam os 20 estudantes. Esta experiência é orientada por uma conjetura de formação que integra dois aspetos: a articulação entre o conteúdo e a sua didática e a abordagem exploratória no ensino. Estes dois aspetos visam colocar os futuros professores perante situações de ensino que promovem a partilha, discussão e negociação de conhecimentos essenciais para a sua prática futura. Pretende-se estabelecer uma dinâmica em que o conhecimento teórico é um instrumento de análise das situações de ensino. Esta conjetura visa, assim, o desenvolvimento do conhecimento dos futuros professores, integrando conteúdo e pedagogia, e da sua identidade profissional.

O presente estudo visa compreender a perspetiva de três formandas relativamente ao contributo do trabalho proporcionado pela experiência de formação para o desenvolvimento do seu conhecimento matemático e didático. Em particular, procuramos identificar (i) situações da experiência de formação relevantes para as formandas no que respeita à articulação entre o conteúdo e a sua didática, e (ii) os aspetos da abordagem exploratória que as formandas destacam.

Desenvolvimento do conhecimento matemático e didático para o ensino da Álgebra

Com o ensino da Álgebra, espera-se que os alunos sejam capazes de generalizar e representar algebricamente essas generalizações, realizando sobre elas ações sintaticamente guiadas. Para isso, igual capacidade tem de existir nos futuros professores. Para futuramente ensinarem Álgebra eficazmente nos primeiros anos, promovendo o pensamento algébrico, eles têm de ter um conhecimento aprofundado da Matemática que vão ensinar e do seu ensino. Billings (2008) sugere que, para promoverem o pensamento algébrico nas suas salas de aula, os professores têm de desenvolver uma compreensão pessoal sobre o que significa pensar algebricamente, para o que "precisam de múltiplas experiências de análise da variação, de identificação, representação e generalização de relações entre variáveis" (p. 279).

Num estudo realizado com futuros professores dos primeiros anos, Hallagan, Rule, e Carlson (2009) avaliam o seu conhecimento de realizar generalizações algébricas. A partir de uma intervenção de formação com base na resolução de problemas, procuram identificar o contributo da procura da generalização algébrica em sequências pictóricas na compreensão dos formandos. Antes da intervenção, os futuros professores revelam dificuldades em escrever generalizações. Os investigadores verificam que há uma melhoria da compreensão dos formandos quando as situações surgem num ambiente de resolução de problemas, principalmente da generalização de situações lineares. Além disso, os resultados mostram que estes identificam uma melhoria no seu conhecimento de técnicas e estratégias para generalizar, melhorando a sua capacidade de ensinar, e na sua compreensão da importância do ensino da Álgebra. Os formandos destacam, ainda, a importância do modo de trabalho promovido durante a intervenção e identificam o contributo da apresentação e partilha coletiva de estratégias para a melhoria da sua compreensão do modo de chegar à generalização. Em consequência, os investigadores sugerem que, para promover a aprendizagem da generalização algébrica, a formação deve visar um momento de introdução da tarefa, o trabalho dos formandos em pequenos grupos para exploração das situações e um momento final de apresentação e discussão de estratégias e onde os principais aspetos são sintetizados.

O professor dos primeiros anos enfrenta o desafio de proporcionar desde cedo aos seus alunos situações de aprendizagem que visem o desenvolvimento do seu pensamento algébrico (Blanton & Kaput, 2011; Capraro, Rangel-Chavez, & Capraro, 2008). Para tal, o professor pode propor situações "em que os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto particular de exemplos, estabelecem generalizações através de um discurso argumentativo e expressam-nas, cada vez mais, por caminhos formais e apropriados à idade" (Blanton & Kaput, 2005, p. 413). Deste modo, as experiências propostas aos futuros professores são essenciais para o desenvolvimento da sua compreensão do trabalho a realizar em sala de aula no âmbito do pensamento algébrico.

Capraro et al. (2008) sugerem que os “professores dos primeiros anos compreendam os conteúdos algébricos, compreendam como os alunos aprendem e usem estratégias de ensino que fomentem a aprendizagem para desenvolver o pensamento algébrico” (p. 1). No seu estudo, salientam a pertinência do trabalho com situações de ensino-aprendizagem ao longo da formação inicial por possibilitarem o desenvolvimento do pensamento algébrico dos próprios formandos e do seu conhecimento do ensino desta temática, proporcionando a análise do trabalho dos alunos, a exploração de conceitos, a procura da generalização e uma perspetiva geral deste ensino.

Experiência de formação

Esta experiência de formação em Álgebra visa envolver os futuros professores em situações problemáticas relevantes para a prática de ensino (Sanchéz, Llinares, García, & Escudero, 2000), integrando tanto aspetos matemáticos como didáticos, uma vez que se assume que a formação de professores enfrenta o desafio de combinar conteúdo e didática (Ponte & Chapman, 2008). Assim, visa promover o desenvolvimento do pensamento algébrico dos formandos e do seu conhecimento sobre o ensino-aprendizagem da Álgebra nos primeiros anos, numa abordagem de ensino exploratório que integra situações matemáticas e de ensino-aprendizagem. Proporciona situações de aprendizagem que fomentam a exploração e a discussão de ideias matemáticas e didáticas, envolvendo os formandos em momentos de trabalho autónomo e de discussão coletiva. Na exploração deste tipo de situações de carácter aberto (Ruthven, 1989), o docente apoia essa exploração, “recolhe e analisa informação sobre as estratégias e teorias que são empregues pelos alunos” (p. 451).

Nesta experiência são propostas sete tarefas que têm por objetivo promover o pensamento algébrico dos formandos e a sua reflexão sobre situações concretas de trabalho com os futuros alunos, relativas a diferentes tópicos (Tabela 1).

Tabela 1. Cronograma dos tópicos

Tópicos	Pensamento algébrico	Relações, resolução de problemas e modelação matemática	Sequências repetitivas e regularidades	Sucessões	Funções	Resolução de problemas e modelação matemática
N.º de horas	4	10	6	16	10	4

As tarefas remetem para o trabalho em situações de natureza algébrica, principalmente no âmbito da resolução de problemas e de tarefas de exploração, e para a análise de resoluções de alunos em tarefas de cunho algébrico e da prática do professor. As situações que envolvem a análise de respostas dos alunos e o seu trabalho na sala de aula visam proporcionar aos formandos oportunidades de aprendizagem contextualizadas. Essa análise permite identificar aspetos relativos à aprendizagem dos alunos, bem como discutir a forma de orientar o ensino da Matemática com vista ao desenvolvimento do pensamento algébrico. Deste modo, os formandos têm a possibilidade de relacionar teoria e prática, tendo em vista a compreensão do ensino da Matemática (Llinares & Valls, 2009).

Metodologia de investigação

A investigação segue uma metodologia de *design research* que foi escolhida dado o nosso objetivo de estudar um modelo de ensino orientados por princípios teóricos. Esta metodologia permite verificar como funciona um modelo ao ser concretizado e ser revisitado, ao longo da experiência, para ser ajustado e melhorado (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer, &Schauble, 2003). Deste modo, pretendemos estudar a complexidade do trabalho desenvolvido ao longo da experiência de formação, apresentado na secção anterior, tendo em vista compreender o processo de desenvolvimento dos formandos. Esta intervenção é concretizada pela primeira autora.

Os participantes do estudo são três formandas (Alice, Beatriz e Diana) com diferentes experiências anteriores à entrada no ensino superior no que respeita à frequência da disciplina de Matemática e diferentes objetivos futuros quanto ao seu percurso que habilita para a docência (Tabela 2). Os aspetos que as distinguem permitem tornar evidentes os contributos da experiência de formação relativamente ao conhecimento matemático e ao conhecimento didático.

Tabela 2. Caracterização das formandas quanto à frequência na disciplina de Matemática e ao mestrado em que pretendem ingressar

Formanda	Frequência de Matemática	Mestrado visado
Alice	9.º ano	Educação Pré-Escolar
Beatriz	10.º ano	Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º CEB
Diana	12.º ano	Ensino do 1.º e do 2.º CEB

Os dados são recolhidos por diferentes métodos tendo em vista descrever com pormenor e a partir de diversos ângulos as situações vividas pelos participantes ao longo da experiência. Nesta comunicação apresentamos dados recolhidos em diferentes momentos: antes do início do período de aulas, no decorrer das aulas e após a conclusão do período de aulas. Os dados são recolhidos por dois questionários (Qi – Questionário inicial, Qf – Questionário final), por três entrevistas (E1, E2 e E3) a cada uma das três formandas, gravadas em áudio e vídeo, por documentos produzidos pelas formandas na experiência (resoluções escritas em diversas tarefas propostas e portefólios) e pela observação participante nas aulas, complementada por gravações áudio e vídeo e registada em notas de campo. Os questionários contemplam tarefas de natureza algébrica e didática. As entrevistas 1 e 3 têm por base questões que focam as tarefas dos questionários inicial e final, respetivamente, e a entrevista 2 integra também tarefas de natureza algébrica. Nas duas últimas entrevistas são ainda colocadas questões sobre o trabalho desenvolvido na experiência de formação.

Assim, apresentamos e discutimos os aspetos do trabalho de Alice, Beatriz e Diana durante a experiência de formação, nomeadamente em tarefas relativas a tópicos que as formandas identificam como centrais, bem como as suas perspetivas sobre as atividades realizadas e o modo de trabalho. A análise dos dados assume, essencialmente, um cunho interpretativo, sendo os dados organizados de modo a identificar evidências do trabalho realizado no que respeita à articulação entre conteúdo e didática e a perspetiva das formandas quanto aos aspetos centrais da abordagem exploratória.

Articulação entre conteúdo e didática

Os tópicos integrados nesta experiência de formação revelaram-se pertinentes, permitindo o estabelecimento de conexões e a utilização de diferentes representações matemáticas. Contudo, a sua concretização revela que os tópicos que foram abordados mais no final do semestre, como é o caso do estudo das funções e das situações de modelação, não foram tão significativos para os formandos, uma vez que estes não destacam tanto a experiência que estes lhes proporcionam. As três formandas valorizam bastante o trabalho em torno das relações, das sequências pictóricas e numéricas e da resolução de problemas envolvendo quantidades desconhecidas, apresentando vários exemplos de situações vividas na experiência de formação e identificando o seu contributo para a sua formação.

Alice identifica o trabalho com sequências pictóricas como sendo o que promoveu nela uma maior aprendizagem e o que mais gostou. Durante a experiência de formação, realiza diversas tarefas envolvendo sequências pictóricas, como a da Figura 1, que surge na Tarefa 4:

Figura 1 – Sequência pictórica, T4-1

A tarefa 4 é realizada em pequenos grupos. Nesta situação analisam a constituição dos termos da sequência pictórica e determinam um termo geral para a sequência numérica relativa ao número de fósforos. O grupo de Alice decompõe cada termo de modo a relacionar cada parte com a sua ordem (Figura 2), indicando como termo geral $4n-1$.

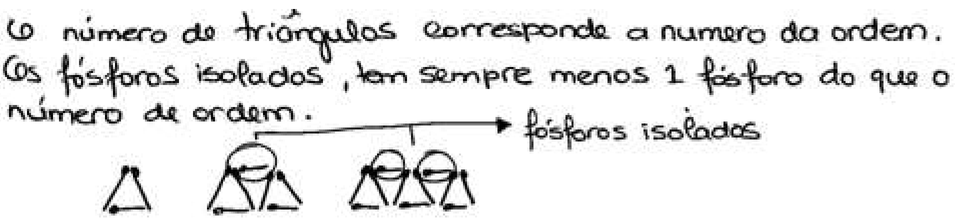


Figura 2 – Resolução do grupo de Alice, T4-1

Relativamente a este tópico e com base no visionamento e análise de um episódio de aula de 2.º ano, Alice identifica a importância do professor ter um conhecimento matemático aprofundado do tópico para saber que questões colocar aos alunos: "a professora fazia muitas perguntas e nunca dava a resposta, fazia com que os alunos chegassem à resposta" (E2).

Beatriz reconhece, logo na primeira entrevista, ter dificuldades na resolução de problemas usando um sistema de equações, apesar de ter conseguido representar um destes problemas por um sistema e o ter resolvido. Esta foi para si uma aprendizagem muito significativa: "Os sistemas para mim foi realmente o mais importante, porque eu não conseguia fazer sistemas, nem percebia, como é que funcionava. Agora faço sistemas, acho mais fácil resolver os problemas por sistema do que por outra resolução" (E2). A resolução de tarefas exploratórias e de problemas aliada a uma dinâmica de formação que privilegia a sua apresentação e discussão contribui para o desenvolvimento do seu conhecimento:

> Fui adquirindo novos conhecimentos e observando outras resoluções que me elucidaram e me permitiram chegar a resultados através de um raciocínio lógico. Entre essas resoluções estão os sistemas, em que eu sentia grande

> dificuldade na sua resolução, e com esta disciplina consegui percebê-los e resolvê-los corretamente. (Portefólio, Conclusão)

Além de valorizar a aprendizagem de métodos formais, Beatriz valoriza também o conhecimento que desenvolveu relativamente a estratégias informais que se baseiam no estabelecimento de relações entre as quantidades e na realização de operações elementares.

O trabalho de análise de situações de sala de aula e de resoluções de alunos foi importante para Beatriz por ter oportunidade de verificar que a um mesmo problema os alunos podem responder de diferentes maneiras, podendo existir "várias resoluções para o mesmo problema" (E2). Assim, tendo por base o trabalho com problemas envolvendo quantidades desconhecidas, para a sua prática considera que:

> Antes de propor um exercício destes, tinha que o resolver eu. E se calhar tinha que ver outras fórmulas de resolução para depois, para se os alunos me apresentassem várias resoluções, eu já ter conhecimento delas. Mas depois também às vezes nós podemos não ter conhecimento [de todas as resoluções], e, ao ouvir as resoluções deles, sabermos se estão certas, mesmo que nós ainda não tenhamos pensado nisso. (E2)

Para Beatriz, o professor deve procurar resolver de diversos modos uma mesma situação, para estar preparado para eventuais questões dos alunos, e ter conhecimento para compreender as resoluções dos alunos mesmo quando não pensa previamente na estratégia por estes seguida.

Diana menciona também os problemas que envolvem sistemas de equações, no âmbito da tarefa 2 proposta na experiência de formação. Esta tarefa envolve, por um lado, a compreensão e resolução de uma situação com três quantidades desconhecidas e três condições e, por outro, a análise de respostas de alunos do 6.º ano. Considera esta última parte bastante importante para a sua formação:

> Achei que é bastante engraçado e eu acho que é bastante certo nós termos analisado a maneira como as crianças resolveram o exercício, porque acho que por um lado é bom nós sabermos resolver os exercícios mas também é bom nós conseguirmos perceber aquilo que as crianças fazem. (E2)

A análise de resoluções de alunos proporciona a Diana a compreensão da importância do professor resolver as situações usando as suas próprias estratégias, por vezes formais, e de, além disso, saber interpretar as respostas dos alunos que podem envolver outras estratégias.

No final da experiência de formação, Diana considera-se mais apta para trabalhar com os alunos dos primeiros anos, propor-lhes e explorar com eles situações que, apesar de poderem ser representadas por linguagem algébrica simbólica, têm subjacentes relações que podem ser trabalhadas com esses alunos. Por exemplo, no questionário final, resolve o problema da figura 3 por um sistema de duas equações de 1.º grau, pelo método de substituição.

A Maria e a Raquel foram às compras. A Maria comprou um par de óculos e duas malas iguais por 64 euros. A Raquel gastou 101 euros na compra de produtos iguais aos da Maria mas em quantidade diferente, comprou dois pares de óculos e três malas iguais.

Determine o preço de um par de óculos e de uma mala. Explique como fez.

Figura 3 – Problema, Qf-8.2

No entanto, na terceira entrevista procura usar uma outra estratégia que possa ser mais próxima das estratégias dos alunos dos primeiros anos, estabelecendo relações entre as quantidades e realizando operações elementares, estratégia esta que tem por base uma representação menos formal do que a representação em linguagem algébrica simbólica:

Diana: Talvez multiplicar este [aponta para a Figura 5] por 2 dava 6 mais 4 [6 malas e 4 pares de óculos] e depois tirar 2 destes [aponta para a Figura 4]… Ou 3, aliás. Exatamente.

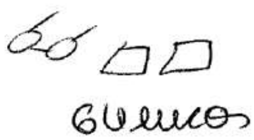


Figura 4 – Conjunto da Maria, E3

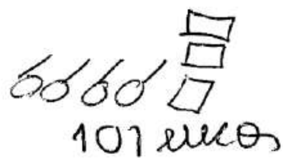


Figura 5 - Conjunto da Raquel, E3

Investigadora: Como assim?

Diana: Eu estou aqui a ver… Um, dois, três. Aliás, multiplicar este [aponta para a Figura 5] por 2… Ficava com… Isto é o que está aqui [reproduz a Figura 4]. Se multiplicasse isto por 2 ficava com… [desenha 4 pares de óculos e 6 pastas (Figura 7)]. E aqui, se multiplicasse por 3 ficava com 3 óculos… [desenha 3 pares de óculos e 6 pastas (Figura 6)]. E depois se fosse a este [aponta para a Figura 7] e tirasse este [aponta para a Figura 8], isto é eliminado [3 pares de óculos], isto também [6 pastas] e ficava só com um par de óculos [da Figura 7]. Ou seja, 64 tinha que multiplicar por 3, 64×3 [na Figura 7] e aqui 202 [na Figura 6]… Isto menos isto ia dar o preço dos óculos. (E3)

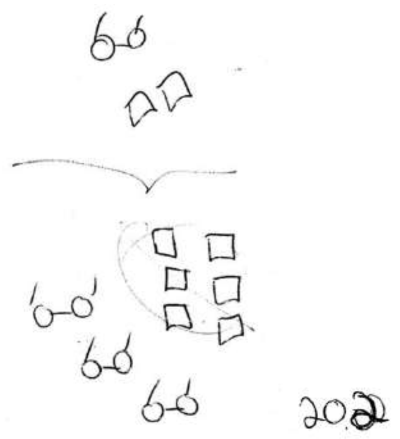


Figura 6 – Três conjuntos como o da Maria

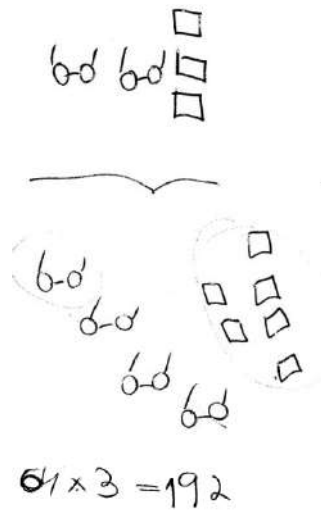


Figura 7 – Dois conjuntos como o da Raquel

Esta estratégia envolve o método da adição ordenada para calcular os valores desconhecidos, realizando operações elementares e esquemas. Escolhe os valores pelos quais multiplica cada uma das condições dadas e faz a diferença entre elas de modo a obter o valor de uma das incógnitas.

Abordagem de ensino exploratório

Natureza das tarefas

As três formandas valorizam a natureza das tarefas e o trabalho que estas proporcionam. Identificam que estas lhes colocam desafios e proporcionam momentos de aprendizagem.

Para Alice a estrutura das tarefas contribui para que, apesar das suas dificuldades, se envolva na sua realização. Verifica que estas são claras e que as questões estão relacionadas, o que permite dar sentido a toda a tarefa:

> Sim, eu acho que elas têm sempre uma função e, normalmente, apesar de eu muitas vezes ter dificuldade em as resolver, acho que até são expostas de forma simples, vai de linha a linha, a linha [a questão] a seguir está sempre relacionada com a anterior. Está… Acho que a estrutura está bem e até está simples. Às vezes o conteúdo para mim é que é mais difícil mas, mas vamos ter que lá chegar assim mais devagarinho. (E2)

As dificuldades que por vezes sente nas aulas não se devem à natureza das tarefas mas aos seus conteúdos, que se devem a dificuldades em alguns conhecimentos elementares: "às vezes é mesmo muito difícil porque eu não tenho bases, mas depois com as minhas colegas lá fui conseguindo" (E3). Numa fase inicial o papel das colegas é decisivo para que Alice não desista. Após a experiência de formação, continua a valorizar o papel das colegas e o contributo do trabalho conjunto para a sua aprendizagem. Contudo, a dependência do apoio dos outros não é tão marcante como no início, uma vez que, com as tarefas propostas, passa a ser capaz de contribuir de modo significativo para o trabalho que se realiza, sentindo-se com mais confiança no seu conhecimento para o fazer.

Para Beatriz foi bastante significativo o trabalho em situações que possibilitam diferentes estratégias de resolução. A resolução de tarefas exploratórias e de problemas aliada à sua discussão contribui para o desenvolvimento do seu conhecimento:

> Fui adquirindo novos conhecimentos e observando outras resoluções que me elucidaram e me permitiram chegar a resultados através de um raciocínio lógico. Entre essas resoluções estão os sistemas, em que eu sentia grande dificuldade na sua resolução, e com esta disciplina consegui percebê-los e resolvê-los corretamente. (Portefólio, Conclusão)

Além de valorizar o desenvolvimento deste conhecimento de métodos formais, Beatriz valoriza também o conhecimento que desenvolveu relativamente a estratégias informais que se baseiam no estabelecimento de relações entre as quantidades e na realização de operações elementares.

Pelo seu lado, Diana caracteriza o trabalho realizado na experiência de formação como "bastante prático" (E2), reconhecendo que "aprendemos através da prática" (E2). Identifica a existência de alguns momentos de discussão que visam a formalização dos conceitos, mas que a sua aprendizagem se desenvolve "essencialmente com base em situações práticas" (E2). Na terceira entrevista reforça esta indicação e salienta a pertinência, para a sua formação, da apresentação de situações de ensino-aprendizagem e da análise de respostas de alunos. São também importantes as tarefas que possibilitam o surgimento de diferentes estratégias, algumas sugeridas pelas respostas dos alunos e outras pelos seus colegas.

> Tínhamos que resolver as tarefas, tínhamos de perceber aquilo que as crianças queriam fazer… Tentar perceber o que elas fazem, muitas vezes também não é fácil, porque… Às vezes olhamos para o exercício e não percebemos o que é que lá está. É também um bocado entender, e não sabemos se vai fazer como nós sabemos, arranjar outras estratégias também para explicar às crianças para elas, pronto, entenderem… entenderem outras maneiras de resolver. (E3)

Nestas situações, Diana verifica que a análise de respostas de alunos nem sempre é fácil, uma vez que estes podem usar estratégias diferentes das pensadas previamente pelo professor.

Dinâmica da aula

A dinâmica da aula também assume um papel importante na aprendizagem dos formandos e estes mostram ter consciência disso. Assim, Alice valoriza o trabalho em pares e pequenos grupos. Reconhece que teria dificuldade em realizar individualmente a maioria das tarefas mas o trabalho em interação com as colegas, fomentado, faz com que não tenha receio e aprecie a sua realização. Estes momentos de trabalho envolvem a partilha de ideias e de conhecimentos matemáticos com os colegas.

> Eu gosto do método, principalmente quando nós trabalhamos muito em grupo e conseguimos comunicar com as nossas colegas, saber opiniões, e às vezes até elas me explicam a mim, trocamos ideias e eu gosto muito desse método. O método mais teórico também é necessário, também não tenho nada contra. Só que eu às vezes sinto-me assim um bocadinho "à nora". (E2)

Beatriz destaca principalmente os momentos de discussão coletiva, onde é bastante participativa: "acho que sou bastante participativa, se calhar mais do que o que devia" (E2). Afirma que a sua participação pode até ser excessiva porque por vezes não dá "oportunidade aos outros de pensarem" (E2), uma vez que gosta bastante de responder e de o fazer muito rapidamente. Além disso, considera também importantes os momentos de trabalho autónomo, que habitualmente decorrem a pares ou em pequenos grupos. Refere "a oportunidade de fazer" (E2) que é dada aos formandos na experiência, o que encara como significativo para a sua aprendizagem. Na sua perspetiva, o trabalho em grupo possibilita a partilha de estratégias, o que é pertinente dada a natureza das tarefas propostas, que muitas vezes envolvem diversas formas de resolução:

> Às vezes havia várias soluções para o mesmo problema, e cada um dava uma solução diferente, e às vezes eu podia não estar a ver a perspetiva do outro, e o outro podia não estar a ver a minha perspetiva, e nesse sentido tornava-se interessante. (E3)

Beatriz refere como exemplo a Tarefa 4, uma vez que nesta é especificamente solicitado que sejam determinados termos gerais equivalentes que representem diferentes visualizações dos termos da sequência pictórica. Indica que nesta tarefa "foi importante trabalharmos em grupo, pois as diferentes pessoas que o constituem sugerem formas diferentes de olhar para as figuras" (Portefólio, T4).

Também Diana valoriza os momentos de discussão durante a experiência de formação, referindo a sua importância em algumas tarefas:

> Durante a sua realização foram feitas várias discussões acerca das conceções que as crianças têm do sinal de igual, e essas discussões contribuíram bastante

> para a minha formação profissional, pois nunca tinha pensado na possibilidade de haver exercícios que induzem as crianças a interpretações que muitas vezes não são as mais corretas. (Portefólio, T1)

Estes momentos de discussão focados no ensino-aprendizagem da Álgebra contribuem para um aprofundamento do conhecimento matemático dos formandos e o desenvolvimento do seu conhecimento sobre a aprendizagem dos alunos e as situações que o professor pode propor para promover o pensamento algébrico.

Conclusão

Os resultados mostram que a integração do conhecimento do conteúdo e do conhecimento didático (Ponte & Chapman, 2008) e a abordagem exploratória (Ponte, 2005), que informam a experiência de formação, contribuem para o desenvolvimento do conhecimento matemático para ensinar e do conhecimento do ensino da Matemática. A natureza das tarefas, essencialmente problemas e explorações, favoreceram a compreensão de conceitos, relações, procedimentos e representações, em particular a generalização algébrica, como também identificam Hallagan et al. (2009), e a utilização da linguagem algébrica simbólica para a representar. Tal como no estudo de Capraro et al. (2008), a integração da análise de situações de ensino-aprendizagem favorece a compreensão dos conteúdos e do processo de ensino-aprendizagem nos primeiros anos, visto agora pelos formandos enquanto futuros professores. O facto de as tarefas realizadas envolverem questões que visam o aprofundamento do conhecimento matemático para ensinar, articulando conteúdo e didática, permite aos formandos identificarem os aspetos do conhecimento matemático inerentes ao trabalho dos alunos para a promoção do pensamento algébrico e identificar o papel do professor.

Deste modo, o estudo revela que tanto a natureza das tarefas como a dinâmica da aula têm um papel importante no desenvolvimento dos formandos. A abordagem exploratória privilegia o envolvimento dos formandos na realização das tarefas em momentos de trabalho diversificados, com ênfase nos momentos de trabalho autónomo, em pares e pequenos grupos, e de discussão coletiva. Os momentos de partilha e de discussão de estratégias são os mais significativos para estas formandas e os resultados apresentados mostram ter sido potenciadores do desenvolvimento e aprofundamento do seu conhecimento, como também revela o estudo de Hallagan et al. (2009). Assim, verifica-se que o modo de trabalho na experiência de formação tem um papel importante no desenvolvimento do conhecimento matemático dos formandos e na sua compreensão de aspetos essenciais da prática letiva.

Embora diferente de formanda para formanda, há um significativo desenvolvimento do conhecimento matemático e didático de Alice, Beatriz e Diana. Esse desenvolvimento ocorre de um modo mais evidente no conhecimento matemático para ensinar em Alice e no conhecimento do ensino da Álgebra em Beatriz e Diana. Para isso, parece ter contribuído a conjetura que orienta a experiência de formação que, pelas suas características, visa a promoção do conhecimento relativo a diferentes tópicos, que é progressivamente aprofundado, com base na atividade realizada pelas próprias formandas em colaboração com outros elementos da turma e na discussão dos conceitos e ideias centrais do ensino deste tema.

Agradecimento

Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projeto "Práticas Profissionais dos Professores de Matemática" (contrato PTDC/CPECED/098931/2008).

Referências

Billings, E. (2008). Exploring generalization through pictorial growth patterns. In C. Greenes & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics* (pp. 279-293). Reston, VA: NCTM.

Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(5), 412-446.

Blanton, M., & Kaput, J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 5-23). Berlin: Springer.

Canavarro, A. P. (2007). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante*, *16*(2), 81-118.

Capraro, M. M., Rangel-Chavez, A., & Capraro, R. M. (2008). *Effective preparation for teaching of algebra at the primary level*. Paper presented at ICME-11, Monterrey, México. Disponível em http://tsg.icme11.org/document/get/382

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, *32*(1), 9-13.

Hallagan, J. E., Rule, A. C., & Carlson, L. F. (2009). Elementary preservice teachers' understandings of algebraic generalizations. *Montana Mathematics Enthusiast*, *6*(1), 201-206.

Kaput, J. (2008). What is Algebra? What is algebraic reasoning?. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Llinares, S., & Valls, J. (2009). The building of pre-service primary teachers' knowledge of mathematics teaching: Interaction and online video case studies. *Instructional Science*, *37*, 247-271.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Org.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 225-263). New York, NY: Routledge.

Ruthven, K. (1989). An exploratory approach to advanced mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *20*, 449-467.

Sánchez, V., Llinares, S., García, M., & Escudero, I. (2000). La formación de profesores de primaria desde la didáctica de las matemáticas. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *43-44*(Artículo 28), 143-146.

A emergência do pensamento algébrico num grupo de crianças de 4 anos

Paula Serra[1], *Margarida Rodrigues*[2]
[1]Externato "O Poeta", cpaulaserra@sapo.pt
[2]Escola Superior de Educação de Lisboa & Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, margaridar@eselx.ipl.pt

Resumo. *Este artigo apresenta parte de um estudo que se encontra a decorrer e que, entre outras questões, procura perceber quais são os processos de raciocínio e as estratégias que são utilizados pelas crianças de um grupo de 4 anos para criar, analisar e generalizar padrões de repetição e de que forma identificam a unidade de repetição de um padrão. Após a implementação das tarefas, podemos concluir que as crianças dominam o conceito de padrão e conseguem criar e analisar padrões de repetição, evoluindo de formas mais simples para formas mais complexas.*

Abstract. *This paper presents part of a study that is underway and that, among other issues, seeks to understand what are the processes of reasoning and the strategies that are used by a 4 years group to create, analyze and generalize repeating patterns and how they identify the unit of repeat of a pattern. After implementing the tasks, we can conclude that they understand the concept of pattern and can create and analyze repeating patterns, evolving from simpler forms to more complex forms.*

Palavras-chave: Educação pré-escolar; Pensamento algébrico; Padrões de repetição; Unidade de repetição.

Introdução

São vários os investigadores que referem a importância do início do desenvolvimento do pensamento algébrico desde os anos iniciais. Para Threlfall (1999), o desenvolvimento do raciocínio lógico deve começar desde muito cedo, nomeadamente desde o pré-escolar, sendo o estudo dos padrões um veículo privilegiado para o fazer. Reforça a ideia de que é importante não só para a aprendizagem futura da álgebra mas também para a introdução de conceitos simbólicos. Na mesma linha, Herbert e Brown (citados em Borralho, Cabrita, Palhares, & Vale, 2007) consideram que a álgebra deve iniciar-se pelo estudo de padrões logo desde o jardim-de-infância.

O presente artigo apresenta parte de um estudo, no âmbito de uma dissertação de mestrado, que se encontra ainda a decorrer, num contexto de trabalho favorável ao estabelecimento de conexões entre a matemática e a literatura infantil, e que tem como objetivo analisar as potencialidades da literatura infantil na emergência do pensamento algébrico num grupo de 4 anos. As questões do estudo contempladas no presente artigo

Martinho, M. H., Tomás Ferreira, R. A., Boavida, A. M., & Menezes, L. (Eds.) (2014).
Atas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática. Braga: APM., pp. 373–388

são as seguintes: (1) Que estratégias e que processos de raciocínio utilizam as crianças para criar, analisar e generalizar padrões repetitivos?; e (2) Que estratégias utilizam as crianças para identificar a unidade de repetição de um padrão?

Foram propostas e implementadas tarefas, pela educadora titular de grupo, a crianças de 4 anos que frequentam a educação pré-escolar, num colégio particular da cidade de Lisboa. As tarefas tiveram como base, um livro de literatura infantil: "A lagartinha muito comilona", de Eric Carle. O artigo apresenta alguns resultados relacionados com as questões atrás enunciadas.

Pensamento algébrico e padrões na educação pré-escolar

Para muitos, a palavra álgebra surge associada a fórmulas e equações, a letras e símbolos que são manipulados e apenas trabalhados em níveis de ensino elevados (Suh, 2007), levando os próprios professores a pensarem que o pensamento algébrico não deve ser promovido cedo. Hoje em dia, a álgebra é encarada, de um modo mais lato, como uma atividade generalizante e humana. Segundo Kaput (2008), existem dois aspetos essenciais do pensamento algébrico: (a) a generalização e a formalização de padrões, e (b) a manipulação simbólica.

Pimentel, Vale, Freire, Alvarenga, e Fão (2010), referindo-se ao pensamento algébrico, consideram que o seu desenvolvimento necessita de estímulos ao nível do pensamento, tais como analisar relações entre quantidades e capacidade de generalizar. Segundo estes investigadores, e antes mesmo de entrar na escola, as crianças adquirem um conjunto de conceitos informais que se relacionam com padrões, permitindo-lhes ordenarem e organizarem o mundo onde vivem. Cabe, então, ao docente ser capaz de proporcionar às crianças situações que permitam explorar padrões utilizando diversos suportes, o corpo, gestos, ações ou até mesmo palavras (Pimentel et al., 2010).

O desenvolvimento do pensamento algébrico está subjacente ao desenvolvimento do pensamento matemático e até à própria definição de matemática como a ciência dos padrões e da ordem (Devlin, 2002). Em termos curriculares, os padrões assumem uma elevada importância como tema unificador ou como tema potenciador para uma aprendizagem significativa (Borralho et al., 2007; Vale, Pimentel, Barbosa, Borralho, Cabrita, & Fonseca, 2011). No presente trabalho, consideramos que estamos perante um padrão nas situações em que vemos uma repetição (Papic, Mulligan, & Mitchelmore, 2011) ou um modo de continuação. Orton (1999) sugere que os padrões podem contribuir para a construção de uma imagem mais positiva da matemática e permitir a compreensão da ligação entre a matemática e o mundo onde vivemos.

Palhares e Mamede (2002) consideram que é importante explorar diferentes representações do mesmo padrão, de modo a que as crianças consigam fazer generalizações e identificar padrões noutros contextos. A generalização ocorre quando as crianças conseguem determinar que no padrão existe uma unidade de repetição que se repete de forma cíclica e, utilizando diversos materiais ou formas, conseguem reconhecer a estrutura de um padrão (Papic et al., 2011). Efetivamente, é a estrutura subjacente ao padrão que permite fazer generalizações. De acordo com Mulligan (2013), a consciência do padrão e da estrutura por parte de crianças entre os 4 e os 8 anos de idade é um aspeto crítico e simultaneamente fundamental ao seu desenvolvimento matemático. Segundo a autora, é importante uma abordagem pedagógica que promova essa consciência para que as crianças aprendam matemática conducente à generalização.

De acordo com NCTM (2007), os padrões são a base do pensamento algébrico e o trabalho com padrões convida os alunos a identificar relações e a fazer generalizações. Este documento propõe, ainda, a inclusão de atividades exploratórias que recorram a materiais diversificados, que incentivem a capacidade de continuar padrões e de lidar com as diferentes propriedades das relações algébricas.

As Orientações Curriculares para a Educação Pré-escolar (OCEPE) (DEB, 1997), no domínio da matemática, referem que o desenvolvimento do raciocínio lógico parte da capacidade de dar oportunidades para encontrar e estabelecer padrões, sob a forma de sequências que obedecem a determinadas regras lógicas. As OCEPE (DEB, 1997) propõem a utilização de padrões repetitivos, dando como exemplo os dias da semana, ou padrões não repetitivos, citando a sequência dos números naturais. Estas atividades serviriam para desenvolver o raciocínio lógico, em tarefas em que as crianças, perante um padrão apresentado, descobrissem a lógica subjacente ou imaginassem o seu próprio padrão. Também no domínio da expressão motora ou musical, referem a construção e a descoberta de padrões rítmicos ou musicais (DEB, 1997). No domínio da linguagem, podemos encontrar padrões nas lengalengas, nos trava-línguas, ou até mesmo em histórias que possuem ritmos linguísticos, passíveis de serem transformados em sequências matemáticas.

Borralho et al. (2007) consideram que os padrões no pré-escolar servem propósitos de desenvolvimento do raciocínio lógico, de exploração de outros conteúdos e de criação de uma base para a aprendizagem futura da álgebra. Palhares e Mamede (2002) referem que podem ser explorados diferentes tipos de padrões e, com base na articulação das suas diferenças e semelhanças, agrupam-nos da seguinte forma: (a) a alternância, que pode ser única (do tipo ABABABAB); (b) a alternância por progressão aritmética (do tipo ABAABAAABAAAAB); (c) por componente de simetria (do tipo ABABBABA); e (d) por acrescentar uma segunda dimensão (do tipo ABABAB;
BABABA;
ABABAB……).

Passamos a apresentar alguns resultados de estudos empíricos realizados com crianças do pré-escolar. Rustigian (citado por Threlfall, 1999) observou como crianças entre os 3 e os 5 anos exploravam padrões de repetição. Concluiu que encontrar um movimento físico (modo ativo) para a representação do padrão era mais fácil do que encontrar uma representação pictórica (modo icónico) e que o atributo forma era mais fácil do que o atributo cor na identificação e representação dos padrões. Este autor identificou, ainda, uma progressão nos procedimentos das crianças ao ser-lhes pedida a representação da continuidade de um padrão: (a) escolha aleatória de novos elementos, sem fazer referência aos elementos anteriores; (b) repetição do último elemento; (c) utilização dos elementos anteriores mas numa ordem aleatória; (d) uma abordagem simétrica reproduzindo a sequência mas inversamente; e (e) continuação deliberada do padrão, olhando para o início de forma a verificar os elementos a colocar. Na investigação conduzida por Palhares (citado por Palhares & Mamede, 2002), no âmbito da exploração de padrões de repetição do tipo AB com mudança no atributo cor, as crianças com idades compreendidas entre os 4 e os 6 anos de idade foram capazes de continuar o modelo dado e de identificar o mesmo padrão nos objetos existentes na sala mas encontraram dificuldades em realizar outros tipos de padrões utilizando o mesmo material.

O estudo conduzido por Garrick, Threlfall, e Orton (1999) aponta para a maior facilidade das crianças em identificar os padrões que criam do que os padrões criados pelos outros. Segundo Vale et al. (2011), a maioria das crianças do pré-escolar, ao criar padrões de repetição, cria padrões do tipo n(A)m(B)y(C) em que n, m e y variam de 0 a 3. Estes autores referem, ainda, a identificação da unidade de repetição como essencial para se pensar no padrão como uma sucessão de termos que se repetem, de modo a conduzir à generalização. Threlfall (1999) considera que a identificação da unidade de repetição pode ocorrer de duas formas: ou por uma cantilena que enfatiza a unidade de repetição pela entoação utilizada (por exemplo: amarelo azul azul) ou por uma referência explícita à unidade de repetição (uma amarela e duas azuis).

Recentemente, Papic et al. (2011) realizaram um estudo com crianças do pré-escolar, com idades compreendidas entre os 3 anos e 9 meses e os 5 anos, que se focava em padrões de repetição, realizando uma intervenção específica a apenas um grupo. Concluíram que a maioria das crianças intervencionadas revelou grande compreensão da unidade de repetição e da estrutura de um padrão. Estes autores identificaram cinco estratégias das crianças quando estas trabalham com padrões de repetição, ordenadas por ordem de sofisticação: (a) *disposição aleatória* (os elementos são colocados aleatoriamente sem qualquer cuidado quanto ao seu lugar e orientação); (b) *comparação direta* (ao copiarem um padrão, fazem uma correspondência um a um); (c) *alternância* (focam-se em elementos sucessivos independentes da unidade de repetição – por exemplo, azul depois verde –, e não na unidade de repetição – por exemplo, azul-verde); (d) *unidade de repetição básica* (identificam a unidade de repetição, independentemente do número, tipo e complexidade de elementos e de atributos, e utilizam-na para continuar o padrão); e (e) *unidade de repetição avançada* (ao desenvolverem o seu sentido de unidade de repetição, conseguem transferir o mesmo padrão para diferentes modos ou materiais, reconstruindo-o de maneiras mais criativas).

Abordagem metodológica

De modo a responder às questões propostas, optámos por uma metodologia de investigação interpretativa de natureza qualitativa (Erickson, 1986), com especial ênfase nos processos e nos significados dos participantes no estudo.

O processo de recolha de dados, ainda em desenvolvimento, contempla como técnicas a observação participante e a análise documental, tendo os dados sido recolhidos a partir de registo vídeo e áudio, das notas de campo e dos registos das crianças. Os registos vídeo e áudio foram transcritos. Os resultados preliminares decorrem de uma análise categorial, ainda em curso, baseada em categorias que emergiram da literatura.

O grupo de educação pré-escolar com que se desenvolveu este estudo é constituído por 14 crianças de 4 anos de uma escola particular da cidade de Lisboa. A investigadora, primeira autora do presente artigo, é também a educadora titular de turma desde o ano letivo anterior e leciona há 22 anos. O grupo é ativo, curioso e com interesse pela matemática, sendo esta uma das áreas mais procuradas na sala.

Para se proceder à recolha de dados, foi pedida uma autorização à Diretora Pedagógica, bem como aos encarregados de educação do grupo participante. Tendo em conta algumas questões éticas (Bogdan & Biklen, 1994), o verdadeiro nome dos alunos envolvidos não é mencionado, sendo utilizados nomes fictícios.

Os episódios aqui relatados ocorreram durante os meses de outubro e novembro de 2013. As tarefas propostas surgiram na sequência da leitura da história "A lagartinha muito comilona", de Eric Carle. Devemos referir que o grupo já trabalhava anteriormente com o conceito de padrão, em tarefas como a continuação de sequências em colares de contas, identificação em livros, objetos e peças de vestuário de elementos que se repetiam, mas estando apenas associados a padrões de repetição e ao atributo cor.

Apresentação de alguns resultados

As primeiras três tarefas, embora realizadas em dias diferentes, foram encadeadas umas nas outras. Na primeira tarefa, *Pintar a lagartinha*, foi pedido às crianças que colorissem, a seu gosto, uma lagartinha com 20 espaços, de modo a criarem um padrão. A segunda tarefa consistiu em ler esse padrão aos colegas, em grande grupo. Na terceira tarefa, *Ler a lagartinha por gestos*, foi proposto às crianças que reproduzissem o padrão da sua lagarta com gestos. A quarta tarefa proposta, *Com gestos faço um padrão*, foi realizada em dois momentos, seguidos um ao outro. No primeiro momento, em grande grupo, cada criança tinha de inventar um padrão com gestos, e seguidamente, e de modo individual, pintar uma sequência de 15 laranjas (uma das frutas que a lagartinha comeu), com as cores que seriam necessárias para reproduzir esse mesmo padrão.

Pintando a lagartinha

Na primeira tarefa, as crianças iniciaram o seu padrão da direita para a esquerda, ou seja, da cabeça para a extremidade. A forma de pintar foi espontânea e não sugerida pela educadora. Alguns meninos referiram que podiam colorir a lagarta com as mesmas cores que tinham utilizado para fazer colares, tarefa realizada noutro dia, na área da matemática que existe na sala. Os colares encontravam-se em cima da mesa desta área.

> Fernando – Eu já sei o meu padrão. Vou fazer igual ao que eu fiz.
> David – Eu também vou.
> Guilherme – Eu sim, laranja amarelo, laranja amarelo, laranja amarelo…
> (…)

Fernando – Um vermelho e dois azuis.
David – Eu também quero fazer um igual ao teu, Fernando.

São várias as crianças que referem que cores vão utilizar antes de começarem a pintar, identificando também o número de canetas que precisam. No decurso da tarefa, a educadora ia questionando as crianças de modo a que mobilizassem o seu conhecimento anterior sobre padrões mas também para perceber se conseguiam identificar o que se repetia e se identificavam semelhanças entre os diferentes padrões criados.

Guilherme – Eu sim, laranja, amarelo.
Paula – Vais precisar de quantas canetas?
Guilherme – Duas.
(…)
Paula – E o Joaquim? Quantas cores é que vais pôr? (*Joaquim mostra 3 dedos*). Três cores? Boa!
(…)
Mário – Eu! Eu estou a fazer com duas cores, vermelho e azul. É vermelho, azul azul, vermelho azul azul (*lendo o seu padrão até onde tinha já pintado*).

As lagartas apresentaram padrões de três tipos diferentes (figura 1).

Figura 1. Padrões de tipo AB, ABC e ABB

Assim, a estratégia que algumas crianças usaram em pensar previamente nas cores a utilizar facilitou o seu trabalho de criação de um padrão. Duas das crianças, Joaquim e Guilherme, colocaram, junto a si, as canetas necessárias para pintar a lagartinha, retirando-as da caixa, evidenciando já alguma noção da unidade de repetição. O modo como o Fernando verbaliza o padrão criado anteriormente nos colares de contas e agora reproduzido na tarefa de colorir a lagartinha “Um vermelho e dois azuis” é indiciador da identificação da unidade de repetição, já que a refere de forma explícita (Threlfall, 1999). Quanto ao número de cores utilizadas e as canetas necessárias, as crianças conseguiram relacionar os diversos tipos de padrão, com duas cores (do tipo AB ou ABB) e com 3 cores (do tipo ABC).

As crianças que não colocaram as canetas fora da caixa utilizaram a estratégia de voltar ao início para verificar a ordem correta das cores a pintar. O Dinis usou uma abordagem simétrica, sendo que nos primeiros nove anéis, sensivelmente a meio da lagarta, utilizou a sequência de cores de roxo, vermelho e azul. A partir daí, inverteu a sequência das cores, colocando roxo, azul e vermelho. Trata-se de um padrão com componente de simetria, obtido provavelmente por o Dinis ter olhado para o que já tinha pintado, da esquerda para a direita, invertendo a sequência, e não para o início da lagarta, da cabeça para a sua extremidade (figura 2).

Figura 2. A lagarta do Dinis

O António tentou criar um padrão utilizando todas as canetas da caixa, mas não foi capaz de manter uma repetição exata da unidade de repetição que continha um elevado número de elementos. Assim, a estratégia do António (figura 3) residiu em usar uma grande diversidade de cores, dispondo-as primeiro sem repetir (nos primeiros nove anéis da lagarta) e, a partir da repetição do cinzento, parece dispô-las aleatoriamente.

Figura 3. A lagarta pintada pelo António

O grupo determinou que não se tratava de um padrão, mas não conseguiu explicar bem porquê; o argumento mais utilizado foi que “tem muitas cores e não se pode fazer um padrão com muitas cores”. Este assunto só viria a ser explorado pela educadora mais tarde, numa outra tarefa não contemplada no presente artigo.

Lendo os padrões

No decurso da tarefa *Pintar a lagartinha*, três crianças iniciaram um diálogo sobre as semelhanças dos seus padrões, todos do tipo ABB e com as mesmas cores. A forma como duas delas liam o seu padrão deu origem a uma discussão, tendo chegado à conclusão que se tratava do mesmo padrão, embora o lessem de modo diferente:

> Mário – Eu! Eu estou a fazer com duas cores, vermelho e azul. É vermelho, azul azul, vermelho azul azul,…
>
> Fernando – O meu é igual ao meu padrão (…) porque, olha, vermelho, duas azuis, vermelho, duas azuis.
>
> David – O meu é vermelho azul azul, vermelho azul azul.
>
> Paula – O David diz, vermelho azul azul, o Fernando diz vermelho duas azuis, vermelho duas azuis. Os vossos padrões são iguais?
>
> Fernando – Não.
>
> David – Sim.
>
> Mário – Sim, é porque é vermelho azul azul, vermelho azul azul.
>
> Paula – Então vamos ver. Tu estavas a dizer um vermelho dois azuis, um vermelho dois azuis, o David estava a dizer vermelho azul azul. É igual?
>
> Fernando – É. Porque, olha, eu tenho um vermelho e dois azuis e o David tem um vermelho e dois azuis.
>
> Paula- Ah! Ele também tem dois azuis, eu é que julguei que não era mesma coisa, como ele estava a dizer, vermelho azul azul. Afinal é! Tens razão. É outra maneira de se dizer. O teu é igual aos deles ou não, Mário?
>
> Mário – É.
>
> Paula – Igual ao de quem? Ao do David ou ao do Fernando?
>
> Mário – (*pausa antes de responder*) Igual ao dos dois.

Figura 4. As lagartas pintadas pelo Fernando, David e Mário, respetivamente

Na segunda tarefa, foi pedido às crianças, em grande grupo, que lessem para os outros os padrões das suas lagartas. Podemos identificar diferentes tipos de leitura: “amarelo verde”; “uma cor de laranja e uma azul”; “vermelho azul azul”; e “ uma vermelha duas azuis”. No entanto, todas as crianças liam a sequência total das cores pintadas. Na leitura dos padrões, identifica-se a utilização pelas crianças de uma cantilena que enfatiza a unidade de repetição pela entoação utilizada, permitindo identificar a sequência correta das cores e os erros cometidos. Quando o Dinis leu o seu padrão (figura 2), o Mário reagiu, assinalando um erro:

Dinis – Roxo vermelho azul, roxo vermelho azul, (…) roxo… azul, vermelho, roxo azul vermelho, roxo azul vermelho, roxo, azul.
Mário – Ah….fizeste diferente! (*faz gestos com a mão*) Que é roxo, vermelho azul roxo, vermelho, azul… e depois no final é… depois do roxo é o azul parece diferente.
Paula – Está diferente? Como é que tu achas que está diferente?
Mário – Porque tem o roxo com o vermelho ao pé do azul, então o azul mudou ao pé do roxo, então o vermelho mudou ao pé do azul (*faz gestos com as mãos e com os dedos aos saltinhos de três*).
Paula – Queres vir aqui mostrar à Paula o que estás a dizer?
Mário – Porque o Dinis fez aqui o roxo e depois nesta partiu e pôs aqui o roxo, o azul, o vermelho.

O Mário utilizou, nas suas explicações, para justificar o que na sua ideia teria sido um erro do Dinis, movimentos de mãos e gestos de saltinhos de três com o dedo indicador, acompanhados de entoação ao falar. A localização do início da ordem inversa da sequência de cores foi também identificada pelo Mário – "depois nesta partiu e pôs aqui o roxo, o azul, o vermelho" –, que assumiu tratar-se de uma incorreção na criação do padrão.

A educadora questionou as crianças sobre se conseguiam arranjar uma forma de não se enganarem quando estivessem a fazer padrões, tentando levá-los a identificar os elementos que se repetiam no padrão, para, deste modo, tentarem identificar a unidade de repetição. Uma das crianças, Frederico, sugeriu uma forma de o Dinis não se enganar e registou-a numa folha. Tendo tirado da caixa uma caneta verde com a qual desenhou uma linha fechada, o Frederico fez, no seu interior, "quadradinhos", de acordo com a unidade de repetição utilizada pelo Dinis: roxo, encarnado e azul:

Figura 5. Registos de controlo do padrão feitos pelo Frederico (A) e pelo David (B)

Frederico – Ah já sei! Fazemos uns quadradinhos para nós não enganarmos.
Mário – Já sei. Podemos fazer um padrão que o Dinis não se engana, pomos aqui à frente o papel e ele já sabe.
Frederico – Eu vou tirar as canetas que ele usou. Encarnado, roxo, azul.

O David sugeriu logo outra maneira e desenhou um "círculo" verde no centro rodeado de outras linhas circulares de cores idênticas às da lagarta do Dinis:

David – Um verde círculo grande… azul, castanho…
António – Roxo, é roxo, a lagartinha começa por aqui!
David – Posso fazer à volta, a primeira é uma volta, agora a outra…
Luísa – São muitas voltas!
António – Primeiro era o verde?
David – Porque era a… isto era um círculo que estava a segurar as cores, depois o Dinis vinha aqui ver qual era a cor primeira. Era esta, depois esta e depois esta.

O registo do Frederico mostra que identificou a unidade de repetição de uma forma independente quanto ao número de itens (Papic et al., 2011). Foi a primeira vez que surgiu um registo icónico da unidade de repetição. Este registo surge como forma de as crianças obterem um maior controlo relativamente à correção do padrão durante o processo de criação do mesmo, não tendo existido uma solicitação explícita por parte de educadora nesse sentido. O registo do David corresponde à reprodução do início do padrão, embora tenha usado o círculo verde "que estava a segurar as cores" como forma de indicação da ordem a atender na sucessão das cores, chamando, implicitamente, a atenção para a necessidade de não inverter essa mesma sucessão.

Reproduzindo os padrões com gestos

Na terceira tarefa, *Ler a lagartinha por gestos,* e em grande grupo, cada criança tinha de reproduzir o padrão inicial da sua lagarta com gestos, tocando em alguma parte do corpo, e ensiná-lo ao grupo, que o reproduzia também por gestos. Verificou-se que todas as crianças conseguiram reproduzir por gestos os padrões anteriormente feitos nas lagartas, identificando com facilidade a equivalência de gestos e cores. Ao mesmo tempo que tocavam nas diversas partes do corpo, estas eram verbalizadas.

Duarte – Cabeça pés pés, cabeça pés pés, cabeça pés pés.
Paula – Qual é a cor da cabeça? (…)
David – Vermelha.
Paula – E quando tocas nos pés, qual é a cor que estás a dizer?
David – Azul.
Paula – E porque é que tocas duas vezes nos pés?
David – Porque são dois azuis.

A educadora reforçou a ideia de repetição e que era apenas necessário fazer uma "unidade" de gestos para ensinar o padrão aos amigos, e não a totalidade do padrão. Também referiu que, se continuassem a fazer os gestos, podiam ficar ali indefinidamente.

Paula – Se a Paula não disser já chega, vocês ficam a repetir, a repetir…(…)
Era noite e nós aqui a repetir o padrão.
(…)
Paula – Então se tu quiseres ensinar o teu padrão aos meninos basta ensinar…

David – Cabeça pés pés.
Paula – E a partir daí eles vão repetindo. É isso?
David – É.

As crianças que se seguiram apenas referiram, gestual e oralmente, a unidade de repetição do seu padrão e ensinavam apenas isso ao grupo, que a utilizava para reproduzir o padrão e dar-lhe continuidade.

Paula – Outra vez… vocês perceberam logo! O Jacinto disse nariz, pés e começaram logo a repetir. Então agora… Tatiana, que gestos é que precisas de repetir para fazer a tua lagarta?
Tatiana – Boca, sobrancelha.

Criando padrões com gestos

Na quarta tarefa, todas as crianças, em grande grupo, criaram, sem dificuldade, padrões gestuais, verbalizando as partes do corpo em que tocavam. Usaram o processo da tarefa anterior. Ensinavam ao grupo apenas a unidade de repetição que era usada por todos para reproduzir gestualmente os padrões inventados, reproduzindo repetidamente a unidade de repetição. Fizeram-no, de seguida, e um de cada vez, sabendo que cada um deveria memorizar o seu próprio padrão inventado para o reproduzir pictoricamente depois. Os primeiros a inventar o padrão tinham uma tarefa mais difícil do que os últimos, já que a distância temporal até à concretização dessa reprodução era maior.

Após a criação dos padrões gestuais, feita em grande grupo, cada um dirigiu-se à mesa de trabalho para reproduzir o seu padrão na pintura da sequência das laranjas. Embora a disposição das laranjas fizesse lembrar a forma da lagarta, nenhuma das crianças utilizou a orientação da direita para a esquerda utilizada na tarefa de colorir a lagarta, adotando a orientação usual da leitura e da escrita, da esquerda para a direita. Os padrões evoluíram para uma forma mais complexa, tendo sido registados, nas sequências das laranjas, padrões de complexidade diversa: AB (4), ABC (4), ABB (1), ABCDE (2), ABBCD (1), ABCC (1). Verificou-se que conseguiram associar um gesto a uma cor e que quase todos se lembraram dos padrões gestuais criados, tendo sido oito as crianças que fizeram corresponder exatamente o padrão gestual ao que coloriram. Cinco das crianças pintaram padrões na sequência das laranjas, embora sem corresponder fielmente ao padrão gestual inventado antes. E apenas uma criança, a Luciana, não conseguiu pintar um padrão nas laranjas. Embora tenha verbalizado a unidade de repetição do seu padrão gestual “nariz, nariz, boca, boca”, quando pintou as laranjas utilizou as cores de forma aleatória. Nem conseguiu fazer corresponder um gesto a uma cor nem deu evidência de ter noção do que é um padrão. A Luciana usou, pois, a estratégia de menor sofisticação indicada por Papic et al. (2011), a estratégia de disposição aleatória.

Figura 6. As laranjas pintadas pela Luciana

Na figura 7, podemos observar os padrões do Mário e do Fernando com as laranjas. O Mário verbalizou “olhos nariz nariz boca pés ombro” mas correspondeu-o a um padrão figurativo do tipo ABBCD, ambos complexos. O Fernando fez corresponder o padrão figurativo do tipo ABCDE ao seu padrão gestual de “cabeça pés braço mão barriga”.

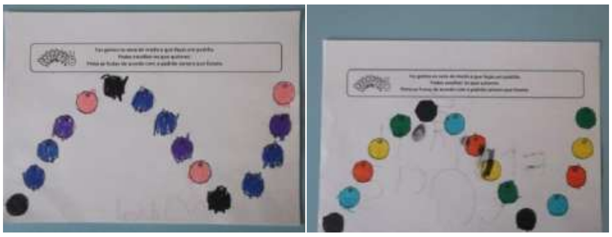


Figura 7. Os padrões do Mário e do Fernando, respetivamente

O António criou um padrão gestual “olhos boca orelhas pés”, referindo que necessitaria de 4 cores. Ao colorir, pintou um padrão do tipo ABCDE, tendo usado cinco cores. Embora não tenha conseguido totalmente fazer a correspondência entre a representação gestual do padrão e a pictórica, verifica-se uma grande evolução, já que, mesmo mantendo a sua opção de usar um grande número de cores manifestada na primeira tarefa de colorir a lagarta, nesta tarefa o António já conseguiu pintar um padrão, sem qualquer engano.

Figura 8. O padrão do António

Após a escolha inicial das canetas, a forma como oito das crianças dispõem as canetas fora da caixa evidencia a identificação que fazem da unidade de repetição, já que selecionam e colocam junto a si as cores necessárias para formar a unidade de repetição, focando-se exclusivamente na sequência das cores. As crianças que não colocaram as canetas fora da caixa voltaram a usar a estratégia, usada na primeira tarefa, de olhar para o início do padrão para verificar a ordem correta das cores a colocar.

Conclusões

Após a implementação das tarefas, pode afirmar-se que a maioria do grupo domina o conceito de padrão e consegue criar padrões de repetição. Foi ainda evidente a evolução das crianças ao nível da complexidade dos padrões criados, sendo que iniciaram padrões com unidades de repetição com um número de elementos até 3 (Vale et al., 2011), tendo depois criado padrões com unidades de repetição com um maior número de elementos (até 5).

As crianças também conseguem identificar erros na construção do padrão quando realizam uma leitura em voz alta, muito em parte devido à entoação. Assim, a leitura do padrão funcionou como um meio de revisitar o padrão elaborado e de tomar consciência do trabalho feito, assumindo uma função metacognitiva de caráter reflexivo, própria de uma atividade autoavaliativa. Nesse processo, existe uma forte interação entre as crianças, sendo que discutem, com um olhar avaliativo, e com base na sua conceção de padrão, não apenas os seus próprios trabalhos mas também os dos colegas. Neste aspeto, os presentes resultados divergem de Garrick et al. (1999), já que as crianças não evidenciam maior facilidade em identificar os padrões criados por si do que os padrões criados pelos colegas. A leitura feita pelas crianças incidia, numa fase inicial, em todos os termos representados do padrão, o que evidencia que as crianças, no início, embora aplicassem uma dada unidade de repetição na criação do padrão, ainda não a verbalizavam como tal, eventualmente por não terem perfeita consciência da mesma.

Algumas crianças usaram a estratégia de olhar para o início do padrão para verificar a ordem correta das cores a colocar (Threlfall, 1999). A estratégia de isolar as canetas necessárias para pintar o padrão e as estratégias para ajudar os amigos a não se enganarem no padrão foram potenciadoras da identificação da unidade de repetição, bem como a ênfase colocada na unidade ao entoarem a cantilena da leitura do padrão (Threlfall, 1999). Também foi importante a solicitação da educadora para que ensinassem os padrões gestuais aos amigos, fazendo apenas os gestos correspondentes à unidade de repetição. Tal como referido por Rustigian (citado por Threlfall, 1999), os movimentos físicos não só facilitam a representação do padrão como também a perceção da unidade de repetição. A generalização é alcançada pelas crianças quando tomam consciência da estrutura do padrão (Mulligan, 2013) e conseguem identificar a unidade de repetição. As crianças parecem, ainda, assumir a ideia de que poderiam dar continuidade ao padrão, já que, face à apresentação dos gestos correspondentes à unidade de repetição, reproduziam o padrão inventado pelo colega durante algum tempo, repetindo várias vezes a unidade gestual. As estratégias mais sofisticadas, indicadas por Papic et al. (2011), de unidade de repetição básica e de unidade de repetição avançada foram usadas pelas crianças. No primeiro caso, elas identificaram a unidade de repetição, independentemente do número de itens, e utilizaram-na para dar continuidade ao padrão. No segundo caso, algumas das crianças estabeleceram a equivalência entre gestos e cores (Vale et al., 2011), conseguindo transpor o mesmo padrão para diferentes representações.

Referências bibliográficas

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Borralho, A., Cabrita, I., Palhares, P., & Vale, I. (2007). Os padrões no ensino e aprendizagem da álgebra. Em I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, Fonseca, L. Santos & P. Canavarro (Orgs.), *Números e álgebra* (pp. 193-211). Lisboa: SEM-SPCE.

DEB (1997). *Orientações curriculares para a educação pré-escolar*. Lisboa: Ministério da Educação.

Devlin, K. (2002). *Matemática: A ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (3ª ed.). New York: Macmillan.

Garrick, R., Threlfall, J., & Orton, A. (1999). Pattern in the nursery. In A. Orton (Ed.), *Patterns in the teaching and learning of mathematics* (pp. 18-30). London: Cassell.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. Carraher & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Mulligan, J. (2013). Reconceptualizing early mathematics learning. In A. M. Lindmeier & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 139-142). Kiel, Germany: PME.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM.

Orton, J. (1999). *Pattern in the teaching and learning of mathematics*. Londres: Cassel.

Palhares, P., & Mamede, E. (2002). Os padrões na matemática do pré-escolar. *Educare-Educere, 10*(1), 107-123.

Papic, M., Mulligan, T., & Mitchelmore, M. (2011). Assessing the developing of preescholers' mathematical patterning. *Journal for Research in Mathematics Education, 42*(3), 237-268.

Pimentel (2010). *Matemática nos primeiros anos: Tarefas e desafios para a sala de aula*. Lisboa: Texto Editores.

Suh, J. M. (2007). Developing algebra: "Rithmetic" in the elementary grades. *Teaching Children Mathematics,* 246-253.

Threlfall, J. (1999). Repeating patterns in the primary years. In A. Orton (Ed.), *Patterns in the teaching and learning of mathematics* (pp. 18-30). London: Cassell.

Vale, I., Pimentel, T., Barbosa, A., Borralho, A., Cabrita, I., & Fonseca, L. (2011). *Padrões em matemática*. *Uma proposta didática do novo programa para o ensino básico*. Lisboa: Texto Editores.

Estatística e Cidadania: Conexões no 6º ano de escolaridade

Paula Silveira Quintas[1], Lina Fonseca[2], Maria Manuel Nascimento[3]
[1]Escola Básica 2,3 Dr. Flávio Gonçalves, paulacristinasq@sapo.pt
[2]Escola Superior de Educação de Viana do Castelo, linafonseca@ese.ipvc.pt
[3]Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, mmsn@utad.pt

Resumo. *Este texto relata parte de um estudo que pretende divulgar o contributo de tarefas com informação estatística organizada e baseada em situações do mundo real no desenvolvimento conjunto da literacia estatística e cidadania de alunos do 6º ano. Foram definidas as seguintes questões de investigação: (i) que conexões é possível estabelecer entre a literacia estatística manifestada pelos alunos e as dimensões da educação para a cidadania?; (ii) que dificuldades apresentaram?. Para concretizar o estudo optou-se por uma metodologia de natureza qualitativa e interpretativa, na vertente de estudo de caso, que envolveu um grupo de quatro alunos. Organizou-se uma proposta pedagógica inspirada em tarefas desafiadoras e a recolha dos dados foi efetuada através da observação participante da investigadora, elaboração de notas de campo, registos áudio das aulas/entrevistas e documentos produzidos pelos alunos. Os alunos utilizaram conhecimentos ao nível da literacia estatística, pois revelaram capacidade para interpretar a informação, avaliar a sua credibilidade e produzir nova informação. Conseguiram integrar as respostas em diversas dimensões da educação para a cidadania, tendo apresentado algumas dificuldades ao nível da Matemática e Português.*

Abstract. *This paper reports part of a study that aims to promote the contribution of tasks concerning data analysis based on real-world situations, joining the development of the statistical literacy and citizenship of 6th grade students (ages 11-12). The following research questions were formulated: (i) which connections can be established between the statistical literacy expressed by the students and all the dimensions of education towards citizenship?; (ii) what difficulties did the students have? A qualitative and interpretive methodology was adopted, using a case study with a group of four students. The pedagogical approach was organized using a set of challenging tasks, and the data collection was carried out through the researcher's direct observation, field notes, audio recording of the lessons/interviews and the written documents from the students. The students used their knowledge, in terms of statistical literacy, to explain their answers, since they showed ability to interpret information, assess its credibility and produce new information. They were able to integrate their answers in several dimensions of the education towards citizenship although displaying some difficulties in Mathematics and Portuguese.*

Palavras-chave: Estatística; Literacia estatística; Cidadania; Educação para a cidadania; Dimensões da educação para a cidadania.

Martinho, M. H., Tomás Ferreira, R. A., Boavida, A. M., & Menezes, L. (Eds.) (2014).
Atas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática. Braga: APM., pp. 389–408

Introdução

Os princípios definidos no Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho[1], e as alterações introduzidas pelo Decreto-Lei n.º 91/2013, de 10 de julho[2], reforçam o caráter transversal da educação para a cidadania (EPAC), sendo passível de ser abordada em todas as áreas curriculares.

Na prática profissional da professora, primeira autora deste texto, todos os anos letivos lhe são atribuídas algumas horas para lecionar educação sexual e EPAC, sendo essas horas obrigatoriamente englobadas nas suas aulas de Ciências Naturais e Matemática, uma vez que não há uma disciplina específica para o efeito. Por norma, a educação sexual aborda-se em Ciências Naturais durante a reprodução humana, mas a exploração de aspetos da EPAC, de modo mais pormenorizado e focando a atenção dos alunos em situações reais, sempre representou um obstáculo para a professora, pois não sabia como a trabalhar sem que os alunos se atrasassem nos conteúdos programáticos de Matemática. Assim sendo, decidiu-se analisar o contributo de tarefas com informação estatística organizada e baseada em "situações do mundo real" (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 1991, p. 125) no desenvolvimento conjunto da literacia estatística e cidadania de alunos do 6ºano, futuros cidadãos profissionais de Portugal. Ou seja, no estudo de Quintas (2013) explorou-se um conjunto de tarefas que trabalham simultaneamente a Matemática e a EPAC de modo a responder às solicitações com que a professora/investigadora se depara no seu dia-a-dia escolar. Aí, foram delineadas as seguintes questões de investigação: (i) que conexões é possível estabelecer entre a literacia estatística manifestada pelos alunos e as dimensões da educação para a cidadania?; (ii) que dificuldades apresentaram os alunos durante a aplicação das tarefas?

Deste estudo, escolheu-se uma tarefa sobre as crianças e jovens vítimas de crime, que, para além da transversalidade das áreas trabalhadas, se destacou pela riqueza da

---

[1] O Decreto-Lei nº 139/2012 estabelece os princípios orientadores da organização e da gestão dos currículos, da avaliação dos conhecimentos e capacidades a adquirir e a desenvolver pelos alunos dos ensinos básico e secundário.

[2] O Decreto-Lei n.º 91/2013 estabelece os princípios orientadores da organização e da gestão dos currículos, da avaliação dos conhecimentos a adquirir e das capacidades a desenvolver pelos alunos e do processo de desenvolvimento do currículo dos ensinos básico e secundário.

abordagem conseguida, pois contribuiu para que os alunos reconhecessem a utilidade do tema, ficassem informados sobre uma realidade em que nunca tinham pensado e, por consequência, se tenham tornado cidadãos mais cultos e mais atentos. Assim, neste texto o objetivo é o de divulgar o contributo destas tarefas baseada em situações do mundo real no desenvolvimento conjunto da literacia estatística e cidadania dos alunos.

A importância da literacia estatística nos diferentes apelos do quotidiano dos cidadãos

Para que os alunos "sejam cidadãos inteligentes que possam tomar decisões de forma crítica e informada, são necessários conhecimentos de estatística" (NCTM, 1991, p. 125; NCTM, 1993, p. 16) e, tal como Ponte (2009), concorda-se que "a influência da estatística na vida das pessoas e nas instituições tem-se tornado cada vez mais visível, o que implica que todos os cidadãos devam ter conhecimentos de estatística para se poderem integrar na sociedade actual" (p. 1). Já Abrantes, Serrazina, e Oliveira (1999) salientavam que o pensamento estatístico "faz parte do mundo actual" (p. 82) e reconheciam que as notícias sobre várias áreas do quotidiano podiam constituir motivação forte para a análise de dados.

De acordo com o ME (2007), o propósito principal de ensino da temática Organização e Tratamento de Dados (OTD) do 2º ciclo é "desenvolver nos alunos a capacidade de compreender e de produzir informação estatística, bem como de a utilizar para resolver problemas e tomar decisões informadas e argumentadas" (p. 42), permitindo aos alunos alcançar um dos seus objetivos gerais: "explorar, analisar, interpretar e utilizar informação de natureza estatística" (p. 42).

A nível do ensino básico, a finalidade primordial do ensino da estatística é promover a literacia estatística, ajudando os alunos a ler e interpretar dados (Martins & Ponte, 2011). Os autores referem que para uma cidadania plena é necessária a capacidade de "ler e interpretar os números e gráficos com que nos deparamos no dia-a-dia" (p. 7). Consequentemente, para se ser estatisticamente letrado é necessário possuir conhecimentos de conceitos e ideias estatísticas, ainda que minimamente, e utilizá-los na resolução de problemas do quotidiano (Pagan & Magina, 2011).

A literacia estatística é entendida como sendo "a capacidade que nos permite interpretar a informação, avaliar a sua credibilidade, e produzir nova informação, quando necessário" (Martins & Ponte, 2011, p. 10), e Gal (2002) considera-a uma "habilidade-chave que se espera dos cidadãos das sociedades de informação" (p. 1). Por sua vez, Carvalho (2006) considera que a estatística desempenha um papel desafiador duplo: por um lado, é um domínio que permite desenvolver competências sociocognitivas nos indivíduos e, por outro, é um campo cujos conhecimentos são essenciais para o exercício pleno da cidadania.

Trabalhar com dados estatísticos provenientes da comunicação social constitui, na opinião de Arteaga, Batanero, Canãdas, e Contreras (2011), uma "estratégia educacional para encurtar a distância entre os contextos escolares e extraescolares" (p. 65); por isso, reforça-se a ideia de que "os livros, os jornais, a internet e os outros meios de comunicação encontram-se repletos de dados apresentados de formas diversificadas" (NCTM, 2007, p. 54), sendo decisivo preparar os alunos, futuros cidadãos profissionais de Portugal, para os analisar e interpretar.

Educação para a cidadania e as suas dimensões

A EPAC "visa contribuir para a formação de pessoas responsáveis, autónomas, solidárias, que conhecem e exercem os seus direitos e deveres em diálogo e no respeito pelos outros, com espírito democrático, pluralista, crítico e criativo" (DGE, 2012, p. 1). A escola constitui um importante contexto para a aprendizagem e exercício da cidadania, pretendendo-se que se assumam dinâmicas curriculares transversais que permitam abordar a EPAC através da aplicação de tarefas, projetos ou atividades. A EPAC, segundo o ME (2002), pode concretizar-se ao longo de todo o percurso escolar e com os contributos de várias áreas disciplinares, e Barbosa (2001) também reconhece que todas as disciplinas curriculares devem envolver-se na EPAC, "quer na vertente das aprendizagens cognitivas, quer na forma como promovem atitudes e valores" (p. 89). Por sua vez, Perrenoud (2005) também advoga que a EPAC é "um problema de todas as disciplinas, de todos os momentos da vida escolar" (p. 13). De facto, nos últimos anos tem-se tornado inegável a importância da EPAC dos jovens como "factor de integração cultural e social essencial para a sua formação como cidadãos conscientes e participativos" (Carvalho, Sousa, & Pintassilgo, 2005, p. 6), assim como o papel da escola na sua consecução. Para Delors et al. (1998), é na escola que " deve começar a educação para uma cidadania consciente e activa" (p. 67) e "adaptada às exigências do nosso tempo" (p. 68). No âmbito desta investigação, pensa-se que o professor de Matemática pode contribuir para uma EPAC que se pretende transversal no contexto escolar, ou seja, considera-se que esta disciplina se encontra numa situação privilegiada para "problematizar os conceitos de cidadania e de educação para a cidadania" (Carvalho et al., 2005, p. 5).

Recentemente foram apresentadas as dimensões da EPAC por Santos et al. (2011), na proposta curricular para os ensinos básicos e secundário, nomeadamente Educação (E.) para os Direitos Humanos, E. Ambiental/Desenvolvimento Sustentável, E. para o Desenvolvimento, E. para a Igualdade de Género, E. para a Saúde e a Sexualidade, E. para os Media, E. do Consumidor, E. Intercultural, E. para a Paz, E. para o Mundo do Trabalho, E. para o Empreendedorismo, E. Financeira e Dimensão Europeia da E., antecipando outras dimensões que vieram a ser contempladas pela Direção-Geral da Educação em dezembro de 2012, no documento "Educação para a Cidadania – Linhas orientadoras", como a E. Rodoviária, a E. para a Segurança e Defesa Nacional e a promoção do Voluntariado.

As tarefas e a exploração de conexões

Para o NCTM (2007), a análise de dados proporciona um ambiente natural para os alunos estabelecerem conexões que lhes serão úteis no trabalho e na vida futura e, de acordo com o PMEB do ME (2007), uma orientação metodológica a seguir em sala de aula prende-se com a *exploração de conexões* entre ideias matemáticas, e entre estas e as de outros campos do conhecimento e mesmo do dia-a-dia do aluno, sendo necessário, para tal, selecionar tarefas que proporcionem um percurso de aprendizagem sustentado e coerente.

Uma das conclusões do trabalho de Sousa (2002) realça as potencialidades das tarefas "na concretização de um ensino verdadeiramente integrado onde, juntamente com os conteúdos estatísticos, os alunos trabalham conteúdos de outros temas e se apercebem da existência de conexões entre conteúdos diversificados" (p. 145). Ponte (2009) considera que um professor tem de preparar um conjunto de tarefas que inclua diversidade em termos de complexidade, nível de desafio e contexto matemático ou extra matemático, e tem também de estar atento ao "tempo de realização previsível e as representações e materiais a utilizar" (p. 102). Stein e Smith (1998) defendem que uma aprendizagem eficaz em educação matemática requer que os alunos se envolvam ativamente em tarefas significativas, diversificadas e desafiadoras. Além disso, Boavida, Paiva, Cebola, Vale, e Pimentel (2008) também referem que "[n]as conexões com outras áreas curriculares, os conceitos ou os procedimentos devem ser encarados não só do ponto de vista matemático, mas também das áreas em questão" (p. 42). Assim, desafiar os alunos com tarefas da EPAC permite a *exploração de conexões* entre ideias matemáticas e as desta área, oferecendo um contributo diferente nas suas formações matemática e cívica.

Metodologia de investigação

Opções metodológicas

De acordo com o problema em estudo, seguiu-se uma metodologia qualitativa de natureza interpretativa, baseada num estudo de caso constituído por um grupo de quatro alunos do 6º ano, uma vez que se pretendia observar, analisar e compreender o contributo de tarefas com informação estatística organizada e real, no desenvolvimento conjunto da literacia estatística e cidadania. Os investigadores qualitativos em educação, de acordo com Bogdan e Biklen (1994), estão constantemente a interrogar os sujeitos de investigação, com o intuito de perceber "aquilo que eles experimentam, o modo como eles interpretam as suas experiências e o modo como eles próprios estruturam o mundo social em que vivem" (p. 51). A investigação qualitativa utiliza-se na pesquisa em educação matemática e opta-se pelo estudo de caso num grande número de trabalhos académicos (Ponte, 1994; Yin, 2001; Vale, 2004).

Contexto da investigação

O estudo realizou-se durante 2011-2012, numa escola do 2º e 3º ciclos do litoral norte com cerca de 800 alunos. Esta escola tem boas instalações, funciona há 15 anos e, com base no texto do seu Projeto Educativo, pode-se afirmar que se encontra inserida numa zona de uma cidade que abrange diversos bairros de habitação social onde vivem famílias socialmente desfavorecidas e precariamente inseridas no tecido produtivo. Ao nível dos alunos, os principais problemas residem nas dificuldades de aprendizagem, falta de competências de estudo, desmotivação e baixas expectativas de futuro, potenciando estes fatores o insucesso educativo.

A Turma

O estudo desenvolveu-se numa turma do 6º ano, uma vez que os conteúdos a estudar se reportam a este nível. A investigadora, para além de professora de Matemática, era diretora de turma, o que se traduzia em mais tempo disponível para estar com os alunos, pois também lecionava Ciências Naturais, Estudo Acompanhado e Formação Cívica. Contudo, a investigadora não foi professora destes alunos no 5º ano, pelo que não havia continuidade pedagógica e o tema OTD não havia sido lecionado durante o mesmo ano por falta de tempo. Resumidamente, e com base nas Fichas dos Alunos, a turma constituía-se por 26 alunos (13 rapazes e 13 raparigas), com média de idades de 11 anos, com Português como língua materna. Destes alunos, dezassete usufruíam de apoio da Ação Social Escolar, três ficaram retidos no 6º ano e seis contavam com retenções ao nível do percurso escolar anterior. Dez alunos afirmaram que a escola era a melhor forma de fazer amigos novos, brincar, conviver e usufruir de professores meigos que ensinam bem. Os restantes relataram não gostar de estudar/ler e que os encarregados de educação não se preocupavam em estabelecer um horário de estudo nem controlavam os cadernos diários.

Fundamentação da escolha do grupo de quatro alunos

A professora, como diretora de turma, conhecia a opinião e a postura dos alunos face à disciplina de Matemática e à escola em geral. Sendo responsável pela atividade "Problema do Mês" do 2º ciclo, tinha acesso à pontuação global alcançada por cada aluno. Sendo assim, foram escolhidos quatro alunos (AC, AL, P e T) para constituir o grupo caso, dadas as limitações do tempo da lecionação da temática OTD. Na tabela 1 apresenta-se a sua descrição resumida.

Tabela 1. Descrição resumida dos alunos com base em textos redigidos pelos próprios

Aluna AL	Tem 11 anos, estatura média, olhos azuis e cabelo claro. Gosta de brincar, passear, ver tv, jogar computador, dançar/cantar e estudar. Considera a escola um sítio onde aprende e convive. Bloqueia quando tem um limite de tempo para executar uma tarefa, por isso tinha baixa pontuação no "Problema do Mês" e manifestava alguma dificuldade ao nível da comunicação e raciocínio matemático. No entanto alcança o nível 3 a Matemática.
Aluno P	Tem 11 anos, estatura alta e olhos/cabelo castanho. Adora futebol e não gosta de fazer os tpc. A escola representa um "edifício de aprendizagem" e a Matemática é uma ciência que todos deviam saber. Tem nível 4, é participativo, revela bom raciocínio matemático, porém mostra relutância em escrever/representar o que pensa, por isso a sua pontuação no "Problema do Mês" é baixa.
Aluna AC	Tem 11 anos, estatura baixa e olhos/cabelo castanhos. Adora gelados, chocolate, férias, brincar, cinema, ler, cantar, ver tv, ser simpática, amiga e colaborar quando as pessoas precisam de ajuda. A escola representa um local de cultura, onde é preciso respeitar os outros e prestar atenção ao que os professores ensinam, reconhecendo que a Matemática é "importantíssima pois precisamos dela para quase tudo". Tem nível 4 e manifesta facilidade ao nível da resolução de problemas, comunicação matemática oral/escrita e raciocínio matemático, alcançando por isso, bons resultados no "Problema do Mês".
Aluno T	Tem 11 anos, estatura média e olhos/cabelo castanhos. Considera o futebol um desporto completo pois pode ter amigos e fazer exercício ao mesmo tempo. Tem medo das más companhias, acha que é gentil, educado e cavalheiro. Reconhece que tem dificuldades a Português e que a escola é "uma seca", mas não pode pensar desta maneira, pois precisa dela para ter uma boa profissão. Apesar de algumas dificuldades na comunicação matemática escrita, tem nível 3 e consegue resolver com sucesso o "Problema do Mês" obtendo uma pontuação alta.

Estes alunos foram selecionados de acordo com cinco critérios: (i) heterogeneidade no aproveitamento a Matemática (dois com nível 3 e dois com nível 4); (ii) facilidade em comunicar e raciocinar matematicamente (dois com maior facilidade e dois com menor); (iii) género (dois rapazes/duas raparigas); (iv) diferentes níveis de sucesso na execução do problema do mês (dois com pontuação global baixa e dois com pontuação global alta); e (v) assiduidade às aulas. Deliberadamente não foram escolhidos alunos de nível 2 e de nível 5, como forma de prevenir o insucesso ou o excesso de confiança na aplicação das tarefas.

Recolha e análise de dados

Os dados recolhidos numa investigação qualitativa são ricos em pormenores descritivos relativos a pessoas, locais e conversas, pretendendo-se com eles privilegiar a compreensão de comportamentos e não testar suposições (e.g. Bogdan & Bicklen, 1994;Vale, 2004). A recolha dos dados ocorreu em ambiente natural de sala de aula e durante a observação participante da investigadora. Na tabela 2 relacionam-se os objetivos dos diferentes instrumentos de recolha de dados.

Tabela 2. Instrumentos de recolha de dados e seus objetivos

Observação Participante	Segundo Yin (2010) a *observação participante* é uma modalidade especial da observação uma vez que o investigador não é um mero observador passivo, possibilitando obter acesso ao grupo que se está a estudar que de outro modo seria impossível e permite "captar a realidade do ponto de vista de alguém interno ao estudo de caso, não de alguém externo a ele" (p.139). Neste sentido, a investigadora assumiu o papel de observadora participante, durante a resolução da tarefa e realização da entrevista.
Notas de Campo	Sempre que se achava uma mais-valia para o estudo, tiravam-se breves *notas de campo* que espelhassem as atitudes, posturas, empenho, dificuldades, problemas, gestos e até fisionomias dos alunos. O registo destas notas foi concluído, essencialmente, no final da aplicação da tarefa ou durante o próprio momento, tendo este instrumento de recolha de dados possibilitado comparar o que os alunos diziam, ou não diziam, com o que faziam ou escreviam.
Gravações Áudio	O recurso às *gravações áudio da aula e entrevista*, e respetivas transcrições, permitiu manter intacta a informação recolhida, reviver as situações sempre que necessário e fornecer informação em primeira mão para se proceder à apresentação e análise dos dados.
Documentos escritos pelos alunos	Os *documentos escritos pelos alunos* referem-se às folhas de registo da tarefa e, segundo Goetz e LeCompte (1984) citados por Vale (2004), "este tipo de material providencia dados para o estudo, pois são manifestações materiais de convicções e de comportamentos" (p.183). Estes registos foram uma excelente fonte de informação pois, segundo Yin (2001), desempenham uma função de relevo na investigação qualitativa ao possibilitar a confirmação de conclusões oriundas de outras fontes de dados e permitiram comparar a comunicação escrita com a comunicação oral dos alunos.
Entrevista coletiva semiestruturada	Segundo Vale (2004) as *entrevistas* permitem ao investigador obter informações ou opiniões dos alunos "cara-a-cara" (p.179), sendo um dos métodos mais eficazes de recolha de dados, e por sua vez, Bogdan e Biklen (1994) referem a este propósito que as boas entrevistas se caracterizam "pelo facto de os indivíduos estarem à vontade e falarem livremente dos seus pontos de vista" (p.136). As entrevistas qualitativas segundo os mesmos autores, variam quanto ao grau de estruturação, desde as entrevistas estruturadas, até às não estruturadas. Assim, optou-se por realizar uma entrevista semiestruturada realizada coletivamente ao grupo caso tendo sido elaborado um guião de entrevista centrado no tema em estudo. Esta entrevista serviu como pilar para a obtenção de respostas e conclusões às questões formuladas. Salienta-se que a entrevista foi conduzida aos alunos em simultâneo num ambiente natural, descontraído e sem pressões, procurando deixar os alunos responderem espontaneamente, uma vez que é fundamental durante o questionamento proporcionar "ao aluno tempo suficiente para poder pensar e dar uma resposta" (Fernandes, 2009, p.4).

A análise dos dados desta investigação partiu de situações particulares e a narração dos dados e resultados foi descritiva, de forma a compreender o significado que os alunos atribuem às suas experiências (método indutivo). Para analisar os dados foram desenvolvidas, com base no problema, questões de investigação e revisão da literatura, 4 categorias de análise: (i) informação estatística utilizada (por exemplo: identificar dados, legendas, natureza da variável estatística e moda dos gráficos e tabelas; tecer comentários; formular questões; reconhecer diferentes representações gráficas para a mesma informação estatística; reconhecer que não existem dados suficientes para responder; calcular médias, frequências relativas e determinar amplitudes de ângulo de um gráfico circular); (ii) aspetos de literacia estatística manifestados ao nível da capacidade de interpretar, analisar, avaliar criticamente, produzir nova informação e comunicar sobre a informação estatística real apresentada; (iii) aspetos de cidadania manifestados ao nível, por exemplo, do ambiente, acidentes de viação, direitos/deveres do cidadão, pobreza, desemprego, crime, fome, saúde, escolaridade, segurança/violência escolar e voluntariado; e (iv) dificuldades dos alunos (por exemplo: interpretação dos gráficos, tabelas e textos; resolução das questões das tarefas; cálculos; conteúdos estatísticos e matemáticos; formalização e estruturação de respostas completas; dinâmica de grupo e eventuais inseguranças demonstradas).

Estrutura da proposta pedagógica, as tarefas e as entrevistas

Uma vez que não tinha sido lecionada a OTD no 5º ano, foi necessário respeitar a planificação do 6º ano e esperar pelo 3º período para se aplicarem as tarefas e realizarem as entrevistas. Foi autorizado o uso da máquina de calcular para se libertarem os alunos de cálculos demorados.

Como já era habitual, organizou-se a turma em grupos de dois alunos e num grupo de quatro, que constituiu o estudo de caso (alunos AC, AL, P e T). As doze tarefas foram aplicadas depois da lecionação da unidade temática, durante as aulas de Matemática/Estudo Acompanhado, e organizadas com base no PMEB (ME, 2007), jornais, Estatísticas APAV[3] – Crianças e jovens vítimas de crime 2000/2010, Relatório de Atividades 2010 do Banco Alimentar contra a Fome de Lisboa, Relatório Anual de

---

[3] APAV - Associação Portuguesa de Apoio à Vítima.

Segurança Interna 2011, Relatório COSI[4] Portugal 2008, e inspiradas nos desafios propostos pelo ALEA[5].

Em resumo, a temática das tarefas aliada à OTD e a *exploração de conexões* constituiu a novidade. Assim, durante uma semana eram aplicadas três tarefas e subsequentemente realizava-se uma entrevista coletiva semiestruturada sobre o trabalho desenvolvido (tabela 3).

Tabela 3. Dinâmica criada para a organização da proposta pedagógica

1ª Semana	1 - Os Incêndios Florestais; 2 - Os Acidentes de Viação; 3 - À Procura de Trabalho	1ª Entrevista
2ª Semana	4 - A Saúde; 5 - A Pobreza; 6 - Distribuição de Médicos em Portugal	2ª Entrevista
3ª Semana	7 - A importância da Escolaridade; 8 - O Perfil do Turista Português; **9 - Crianças e Jovens Vítimas de Crime**	3ª Entrevista
4ª Semana	10 - Banco Alimentar contra a Fome; 11 - Violência em ambiente escolar; 12 - A Obesidade entre os 6 e 8 anos	4ª Entrevista

Para cada tarefa foi previsto um tempo de 45 minutos, exceto para a nº 9, que se previu um bloco de 90 minutos. Para as entrevistas semiestruturadas não foi definido o tempo; porém, pensou-se que a duração de uma hora seria aceitável, de forma a não fatigar o grupo caso.

Selecionou-se a tarefa 9 para apresentar e analisar, uma vez que o grupo caso se mostrou interventivo e interessado pela temática. Esta tarefa, para além da transversalidade das áreas trabalhadas (tabela 4), destacou-se pela riqueza da abordagem conseguida, que levou a que os alunos reconhecessem a utilidade do tema, uma vez que ficaram informados sobre uma realidade sobre a qual nunca tinham pensado e, por consequência, tornaram-se cidadãos mais informados, mais conscientes, e afirmaram ir ficar mais atentos às notícias de televisão sobre este tema.

[4] COSI - Childhood Obesity Surveillance Initiative.
[5] ALEA - Ação Local Estatística Aplicada.

Tabela 4. Resumo da tarefa 9

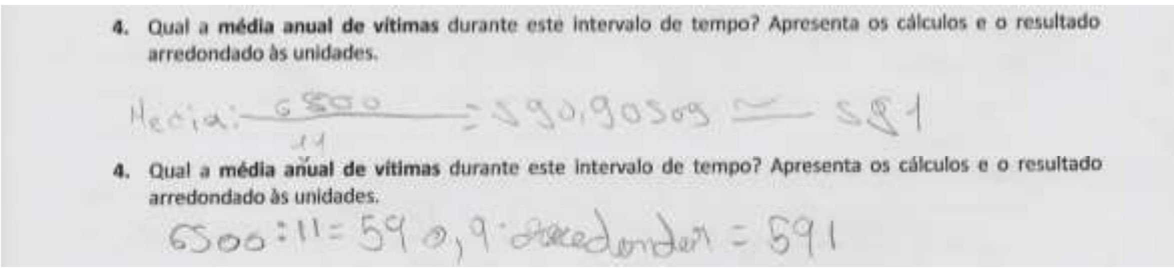
Objetivos a atingir para a literacia estatística:	Ler e interpretar a tabela, identificar dados, frequências absolutas e relativas (totais, por linha linha e por coluna), medidas de tendência central, interpretação de medidas, amplitudes e extremos, usar os dados reais da APAV para fazer previsões com base nas séries apresentadas.
Principais conexões esperadas com a matemática:	Proporcionalidade direta, arredondamentos e percentagem de aumento
Principais conexões esperadas com as dimensões da cidadania:	Educação para os Direitos Humanos, Educação para a Segurança e Defesa Nacional e Educação para os Media, em particular, saber que podem recorrer à APAV e ficar informados e sensibilizados para a existência de crianças e jovens vítimas de crimes, informados dos seus direitos enquanto cidadãos, tornar-se cidadãos mais atentos ao que se passa na sociedade e usar os media para encontrar informação nos sites adequados.

Apresentação e análise da tarefa 9 – "Crianças e Jovens Vítimas de Crime"

Nos minutos seguintes à distribuição da tarefa, registou-se o seguinte diálogo:

> Aluno P: Coitados dos bebés! (…) são vítimas de crime… coitadinhos… não sabia…
> Aluno T: Mas dos 11-17 anos é o dobro… o dobro não… dez vezes mais… no ano de 2000. E até foi um ano calmo comparado com os outros.
> Aluno P: (…) neste intervalo de tempo foram 6500… vou pegar na calculadora para confirmar.
> Aluno T: Temos de arredondar a média, certo?
> Aluna AL: Às unidades.

Face às observações dos alunos, à produção escrita que iniciaram, ao título correto que deram à tabela, à identificação do intervalo de tempo em que decorreu o estudo estatístico da APAV e ao cálculo da média, foi possível concluir que a interpretação dos dados foi bem conseguida. Desenvolveram por iniciativa própria uma atitude crítica face aos valores da tabela, pois quiseram confirmar através de cálculos que o valor referente ao total de vítimas estava certo.


4. Qual a **média anual de vítimas** durante este intervalo de tempo? Apresenta os cálculos e o resultado arredondado às unidades.

Média: $\frac{6500}{11}$ = 590,90509 ≃ 591

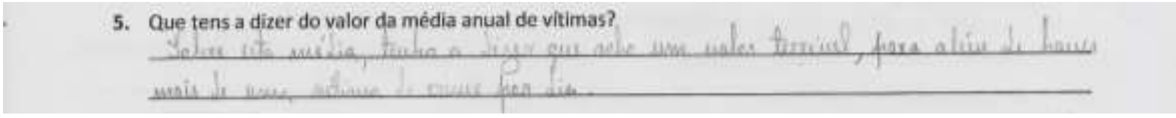
4. Qual a **média anual de vítimas** durante este intervalo de tempo? Apresenta os cálculos e o resultado arredondado às unidades.

6500 : 11 = 590,9 arredondar = 591

Figura 1. Respostas respetivas dos alunos P e T na questão 4
[Destaca-se o facto de não apresentarem a unidade (vítimas)]

Relativamente ao valor da média obtido, os alunos acharam um valor muito alto, e houve quem o relacionasse, recorrendo à calculadora, com os 365 dias que tem um ano, chegando à conclusão que havia mais de uma vítima por dia.

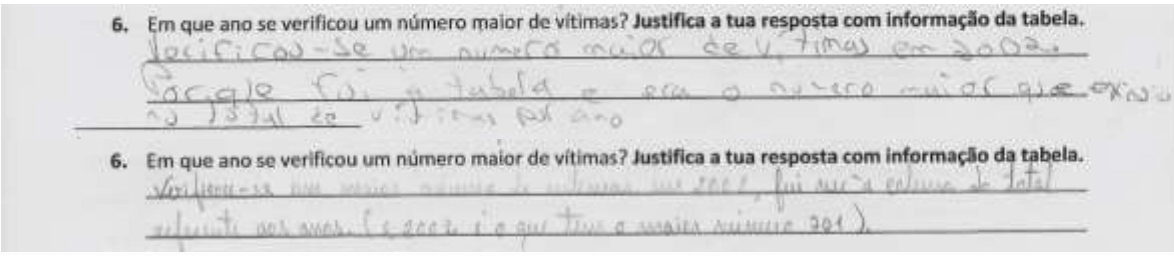
> Aluna AC: É mais de uma vítima de crime por dia… vou pegar na calculadora… 591:365 dá 1,6 vítimas…



5. Que tens a dizer do valor da média anual de vítimas?
Sobre esta média, tenho a dizer que acho um valor terrível, para além de haver mais de uma vítima de crime por dia.

Figura 2. Resposta da aluna AC na questão 5

Não apresentaram dificuldades em descobrir o ano em que se registou o maior número de vítimas. Porém, só uma aluna deu a resposta completa, tendo especificado que eram 701 vítimas. No entanto, houve alunos que assinalaram ou rodearam este número na tabela.



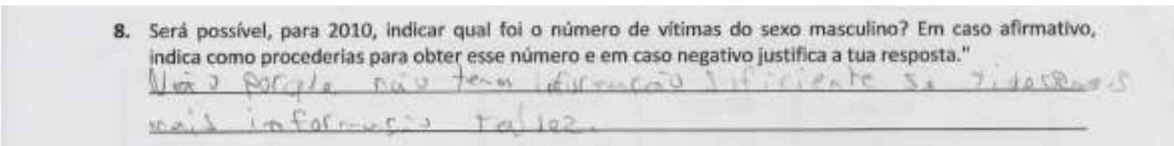
6. Em que ano se verificou um número maior de vítimas? **Justifica a tua resposta com informação da tabela.**
Verificou-se um número maior de vítimas em 2002. Porque foi à tabela e era o número maior que estava no total de vítimas por ano

6. Em que ano se verificou um número maior de vítimas? **Justifica a tua resposta com informação da tabela.**
Verificou-se um maior número de vítimas em 2002, fui ver à coluna do total referente aos anos. (e 2002 é o que tem o maior número 701).

Figura 3. Respostas respetivas dos alunos P e AC na questão 6

> Aluno T: Na 7 diz a que tipo de crimes se refere…
> Aluno T: Maus tratos, violência doméstica…
> Aluna AL: A violência doméstica pode ser física ou psicológica…
> Aluno T: A psicológica é pior pois ficamos traumatizados e com medo… na física as dores passam…e depois só dá vontade de chorar.
> Aluno P: Como se escreve pedofilia?… Um pedófilo faz mal às crianças sexualmente…
> Aluno T: E a violação também é grave.
> Aluna AC: E o assalto? E quando se mata?

Associaram os crimes à pedofilia, abusos sexuais, raptos, assaltos, homicídios, violência doméstica, maus tratos e violação. O grupo reconheceu que não era possível calcular o número de vítimas do sexo masculino em 2010, uma vez que na tabela não havia informação suficiente que permitisse obter a resposta.



8. Será possível, para 2010, indicar qual foi o número de vítimas do sexo masculino? Em caso afirmativo, indica como procederias para obter esse número e em caso negativo justifica a tua resposta."
Não porque não tem informação suficiente se tivéssemos mais informação talvez.

Figura 4. Resposta do aluno P na questão 8

Aluno T: Eu estou a somar tudo e não dá 100%?
Aluna AC: Dá 99.9%.
Aluno P: … é por causa dos arredondamentos feitos em cada ano… e eu dividi 332 por 6500 e dá… 0,051… tá mal…
Aluna AL: Claro… falta multiplicar por 100!
Aluno P: Pois… dá 5,1% como na tabela.

Voltaram a manifestar uma atitude crítica face aos valores da tabela, pois quiseram confirmar através de cálculos que as percentagens parciais e totais estavam corretas. Quiseram testar a credibilidade da informação apresentada. Identificaram a faixa etária em que houve mais vítimas, mas só uma aluna apresentou a resposta completa, detalhando que foram 3449 vítimas. Mais uma vez, houve alunos que assinalaram ou rodearam este número na tabela.

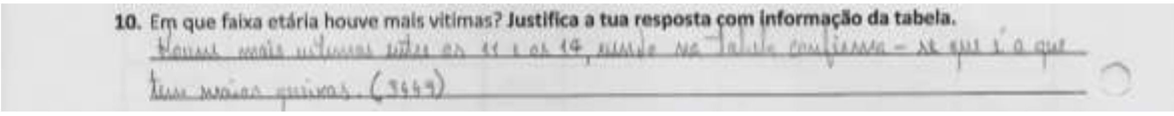

10. Em que faixa etária houve mais vitimas? **Justifica a tua resposta com informação da tabela.**
(3449)

Figura 5. Resposta da aluna AC na questão 10

Aluna AL: Professora, qual é o valor inicial para calcular a percentagem de aumento?
Investigadora: Lê a pergunta… é de 2000 a 2010. Em que coluna tens de procurar?
Aluna AL: Na do total… e no ano 2000… e… é a diferença entre os valores de 2000 e 2012 a dividir pelo valor inicial…
Investigadora: E façam também pelo método da proporção.
Aluna AC: A minha calculadora falhou… para o exame vou levar duas…

Durante um curto intervalo de tempo, os alunos revelaram algumas hesitações a calcular a percentagem de aumento e a proporção. Sentiu-se, mais uma vez, a extrema necessidade da calculadora e a preocupação que ela deixe de funcionar!

Aluno P: Dá… 175,6%... tenho o 1 a interferir…
Alunas AL: É necessário subtrair 100%.
Aluno P: Ah… pois é… é um aumento!
Aluno T: Já fiz das duas formas e consegui. Assim temos a certeza que está certo!

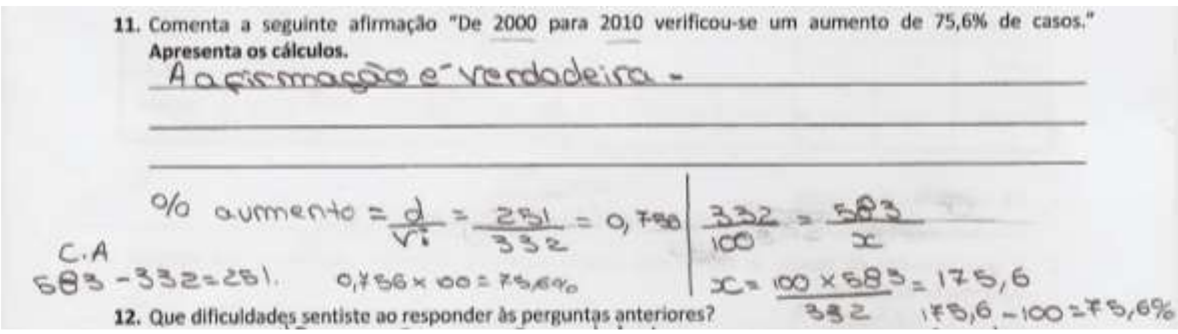

11. Comenta a seguinte afirmação "De 2000 para 2010 verificou-se um aumento de 75,6% de casos." **Apresenta os cálculos.**
A afirmação é verdadeira.
% aumento $= \frac{d}{Vi} = \frac{251}{332} = 0,756$
C.A
$583 - 332 = 251$
$0,756 \times 100 = 75,6\%$
$\frac{332}{100} = \frac{583}{x}$
$x = \frac{100 \times 583}{332} = 175,6$
$175,6 - 100 = 75,6\%$
12. Que dificuldades sentiste ao responder às perguntas anteriores?

Figura 6. Resposta da aluna AL na questão 11

Referiram que tiveram dificuldades em calcular a percentagem de aumento e construir frases. Indicaram que com esta tarefa tiveram conhecimento da existência da APAV, souberam que havia muitas crianças e jovens vítimas de crime e relembraram a percentagem de aumento e proporções. Referiram também que esta tarefa foi útil para as suas aprendizagens como seres humanos e cidadãos, porque consideram importante estar informados, uma vez que nunca tinham pensado que havia tantas crianças e jovens vítimas de crime e se um dia tiverem um problema ficaram a saber que podem recorrer à APAV.

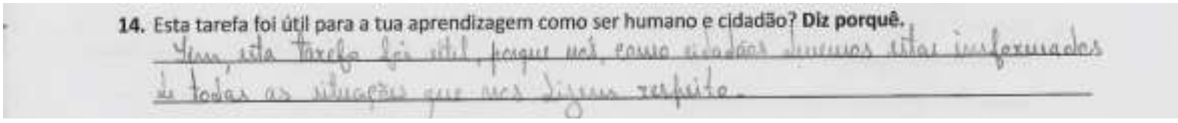

14. Esta tarefa foi útil para a tua aprendizagem como ser humano e cidadão? **Diz porquê.**
Sim, esta tarefa foi útil, porque nós, como cidadãos devemos estar informados de todas as situações que nos digam respeito.

Figura 7. Resposta da aluna AC na questão 14

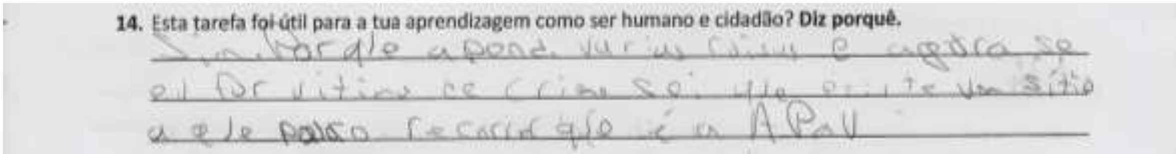

14. Esta tarefa foi útil para a tua aprendizagem como ser humano e cidadão? **Diz porquê.**
Sim porqe aprendi varios crimes e agora se eu for vitima de crime sei que existe um sitio a qe poso recorrer qe é a APAV

Figura 8. Resposta do aluno P na questão 14

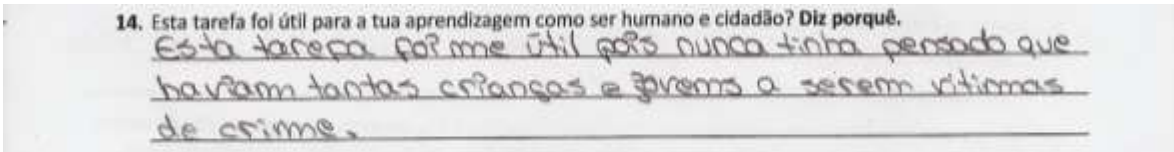

14. Esta tarefa foi útil para a tua aprendizagem como ser humano e cidadão? **Diz porquê.**
Esta tarefa foi-me útil pois nunca tinha pensado que haviam tantas crianças e jovens a serem vítimas de crime.

Figura 9. Resposta da aluna AL na questão 14

De forma a compreender o que os alunos aprenderam com esta tarefa e de que forma podem ultrapassar as suas dificuldades, destacam-se os seguintes diálogos ocorridos durante a terceira entrevista coletiva:

> **Investigadora: E acham que se podem tornar cidadãos mais atentos e conscientes, depois destas tarefas? Se sim, o que têm que fazer/aprender?**
>
> Aluno P: Sim, pois posso chamar a atenção e dar conselhos aos nossos amigos, irmãos e familiares.
>
> Aluna AL: Tanto na 7 como na 9, podemos ajudar e dar conselhos… e agora, quando aparecer uma reportagem na televisão, eu vou estar mais atenta!
>
> Aluna AC: Sim. Porque… se alguém conversar comigo sobre estes temas eu vou saber dar uma opinião! A 7 tornou-me consciente sobre a importância do saber… e a 8 deu-me uma cultura geral aprofundada e a 9 melhorou a minha interpretação e análise de gráficos. E também fiquei a saber o número de vítimas…
>
> Aluno T: Para mim foi tudo novidade, logo vou ficar mais atento e consciente…

Investigadora: Como podem ultrapassar as dificuldades que tiveram?

Aluna AL: Praticar (…) a percentagem de aumento, melhorar a interpretação das perguntas, estar com atenção, ler mais vezes a mesma pergunta… etc.

Aluno P: Ler a introdução das tarefas e os enunciados mais do que uma vez. Eu nunca leio os enunciados, passo logo para as perguntas. Interpretar com atenção os gráficos e tabelas, ler as legendas, praticar a percentagem de aumento que estava esquecida…tirar dúvidas com a professora.

Aluna AC: Estudar os conteúdos matemáticos e de português, voltar a ler as questões quando não percebo, fazer composições e ler as introduções pelo menos 2 vezes. Eu faço isso!

Investigadora: Eu reparei que não colocam acentos nas palavras, fazem respostas rápidas e às vezes sem sentido, não dizem porquê e… esquecem-se de colocar as unidades nas respostas!

Aluno T: Tem razão… A Língua Portuguesa é o meu grave problema… e a caligrafia…

Os alunos voltaram a reconhecer que se tornaram cidadãos mais atentos, críticos e conscientes, pois foram confrontados com assuntos que eram novidade, o que permitiu aumentar a sua cultura geral. Acrescentaram ainda que as aprendizagens feitas lhes vão permitir estar mais atentos às notícias da televisão, bem como exprimir uma opinião durante uma conversa e dar conselhos. Para ultrapassar as dificuldades, os alunos referiram que tinham de insistir no estudo da Língua Portuguesa e Matemática.

Conclusões

Ao longo da tarefa 9, os alunos exibiram conhecimentos de OTD que nos levaram a considerá-los *estatisticamente letrados* ao utilizar a informação estatística organizada das seguintes formas: deram um título à tabela de frequências absolutas e relativas; identificaram todos os dados da tabela; selecionaram corretamente a informação de que necessitavam, ou seja, revelaram capacidade de ler e interpretar os dados organizados na forma de tabela e de os usar para responder às questões; desenvolveram por iniciativa própria uma atitude crítica face aos valores da tabela, pois confirmaram através de cálculos se as frequências absolutas totais e frequências relativas parciais e totais estavam certas, ou seja, testaram a credibilidade da informação apresentada; calcularam a média pedida tendo apresentado o valor arredondado às unidades; fizeram encadeamento de cálculos de forma a produzir nova informação, isto é, descobriram o número de vítimas por dia; opinaram relativamente ao valor da média obtida e ao tipo de crimes que podiam estar associados aos dados da tabela; inferiram que esta não tinha dados suficientes para determinar o número de vítimas do sexo masculino e confirmaram o acréscimo do número de vítimas entre 2000 e 2010 através da percentagem de aumento e de uma proporção. Salienta-se que houve alunos que tiveram o cuidado se assinalar o que achavam importante na tabela. Assim sendo, o recurso à *exploração de conexões* revelou-se em sintonia com as posições de Gal (2002), Carvalho (2006), Martins e Ponte (2011), Arteaga et al. (2011) e DGE (2012).

Durante a aplicação da tarefa e entrevista, ao nível das *conexões com a cidadania*, verificou-se que os alunos integraram as suas respostas e discursos nas seguintes dimensões da EPAC: E. para os Direitos Humanos, E. para a Segurança e Defesa Nacional e E. para os Media. Selecionaram-se estas dimensões uma vez que os alunos: tiveram conhecimento da existência da APAV; associaram os crimes à pedofilia, abusos sexuais, raptos, assaltos, homicídios, violência doméstica, maus tratos e violação; nunca se tinham apercebido de que os bebés eram vítimas de crime e tiveram acesso ao número de vítimas de crime através das Estatísticas APAV 2000/2010. Tal como o advogaram Delors et al. (1998), Barbosa (2001), Perrenoud (2005) e Carvalho et al. (2005), também os alunos reconheceram que esta tarefa foi útil para as suas aprendizagens como seres humanos e cidadãos, pois consideram importante estar informados, uma vez que nunca tinham pensado que havia tantas crianças e jovens vítimas de crime e se um dia tiverem um problema ficaram a saber que podem recorrer à APAV.

Por ter sido um dos objetivos do estudo de Quintas (2013), considerámos importante deixar uma breve menção às principais *dificuldades* evidenciadas pelos alunos, que foram: calcular a percentagem de aumento; resolver cálculos, pois revelaram-se muito dependentes da calculadora; erros ortográficos; caligrafia; construir frases; ortografia de algumas palavras; ausência de resposta escrita na pergunta que envolvia cálculos, dando a entender que basta apresentar o resultado para a resposta estar completa; completar as respostas quando pede para justificar; colocar unidades; e explicar por escrito de forma a que as pessoas entendam. Como era prática habitual, verificou-se que os alunos trabalharam bem em grupo e interagiram entre si. Para ultrapassar as dificuldades, eles próprios referiram que tinham de: insistir no estudo do Português/Matemática; ler bem e mais de uma vez os enunciados; fazer composições; ler/interpretar textos; melhorar a caligrafia e a atenção/concentração; ler várias vezes uma pergunta; tirar dúvidas com a professora; praticar exercícios; e ler/interpretar com atenção os gráficos, tabelas e legendas.

Com satisfação, refere-se que esta tarefa permitiu confirmar que é possível abordar a EPAC através da estatística, sem necessidade de atribuir mais horas letivas e sem penalizar a gestão anual do programa de Matemática do 6º ano. Além disso, o entusiasmo dos alunos levou ao sucesso da *exploração das conexões* que se almejavam através desta tarefa 9, tal como preconizam Stein e Smith (1998), Sousa (2002), NCTM (2007) e Boavida et al. (2008). Esta tarefa foi particularmente gratificante para a investigadora, pois concretizou uma realidade que idealizava há muito!

Para finalizar, destacam-se duas frases proferidas durante a 3ª entrevista, pela importância atribuída pelos alunos às conexões com a EPAC: "… se alguém conversar comigo sobre estes temas eu vou saber dar uma opinião!" (aluna AC); "Para mim foi tudo novidade, logo vou ficar mais atento e consciente…" (aluno T).

Referências bibliográficas

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A matemática na educação básica*. Lisboa: Ministério da Educação – Departamento de Educação Básica.

ALEA (2011). *Ação Local Estatística Aplicada*. Disponível em www.alea.pt (acedido em julho de 2011).

Arteaga, P., Batanero, C., Canãdas, G., & Contreras, J. (2011). Las tablas y gráficos estadísticos como objetos culturales. *NÚMEROS: Revista de Didática de las Matemáticas*, *76*, 55-67. Disponível em http://www.sinewton.org/numeros (acedido em julho de 2011).

Barbosa, M. (2001). *Educação do cidadão: Recontextualização e redefinição*. Braga: Edições APPACDM.

Boavida, A. M., Paiva, A. L., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A experiência matemática no ensino básico*. Lisboa: ME/DGIDC. Disponível em http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/005_Brochura_experiencia_matematica.pdf (acedido em março de 2014).

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Carvalho, C. (2006). Desafios à educação estatística. *Boletim Sociedade Portuguesa de Estatística*, edição de outubro,7-9. Lisboa: Fundação para a Ciência e a Tecnologia.

Carvalho, C., Sousa, F., & Pintassilgo, J. (2005). *A educação para a cidadania como dimensão transversal do currículo escolar*. Porto: Porto Editora.

Decreto-Lei n.º 91/2013, de 10 de julho. *Diário da República* – I Série, n.º 131 – 10 de julho de 2013.

Decreto-Lei nº 139/2012, de 5 de julho. *Diário da República* – I Série, n.º 129 – 5 de julho de 2012.

Delors, J., Al-Mufti, I., Amagi, I., Carneiro, R., Chung, F., Geremek, B., et al. (1998). *Educação, um tesouro a descobrir – Relatório para a UNESCO da Comissão Internacional sobre Educação para o século XXI*. S. Paulo: Cortez Editora.

DGE (2012). *Educação para a cidadania – Linhas orientadoras*. Disponível em http://www.dgidc.min-edu.pt/educacaocidadania/ (acedido em dezembro de 2012).

Gal, I. (2002). Adult's statistical literacy: Meanings, components, responsabilities. *International Statistical Review*, *70*(1), 1-25.

Martins, M., & Ponte, J. (2011). *Organização e tratamento de dados*. Brochura de acompanhamento do Programa de Matemática do Ensino Básico. Disponível em http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/matematicaOTD_Final.pdf (acedido em janeiro de 2013).

ME (2002). *Reorganização curricular do ensino básico – Novas áreas curriculares*. Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica.

ME (2007). *Programa de matemática do ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Básico.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1993). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Coleção de adendas: quinto ano. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Pagan, A., & Magina, S. (2011). A interdisciplinaridade auxiliando o ensino da estatística na educação básica. *XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática* (*CIAEM*) (pp.1-10). Brasil: Recife.

Perrenoud, P. (2005). *Escola e cidadania: O papel da escola na formação para a democracia*. Porto Alegre: Artmed.

Ponte, J. (1994). O estudo de caso na investigação em educação matemática. *Revista Quadrante*, *3*(1), 3-18.

Ponte, J. (2009). O novo programa de matemática como oportunidade de mudança para os professores do ensino básico. *Interações*, *12*, 96-114.

Quintas, P. (2013). *Estatística e cidadania: Exploração de conexões*. *Uma abordagem no 6º ano de escolaridade* (dissertação de mestrado não publicada). Escola Superior de Educação de Viana do Castelo, Viana do Castelo, Portugal.

Santos, M., Marques, A., Cibele, C., Matos, F., Menezes, I., Nunes, L., et al (2011). *Educação para a cidadania – Antiga proposta curricular para os ensinos básico e secundário*. Lisboa: Ministério da Educação. Disponível em http://www.dgidc.min-edu.pt/educacaocidadania/index.php?s=directorio&pid=71 (acedido em julho de 2011).

Sousa, O. (2002). *Investigações estatísticas no 2º ciclo do ensino básico* (dissertação de mestrado). Lisboa: APM.

Stein, K., & Smith, S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *3*(4), 268-275.

Vale, I. (2004). Algumas notas sobre investigação qualitativa em educação matemática: O estudo de caso. *Revista da Escola Superior de Educação de Viana do Castelo*, *5*, 171-202.

Yin, R. (2001). *Estudo de caso – Planejamento e métodos* (2ª ed.). Brasil: Bookman.

Anexo 1 - Tarefa 9 “Crianças e Jovens Vítimas de Crime”

APAV Apoio à Vítima

Os problemas desta tarefa baseiam-se nas “Estatísticas APAV - Crianças e jovens vítimas de crime 2000/2010”. *(acedido em* http://www.apav.pt/portal/pdf/Criancas_e_jovens_vitimas_crime_2000-2010.pdf.pdf)

APAV - Associação Portuguesa de Apoio à Vítima

Analisa a seguinte tabela e responde às seguintes questões:

	0-3 anos		4-5 anos		6-10 anos		11-17 anos		TOTAL	
2000	19	2,8%	34	5,4%	83	4,8%	196	5,7%	**332**	**5,1%**
2001	47	6,8%	51	8,1%	144	8,3%	318	9,2%	**560**	**8,6%**
2002	71	10,3%	61	9,7%	166	9,6%	403	11,7%	**701**	**10,8%**
2003	78	11,3%	65	10,4%	187	10,8%	370	10,7%	**700**	**10,8%**
2004	66	9,6%	60	9,6%	197	11,3%	310	9,0%	**633**	**9,7%**
2005	52	7,6%	40	6,4%	153	8,8%	277	8,0%	**522**	**8,0%**
2006	69	10,0%	61	9,7%	158	9,1%	272	7,9%	**560**	**8,6%**
2007	62	9,0%	68	10,9%	167	9,6%	304	8,8%	**601**	**9,2%**
2008	88	12,8%	67	10,7%	175	10,1%	366	10,6%	**696**	**10,7%**
2009	73	10,6%	64	10,2%	160	9,2%	315	9,1%	**612**	**9,4%**
2010	63	9,2%	55	8,8%	147	8,5%	318	9,2%	**583**	**9,0%**
TOTAL	**688**	**100,0%**	**626**	**100,0%**	**1737**	**100,0%**	**3449**	**100,0%**	**6500**	**100,0%**

1. Dá um **título** a esta tabela. ____

2. A que intervalo de tempo se refere este estudo estatístico da APAV? **Justifica a tua resposta com informação da tabela.** ____

____

3. Quantas vítimas recorreram aos serviços da APAV, neste intervalo de tempo? **Diz porquê.**

____

____

4. Qual a **média anual de vítimas** durante este intervalo de tempo? Apresenta os cálculos e o resultado arredondado às unidades.

5. Que tens a dizer do valor da média anual de vítimas? ________________________________

____

6. Em que ano se verificou um número maior de vítimas? **Justifica a tua resposta com informação da tabela.** ____

____

7. A que tipo de crimes se refere esta tabela? **Dá exemplos.** ____________________________

____

8. Será possível, para 2010, indicar qual foi o número de vítimas do sexo masculino? Em caso afirmativo, indica como procederias para obter esse número e em caso negativo justifica a tua resposta. ____

____

9. Ao longo da tabela aparece escrito "100%". **Explica o seu significado.** ________________

____

10. Em que faixa etária houve mais vitimas? **Justifica a tua resposta com informação da tabela.** ____

____

11. Comenta a seguinte afirmação "De 2000 para 2010 verificou-se um aumento de 75,6% de casos." **Apresenta os cálculos.**

____

____

12. Que dificuldades sentiste ao responder às perguntas anteriores? ________________________

____

____

13. O que aprendeste com esta tarefa? ____

____

____

14. Esta tarefa foi útil para a tua aprendizagem como ser humano e cidadão? **Diz porquê.**

____

____

____

Tarefa 9 – continuação.

A mídia vídeo e a formação de professores que ensinam Matemática: Um panorama de pesquisas brasileiras[1]

Paulo Henrique Rodrigues[1], *Renata Viviane Raffa Rodrigues*[2], *Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino*[3], *Hélia Margarida Oliveira*[4]
[1]Universidade Estadual de Londrina, paulohr_91@yahoo.com.br
[2]Universidade Estadual de Londrina, Universidade Federal da Grande Dourados, Universidade de Lisboa, reraffa@gmail.com
[3]Universidade Estadual de Londrina, marciacyrino@uel.br
[4]Universidade de Lisboa, hmoliveira@ie.ulisboa.pt

Resumo. *O objetivo desse artigo é estudar em que contextos de investigação a mídia vídeo tem sido utilizada na formação de professores que ensinam matemática no Brasil. A partir de um levantamento de dissertações e teses[2] (2000-2014) no Banco de Teses da CAPES, realizamos uma análise interpretativa de 10 trabalhos que abordavam a temática "mídia vídeo e a formação de professores que ensinam matemática". Foi possível identificar quatro eixos temáticos e observar que as investigações têm recorrido de modo mais incisivo à mídia vídeo no formato da videoconferência como um ambiente de aprendizagem para a formação de professores que ensinam matemática que possibilita comunicação entre os envolvidos. Os resultados indicam que no Brasil há poucos trabalhos cujo foco seja a mídia vídeo e a formação de professores que ensinam matemática, tampouco o uso do vídeo como recurso para professores em serviço e futuros repensarem suas práticas. Sendo assim, o uso do vídeo na formação de professores que ensinam matemática requer investigações mais aprofundadas no Brasil, principalmente no que diz respeito à análise de ações em sala de aula, associados a esse contexto.*

Abstract. *The objective of this paper is to study in which research contexts to video media has been used in mathematics teacher education in Brazil. From an inventory of dissertations and theses (2000-2014) at the CAPES bank thesis, we performed an interpretive analysis of 10 studies that addressed the theme "video media and mathematics teacher education". It was possible to identify four themes and noted that the investigations have contested more incisively to the video media in the format of videoconferencing how a learning environment for the mathematics teacher education that enables communication between those involved. The results indicate that in Brazil have few studies whose focus is the video media and*

[1] Agradecemos ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo financiamento à pesquisa. Esse artigo integra parte das pesquisas de mestrado e doutorado dos dois primeiros autores, respectivamente integradas ao projeto "Rede de Cooperação UEL/UL na elaboração e utilização de Recursos Multimídias na Formação de Professores de Matemática" (processo número: 402440/2012-9) financiado pelo CNPq, coordenado pela terceira autora.

[2] No Brasil, são chamadas de dissertações os trabalhos de mestrado e de teses os trabalhos de doutorado.

teacher education for those who teach mathematics, nor the use of video as a resource for teachers futures or in service and rethink their practices. Thus, the use of video in mathematics teacher education requires further investigation in Brazil, especially with regard to the analysis of actions in the classroom associated with this context.

Palavras-chave: Educação Matemática; Formação de professores que ensinam matemática; Vídeo.

Introdução

Nos últimos anos os membros do GEPEFOPEM[3] têm desenvolvido trabalhos no sentido de investigar fatores que interferem no desenvolvimento profissional de professores que ensinam matemática, em contextos de formação inicial e continuada. O foco principal das pesquisas desenvolvidas pelo grupo está nas propostas de formação de professores que vão além das de cursos de treinamento, que isoladamente não têm apontado resultados satisfatórios.

Enquanto pesquisadores desse grupo de estudos e pesquisa[4], temos observado que no Brasil existem diversos cursos de graduação e pós-graduação, tanto na Educação a Distância quanto na Educação Presencial, em que o recurso ao vídeo é referido no contexto da formação inicial ou continuada de professores que ensinam matemática. A partir desse elemento, buscamos estudar em que contextos de investigação, no Brasil, a mídia vídeo tem sido utilizada na formação de professores que ensinam matemática. Nesse sentido, realizamos um estudo de dissertações e teses levantadas no Banco de Teses da CAPES[5] em torno dessa temática. Para orientar os procedimentos metodológicos desse estudo, assumimos as perspectivas de Bates (1996, 2005) e Panda (2006) a respeito de "mídia" e "tecnologia".

No que se refere à temática do vídeo e à formação de professores de matemática, buscamos apresentar o que os estudos, no âmbito internacional, têm discutido sobre o assunto (Alsawaie & Alghazo, 2010; Oliveira & Cyrino, em publicação; Pelegrino & Gerber, 2012; Santagata & Guarino, 2011; Stein & Smith, 2009; Van Es & Sherin, 2008).

---

[3] Grupo de Estudo e Pesquisa sobre Formação de Professores que Ensinam Matemática – Universidade Estadual de Londrina. Mais informações em: www.uel.br/grupo-estudo/gepefopem

[4] Os três primeiros autores desse artigo são membros desse grupo.

[5] Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior. Mais informações em: http://www.capes.gov.br/servicos/banco-de-teses

Para concluir, destacamos que discussões em torno da temática "mídia vídeo e a formação de professores que ensinam matemática" têm sido privilegiadas no cenário brasileiro.

Mídias e Tecnologias

Nesse trabalho assumimos as classificações de mídia e tecnologia discutidas por Bates (1996, 2005) e Panda (2006). Segundo Panda (2006), existe uma relação de dependência entre os termos tecnologias e mídias e ambos assumem características distintas. Para ele, mídia se refere à forma de comunicação e como o conhecimento é representado. Existem, segundo sua perspectiva, cinco tipos de mídia, nomeadamente: contato humano, texto, áudio, vídeo e computação/informática. Essas mídias possuem distintas formas de organização e apresentação por meio de formatos ou estilos, são executadas por meio de tecnologias apropriadas e cada uma pode ser realizada por diferentes tecnologias. As tecnologias, segundo Panda (2006), referem-se em grande parte a *hardware* e a mecanismos necessários para "transmissão" das mensagens das mídias. É nesse sentido que é estabelecida a relação de dependência entre mídia e tecnologia. As tecnologias são as ferramentas que possibilitam que as informações das mídias sejam apresentadas. Esse autor apresenta alguns exemplos de tecnologia, como o material impresso que apresenta as mensagens da mídia texto e o vídeo cassete que apresenta as informações da mídia vídeo.

Bates (1995, 2005) apresenta quatro tipos de mídia: textos e gráficos, áudio, vídeo e computação/informática. Sua ideia da relação entre mídia e tecnologia vai ao encontro da apresentada por Panda (2006).

Quadro 1. Tipos de mídia e tecnologia (Bates, 1995, 2005, cit. em Panda, 2006, p. 55, tradução nossa)

Mídia	Tecnologias	Aplicações	
		Caminho único	Caminho duplo
Textos e gráficos	Material Impresso	Materiais de auto-aprendizagem (unidades curriculares e leituras complementares)	Correspondência Tutoria Fax
Áudio	Fitas cassetes Rádio Telefone	Programas Áudio-cassetes Transmissões de rádio -	Audioconferência - Tutoria por telefone -
Vídeo	Transmissão Vídeo cassetes TV a cabo TV por satélite	Transmissão televisiva Programas Vídeo-cassetes Transmissão televisiva a cabo	Tv interativa Videoconferência - -

		Transmissão televisiva de satélite	
Computação/ informática	Computadores Telefone Satélite Fibra ótica ISDN CDROM	Computador como auxílio para ensino/aprendizagem Treinamento pelo computador, dvds, CD-ROM, banco de dados de computadores	E-mails, multimídia interativa, conferência pelo computador, banco de dados interativos

É possível observar, no quadro, que a tecnologia é o mecanismo que possibilitará que a informação da mídia seja apresentada, bem como as "aplicações" das mídias e tecnologias. Tais aplicações podem ser de um único caminho, pelo fato de não se ter interação, como no caso de transmissões de rádio (em que não há interação direta com o ouvinte), e de duplo caminho, quando há interação entre duas ou mais pessoas (como a videoconferência)[6].

Tendo em conta a ideia de mídia vídeo discutida por Bates (1996, 2005) e Panda (2006), apresentamos na próxima seção elementos dos trabalhos de diferentes autores em torno da temática da mídia vídeo (e suas tecnologias) e a formação de professores que ensinam Matemática.

Mídia vídeo e a formação de professores que ensinam Matemática

Nos últimos anos, diferentes trabalhos, em âmbito internacional, têm aprofundado o estudo sobre o uso do vídeo na formação de professores que ensinam matemática (Alsawaie & Alghazo, 2010; Oliveira & Cyrino, em publicação; Pelegrino & Gerber, 2012; Santagata & Guarino, 2011; Stein & Smith, 2009; Van Es & Sherin, 2008).

Stein e Smith (2009) apontam que a utilização do vídeo pode ser um elemento potencial para reflexão em contextos de formação de professores. As autoras sugerem que as aulas de um professor podem ser filmadas de modo a possibilitar reflexões (individuais ou coletivas) a respeito das ações em sala de aula. Nesse sentido, essas dinâmicas visam o

[6] Os tipos de mídias apresentados por Bates (1996, 2005), em nossa visão, não se tratam de categorias e sim de agrupamentos, já que elas não são mutuamente exclusivas. Por exemplo, na mídia do tipo "computação/informática" pode-se ter o vídeo, áudio e textos e gráficos. O que as distingue é que no agrupamento "computação/informática" as tecnologias relacionadas possuem algumas características a mais.

desenvolvimento profissional tanto do professor filmado (que pode refletir a respeito da aula) quanto de outros profissionais que analisam as filmagens (perspectiva coletiva).

Pellegrino e Gerber (2012) realizaram um trabalho com professores participantes de cursos de pós-graduação, de diferentes áreas, sendo a Matemática uma delas, em que o vídeo foi utilizado como um instrumento de autoanálise e reflexão. Os envolvidos realizavam análise de gravações em vídeo de suas aulas e alguns deles discutiram os aspectos evidenciados em um grupo maior, posteriormente. Os autores sugerem que o processo de autorreflexão possibilita que os envolvidos identifiquem aspectos mais e menos positivos enquanto professores permitindo a investigação e explicitação de suas práticas.

O vídeo também tem sido usado em contextos de formação de professores que ensinam Matemática com a intenção de que estes desenvolvam capacidades relacionadas à análise do ensino (Alsawaie & Alghazo, 2010; Van Es & Sherin, 2008). Os resultados desses trabalhos mostram que os envolvidos, de modo geral, apresentaram indícios de desenvolvimento dessas capacidades a partir de uma dinâmica de discussão coletiva em torno desses registros em vídeo que, por vezes, envolviam os próprios sujeitos que estavam a discutir.

Procedimentos metodológicos

Para constituirmos um corpo de trabalhos para análise interpretativa, realizamos inicialmente uma busca no Banco de Teses da Capes, no Brasil, com os termos "mídias formação professores matemática". Como resultado, obtivemos 21 dissertações e teses. Dessas 21 dissertações e teses, conseguimos fazer o *download* de 18 delas. Após a leitura dos resumos dessas 18 dissertações e teses, identificamos que 15 apresentavam como uma das temáticas a formação de professores que ensinam matemática. Observamos, então, excertos dessas 15 dissertações e teses (resumos, introduções, procedimentos metodológicos, resultados e conclusões) e selecionamos aquelas que utilizavam a mídia vídeo, no sentido que é discutida por Bates (1996, 2005) e Panda (2006), com vista a *identificar os* contextos de investigação em que a mídia vídeo tem sido abordada e quais as implicações desse uso na formação de professores que ensinam matemática. No Quadro 2 listamos os dez trabalhos analisados.

Quadro 2[7]: Códigos e referências dos trabalhos analisados

Código	Referência
MA01	Carneiro (2005)
MA02	Chiarato (2005)
MA03	Guedes (2010)
MA04	Nunes (2010)
MA05	Correa (2011)
MA06	Dias (2012)
MP01	Melillo (2011)
TD01	Zullato (2007)
TD02	Almeida (2012)
TD03	Amorin (2012)

Para realizarmos a análise dos trabalhos, elencamos alguns descritores de análise (Quadro 4) constituídos por dois eixos de interesse, um com informações a respeito da investigação e outro com relação às ações e implicações do uso da mídia vídeo na formação de professores que ensinam matemática.

Quadro 4: Descritores utilizados para orientar a análise

Descritor	Definição
Objetivo(s)	Objetivo(s) da pesquisa
Problema	Questão(ões) geral(ais) de investigação
Resultados e conclusões	Resultados alcançados em relação aos objetivos
Implicações do uso da mídia vídeo na formação de professores que ensinam Matemática	Como foi utilizada e quais as potencialidades da mídia vídeo para a formação de professores que ensinam Matemática

Resultados da análise

As análises realizadas a partir desses descritores possibilitaram a identificação de quatro eixos temáticos: (i) vídeo relacionado às mídias televisivas; (ii) vídeo como material didático no campo das Tecnologias de Informação e Comunicação; (iii) videoconferência como ambiente de aprendizagem na Educação a Distância; e (iv) videoaula como instrumento de comunicação no ensino e aprendizagem.

No Quadro 5 associamos os eixos temáticos identificados aos respectivos códigos dos trabalhos.

[7] Atribuímos a nomenclatura "MA" para dissertação de mestrado acadêmico, seguida de um número que representa a ordem cronológica em que foi publicada. A mesma perspectiva foi atribuída para dissertação de mestrado profissional (MP) e tese de doutorado (TD).

Quadro 5: Eixos temáticos constituídos a partir da análise dos trabalhos

Eixos temáticos	Códigos
Vídeo relacionado às mídias televisivas[8]	MA05, TD02, TD03
Vídeo como material didático no campo das Tecnologias de Informação e Comunicação	MA03, MA04, MA06
Videoconferência como ambiente de aprendizagem na Educação a Distância	MA01, MA02, MP01, TD01,
Videoaula como instrumento de comunicação no ensino e aprendizagem	MP01

A Mídia Vídeo na formação de professores que ensinam Matemática: aspectos abordados na produção brasileira

Por meio da análise do "Objetivo" e "Problema" das investigações percebemos que, apesar de os trabalhos utilizarem a mídia vídeo, essa temática não está diretamente relacionada ao objeto de estudo da maioria dos trabalhos. Contudo, nos resultados e conclusões desses trabalhos encontramos dados acerca de como a mídia vídeo foi utilizada e quais as possíveis potencialidades desse uso na formação de professores que ensinam Matemática. Tais dados deram origem ao descritor de análise "implicações da mídia vídeo na formação de professores que ensinam Matemática" que suscitaram a criação dos eixos temáticos indicados.

Vídeo como material didático no campo das Tecnologias de Informação e Comunicação

Esse eixo foi constituído ao identificarmos que dentre as Tecnologias de Informação e Comunicação, tais como *softwares* para o ensino de Matemática, plataformas para produção de salas virtuais, Internet, a mídia vídeo também foi considerada como material didático relevante na/para formação de professores, bem como na Educação Matemática. A investigação do trabalho *MA04* (Nunes, 2010), de modo geral, consistiu em observar/compreender a Educação Digital de professores, atuantes na Educação Básica, em um curso (projeto de extensão), com momentos presenciais e semi-presenciais, chamado "Mídias nas aulas de Matemática". O trabalho apresenta o uso de vídeos como

[8] Neste eixo não identificamos explicitamente nos trabalhos elementos potenciais da mídia vídeo para a formação de professores que ensinam matemática. Por esse motivo, decidimos estruturar a nossa análise somente a partir dos três últimos eixos.

recurso lúdico para expor alguns tópicos matemáticos. Tais vídeos ficavam disponíveis na plataforma Moodle para os professores em serviço envolvidos em um contexto de formação. Contudo, não há uma discussão mais aprofundada acerca de *como* e *quais* as possibilidades formativas do uso dos vídeos dos temas matemáticos na formação dos professores de Matemática em serviço.

No trabalho *MA03***,** Guedes (2010) investigou o processo de produção de material didático para EAD[9], em disciplinas de Licenciatura em Matemática, no contexto de uma universidade pública brasileira. Embora não seja foco de Guedes (2010) investigar o uso do vídeo, a autora apresenta uma preocupação com a produção e combinação dos materiais didáticos para serem utilizados em contextos de formação de professores na educação não presencial, dentre eles a mídia vídeo. Segundo a autora, os elementos, aspectos e características de um material didático são de fundamental importância para os processos de aprendizagem dos futuros professores.

> A produção do material didático para cursos a distância é um dos maiores problemas dessa modalidade educacional em razão da diversidade das mídias em que é veiculado no momento contemporâneo. Isso indica que o material didático produzido precisa levar em consideração a confluência entre as mídias Web, impressa, vídeo, áudio, CD Rom, e que demanda a articulação de várias competências profissionais, como o conteudista, os designers instrucionais, diagramadores web e impresso, revisores, ilustradores, programadores, entre outros[10] (Guedes, 2010, p. 22)

É ressaltado pelo autor que na EAD existe uma linguagem específica a ser utilizada, o que justifica a análise crítica dos elementos, aspectos e características da composição dos materiais didáticos, dado sua importância para os processos de aprendizagem dos alunos. Podemos inferir que a mídia vídeo relaciona-se com aprendizagens de futuros professores em contextos de Educação a Distância, embora não tenha sido evidenciada tal inferência por parte da autora. Inferimos isso, pois no contexto investigado, a partir dos apontamentos do professor conteudista, do professor formador, do revisor e do *design* instrucional, a autora ressalta a importância de considerar as especificidades da Educação a Distância na elaboração de materiais didáticos para utilização nesse contexto.

---

[9] EAD no Brasil é sigla utilizada para os termos "Educação à Distância".

[10] No contexto do trabalho, o professor conteudista é responsável pela elaboração, criação intelectual do conteúdo e de todo material didático. O professor formador acompanha as ações do professor tutor. O revisor é o responsável pela revisão da língua portuguesa do material didático e o *design* instrucional é quem adequa o conteúdo para as diferentes mídias da UAB/IFCE.

No trabalho *MA06*, Dias (2012), de modo geral, observou as formas de uso das TICs por professores formadores de um curso de licenciatura em Matemática em disciplinas que relacionavam aspectos tecnológicos à Educação. No que se refere ao uso do vídeo, identificamos nos resultados que os professores formadores participantes da investigação planejavam aulas em ambiente virtual de aprendizagem e uma de suas propostas baseava-se na produção de vídeos por parte dos futuros professores.

Nos três trabalhos o uso dos vídeos nos processos formativos dos professores de Matemática é considerado como importante pelos autores; porém, como não é o foco dessas investigações, os dados acerca do vídeo encontram-se junto ao uso das TIC de um modo generalizado, ou seja, as menções ou discussões relacionadas à mídia vídeo estiveram relacionadas a um recurso das TIC e não a elementos específicos para formação de professores.

Videoconferência como ambiente de aprendizagem na Educação a Distância

Em cinco trabalhos, a videoconferência é apontada como meio de comunicação significativo no processo de formação de professores que ensinam Matemática.

No trabalho *MA02*, Chiarato (2005), de modo geral, realizou um estudo de caso em um Curso Normal Superior em contextos da Educação a Distância. Nessa perspectiva, ela tratou da construção/circulação do conhecimento e da interação professor/aluno. Apesar de não apresentar, por não ter um objetivo nessa linha, possíveis elementos da mídia vídeo que sejam potenciais para "construção do conhecimento matemático dos cursistas", ou seja, dos professores, o autor aponta o ambiente virtual *videoconferência* como um de seus elementos constituintes, como um ambiente em que isso acontecia (ou deveria acontecer).

> Os encarregados pela *construção do conhecimento matemático* dos cursistas deveriam ser os professores distantes fisicamente. Estes professores da disciplina de matemática *que determinavam o elenco dos conteúdos a serem desenvolvidos, consideravam o cursista um sujeito portador de um conhecimento tácito* (Chiarato, 2005, p. 42, itálico nosso).

Além dos apontamentos relacionados à constituição dos conhecimentos matemáticos por parte dos cursistas/professores, o autor também aponta inferências que dizem respeito à comunicação por parte dos envolvidos nesse contexto, como trocas de experiências, momentos de discussão sobre práticas em sala de aula. A videoconferência teve um importante papel nesse sentido, já que era nos ambientes em que ela acontecia que esses aspectos relacionados à comunicação eram evidenciados.

No trabalho *MA01*, Carneiro (2005), de modo geral, investigou como ocorreram as práticas educacionais em diferentes ambientes de aprendizagem de um curso normal superior com mídias interativas[11]. Essa pesquisa assume a videoconferência como ambiente de aprendizagem, uma vez que considera a sua utilização como meio eficaz de comunicação entre os participantes e os formadores. Os resultados apontam que a videoconferência ampliou as possibilidades de interação e interatividade entre formadores e professores em formação e em serviço. Cabe assinalar que os termos interação e interatividade não são tomados como sinônimos: "Belloni (2001, p. 58) conceitua interação como 'ação recíproca entre dois ou mais atores onde ocorre intersubjetividade, isto é, encontro de dois sujeitos que pode ser direta ou indireta' e vê a interatividade como sendo a 'característica técnica que significa a possibilidade de o usuário interagir com uma máquina'" (Carneiro, 2005, p. 61).

Nessa perspectiva, a investigação acerca da formação de professores na modalidade Educação a Distância recorre à videoconferência como meio de permitir a interação, ou seja, o estabelecimento de relações entre as instituições envolvidas (professor formador, professor em formação e conhecimento). Enquanto que, quando se tratava do sujeito e sua relação com as mídias digitais ou analógicas, a intencionalidade da formação consistia em buscar a interatividade entre eles.

A videoconferência foi utilizada e analisada enquanto ambiente de aprendizagem na Educação a Distância para os professores que realizaram o curso normal superior com mídias interativas. Os momentos denominados presenciais do curso foram realizados por videoconferência com a finalidade de os formadores conduzirem aulas com ajuda de um tutor de diferentes assuntos da formação, inclusive tópicos matemáticos das séries iniciais, tais como a multiplicação de um número decimal por um inteiro. Nesse sentido, identificamos um potencial da mídia vídeo relacionado à comunicação matemática em contextos de educação à distância, uma vez que essa tecnologia foi privilegiada no trabalho com conceitos matemáticos e representou um ambiente de aprendizagem no contexto investigado.

[11] Mantivemos este trabalho para análise, pois a autora observou diretamente um dos temas abordados no Curso Normal Superior: Matemática

No trabalho *TD01*, Zulatto (2007), de modo geral, investigou a natureza da aprendizagem matemática de professores em serviço em um curso *online* chamado "Geometria com *geometricks*". Esse trabalho considera a importância da constituição de um ambiente *online* de aprendizagem por meio da videoconferência com vistas a propiciar a discussão matemática e o processo de troca de informações.

> [...] *O curso em análise propiciou um ambiente de interação pela oralidade, através da videoconferência*. Esta é uma forma de comunicação usual em nosso cotidiano. Expressar matematicamente *somente de forma escrita*, como acontece no caso do chat, por exemplo, *requer outra forma de pensamento, de expressão das idéias e raciocínios desenvolvidos no decorrer de uma atividade, em um multiálogo* (Zulatto, 2007, pp. 133-134, itálico nosso).

As características pontuadas nesse excerto mostram a relação da videoconferência, de discussão, de troca de ideias, de interação aos professores, e a relação destes com a aprendizagem.

A pesquisa de Nunes (2010) também pode ser pertencente a esse eixo, haja visto que a formação de professores desenvolvida e investigada no trabalho *MA04* entende a videoconferência como meio de promover encontros síncronos em tempo real entre os participantes.

No trabalho *MP01*, Melillo (2011), de modo geral, buscou compreender como se deu o processo de mudança de professores formadores quando tiveram que lecionar em um contexto de Educação a Distância. Para isso observou a prática de um professor formador e realizou entrevistas com quatro outros professores formadores. Nesse trabalho, o autor faz uma referência a utilização de videoconferências e webconferências no contexto investigado e explicita uma diferença entre elas. Além disso, segundo ele "as vídeo e/ou webconferências[12] e as videoaulas mediavam a comunicação e definiram formas de se

[12] A videoaula trata-se de um recurso em que vídeos são gravados a partir da captura de tela de um computador. Além da imagem, também é possível incluir sons e falas. As webconferências são conferências que acontecem em tempo real e são transmitidas via Internet. Elas reproduzem visualmente, ao espectador, a área de trabalho de um computador de onde elas são transmitidas. A interação se dá a partir de mensagens instantâneas, voz, compartilhamento de vídeos, textos, *slides* em *Powerpoint* e de um quadro branco. As videoconferências consistem em uma exposição oral em tempo real para os futuros professores que se encontram em um polo presencial. A partir da câmera, os futuros professores veem o professor formador. Nas videoconferências os futuros professores podem interagir com o professor formador e com colegas de outros polos apresentando dúvidas, sugestões, etc.

ensinar e aprender matemática na EaD neste contexto" (Mellilo, 2011, p. 114). Além de ter influenciado, segundo nossa inferência, na aprendizagem de conceitos matemáticos por futuros professores, a mídia vídeo, de modo geral, relacionou-se com aspectos da comunicação, que são essencialmente importantes em processos de formação inicial e/ou continuada. Esse aspecto relacionado a comunicação também é ressaltado pelo autor quando ele indica que um dos professores formadores que investigou, que não utilizava as videoconferências, pôde "repensar suas estratégias sobre, por exemplo, utilização de videoconferência, webconferência e atuação nos fóruns, de modo a mobilizar uma maior participação dos estudantes" (p. 128). Percebe-se que, embora não explicitamente, o pesquisador considera importante um aspecto comunicacional na Educação a Distância por parte dos futuros professores. Nesse sentido, as indicações da videoconferência e webconferência podem sugerir interessantes elementos de interação que as tecnologias da mídia vídeo possuem para a formação de professores que ensinam Matemática na Educação a Distância.

Videoaula como instrumento de comunicação no ensino e aprendizagem

Consideramos pertinente a constituição desse eixo porque nele o autor do trabalho *MP01* apresenta dados concernentes à produção de videoaulas para contextos de Educação a Distância com o intuito de diminuir a "distância geográfica e psicológica" entre alunos e professores. Além disso, Melillo (2011) destaca que as videoaulas contribuíram para a explicitação da linguagem matemática, prática que em ambientes de Educação a Distância são encontradas limitações técnicas.

> Certo dia, em uma sala da universidade, onde se reuniam alguns professores, dentre eles Pedro, um professor questionou sobre como poderia postar a solução de um exercício na plataforma para um aluno que estava com dúvidas em Matemática. Apesar de possível, este e muitos professores acreditam ser difícil e trabalhosa a digitação de fórmulas na plataforma Moodle.
> Pedro imediatamente sugeriu o uso do tablet para escrever a resolução do exercício a mão livre sobre o quadro branco do NetMeeting, usando o Blueberry para escrever e comentar (através do áudio) a solução. Desde então, alguns professores se interessaram, aprenderam e hoje utilizam as videoaulas como recurso de ensino-aprendizagem (p. 92)[13].

[13] O Netmeeting é um programa que simula um quadro branco. O Blueberry é um programa que captura a imagem do computador e grava o áudio simultaneamente.

Tais resultados indicam que a videoaula foi utilizada na formação de professores que ensinam Matemática como instrumento que possibilitou novos elementos à comunicação matemática entre professor formador - futuro professor.

Considerações Finais

Nesse trabalho pudemos constatar que as pesquisas analisadas mencionam aspectos particulares da mídia vídeo na formação de professores que ensinam Matemática. A constituição dos eixos temáticos por meio do que foi identificado nas pesquisas mostra que a maior parte das investigações considera a importância da videoconferência como ambiente de aprendizagem para oportunizar a comunicação na Educação a Distância. Todavia, o trabalho *MA01* pondera que a comunicação pode ou não ocorrer e isso está relacionado a como o formador vai conduzir as interações por videoconferência.

Nos trabalhos analisados referentes ao eixo *Videoconferência como ambiente de aprendizagem na Educação a Distância* o uso dessa tecnologia apresentou-se associado à ideia da interação síncrona (em tempo real) para o estabelecimento de relações entre professor formador e professor em formação de modo a permitir que o formador conheça as formas de aprendizagem dos professores participantes. Entretanto, o trabalho *MA01* explicita que as interações podem ser mais ou menos positivas dependendo do estabelecimento da comunicação entre os participantes.

No que se refere aos resultados do uso e análise da videoconferência na formação de professores as pesquisas indicam diversos aspectos positivos:

- possibilidade dos participantes em formação compartilharem experiências de ensino e ideias na resolução de problemas matemáticos e educacionais;
- mobilização de reflexões significativas à prática educacional.

Foram também apontadas limitações mas apenas no trabalho *MA01*, sendo elas:

- as práticas educacionais de alguns formadores das videoconferências pautaram-se na denominada “educação bancária” criticada por Paulo Freire, em que a ação do aluno limita-se a receber os depósitos, informações do formador, arquivá-los e guardá-los;
- problemas técnicos devido ao acesso simultâneo dos participantes a Internet rompiam com as possibilidades de interação.

Também no contexto de Educação a Distância foi possível perceber uma preocupação com a produção de videoaulas, uma vez que a perspectiva assumida no trabalho *MP01* considera que por meio da videoaula o formador pode acrescentar elementos alternativos em relação a mídias como o material gráfico.

O cenário exposto mostra que as pesquisas no âmbito da formação de professores que consideram esta mídia a partir de vídeos de tópicos matemáticos, videoconferências e videoaulas possuem aspectos importantes para comunicação entre formadores e professores (futuros e em serviço), bem como para comunicação matemática. Dessa forma, concluímos que o elemento potencial da mídia vídeo apontado nas pesquisas de âmbito internacional (Alsawaie & Alghazo, 2010; Oliveira & Cyrino, em publicação; Pelegrino & Gerber, 2012; Stein & Smith, 1998; Van Es & Sherin, 2002, 2008) está diretamente relacionado ao desenvolvimento profissional do professor, futuro ou em serviço, principalmente quanto à mobilização de reflexões, a partir de análises interpretativas e críticas das práticas de ensino de matemática. No panorama das pesquisas brasileiras, tais intencionalidades não foram identificadas. Destacam-se, contudo, contextos de utilização, como vídeos de tópicos matemáticos, vídeo-aulas e videoconferência, em que a mídia vídeo tem sido utilizada como recurso tecnológico para viabilizar a comunicação de ideias matemáticas ou entre os participantes, e pouco tem sido discutido sobre o uso do vídeo integrado aos objetivos específicos da formação de professores de matemática.

Referências

Almeida, L. B. C. (2012). *Formação do professor do ensino básico para a Educação para a mídia: Avaliação de um protótipo de currículo* (Tese de doutorado). Universidade Estadual Paulista, Marília, SP, Brasil.

Alsawaie, O., & Alghazo, I. (2010). The effect of video-based approach on prospective teachers' ability to analyze mathematics teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *13*(3), 223-241.

Amorin, B. M. O. (2012). *Sexualidade e mídia na formação docente* (Tese de doutorado). Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, PB, Brasil.

Carneiro, C. S. S. (2005). *Ambientes de aprendizagem na educação a distância: Estudo de caso no curso normal superior com mídias interativas em Ponta Grossa* (Dissertação de mestrado). Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, PR, Brasil.

Chiarato, M. A. L. M. (2005). *Aprendendo matemática a distância: A circulação do conhecimento em um curso de formação de professores para as séries iniciais* (Dissertação de mestrado). Universidade Estadual de Londrina, Londrina, PR, Brasil.

Correa, A. A. (2011). *Saberes docentes e educação estatística*: *Um estudo das práticas docentes no ensino médio* (Dissertação de mestrado). Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil.

Dias, D. R. S. C. (2012). *Uso das TIC por professores do curso de licenciatura em Matemática da PUC-Goiás* (Dissertação de mestrado). Pontifícia Universidade Católica de Goiás, Goiás, GO, Brasil.

Guedes, J. F. (2011). *Produção de material didático para EAD nos cursos de licenciatura em Matemática: O caso da UAB/IFCE* (Dissertação de mestrado). Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, CE, Brasil.

Melillo, K. M. C. F. (2011). *Em um dia, professor no ensino presencial… Em outro, professor na modalidade a distância? Ações que constituem a atividade de ser professor na EAD/UAB* (Dissertação de mestrado profissional). Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil.

Nunes, C. A. (2010). *Educação matemática: Processos formativos e a sua interface com as mídias* (Dissertação de mestrado). Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, Brasil.

Oliveira, H., & Cyrino, M. (em publicação). Developing knowledge about inquiry-based teaching through analysis of a multimedia case: A study with prospective mathematics teachers. *Sisyphus*.

Panda, S. (2006). *Media and technology in distance education*. New Delhi: STRIDE Handbook-7, IGNOU. Disponível em http://www.ignou.ac.in/institute/handbook7/HANDBOOK%207.htm

Pellegrino, A. M., & Gerber, B. L. (2012). Teacher reflection through video-recording analysis. *Georgia Educational Researcher*, *9*(1), 1-20.

Santagata, R., & Guarino, J. (2011). Using video to teach future teachers to learn from teaching. *ZDM The International Journal of Mathematics Education*, *43*(1), 133-145.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (2009). Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: Da investigação à prática (Artigo original publicado em 1998). *Educação e Matemática*, *105*, 22-28.

Van Es, E. A., & Sherin, M. G. (2008). Mathematics teachers "learning to notice" in the context of a video club. *Teaching and Teacher Education*, *24*, 244-276.

Zulatto, R. B. A. (2007). *A natureza da aprendizagem matemática em um ambiente online de formação continuada de professores* (Tese de doutorado). Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP, Brasil.

O papel das diversas representações na resolução de problemas, em diferentes contextos, no estudo da proporcionalidade inversa

Sandra Nobre[1], Nélia Amado[2], João Pedro da Ponte [3]
[1]Agrupamento de Escolas Professor Paula Nogueira & Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, sandraggnobre@gmail.com
[2]FCT, Universidade do Algarve & Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, namado@ualg.pt
[3]Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, jpponte@ie.ulisboa.pt

Resumo. *O nosso objetivo é analisar a forma como uma aluna do 9.º ano utiliza representações matemáticas na resolução de problemas de proporcionalidade inversa. Interessa-nos também perceber se existe influência dos contextos dos problemas na atividade da aluna. Este trabalho é realizado no quadro de uma experiência de ensino, com uma forte ênfase na resolução de problemas, alguns dos quais com a folha de cálculo. A análise de dados incide em diálogos na sala de aula, nas produções da aluna, bem como numa entrevista realizada após o estudo do tópico. Os resultados mostram que ao longo do estudo do tópico a aluna aprendeu a utilizar diferentes representações para resolver os problemas propostos, bem como estabelecer conexões entre elas. Os contextos menos comuns para a aluna, que inicialmente lhe causavam algumas hesitações na escolha de uma estratégia, deixaram de afetar a sua capacidade de resolver problemas.*

Abstract. *Our goal is to analyze how a grade 9 student uses mathematical representations in solving inverse proportion problems. We are also interested in knowing if the problem contexts influence the student's activity. This work is conducted as part of a teaching experiment with a strong emphasis on problem solving, some of which with a spreadsheet. Data analysis focuses on classroom dialogues, in student productions as well as in an interview made after the study of the topic. The results show that during the study of the topic the student learned to use different representations to solve problems and to establish connections between them. Less common contexts for the student, at the beginning caused her some hesitation in choosing a strategy, but later did no longer affect her ability to solve problems.*

Palavras-chave: Álgebra; Proporcionalidade inversa; Resolução de problemas; Representações matemáticas; Folha de cálculo.

Introdução

Desde cedo que as crianças, no seu dia-a-dia, se deparam com situações que envolvem proporcionalidade direta ou inversa e com outras situações em que não existe proporcionalidade. O estudo da proporcionalidade inversa, como função, surge no 9.º ano, e os alunos têm de saber distinguir situações que envolvem proporcionalidade direta e inversa e situações em que não há proporcionalidade.

Martinho, M. H., Tomás Ferreira, R. A., Boavida, A. M., & Menezes, L. (Eds.) (2014).
Atas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática. Braga: APM., pp. 425–442

Vários documentos curriculares (e.g., ME, 2007; NCTM, 2007) apontam a resolução de problemas de situações da vida real como uma atividade potenciadora do estudo da proporcionalidade inversa. Nesta comunicação debruçamo-nos sobre a forma como uma aluna utiliza as representações matemáticas na resolução de problemas e procuramos compreender a influência dos contextos na sua atividade.

A aprendizagem da proporcionalidade inversa

Os alunos começam por lidar com situações de proporcionalidade direta de forma intuitiva, recorrendo a estratégias como a redução à unidade ou o uso da regra de três simples. Mais tarde, surgem relações de proporcionalidade inversa, que exigem um raciocínio mais complexo. A compreensão deste novo conceito é, em parte, facilitada pela compreensão do conceito de proporcionalidade direta, uma vez que duas grandezas x e y são inversamente proporcionais se x é diretamente proporcional ao inverso de y.

O próprio conceito de proporcionalidade está envolto de diversas dificuldades. Vergnaud (1997) afirma que as noções de grandeza diretamente e inversamente proporcionais requerem a construção de conceitos multiplicativos de uma certa complexidade e que nem sempre podem ser compreendidos usando apenas os esquemas de somar e subtrair. Segundo Herscovics & Lincheviski (1994), há alunos que no uso imediato de métodos formais algébricos, como a expressão algébrica da proporcionalidade inversa, operam mecanicamente com os símbolos, sem entender o seu significado. Esta dificuldade pode estar relacionada com a abordagem predominantemente formal com que estes métodos são apresentados. Também Silvestre e Ponte (2009) referem que uma aprendizagem com ênfase no treino de procedimentos e verbalização de regras, sem desenvolver a compreensão da estrutura matemática da relação proporcional, tem consequências indesejáveis sobre o desenvolvimento do raciocínio proporcional. Daí o poder-se admitir que a aprendizagem será facilitada se se envolver os alunos em experiências informais antes da manipulação algébrica formal, nomeadamente através da resolução de problemas.

A resolução de problemas referentes a diferentes contextos

A resolução de problemas é uma atividade privilegiada para uma aprendizagem com compreensão. O contexto do problema desempenha um papel fundamental na construção de significados, devendo por isso ser adequado. De acordo com Bickmore-Brand (1990/1993), "o contexto é fundamental para a construção de significado durante todo o trabalho. Constitui o pano de fundo em relação ao qual todas as partes têm de fazer sentido" (p. 3). Para além de ajudar os alunos a atribuir significado ao conteúdo matemático envolvido, o contexto influencia a compreensão do enunciado, bem como o estabelecimento de um plano para o resolver (Kulm, 1984).

Como indicam Mason, Johnston-Wilder, e Graham, (2005), os alunos habitualmente gostam dos problemas resolvidos em determinado tema e em contextos em que o assunto e as técnicas são suscetíveis de surgir. Estes autores defendem que a resolução de problemas deve surgir logo no início do estudo de um tópico, em vez de apenas no seu final, tornando-se problemas de aplicação só acessíveis aos alunos com maior destreza. Desta forma, devemos incentivar os alunos a relacionar os contextos em que surgem os problemas com a sua própria experiência, de forma a promover a compreensão e o significado.

Representações matemáticas no estudo da proporcionalidade inversa

As representações matemáticas servem os propósitos de comunicar com os outros acerca de um problema ou de uma ideia mas, simultaneamente, constituem ferramentas que ajudam a atingir a compreensão de uma propriedade ou de um conceito (Dufour-Janvier, Bednarz, & Belanger, 1987). Daí encararmos o uso de representações como lentes através das quais procuramos compreender o significado envolvido nos processos matemáticos, em particular na resolução de problemas.

Para Duval (2006), as representações semióticas e a conversão das representações são fundamentais no processo de aquisição do conhecimento matemático: "nenhuma actividade matemática pode ser realizada sem usar um sistema de representação semiótico, porque o processo matemático envolve sempre *a substituição de uma representação semiótica por outra*" (p. 107, itálico no original). Para este autor, a dificuldade reside na passagem de uma representação para outra. Considera necessário distinguir o caso em que transformamos uma representação numa outra pertencente ao mesmo registo (tratamento) e o caso em que transformamos uma representação dada num registo numa representação noutro registo (conversão).

A folha de cálculo possibilita o acesso a diferentes tipos de representações (Haspekian, 2005) e, em simultâneo, permite estabelecer relações funcionais, bem como conexões com a linguagem algébrica, o que pode proporcionar uma compreensão mais significativa desta linguagem. O recurso a esta ferramenta na resolução de problemas acentua a necessidade de identificar todas as variáveis relevantes num problema e, além disso, estimula a procura de relações de dependência entre as variáveis (Carreira, 1992; Haspekian, 2005). Friedlander (1998) afirma que

> A folha de cálculo constrói uma ponte ideal entre a aritmética e a álgebra e permite aos alunos a livre circulação entre os dois mundos. Os alunos procuram padrões, constroem expressões algébricas, generalizam conceitos, justificam conjecturas, e estabelecem a equivalência de dois modelos conforme as necessidades intrínsecas e significativas e não como exigências arbitrárias colocadas pelo professor (p. 383).

Friedlander e Tabach (2001) consideram que a capacidade para trabalhar com várias representações permite eliminar as desvantagens de cada uma, tornando o processo de aprendizagem da Álgebra mais significativo e efetivo. Estes autores defendem a necessidade de preparar tarefas que exijam que os alunos recorram a várias representações, estabelecendo relações entre elas, e desta forma, atribuindo-lhes significado. Tripathy (2008) corrobora esta ideia, afirmando que a utilização de múltiplas representações é fundamental para a compreensão de um conceito matemático. No trabalho com situações de proporcionalidade inversa surgem com frequência as representações tabular, gráfica e algébrica. Para uma boa compreensão do conceito de proporcionalidade inversa é importante que os alunos as compreendam e as consigam transformar umas nas noutras.

A experiência de ensino

Nesta experiência, a resolução de problemas assume o papel central, embora sejam propostas tarefas de natureza diversa (Ponte, 2005). Recorre-se à folha de cálculo numa fase inicial, como ponto de partida para a aprendizagem formal. Em cada tarefa são promovidos momentos de discussão e de síntese, estabelecendo uma ponte entre o trabalho na folha de cálculo e o trabalho com lápis e papel, recorrendo ao simbolismo algébrico sempre que possível a partir das propostas dos alunos. A tabela 1 indica as tarefas trabalhadas e o respetivo ambiente. O tópico em estudo, para além da proporcionalidade inversa, integra também a análise de representações gráficas de outras situações. Destas tarefas, nesta comunicação debruçamo-nos apenas sobre as primeiras quatro. No início do estudo do tópico, os alunos resolveram uma ficha de diagnóstico.

Tabela 1. Tarefas realizadas

Tarefa	A	B	C	D	E
Designação	Diagnóstico	Os canteiros da horta do sr. Tomás	Produtos fixos	Miscelânea	Representaçõe s gráficas
Ambiente	Lápis e papel	Lápis e papel Folha de cálculo	Lápis e papel Folha de cálculo	Lápis e papel	Lápis e papel

Metodologia de investigação

Analisamos a forma como uma aluna lida com as representações matemáticas na resolução das situações propostas (maioritariamente problemas) e procuramos compreender a influência do contexto na sua atividade. Dada a natureza do estudo, a metodologia adotada é qualitativa, seguindo um paradigma interpretativo. Esta investigação segue um *design* de experiência de ensino com recurso a estudos de caso, onde a primeira autora assume o duplo papel de professora da turma e investigadora. Debruçamo-nos sobre o caso de Ana, uma aluna de 14 anos interessada, participativa nas aulas e habitualmente sem dificuldades na disciplina de Matemática.

Procedemos à recolha das produções da aluna na sala de aula, à captura dos ecrãs dos computadores, à gravação áudio dos diálogos e à observação participante registada em notas de campo. Após o estudo do tópico, realizámos uma entrevista clínica (E) à aluna com o objetivo de obter mais informações sobre a sua aprendizagem. A análise de dados tem por base a análise de conteúdo (Bardin, 1977) a partir das transcrições das gravações áudio, dos registos da sequência de *frames* no Excel e da entrevista.

Resultados

Apresentamos em seguida excertos das produções de Ana, bem como dados da entrevista, destacando o modo como utiliza representações matemáticas em situações de proporcionalidade inversa.

Tarefa A

Esta tarefa contém situações problemáticas de natureza variada, umas que requerem um raciocínio proporcional e outras não, podendo gerar alguma incerteza aos alunos na escolha da estratégia de resolução. Ana resolve a tarefa com a sua colega Vanessa, recorrendo principalmente à linguagem natural para retirar dados dos enunciados, identificar incógnitas e dar respostas. Para chegar aos resultados, usa predominantemente operações elementares.

Na primeira situação: "Seis homens pintam uma casa em 3 dias. Quantos homens são necessários para pintar essa casa num dia?", Ana retira os dados do enunciado, coloca-os numa disposição tabelar e fica hesitante quanto aos procedimentos a seguir.

A.: Oh, professora… agora como é que eu justifico aqui? É assim? 6 homens pintam uma casa em 3 dias, então em 2 dias é 4 homens e num dia são 2 homens…

Ana começa por usar uma igualdade de razões como se tratasse de uma situação de proporcionalidade direta, o que leva a professora a perguntar:

P.: Ai é?
A.: Então….
P.: 6 homens pintam em 3 dias… se queremos diminuir os dias…
A.: Temos de aumentar os homens.

A intervenção da professora leva a aluna a verificar que o número de homens deve aumentar em vez de diminuir, pelo que decide mudar de estratégia. Continua a resolver a tarefa com a colega:

V.: Metes mais 6 homens e pintam em 1 dia… não? … Mais?
A.: Não, porque se tu fores diminuindo a relação entre isto é 2, 6 a dividir por 3 é 2. Se for aumentar 6 mais 2 dá 8 e aqui tens 2 dias mais 2, 8 mais 2 dá 10, 8 mais 2 dá 10, pintam num dia.
P.: Será?
A.: Acho que não…
P.: Vamos lá pensar. [A professora afasta-se]

Influenciada pela colega, Ana ensaia um raciocínio aditivo para a situação, embora sem sucesso. Como a questão da professora não incentiva a continuar com aquela estratégia, as alunas admitem que não se trate da melhor forma para lidar com a situação:

V.: A gente aumenta mais 2 e fica 2, a gente aumenta mais 2 e fica 1… 6, 7, 8, 9, 10 … 10 homens é 1 dia … Professora venha lá aqui… aqui eu fiz assim: 6 a dividir por 3 é igual a 2, isto quer dizer que 2 homens pintam a casa…
A.: 2 homens é 6 dias.
V.: 2 homens é 1 dia, vá.
P.: Mas como é que pode ser 2 homens 1 dia?
V.: Não, espere aí, professora… assim dá: 6 homens em 3 dias…
P.: 6 homens em 3 dias…
V.: Então? Agora eu quero baixar este número, então aumento mais dois, aumento mais 2, fica 2, olhe fica 2 dias.
P.: E será assim? Pensem lá melhor…
V.: Eu não sei, eu já não sei… agora não encontro mais nenhuma maneira.
A.: Pois… [A professora afasta-se]
V.: Olha, não vou fazer, vou passar à frente.

Ana e a colega não encontram uma forma de chegar à resposta. A professora afasta-se, regressando uns minutos depois.

> P.: Então e aqui? Já chegaram a alguma conclusão acerca do problema dos homens?
> A.: Eu fiz 3 a dividir por 3, dá 1 dia.
> P.: Hummm?
> A.: Eu fiz 3 a dividir por 3, dá 1 dia. E depois como eu tenho aqui 3 vou ter que multiplicar por 3.
> P.: E então?
> V.: Se pudéssemos fazer uma regra de três simples…
> A.: Mas eu tenho de fazer vezes 3 porque quando eu diminuo aqui tenho de aumentar aqui e dá 18.

Depois de um caminho sinuoso, em parte sugerido pela colega, Ana percebe que para obter a resposta correta tem de usar um raciocínio multiplicativo e não aditivo. A sua produção final (figura 1) e o diálogo mostram que, mesmo de forma intuitiva, a aluna entende que, se o número de dias diminuir, o número de homens tem de aumentar na mesma proporção. Usa raciocínio inversamente proporcional, pois, como refere: "eu tenho de fazer vezes 3 porque quando eu diminuo aqui tenho de aumentar aqui". Usando linguagem natural, explica os procedimentos e os cálculos efetuados para obter a sua resposta.

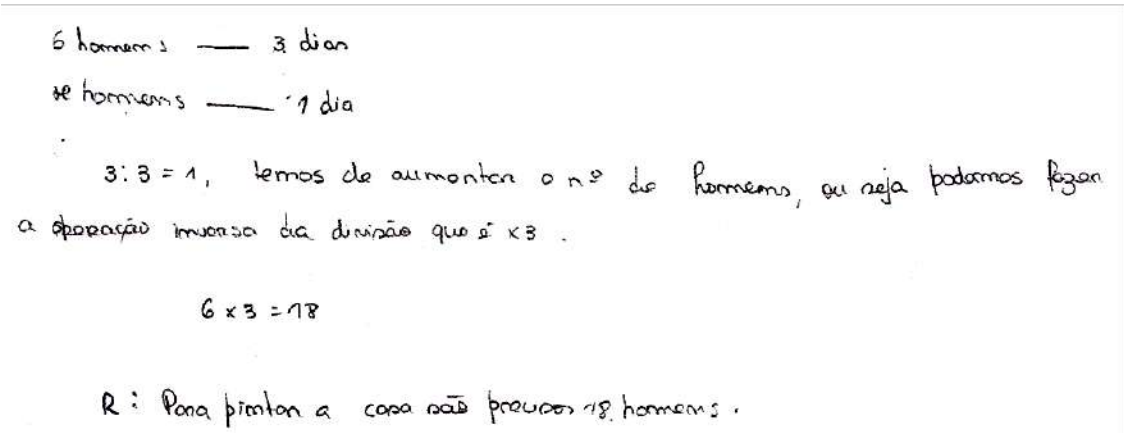


Figura 1. Produção de Ana (Q 4 da tarefa A)

A situação "Alguns amigos da Joana querem fazer-lhe uma surpresa e oferecer-lhe o seu livro preferido. Se forem 6 amigos, cada um deve participar com 2 €. Se cada amigo der menos 50 cêntimos, quantos amigos deverão participar na compra do livro?" envolve igualmente o raciocínio inversamente proporcional. Na resolução, Ana não revela dificuldades:

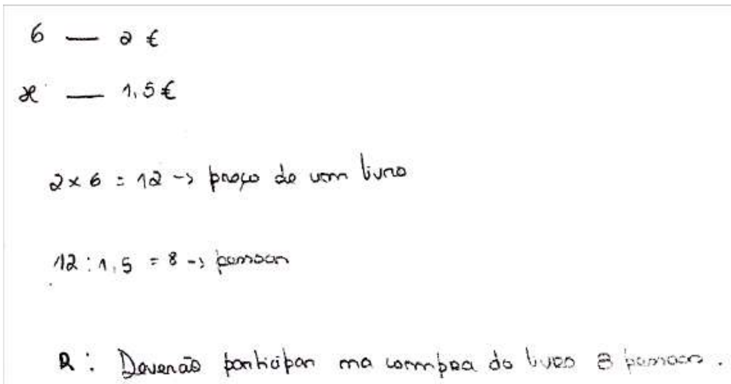


Figura 2. Produção de Ana para a questão da tarefa A-2

Uma aluna resolve no quadro e explica o seu processo de resolução.

> Adr.: Fiz 6 vezes 2 para saber o preço do livro e depois fiz 1,5 vezes 8, por tentativas.
> P.: E o 8 foi por tentativas?… E este 8 é o quê?
> Alguns alunos: É o número de amigos.
> A.: Mas podíamos fazer 12 a dividir por 1,5 e vai dar logo o número.

Diversos alunos chegam igualmente ao número de amigos por tentativas. No entanto, como mostra a sua intervenção, Ana recorre à divisão. Na sua resolução (figura 2), procede ao cálculo da constante de proporcionalidade para depois, através da divisão, obter o valor da outra grandeza. Usa cálculos elementares para obter a sua resposta e recorre à linguagem natural para explicar o significado dos resultados que obtém.

Ana diz que foi nesta tarefa que "a gente viu que podia existir proporcionalidade inversa. Foi a primeira ficha que nos deu a entender que além da proporcionalidade direta podemos também ter proporcionalidade inversa…" (E). Acrescenta ainda que esta ficha foi "muito acessível" (E) e que gostou de a resolver. Note-se que os contextos dos dois problemas são distintos, embora exista grande familiaridade dos alunos com o último, o que não acontece com o primeiro.

Tarefa B

Esta tarefa é resolvida num ambiente que combina lápis e papel e folha de cálculo. Na primeira questão, Ana facilmente preenche a tabela e percebe a relação que existe entre a base e a altura de um canteiro retangular quando a sua área é fixa, explicando como procedeu no caso de o comprimento duplicar e triplicar (figura 3).

1. A tabela ao lado apresenta algumas das primeiras experiências efectuadas pelo Sr. Tomás. Completa-a.

1.1. Tendo em conta os valores obtidos na tabela explica o que acontece à medida do comprimento da altura se duplicarmos a medida do comprimento da base? E se triplicarmos?

Se duplicarmos o comprimento da base, o comprimento da altura fica metade, dividimos por 2, o mesmo acontece quando triplicamos o comprimento da base, dividimos por 3.

Base (b)	Altura (a)	Área
10	12	120
2	60	120
3	40	120
60	2	120
80	1,5	120
1	120	120

Figura 3. Produção de Ana (Q1.1 da tarefa B)

Na folha de cálculo, Ana obteve os valores para a altura com recurso a uma fórmula e à geração de variáveis-coluna (figura 4):

Base (b)	Altura (a)	Área
1	120	120
1,5	80	120
2	60	120
2,5	48	120
3	40	120
3,5	34,28571	120
4	30	120

Base (b)	Altura (a)	Área
1	=E6/C6	120
1,5	=E7/C7	120
2	=E8/C8	120
2,5	=E9/C9	120
3	=E10/C10	120
3,5	=E11/C11	120
4	=E12/C12	120

119	1,008403	120
119,5	1,004184	120
120	1	120

119	=E242/C242	120
119,5	=E243/C243	120
120	=E244/C244	120

Figura 4. Produção de Ana (Q 2.1 da tarefa B)

Na entrevista, Ana recorda os procedimentos em Excel para obter a altura com uma fórmula: "pus igual área, cliquei sobre a área, sinal de dividir sobre a base mais enter" (E). A aluna reconhece ainda o contributo da folha de cálculo: "o Excel serviu muito, pois como vemos no exercício 2 ele apresenta-nos reticências, ou seja, números com vírgulas até 120. Se nós fôssemos construir esta tabela à mão ia demorar muito tempo, enquanto com o Excel, com a técnica de arrastar, é muito mais fácil de resolver" (E).

A questão seguinte pede a expressão algébrica e Ana não tem dificuldades em escrevê-la, afirmando que "foi igual ao que estava lá porque eu fiz a área total a dividir pela base para saber a altura, por isso foi como ali atrás" (E). Refere-se ao trabalho com a folha de cálculo onde reconhece a sua equivalência com a escrita em linguagem algébrica com lápis e papel, sem que a semântica específica de cada ambiente lhe provoque dificuldades. Noutra questão, é pedida a construção da representação gráfica da função definida na tabela com as dimensões do canteiro. Esta é a primeira vez que Ana contacta com a hipérbole (figura 5): “foi quando percebemos que este era o gráfico da proporcionalidade inversa. Nesta ficha ficámos também a conhecer a expressão algébrica” (E).

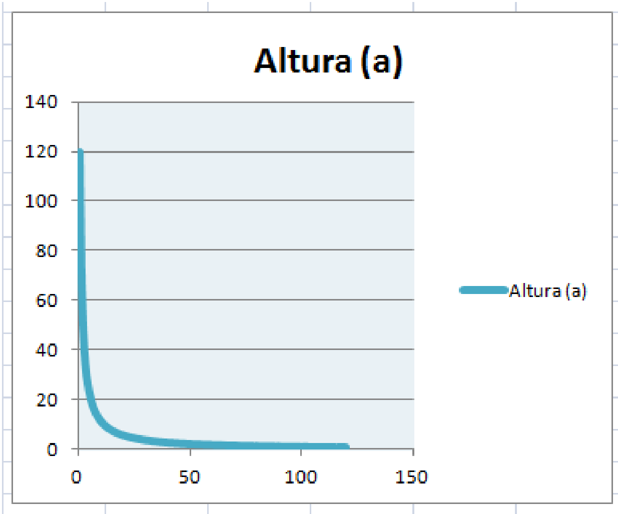


Figura 5. Produção de Ana (Q 2.3 da tarefa B)

Na entrevista, Ana atribui à folha de cálculo um importante papel na construção de gráficos referindo que “…através de gráficos, o Excel é mais preciso na construção” (E). Na sua perspetiva, esta tarefa serviu “para iniciarmos, mais aprofundadamente, o estudo da proporcionalidade inversa; foi quando começámos a aprender a construir tabelas e gráficos da hipérbole” (E). Afirma ainda que “com esta ficha aprendi a proporcionalidade inversa e consegui perceber que podemos traduzi-la em 3 passos, por exemplo: a tabela, o gráfico e a expressão algébrica. Aprendi também que o gráfico é a hipérbole, como se constrói e também que podemos ter 3 formas diferentes da expressão algébrica, ela pode ser representada de três formas diferentes” (E). Identifica as representações diferentes estudadas e as três formas de escrever a expressão algébrica. Tanto na entrevista como em sala de aula, Ana dá evidências da aprendizagem das diferentes representações, em particular a expressão algébrica (método formal algébrico) para lidar com situações de proporcionalidade inversa.

Tarefa C

Esta tarefa tem como objetivo o contacto dos alunos com a representação gráfica da hipérbole em IR e ainda em situações em que a constante de proporcionalidade é um número negativo. A primeira situação informa que o produto de dois números é 4 e pede a construção de uma tabela na folha de cálculo. Ana constrói a tabela com vários valores. A pedido da professora, os alunos colocam números positivos e negativos de modo a obterem a representação gráfica em IR . Ana escreve a coluna relativa aos valores de y como relação de dependência das outras duas, tendo em conta a condição dada. À semelhança de muitos alunos na turma, ao gerar a variável coluna, coloca o valor 0 para x. Depois de algum questionamento por parte da professora, os alunos compreendem que existe um erro, excluindo então o valor 0 para a variável x. Na escrita da expressão algébrica, foi assim reforçada a importância de indicar que x não pode tomar o valor 0, levando os alunos à escrita do domínio quando explicitam a expressão algébrica de uma função de proporcionalidade inversa.

Na segunda questão em que produto de x e y é -4, Ana procede de forma análoga nos dois ambientes, lápis e papel e folha de cálculo (figura 6).

x	y	Total
-8	0,5	-4
-7	0,571429	-4
-6	0,666667	-4
-5	0,8	-4
-4	1	-4
-3	1,333333	-4
-2	2	-4
-1	4	-4
0		-4
1	-4	-4
2	-2	-4
3	-1,33333	-4
4	-1	-4
5	-0,8	-4
6	-0,66667	-4
7	-0,57143	-4
8	-0,5	-4

x	y	Total
-8	=O3/M3	-4
-7	=O4/M4	-4
-6	=O5/M5	-4
-5	=O6/M6	-4
-4	=O7/M7	-4
-3	=O8/M8	-4
-2	=O9/M9	-4
-1	=O10/M10	-4
0		-4
1	=O12/M12	-4
2	=O13/M13	-4
3	=O14/M14	-4
4	=O15/M15	-4
5	=O16/M16	-4
6	=O17/M17	-4
7	=O18/M18	-4
8	=O19/M19	-4

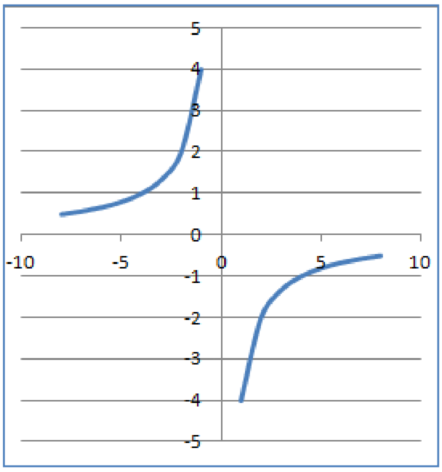
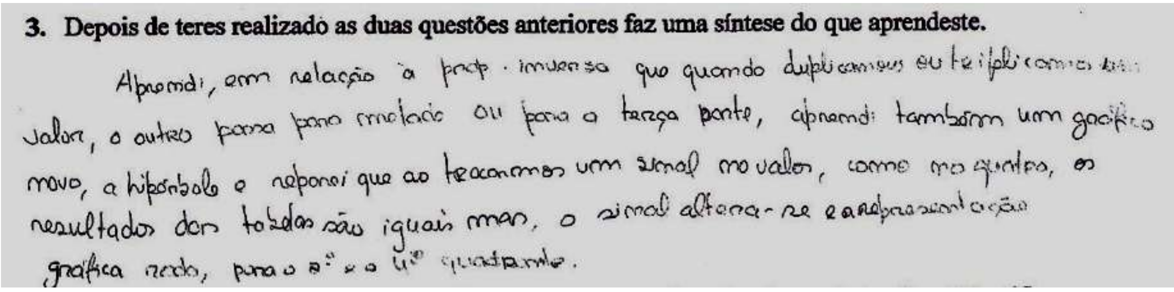


Figura 6. Produção de Ana (Q 2 da tarefa C)

A terceira questão solicita uma síntese do que tinham aprendido. Ana reconhece que a mudança no sinal da constante corresponde a uma representação gráfica em quadrantes diferentes (figura 7):



3. Depois de teres realizado as duas questões anteriores faz uma síntese do que aprendeste.

Aprendi, em relação à prop. inversa que quando duplicamos ou triplicamos um valor, o outro passa para metade ou para a terça parte, aprendi também um gráfico novo, a hipérbole e reparei que ao trocarmos um sinal no valor, como no quadro, os resultados das tabelas são iguais mas, o sinal altera-se e a representação gráfica muda, para o 2.º e o 4.º quadrante.

Figura 7. Produção de Ana (Q 3 da tarefa C)

Na entrevista, Ana confessa ter sido esta a tarefa que menos gostou de realizar, dizendo: "acho que era um bocado chata" (E). Refere que as anteriores "eram mais problemas, dava para resolver mais sem olharmos muito para o Excel, esta aqui já era mais relacionada com o Excel" (E). Perante a insistência para que explicasse melhor a sua ideia, acrescenta "podíamos resolver de outras formas, pareciam mais… esta aqui, a forma como ela aparecia… parecia mais séria…. as outras pareciam mais de brincar" (E). Parece assim considerar que um contexto puramente matemático é mais sério, ao passo que as tarefas que apresentam um contexto da vida real, não puramente matemático, são mais interessantes e envolventes. No entanto, reconhece que esta ficha é uma das mais importantes:

> Foi a que nos fez ver diferenças entre números que podem parecer semelhantes mas que alteram muito, como vimos na hipérbole, que mudou logo de quadrantes e foi o que serviu para aprofundarmos mais o nosso conhecimento sobre proporcionalidade inversa. Foi a partir desta ficha que começámos a perceber melhor e a resolver exercícios com mais fluência (E).

Em relação aos métodos formais, Ana escreve a expressão algébrica de uma função de proporcionalidade inversa. Além disso, consideramos que foi importante para perceber o significado da indicação do domínio da variável independente.

Tarefa D

Para Ana, a tarefa D foi fácil de resolver,

> pois já percebia, já sabia ver as diferenças entre a proporcionalidade inversa e a proporcionalidade direta e entre outros casos em que se podia também representar através de um gráfico mas que não era a proporcionalidade… As funções, nesta ficha aparecem duas funções afim porque têm duas variáveis e outro resultado, e esta ficha deu para perceber várias diferenças entre eles. (E).

Ana resolve a ficha com a colega, explicando-lhe como proceder (ver a figura 8):

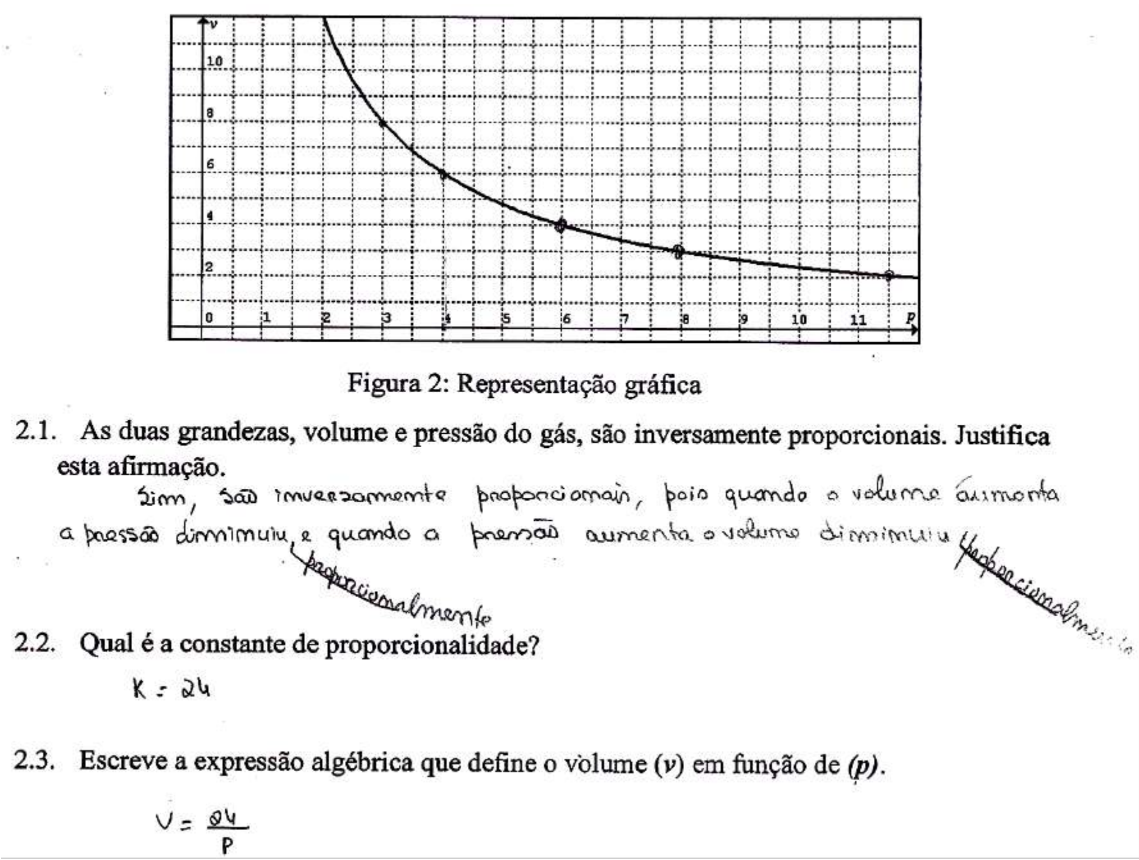


Figura 2: Representação gráfica

2.1. As duas grandezas, volume e pressão do gás, são inversamente proporcionais. Justifica esta afirmação.

Sim, são inversamente proporcionais, pois quando o volume aumenta a pressão diminui proporcionalmente e quando a pressão aumenta o volume diminui proporcionalmente

2.2. Qual é a constante de proporcionalidade?

K = 24

2.3. Escreve a expressão algébrica que define o volume (*v*) em função de (*p*).

$V = \frac{24}{P}$

Figura 8. Produção de Ana (Q 2 da tarefa D)

> A.: A constante é tipo isto: aqui quando tu tens a tocar num ponto, depois tens de coordenada 8 e 3, olha tens aqui 4 e 6, 6 e 4… estás a ver? Então tu vais ter de multiplicar este número e este, que é o que corresponde ao *y* vezes o *x* que vai dar o *k*, que é a constante.
> V.: Então um vezes o outro tem de dar sempre 24?
> A.: Tem ! [risos]

Como a colega ainda não respondeu à alínea 3 da questão anterior, Ana continua a ajudá-la: "Aqui o volume é *v*, é o *y*, por exemplo, e tu para saberes o valor do *y* tens de dividir a constante pelos números da pressão…". Revela assim o seu entendimento da constante de proporcionalidade e a forma que usa para escrever a expressão algébrica de uma função de proporcionalidade inversa através da interpretação da representação gráfica.

Relativamente a esta tarefa, Ana diz que "foi um apanhado geral sobre os tipos de proporcionalidade que conhecemos e podemos utilizar as funções que já podiam estar esquecidas e que deu para relembrar… e deu para perceber o que sabemos e não melhor… e essas coisas…" (E).

Entrevista

Na entrevista, após revisitar as diversas tarefas resolvidas nas aulas, Ana resolve outras tarefas. Preenche tabelas tendo em conta a natureza da proporcionalidade que existe entre duas grandezas. Escreve ainda as respetivas expressões algébricas e descreve as respetivas representações gráficas. Num dos problemas propostos faz uma associação com outro que resolveu anteriormente (figura 9):

> A.: 600 vezes 30 dá 18000… Já está!
> P.: Então explica-me lá tudo o que tu fizeste.
> A.: Primeiro, ao ler o enunciado, este enunciado era parecido a um exercício que já tinha visto no nosso livro, então fui optar por uma tabela em que pus os coelhos e a ração.

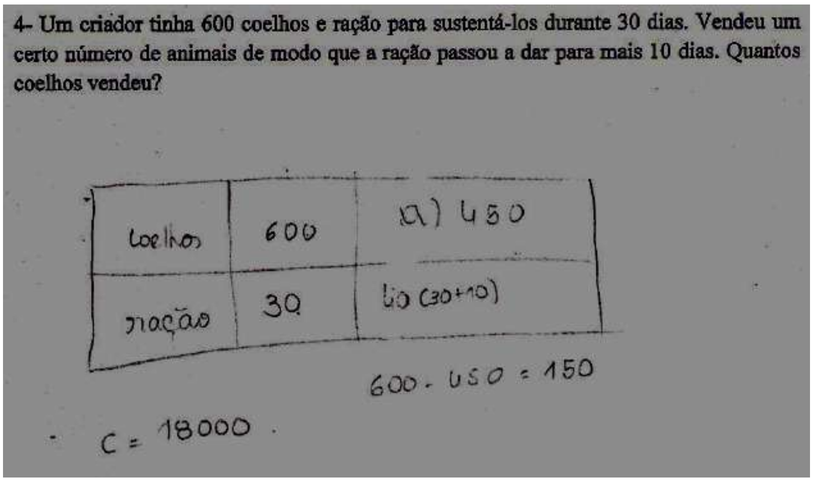


Figura 9. Produção de Ana (Q 4 da entrevista)

Ana escolhe a tabela como representação de suporte que a ajuda a organizar a informação dada e a encontrar o que é pedido. Questionada acerca da escolha das variáveis, responde:

> A.: Porque sabemos que o criador tinha 600 coelhos e tinha ração para 30 dias, então se ele vendesse alguns coelhos a ração iria aumentar se os coelhos diminuíssem ou iria diminuir se os coelhos aumentassem […].

Ana explica que são essas grandezas que variam no problema e explica depois também como procede para chegar à solução.

Apresentamos a última situação proposta na figura 10.

5. A Carlota acendeu uma vela e a cada quarto de hora mediu e registou a sua altura.

Altura (cm)	30	15	10
Tempo (min)	15	30	45

a) A manter-se a mesma relação entre a altura da vela e o tempo consideras que existe algum tipo de proporcionalidade nesta situação? Porquê?

Figura 10. Enunciado da Q 5 da entrevista

A.: A manter a mesma relação existe proporcionalidade inversa, pois ao fazermos a constante ela dá-nos sempre 450, pois 30 vezes 15 e 15 vezes 30 e 10 vezes 45 dá-nos 450. Existe proporcionalidade inversa.

Ana utiliza a noção de constante de proporcionalidade para verificar a existência de proporcionalidade inversa. Para resolver a última alínea, começa por observar os gráficos (figura 11):

A.: Ao princípio podem ser todos, porque são todos hipérboles, mas aqui altura… 15… 30… 45… sim, pode ser o gráfico B.

P.: Porquê?

A.: Ao olharmos para a tabela podemos ir à procura dos pontos no gráfico. Sabemos que o *x* é o tempo pois aparece aqui nos números, é fácil de perceber, e o *y* é a altura. Então, ao irmos à procura do tempo aos 15 minutos, temos de ter a altura de 30, o que acontece no gráfico B. Ao vermos, temos 30, vemos que a hipérbole passa entre 20 e 10, então podemos pensar que é 15, mas para termos a certeza vamos olhar para o próximo ponto porque sabemos que vai ter de nos dar o valor exato, 10, e dá-nos porque passa em cima do valor 10.

e) Dos gráficos representados no referencial cartesiano seguinte haverá algum que possa representar a relação entre a altura da vela e o tempo que esta demora a arder? Se sim, indica qual deles é justificando a tua resposta.

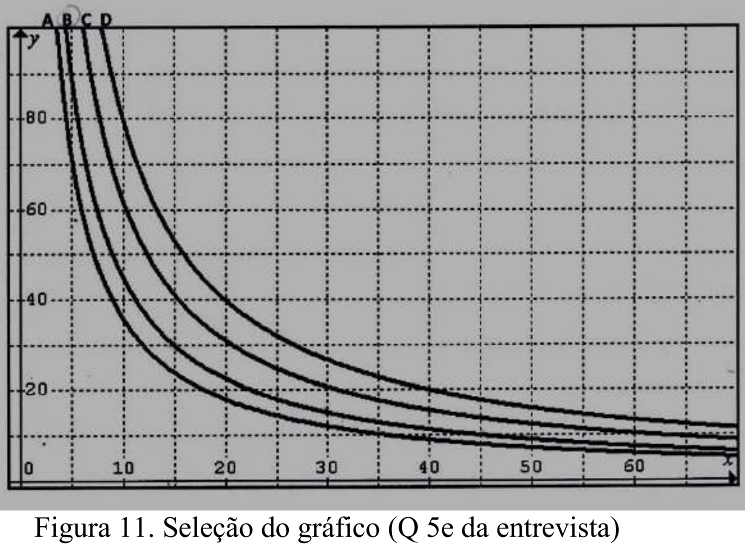


Figura 11. Seleção do gráfico (Q 5e da entrevista)

A identificação dos pontos da tabela com as coordenadas do gráfico foi essencial para a tomada de decisão quanto à escolha da representação gráfica B.

A concluir

Ao longo do estudo, Ana tem oportunidade de lidar com representações tabelar, gráfica e algébrica. Além disso, antes da aprendizagem formal do uso da expressão algébrica, tem diversas experiências informais em situações de proporcionalidade inversa, como sugerem Herscovics e Lincheviski (1994) e Silvestre e Ponte (2009).

Na tarefa A, Ana consegue resolver problemas intuitivamente recorrendo a um raciocínio inversamente proporcional. O facto de ter algumas dificuldades no primeiro problema dessa tarefa e não ter quaisquer dúvidas no segundo pode estar relacionado com a familiaridade dos contextos das situações apresentadas, como sugerem Kulm (1984) e Mason, Johnston-Wilder, e Graham (2005). Na tarefa B, a aluna é levada a escrever a expressão algébrica de uma função de proporcionalidade inversa tendo como suporte o trabalho realizado na folha de cálculo. Tal como referem Haspekian (2005) e Friedlander (1998), a folha de cálculo pode apoiar o percurso dos alunos na transição da Aritmética para a Álgebra. A tarefa C, por ter um contexto puramente matemático, fez com que a aluna não se envolvesse fortemente (Mason et al., 2005). No entanto, a partir do momento em que aprende a utilizar a expressão algébrica para resolver as situações de proporcionalidade inversa, utiliza-a como *controle*, para identificar se, em determinada situação, existe ou não proporcionalidade inversa. Embora nem sempre a escreva de imediato, parece ser com base nessa relação que ela pensa para responder às questões. A tarefa D permitiu a Ana fazer uma revisão em situações de natureza diversa. Neste momento a aluna já tem destreza na utilização das diferentes representações estudadas, especialmente na sua conversão, o que é fundamental no processo de aquisição de conhecimento (Duval, 2006).

Na entrevista, a aluna utiliza recorrentemente a expressão algébrica de proporcionalidade inversa para resolver as situações propostas. No entanto, o uso da expressão algébrica não surge de forma isolada, mas sim em conjugação com tabelas ou gráficos. São bastante visíveis as conexões que a aluna faz entre as várias representações e mostra facilidade nas conversões de umas para outras, o que constitui uma forte evidência do desenvolvimento do pensamento algébrico da aluna no estudo deste tópico (Friedlander & Tabach, 2001). Tanto na resolução das várias tarefas como na entrevista, as dificuldades que sentia inicialmente foram-se dissipando, evidenciando no final uma aprendizagem significativa do conceito de proporcionalidade inversa. Verificamos que os contextos dos problemas propostos começam por constituir uma condicionante para a aluna ou eram um fator decisivo para o seu envolvimento. Por fim, a aluna conhece métodos que lhe permitem decidir se está perante uma situação de proporcionalidade inversa ou não e os contextos já não influenciam a sua destreza na resolução dos problemas.

Referências

Bardin, L. (1977). *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70.

Bickmore-Brand, J. (1990/1993). Implications from recent research in language arts for mathematical teaching. In J. Bickmore-Brand (Ed.), *Language in mathematics* (pp. 1-9). Portsmouth, NH: Heinemann.

Carreira, S. (1992). *A aprendizagem da trigonometria num contexto de aplicações e modelação com recurso à folha de cálculo* (Tese de Mestrado). Lisboa: APM.

Dufour-Janvier, B., Bednarz, N., & Belanger, M. (1987). Pedagogical considerations concerning the problem of representation. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 109-122). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 103-131.

Friedlander, A. (1998). An EXCELlent bridge to algebra. *Mathematics Teacher*, *91*(50), 382-383.

Friedlander, A., & Tabach, M. (2001). Promoting multiple representations in algebra. In A.A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 173-185). Reston, VA: NCTM.

Haspekian, M. (2005). An 'instrumental approach' to study the integration of a computer tool into mathematics teaching: The case of spreadsheets. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *10*(2), 109-141.

Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *27*(1), 59-78.

Kulm, G. (1984). The classification of problem-solving research variables. In G. A. Goldin & C. E. McClintock (Eds.), *Task variables in mathematical problem solving* (pp. 1-21). Philadelphia: The Franklin Institute Press.

Mason, J., Johnston-Wilder, S., & Graham, A. (2005). *Developing thinking in algebra*. London: Sage.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Silvestre, A., & Ponte, J. P. (2009). Resolução de problemas de valor omisso: Análise das estratégias dos alunos. In C. Costa, E. Mamede & F. Guimarães (Eds), *Números e estatística: Reflectindo o presente perspectivando o futuro*. Lisboa: Secção de Educação Matemática da SPCE.

Tripathi, P. N. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *13*(8), 438-445.

Vergnaudg, G. (1997). The nature of mathematical concepts. In T. Nunes & P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics: An international perspective* (pp. 5-28). Hove: Psychology Press.

Posters

O uso dos laboratórios de informática nas aulas de matemática das escolas estaduais de Presidente Prudente

Eliel Constantino da Silva[1], *Débora de Oliveira Medeiros*[2], *Maria Raquel Miotto Morelatti*[3]
[1]Universidade Estadual Paulista (UNESP), Brasil, eliel_constantino@hotmail.com
[2]Universidade Estadual Paulista (UNESP), Brasil, deboraomedeiros@gmail.com
[3]Universidade Estadual Paulista (UNESP), Brasil, mraquel@fct.unesp.br

Introdução

Neste trabalho apresentamos resultados de uma pesquisa vinculada ao Programa Observatório da Educação, cujo objetivo é mapear o uso de tecnologias informáticas no Ensino Fundamental II das escolas públicas paulistas cadastradas no Programa "Acessa Escola", do governo estadual de São Paulo, objetivando a inclusão digital com a instalação de laboratórios nas escolas. O foco é a utilização desses laboratórios nas aulas de matemática das escolas jurisdicionadas à Diretoria de Ensino de Presidente Prudente. Ao todo são 36 escolas, das quais investigamos 16 com mais rigor, coletando dados junto aos responsáveis pelas unidades escolares.

Observamos os conteúdos mais trabalhados com o computador e as condições de trabalho do professor de matemática ao desenvolver atividades didáticas no laboratório.

Caracterização

No Brasil, vários projetos foram criados para introduzir a informática na rede pública de ensino. Atualmente, o programa "Acessa Escola", do governo estadual de São Paulo, disponibiliza o acesso às TIC, através de laboratórios de informática instalados nas escolas públicas paulistas para a construção do conhecimento de alunos, professores e funcionários.

> Os laboratórios de informática visam à utilização das tecnologias informatizadas como instrumentos enriquecedores e facilitadores de aprendizagem, estimulando no educando a capacidade de conviver com os impactos das novas tecnologias (Serviço Social da Indústria, 2013).

Para o NCTM (2007), citado por Lima (2012), "o uso das ferramentas tecnológicas poderá auxiliar aos alunos a explorar problemas e conceitos matemáticos complexos" (p. 49). Assim como Valente (1993), acreditamos que o uso do computador e sua tecnologia a serviço da educação permitem "melhorias das metodologias de ensino-

Martinho, M. H., Tomás Ferreira, R. A., Boavida, A. M., & Menezes, L. (Eds.) (2014).
Atas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática. Braga: APM., pp. 445–448

aprendizagem de forma a levar o aluno a aprender, e o professor a orientar e auxiliar esta aprendizagem, tornando-o apto a discernir sobre a realidade e nela atuar" (p. 26).

A pesquisa voltou-se para a realidade das escolas estaduais de Presidente Prudente e investigou os conteúdos e *softwares* mais abordados pelos professores de matemática nos laboratórios de informática disponibilizados pelo programa "Acessa Escola" nas escolas analisadas e os fatores que determinam a escolha desses professores em usar ou não esses laboratórios.

Utilizaram-se métodos qualitativos e quantitativos. Registramos fotos e entrevistas audiogravadas ou escritas, com 14 diretores/coordenadores, 13 estagiários e 9 professores de matemática, dentre as escolas já referidas.

Resultados e Discussão

Na tabela 1, é possível observar informações obtidas nas entrevistas dos professores de matemática a respeito das aulas ministradas no laboratório. Iremos denotá-los por P1 o professor 1, P2 o professor 2, sucessivamente, seguindo a ordem alfabética das escolas a que eles pertencem.

O gráfico 1 mostra o uso dos laboratórios pelos professores entrevistados. Na horizontal, os números indicam a quantidade de professores que correspondem a cada uma das características citadas no canto esquerdo do gráfico.

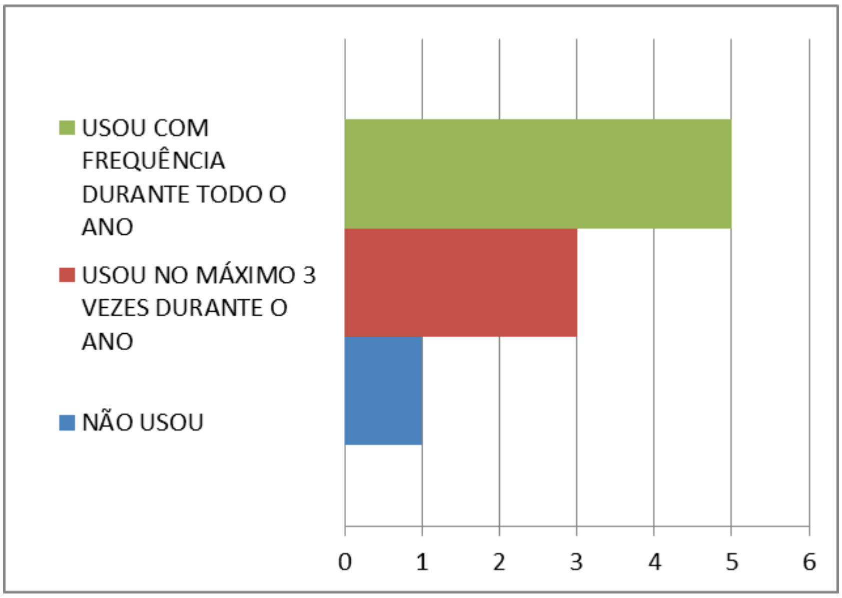


Gráfico 1. Utilização do laboratório de informática

Tabela 1. Dados das entrevistas com professores de matemática

PROFESSOR	CONTEÚDOS TRABALHADOS NO LABORATÓRIO	SOFTWARES UTILIZADOS	O QUE PREJUDICA OU IMPOSSIBILITA O USO DO LABORATÓRIO	SUGESTÕES
P1	Gráficos, estatística, área e volume	Cabri e videos na internet	Má organização das mesas e computadores antigos	Lousa digital e cursos sobre novos *softwares*
P2	Gráficos, área, geometria e perímetro	Cabri	-	-
P3	Ângulos e geometria espacial	Poly e Logo	Internet lenta e falta de maturidade dos alunos	Internet melhor
P4	Multiplicação e funções	CD-ROM COC	Poucos computadores	Mais computadores e estagiários da própria escola
P5	Pesquisas diversas	Internet	Poucos computadores	Mais computadores
P6	Trigonometria	Microsoft Mathematics	-	-
P7	Plano cartesiano	-	-	Monitores já deixarem os *softwares* preparados antes da aula
P8	Multiplicação e tabelas	Excel e Internet	Poucos computadores e Internet lenta	Mais computadores
P9	Não utiliza	-	Muita burocracia da parte administrativa da escola	-

Conclusão

Na concepção dos professores de matemática entrevistados, a escolha em usar ou nao usar o laboratório de informática existente na escola para o ensino do conteúdo está atrelado às condições desses laboratórios. Segundo eles, faltam melhorias para o desenvolvimento de um trabalho integral e contínuo com as TIC, que possa contribuir para a aprendizagem significativa dos alunos, uma vez que esse uso permite visualização e melhor contextualização dos conteúdos citados na tabela 1. Ao optarem pelo uso das TIC, os professores deixam a *zona de conforto* e caminham para o que

Borba & Penteado (2003) chamam de *zona de risco*, que se caracteriza por incertezas e imprevisibilidade e que, certamente, irá requerer mais do seu conhecimento matemático (pp. 57-66), e isso também foi verificado, nas entrevistas com os professores analisados, como um fator a ser considerado na escolha em utilizar ou não o laboratório nas aulas de matemática. Eles reconhecem que alguns programas (*software*) podem contribuir para compreensão de determinados conceitos, mas preferem não correr o risco de ter que alterar os seus planos de aula quando se deparam com o inesperado.

Agradecimentos

Este trabalho é um subprojeto do projeto maior intitulado "Mapeamento do uso de tecnologias da informação nas aulas de Matemática no Estado de São Paulo", realizado com o apoio da CAPES, entidade do Governo Brasileiro voltada à formação de recursos humanos, coordenado pela Profa Dra Sueli Liberatti Javaroni, aprovado no Edital n. 049/2012/CAPES/INEP.

Referências bibliográficas

Borba, M. C., & Penteado, M. G. (2003). *Informática e educação matemática* (3ª ed.). Belo Horizonte: Autêntica.

Lima, A. J. B. (2012). *A utilização de tecnologias de informação e comunicação na aprendizagem da matemática por alunos brasileiros e portugueses do ensino médio/secundário* (Dissertação de Mestrado). Instituto de Educação – Universidade do Minho, Braga, Portugal.

Serviço Social da Indústria (2013). Laboratórios de informática. SESI-SP educação. Acedido em 24 março 2014 em http://www.sesisp.org.br/educacao/educacao-no-sesi-sp/laboratorios-de-informatica

Valente, J. A. (Org.). (1993). *Computadores e conhecimento: Repensando a educação.* Campinas: Gráfica Central da UNICAMP.

Massive Open Online Course (MOOC) na Educação Matemática: Possibilidades

Liamara Scortegagna[1], *Luis Felipe da Silveira*[2]
[1]Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), liamara@ice.ufjf.br
[2]Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), luisfelipesilvei@gmail.com

Introdução

Em tempos de universalização e de fácil acesso às informações através das Novas Tecnologias de Informação e de Comunicação – NTICs, surgem novos modelos de ensino que têm chamado a atenção de pesquisadores e de instituições de ensino. Os MOOCs são denominados de modelo de ensino ou uma metodologia de curso *online* e se apresentam como o "novo", pois integram a conectividade das redes sociais, o conhecimento de especialistas e os recursos educacionais *online*.

Na Educação Matemática, a utilização de NTICs não é algo novo e tem sido recomendado por muitos especialistas da área, como Borba (2004), Borba e Penteado (2003), Kenski (2007), Demo (1999), Santos e Gobbi (2008) e Souza e Roseira (2010). Porém, a utilização de MOOCs (Massive Open Online Courses) na matemática ainda é algo incipiente e está em fase de estudos, necessitando de pesquisas, análises e avaliações sobre a inclusão destes no processo de ensino e aprendizagem.

Neste trabalho, buscamos iniciar uma caminhada na busca destes conhecimentos e objetivamos apresentar algumas análises sobre os MOOCs, focando nas potencialidades deste novo método para o ensino da matemática. Para isso, utilizamos a metodologia de pesquisa bibliográfica-exploratória, pautados em leituras, análises e interpretações de textos, livros, periódicos, exemplos de MOOCs e outros documentos para explorar um tema ainda pouco pesquisado.

Massive Open Online Course (MOOC)

Para Mcauley, Stewart, Siemens, e Cormier (2010), um MOOC é um curso *online*, aberto, gratuito e massivo. Geralmente não possui pré-requisitos para participação, assim como emissão de certificação formal. Além destas características, um MOOC também está fortemente relacionado com o uso de recursos da *Web 2.0*, o que auxilia a potencializar a interação entre os participantes.

A primeira experiência com MOOCs foi feita por David Wiler (Utah State University), em 2007; porém, foi Sebastian Thrun (Stanford University), em 2011, que ganhou notabilidade da mídia. Destacamos, ainda, o sucesso do Coursera (2014), em 2012, que atingiu mais de 1 milhão de alunos, por meio de uma rede de 33 universidades.

No Brasil, a primeira iniciativa com MOOC foi feita pela Universidade Estadual Paulista (UNESP) em 2012 e, neste mesmo ano, foi desenvolvido o MOOC EAD pela Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP) e Associação Brasileira de Educação a Distância (ABED). Em seguida, foram lançados outros MOOCs com certificação pela Universidade de São Paulo (USP) em parceria com o portal brasileiro Veduca (2014). O número de cursos no método MOOC no Brasil hoje é considerado relevante; porém, ainda em caráter de experiências.

MOOC na Educação Matemática: possibilidades

A Educação Matemática se caracteriza como uma área de atuação que busca, a partir de referenciais teóricos e práticos consolidados, soluções e alternativas que inovem o ensino e a aprendizagem de matemática. Neste sentido, a utilização das NTICs é fundamental nesta área, pois procura promover mudanças educacionais, novas práticas docentes e experiências de aprendizagens diferenciadas aos alunos. A incorporação dos MOOCs no ensino da matemática se apresenta como uma possibilidade para auxílio na consolidação das mudanças apresentadas acima e alguns exemplos destes apresentamos a seguir.

O MOOC "Álgebra Linear" – Universidade MIT – tem como objetivo revisar uma parte do curso de Álgebra Linear, como operações entre matrizes, espaço e subespaço, base e dimensão, autovalores e autovetores, dentre outros (Veduca 2014). O MOOC "Introdução ao Pensamento Matemático" – Universidade Stanford – objetiva estudar e aplicar teorias do Pensamento Matemático (Coursera, 2014). Os MOOCs produzidos no Brasil também já são destaques, e um exemplo é "Cálculo I" da Universidade UNICAMP. Neste, são abordados os temas como Funções, Limites, Derivadas e Integrais, dentre outros (Veduca, 2014).

Os MOOCs apresentados são apenas alguns exemplos de conteúdos *online* disponíveis nas plataformas virtuais e que podem ser usados para o auxílio no processo de ensino e aprendizagem no ensino de matemática.

Após análise dos MOOCs e nas leituras efetuadas, buscamos destacar algumas *possibilidades* deste modelo de ensino na sala de aula e além dela. As possibilidades de uso dos MOOCs na sala de aula, como *materiais base ou complementares*, objetivam motivar os alunos na busca por mais informações e conhecimentos, fazem com que as aulas se tornem mais atrativas e produtivas. A *interatividade*, *trocas de experiência* com outros alunos e professores e as formas variadas e *colaborativas de resolução de problemas* fazem com que os MOOCs se tornem ferramentas significativas no processo de construção do conhecimento. Destacamos ainda as possibilidades de *aperfeiçoamento em outro idioma*, *conhecimento tecnológico* e a possibilidade de *desenvolvimento de um MOOC*, envolvendo ainda mais os alunos com a aprendizagem.

Para além da sala de aula, os MOOCs apresentam possibilidade de *aprendizagem continuada e complementar*, a *formação de redes* de contatos e conhecimento, a *flexibilidade* de horário e local, o incentivo à *autonomia* e à *ampliação do uso das tecnologias*, fatores considerados significativos para a formação além do currículo proposto numa escola ou instituição de ensino.

Conclusão

Os desafios da utilização dos MOOCs na educação matemática são muitos e se constituem a partir da necessidade da formação de um novo aluno com perfil de profissional conectado com o mundo digital. Para esta formação, é necessário que a educação matemática apresente, além de *modelos inovadores de ensino*, um professor com conhecimentos amplos e capacitado para a utilização das NTICs na sala de aula e fora dela.

Os MOOCs na educação matemática agrupam ainda um conjunto de incertezas e indefinições, peculiares de novidades com potencial transformador. Porém, a certeza que podemos ter é que iniciativas do tipo estão em perfeita sincronia com explorar as possibilidades de transformar a educação em um bem mais acessível, com qualidade e contribuindo com a formação de profissionais capazes de enfrentar os desafios do mundo contemporâneo.

Referências bibliográficas

Borba, M. C. (2004). *Dimensões da educação matemática a distância.* In M. A. V. Bicudo & M. C. Borba (Orgs.), *Educação matemática: Pesquisa em movimento* (pp. 296-317). São Paulo: Cortez.

Borba, M. C., & Penteado, M. G. (2003). *Informática e educação matemática* (3ª ed.). Belo Horizonte: Autêntica.

Coursera (2014). Disponível em www.coursera.org (acesso em 3 fev. 2014).

Creed-Dikeogu, G., & Clark, C. (2013). Are you MOOC-ing yet? A review for academic Libraries. In *CULS Proceedings* (vol. 3).

Demo, P. (1999). *Desafios modernos da educação*. Petrópolis: Vozes.

Kenski, V. M. (2007). *Educação e tecnologias: O novo ritmo da informação*. Campinas, SP: Papirus.

Mattar, J. (2013). *Aprendizagem em ambientes virtuais: Teorias, conectivismo e MOOCs*. TECOGS, PUCSP, n. 7, jan./jun.

Mcauley, A. Stewart, B., Siemens, G., & Cormier, D. (2014). T*he MOOC for digital online courses: Digital ways of knowing and learning* [S.l: S.n.]. Disponível em http://www.edukwest.com/wp-content/uploads/2011/07/MOOC_Final.pdf (acesso em 1 mar. 2014).

Santos, R. M. B., & Gobbi, B. C. (2008). TIC'S: Uma tendência em educação matemática, um relato de experiência. In *Anais do Encontro de Pós-Graduação e Pesquisa*. Fortaleza, CE, Brasil.

Souza, N. F., & Roseira, N. A. F. (2010). A contextualização no processo de ensino-aprendizagem da Matemática. In *Anais do Encontro Nacional de Educação Matemática*. Salvador, BA, Brasil.

Veduca (2014). Disponível em www.veduca.com.br (acesso em 3 fev. 2014).

A Educação Financeira na Matemática do ensino básico: Uma leitura da produção de significados

Marcelo Bergamini Campos[1], *Amarildo Melchiades da Silva*[2]
[1]Escola Municipal Professora Yayá Moreira - Barbacena/MG - Brasil, marcelo.bergamini@hotmail.com
[2] Universidade Federal de Juiz de Fora/MG - Brasil, xamcoelho@terra.com.br

Introdução

Este texto foi elaborado a partir de nossa dissertação de mestrado, em que investigamos significados produzidos[1] por estudantes do Ensino Fundamental a partir de tarefas propostas sobre Educação Financeira (Campos, 2012). O trabalho está inserido em um projeto mais abrangente que busca desenvolver uma experiência de *design educacional* por meio de um projeto de inserção da Educação Financeira no currículo de Matemática (Silva, 2011).

A partir da constatação da relevância do tema no contexto socioeconômico atual e da percepção de contribuições com a formação matemática dos estudantes, elaboramos um conjunto de tarefas voltadas para o sexto ano do Ensino Fundamental[2]. Os processos de elaboração, aplicação e análise dos resultados foram referenciados teoricamente. Para isso, tomamos o Modelo dos Campos Semânticos, desenvolvido por Lins (1999, 2008, 2012) e presente em Silva (2013).

Objetivando analisar as potencialidades desse protótipo de tarefas, desenvolvemos uma pesquisa de cunho qualitativo conforme proposto por Bogdan e Biklen (2010). Elas foram apresentadas a duas duplas de estudantes e, na sequência, em uma turma com 28 alunos. Todos estudam em uma escola pública e têm entre 11 e 12 anos de idade. Para coleta de dados, utilizamos os registros com as resoluções apresentadas e a gravação em áudio. Buscamos interferir o mínimo nas entrevistas. Não corrigimos cálculos efetuados, procedimentos utilizados ou emitimos opiniões sobre as tomadas de decisões.

O conjunto de tarefas

Entendemos que as tarefas devem estimular a produção de significados por parte dos alunos. Além disso, devem estar a serviço do ensino auxiliando o professor e criando uma

---

[1] No sentido proposto por Lins (2012).
[2] No Brasil, a Educação Básica compreende o Ensino Fundamental, com nove anos de duração, e o Ensino Médio, com três.

Martinho, M. H., Tomás Ferreira, R. A., Boavida, A. M., & Menezes, L. (Eds.) (2014).
Atas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática. Braga: APM., pp. 453–455

interação através do entendimento de que os significados produzidos por ele e/ou os significados oficiais da matemática são um entre os vários significados que podem ser produzidos. Elementos do pensar matematicamente, como estimativas, busca de padrões e estratégias de resoluções de problemas, estão presentes. Observamos ainda que a estrutura matemática subjacente envolve as operações fundamentais e que as situações são abertas, proporcionando vários caminhos de resolução.

Em Campos (2012), temos um conjunto composto por quatro tarefas. O propósito é apresentar situações que envolvem tomadas de decisões financeiras que podem fazer parte do cotidiano de um adolescente. Para sinalizar nosso entendimento sobre o tratamento na Educação Financeira no currículo de Matemática, apresentamos a tarefa que tem por título *Cuidando da Mesada*, no pôster. O objetivo é levar os estudantes a refletir sobre a adequação dos gastos e a possiblidade de cortar despesas.

Considerações Finais

A Educação Financeira pode ser abordada como um tema transversal em Matemática. De fato, a proposta interage com temas presentes na estrutura curricular desta disciplina e pode estar presente ao longo da Educação Básica.

Observando os diversos significados produzidos pelos sujeitos de pesquisa, percebemos diferentes leituras surgindo a partir do mesmo texto. Na interação com seus pares, em alguns momentos, compartilhavam interlocutores. Em outros, davam sinais de que estavam falando em direções opostas, não legitimando significados que eram produzidos pelos colegas.

Os estudantes utilizaram diferentes lógicas na busca de soluções. O enfoque de decisões financeiras associadas ao planejamento de gastos contribuiu para que, em alguns momentos, operassem usando estimativas e discutissem resultados que não lhes pareciam razoáveis. Verificamos ainda uma diversidade de decisões financeiras. O contexto apresentado na primeira tarefa cumpriu seu papel, na medida em que colaborou para a discussão do corte de gastos a necessidade equilibrar o orçamento.

O dinheiro e as tomadas de decisões financeiras fazem parte de nosso dia a dia. Ao produzirem significados, os estudantes assumiram elementos de seu cotidiano. Além disso, discutiram ou defenderam as atitudes de seus pais, sugerindo que as decisões de familiares podem exercer influência sobre seus conhecimentos financeiros.

Referências bibliográficas

Bogdan, R. C., & Biklen, S. K (2010). *Investigação qualitativa em educação*. *Uma Introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Campos, M. B. (2012). *Educação financeira na matemática do ensino fundamental: Uma análise da produção de significados* (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, Brasil.

Campos, M. B., & Silva, A. M. (2013). Uma leitura da produção de significados de estudantes do ensino fundamental para tarefas de educação financeira. In *XI ENEM Encontro Nacional de Educação Matemática*. Curitiba.

Lins, R. C. (1999). Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a educação matemática. In M. A. V. Bicudo (Org.), *Pesquisa em educação matemática: Concepções e perspectivas* (pp. 75-94). São Paulo: UNESP.

Lins, R. C. (2008). A diferença como oportunidade para aprender. In:*XIV ENDIPE, Trajetórias e processos de ensinar e aprender: Sujeitos, currículos e culturas* (vol. 3, pp. 530-550). Porto Alegre: EdiPUCRS.

Lins, R. C. (2012). *Modelo dos campos semânticos e educação matemática: 20 anos de história*. São Paulo: Midiograf.

Silva, A. M. (2011). *Uma experiência de design em educação matemática: O projeto de educação financeira escolar* (Projeto de Pesquisa – Estágio Pós-Doutoral). Rutgers/New Jersey/EUA, Newark.

Silva, A. M. (2013). Sobre a dinâmica da produção de significados para a matemática. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, *6*(2).

A participação de estudantes da Licenciatura em Matemática em um projeto colaborativo

Mercedes Carvalho[1], *Abigail Fregni Lins*[2], *Patrícia Sandalo Pereira*[3]
[1]Universidade Federal de Alagoas (UFAL), mbettacs@uol.com.br
[2]Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), bibilins2000@yahoo.co.uk
[3]Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), patriciasandalop@uol.com.br

Este artigo apresenta parte do projeto *Trabalho colaborativo com professores que ensinam Matemática na educação básica em escolas públicas das regiões Nordeste e Centro-Oeste*, aprovado em 2012 pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), que reúne a Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), a Universidade Estadual da Paraíba (UEPB) e a Universidade Federal de Alagoas (UFAL). O projeto congrega quarenta e seis membros entre pesquisadoras responsáveis pelos projetos nas Universidades participantes – coordenadoras locais –, estudantes de Pós-Graduação – mestrandos e doutorandos –, estudantes da Graduação em Matemática e Pedagogia e professores da educação básica.

Em linhas gerais, as três universidades realizam uma pesquisa colaborativa entre a universidade e a escola básica, momento em que professores do ensino fundamental e do médio, alunos da licenciatura e da pós-graduação trabalham juntos em busca de caminhos que favoreçam a aprendizagem dos conteúdos e procedimentos matemáticos do alunado.

No presente artigo analisamos as expectativas dos dezasseis alunos da Licenciatura em Matemática em relação ao projeto.

Legislação brasileira e a formação de professores de Matemática

De acordo com Fiorentini e Castro (2003), "a licenciatura preocupa-se muito mais em formar um profissional que tenha o domínio operacional e procedimental da Matemática do que um profissional que fale sobre a Matemática, que saiba explorar suas ideias de múltiplas formas" (p. 137), ou seja, nas licenciaturas a rigidez dos currículos não oportuniza o diálogo sobre o fazer matemático de forma a que os licenciandos, futuros professores, elaborem modelos de práticas pedagógicas mais próximos às necessidades do cotidiano escolar.

Simultaneamente, a Resolução CNE/CP n.º 1/2002, que normatiza as Diretrizes Curriculares Nacionais para Formação de Professores em Nível Superior para atuar nos

Martinho, M. H., Tomás Ferreira, R. A., Boavida, A. M., & Menezes, L. (Eds.) (2014).
Atas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática. Braga: APM., pp. 457–459

diferentes níveis da Educação Básica, traz mudança de concepção na formação dos professores. O artigo 3º, inciso III da referida Resolução, traz a pesquisa para o centro da formação dos professores "com foco no processo de ensino e de aprendizagem, uma vez que ensinar requer, tanto dispor de conhecimentos e mobilizá-los para a ação, como compreender o processo de construção do conhecimento".

A pesquisa

Os dezasseis estudantes da graduação têm uma média de idade entre 18 e 21 anos e a maioria cursa o 2º ano da licenciatura em Matemática. Estes estudantes responderam a questões que intencionaram compreender as suas expectativas em relação ao projeto. As perguntas foram enviadas aos participantes via *e-mail*. Cada núcleo recebeu a devolutiva e organizou as repostas em arquivos que foram trocados entre as coordenadoras dos núcleos para alicerçar as nossas discussões acerca das percepções dos participantes em relação ao desenvolvimento do projeto.

Para a análise deste artigo organizamos as respostas dos graduandos e, ao lê-las, procuramos agrupá-las a partir do seu vocabulário comum.

As expectativas dos licenciandos em Matemática

As expectativas dos licenciandos em relação ao projeto são positivas, principalmente porque vislumbram um espaço de construção de conhecimentos. Nesta direção, oportuniza-lhes ampliarem seu repertório acadêmico, isso porque, além das disciplinas que compõem a matriz curricular do curso – matérias do conteúdo matemático e do conteúdo pedagógico –, realizam leituras e trabalhos e observam situações reais do cotidiano escolar, o que fomenta o pensar do fazer pedagógico:

> Espero ampliar meus conhecimentos através de leituras, discussões, produção de artigos, produções para o projeto, congressos e tudo que for possível durante a duração do mesmo (UFMS2).
>
> Aprender métodos e técnicas que maximizem a aprendizagem de meus futuros alunos e contribuir com minha formação profissional e acadêmica, bem como a educação de forma geral (UEPB8).

Também foi possível observar que alguns dos alunos entreveem no projeto um espaço de aprendizagem sobre o trabalho na sala de aula, ou seja, uma oportunidade de observar procedimentos didáticos e outros modelos de trabalho docente, o que entendemos ser salutar, conforme argumentação de Fiorentini e Castro (2003).

Considerações finais

Conforme o exposto, pode-se depreender que a participação dos graduandos no projeto também lhes possibilita perceberem como aprendem. A partir do momento em que começam a refletir sobre seus processos de aprendizagem, há um movimento para sair de uma possível zona de conforto. Assim, há indícios de que eles desenvolvem o espírito investigativo e que percebem que são responsáveis pela própria formação, ou seja, pela "aprendizagem como processo de construção de conhecimentos, habilidades e valores em interação com a realidade e com os demais indivíduos, no qual são colocadas em uso capacidades pessoais" (Resolução n.º 2/2002).

Referências bibliográficas

Fiorentini, D., & Castro, F. C. (2003).Tornando-se professor de Matemática: O caso de Allan em prática de ensino e estágio supervisionado. In D. Fiorentini (Org.), *Formação de professores de Matemática*: *Explorando novos caminhos com outros olhares* (pp. 121-56). Campinas: Mercado das Letras.

Resolução n.º 2/2002 – Diretrizes Curriculares Nacionais para Formação de Professores em Nível Superior.

Formar professores de matemática: Estágios nas salas do 5º ano do ensino fundamental

Mercedes Carvalho
Universidade Federal de Alagoas (UFAL), mbettacs@uol.com.br

Este texto trata da pesquisa Estágio nos anos iniciais – *Espaço de formação de professores de Matemática*, financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico (CNPq). Ao longo do ano de 2012 e 2013, os alunos de licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Alagoas (UFAL) realizaram estágio de observação e regência nas turmas do 5º ano do ensino fundamental de uma escola pública municipal de Maceió, Alagoas, que objetivou investigar a formação inicial do professor de matemática, focalizando o estágio supervisionado.

Trabalhos sobre a formação dos professores de matemática, em especial que tratam do estágio supervisionado (Carvalho, 2012; Lima & Lucena, 2011; Ludwig & Groenwald, 2011; Pires, 2011), consideram-no um espaço privilegiado para: estabelecer diálogos entre a escola e a universidade; a superação da dicotomia entre a teoria e a prática; e a transposição dos saberes científicos da licenciatura para os saberes escolares da educação básica. No Brasil, a resolução CNE/CP 2/2002, que normatiza as Diretrizes Curriculares Nacionais para Formação de Professores em Nível Superior, destaca a pesquisa na formação inicial do professor como reza o artigo 3º, inciso III, dessa resolução e, nesse sentido, os estágios supervisionados mostram-se um celeiro de oportunidades para atender a formação dos futuros docentes com ênfase na investigação, isto porque eles estarão vivenciando o cotidiano escolar.

A partir dessa perspectiva, e por entender que na licenciatura em Matemática deve haver espaço para se discutir a matemática ensinada nos anos iniciais, foi proposto aos alunos do 5º semestre do período vespertino, turma de 2012, do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, que começassem seus estágios observando o cotidiano pedagógico das turmas do 1º ao 5º anos do ensino fundamental. Porém, localizamos as ações do estágio nas salas do 5º ano do ensino fundamental pelo fato de haver maior número de classes no período em que frequentávamos a escola e, principalmente, porque o

Martinho, M. H., Tomás Ferreira, R. A., Boavida, A. M., & Menezes, L. (Eds.) (2014).
Atas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática. Braga: APM., pp. 461–463

5º ano antecede o 6º ano do ensino fundamental, pois os licenciados em Matemática são formados para atuar a partir deste ano. O trabalho era iniciado no horário de aula habitual da escola e, ao término das aulas, nos reuníamos em rodas de conversa, momento em que falávamos acerca das observações, dúvidas, descobertas e proposições para o ensino de matemática.

Nas salas de aula, os alunos observaram as explicações das professoras e os conteúdos matemáticos que estavam sendo trabalhados, além de analisarem o livro didático e o caderno de matemática das crianças. A preocupação, nesse momento, era que eles identificassem os conteúdos que as crianças estudavam e os relacionassem com a matemática estudada na licenciatura. E, como não poderia deixar de ser, a ênfase recaía sobre o trabalho numérico. Em uma das sessões, os estagiários observaram o trabalho com as operações de adição, subtração, multiplicação e contagem, desenvolvido pela professora com o uso de jogos, e relacionaram estes conteúdos com os estudos acerca de álgebra linear, teoria dos números e fundamentos da matemática I, isto é, realizaram a transposição didática entre os conteúdos matemáticos. Ao estabelecerem relações entre a matemática ensinada na licenciatura e as atividades realizadas nos anos iniciais, perceberam o "potencial" matemático das crianças. Nas rodas de conversa, as informações sobre os estágios foram colhidas, sistematizadas, analisadas, registradas e discutidas e, além disso, foram propostas ações para a melhoria da qualidade do ensino dos conteúdos matemáticos nos anos iniciais, como um curso de aperfeiçoamento a ser oferecido pelo Instituto de Matemática para pedagogos que atuam em escola pública.

Esses futuros professores de Matemática compreenderam, por meio do estágio, que a matemática ensinada nos anos iniciais é a essência da matemática ensinada na licenciatura, isto é, fizeram a transposição didática entre os conteúdos matemáticos da licenciatura e os dos anos iniciais da educação básica e, também, perceberam que os anos iniciais têm especificidades a que os cursos de licenciatura em Matemática não atendem. Entretanto, discutir a matemática desenvolvida nesse segmento, nos cursos de licenciatura em Matemática, retira do limbo o 6º ano do ensino fundamental II, um ano considerado crítico pelos educadores, pois o licenciado em matemática não irá ser professor do 5º ano, mas certamente o será no 6º ano, ou seja, será o primeiro professor de Matemática na vida escolar desses alunos e poderá despertar, resgatar ou manter a afeição ou a rejeição dos seus alunos por esta ciência.

Referências bibliográficas

Brasil (1996). *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional* n.º 9394/96, aprovada em 20 de dezembro de 1996.

Carvalho, M. (2012). E*stágio na licenciatura em Matemática – Observações nos anos iniciais*. Petrópolis: Vozes.

Lima, J. I., & Lucena, I. C. R. (2011). *O estágio como pesquisa na licenciatura em Matemática*. Disponível em http://www.ufpa.br/npadc (acesso em 11 jun. 2011).

Ludwig P. I., & Groenwald, C. L. O. (2011). *Formação inicial de professores de Matemática: Situações vivenciadas pelos alunos na realização do estágio*. Disponível em www.sbem.com.br (acesso em 11 jun. 2011).

Pires, M. A. (2011). *A configuração do estágio supervisionado nos cursos de licenciatura em Matemática em três instituições de ensino superior no estado da Bahia*. Disponível em http://www.apm.pt (acesso em jun. 2011).

Resolução n.º 2/2002 – Diretrizes Curriculares Nacionais para Formação de Professores em Nível Superior.

Aprendizagem colaborativa: A plataforma na Internet, WGL – Uma Oficina de formação

Vanda Santos[1], *Helena Campos*[2], *Pedro Quaresma*[3]
[1]CISUC, Universidade de Coimbra, vsantos7@gmail.com
[2]Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, UTAD, hcampos@utad.pt
[3]CISUC/Dep. de Matemática, Universidade de Coimbra, pedro@mat.uc.pt

Introdução

A aprendizagem da geometria pode ser facilitada pelo uso de programas de geometria dinâmica, pois, segundo Jones (2000), este tipo de tarefas incentiva os alunos a elaborar conjeturas, ajudando-os a progredir na comunicação matemática, desenvolvendo mecanismos de raciocínio dedutivo. Com a integração de plataformas colaborativas de aprendizagem nas escolas, o grande desafio será, não só a disponibilização e a utilização de recursos digitais, mas também a criação de atividades de produção, comunicação e colaboração.

O Laboratório de Geometria na Rede – **W**eb **G**eometry **L**aboratory (WGL) surge como a junção dos recursos de programas de geometria dinâmica, repositórios de problemas geométricos numa plataforma da rede com um interface síncrona e assíncrona, com módulos colaborativos e adaptativos (Santos & Quaresma, 2013a, 2013b; Quaresma, Santos, & Bouallegue, 2013), em que o Tabulae[1] e o GeoThink[2] não conseguem ser tão completos.

Utilizando uma metodologia qualitativa no âmbito investigação-ação (Latorre, 2003), tanto a plataforma como os conteúdos para a mesma estão a ser desenvolvidos. No presente texto descreve-se uma oficina de formação focada no ambiente colaborativo da plataforma.

Um dos objetivos da oficina era que os professores desenvolvessem competências ao nível da utilização e exploração desta plataforma, tanto na sua vertente tecnológica como no domínio de potencialidades educativas e pedagógicas, em modo presencial e não presencial. Centrando-se no contexto acima referido, pretendeu-se dar resposta às seguintes questões: Será que o uso desta plataforma promove uma nova forma de

---

[1] http://tabulae.net/pcm/

[2] http://romulo.det.uvigo.es/ticai/libros/2008/2008/TICAI_2008_Cap07.pdf

Martinho, M. H., Tomás Ferreira, R. A., Boavida, A. M., & Menezes, L. (Eds.) (2014).
Atas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática. Braga: APM., pp. 465–469

ensinar e aprender, promovendo situações de interação entre os alunos? E que os professores incluam na sua prática letiva esta plataforma, proporcionando um ambiente colaborativo para a geometria nas suas aulas?

Oficina de formação

A abordagem da oficina de formação teve por base o referencial teórico do sócio-construtivismo, onde a resolução de uma tarefa é produzida através de interações entre os grupos proporcionando a construção do conhecimento. Com esta estratégia colaborativa consegue-se melhorar a aprendizagem de diferentes temas em diversos níveis de ensino (Wei & Ismail, 2010).

A oficina de formação "Aprendizagem Colaborativa na Geometria: A plataforma de geometria na Internet (WGL)" desenvolveu-se com a participação de 16 professores, do grupo disciplinar 500, da região de Vila Real. Todos os professores pertencem ao Quadro de Escola, contando entre 16 e 20 anos de experiência de ensino. A oficina iniciou-se em novembro de 2013, intercalando sessões presenciais e não presenciais. Com esta oficina pretendeu-se articular os objetivos específicos do programa de matemática e das metas do 3º ciclo do Ensino Básico e Secundário com um ambiente colaborativo proporcionado pela plataforma WGL. A oficina de formação pretendeu contribuir para que os professores incluam na sua prática letiva o WGL, proporcionando deste modo um ambiente colaborativo nas suas aulas.

Nas sessões presenciais os professores tiveram um papel ativo, explorando-a primeiramente como alunos, organizados em grupos, resolvendo uma tarefa (Figura 1); posteriormente, numa sessão não presencial, uma outra tarefa (Figura 2), para aferirem, autonomamente, as potencialidades da plataforma WGL.

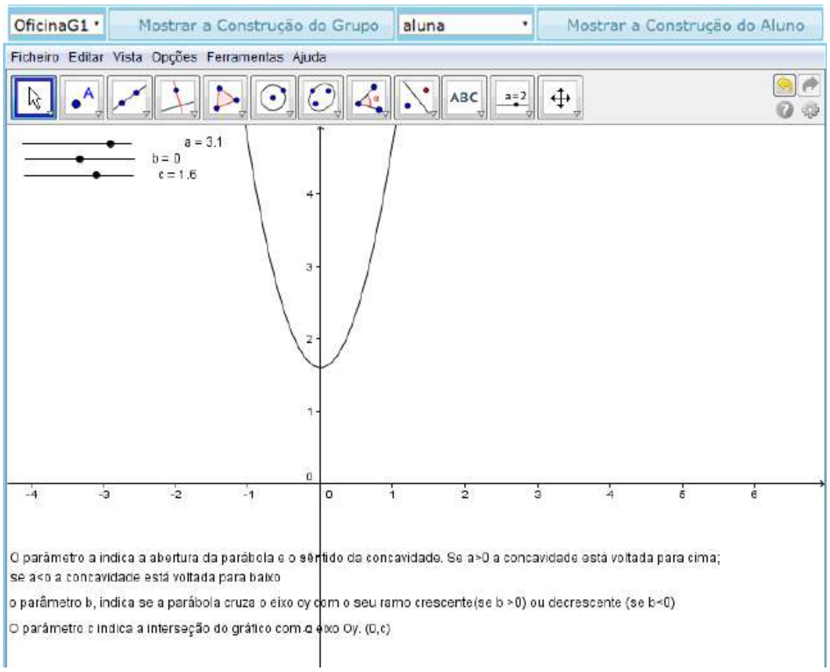


Figura 1. Grupo 1 da Oficina numa sessão colaborativa (presencial) – perspetiva do professor

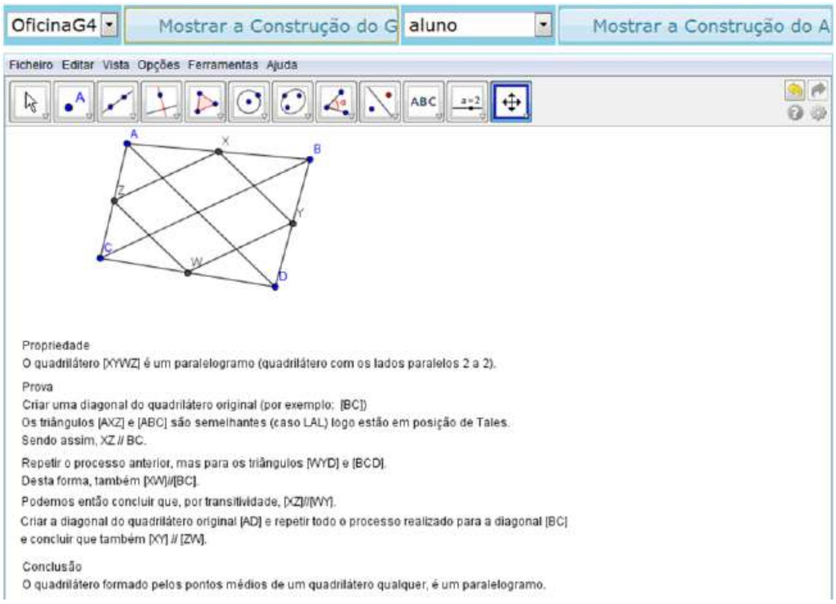


Figura 2. Grupo 4 da Oficina numa sessão colaborativa (não presencial) – perspetiva do professor

Como alunos, tiveram disponível a descrição da tarefa e duas janelas: à esquerda a janela do grupo e à direita a sua janela individual (Figura 3).

Figura 3. Aula colaborativa – perspetiva do aluno

Os professores formandos, utilizando também perfis de professor, exploraram a plataforma criando turmas, grupos (Figura 4) e sessões colaborativas (Figura 5) para realizarem tarefas em ambiente de sala de aula com os seus alunos.

Figura 4. Administração turmas/grupos/alunos pelo professor

Figura 5. Gestão da sessão colaborativa pelo professor

Ainda durante a realização da oficina, a plataforma foi utilizada num ensaio com alunos do 8º ano e em sala de aula por alunos do 9º ano e do 11º ano.

Durante a realização da oficina foram identificados vários pontos onde a plataforma deveria ser melhorada: o adicionar de uma sessão conversacional (*chat*); a disponibilização das tarefas no módulo colaborativo; a troca de construções entre a janela colaborativa e a janela de trabalho individual; a transferência das construções das sessões colaborativas para a lista de construções dos alunos; entre outras melhorias pontuais.

Como conclusão ficam as seguintes frases deixadas pelos professores formandos, no final da oficina de formação: “As TIC apresentam um potencial inesgotável para tornar a aprendizagem mais atual e significativa” e “Foi uma experiência bastante positiva, tendo superado mesmo as minhas expetativas”.

Agradecimentos

Este trabalho é financiado pelo CISUC, por Fundos Nacionais através da FCT - Fundação para a Ciência e a Tecnologia no âmbito do projeto PEst-OE/EEI/UI0326/2014.

Referências bibliográficas

Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: Students. interpretations when using dynamic software and their evolving mathematical explanations. *Educacional Studies in Mathematics*, *44*, 55-85.

Latorre, A. (2003). *La investigación-acción: Conocer y cambiar la práctica educativa* (Vol. 179). Grao Ed. - Castellano.

Quaresma, P., Santos, V., & Bouallegue, S. (2013). The Web Geometry Laboratory project. In *CICM 2013* (vol. 7961 of LNAI, pp. 364-368). Springer.

Santos, V., & Quaresma, P. (2013a). Collaborative aspects of the WGL project. *Electronic Journal of Mathematics & Technology*, *7*(6).

Santos, V., & Quaresma, P. (2013b). Plataforma colaborativa para a geometria. *Indagatio Didactica*, *5*(1).

Wei, C. S., & Ismail, Z. (2010). Peer Interactions in computer-supported collaborative learning using dynamic mathematics software. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*, *8*(0), 600-608.

As potencialidades da disciplina Álgebra Linear: Uma discussão direcionada à formação do professor de Matemática

Vitor Rezende Almeida[1], *Aretha Fontes Alves*[2], *Amarildo Melchiades da Silva*[3]
[1]Universidade Federal de Juiz de Fora, Brasil, vitor_mat@yahoo.com.br
[2]Universidade Federal de Juiz de Fora, Brasil, arethafontes@bol.com.br
[3]Universidade Federal de Juiz de Fora, Brasil, xamcoelho@terra.com.br

A pesquisa

Na maioria das Licenciaturas em Matemática no Brasil, percebemos que a abordagem dada às disciplinas de conteúdo matemático tem desenvolvido apenas o ensino do conteúdo, não se preocupando em contribuir na formação prática desses futuros profissionais. Diante deste fato, realizamos uma pesquisa (Alves, 2013) que buscou compreender quais as características de um Curso[1] de Serviço de Álgebra Linear destinado à formação do futuro professor de Matemática. Portanto, estávamos interessados em analisar como deveria ser configurado este curso de forma a que possibilitasse ao licenciando em Matemática uma constante reflexão sobre os elementos envolvidos com a sala de aula de Matemática, sendo eles matemáticos ou não.

Neste ponto, chamamos atenção ao termo Curso de Serviço. Estes são, segundo a visão de Silva (2011), "disciplinas que tenham como foco a formação do professor de matemática, mas que não se limitam a desenvolver conteúdo matemático. Elas se propõem a intervir, também, na sua formação didático-pedagógica" (p. 2). Ressaltamos que esta noção é de grande importância para nossa pesquisa e que nos motivou a criar as questões que nortearam nosso estudo. São elas:

> i) Quais são as características que um curso de Álgebra Linear deve possuir para que contribua na prática docente de professores de Matemática, ou seja, que traga consigo a concepção de Curso de Serviço?
>
> ii) Como podemos elaborar um Curso de Serviço de Álgebra Linear, focado no estudo dos Espaços Vetoriais, para a Licenciatura em Matemática?

---

[1] Trataremos o termo "curso" considerando-o tanto como Curso, tais como Matemática, Física, Engenharia, quanto como disciplina, tais como Geometria, Cálculo, Análise.

Martinho, M. H., Tomás Ferreira, R. A., Boavida, A. M., & Menezes, L. (Eds.) (2014).
Atas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática. Braga: APM., pp. 471–474

Voltamos nosso foco, portanto, à disciplina Álgebra Linear, por nossa trajetória acadêmica, por esta ser uma disciplina presente em todos os cursos de Licenciatura em Matemática e se constituir, potencialmente, como um Curso de Serviço.

O referencial teórico e metodológico

Para alcançar o objetivo proposto por uma pesqsuisa, acreditamos que o referencial teórico adotado por nós foi de fundamental importância para este estudo, pois nos deu embasamento para estruturar, coletar dados, intervir, analisar, refletir, argumentar e apresentar considerações para ajudar na conclusão de nossa investigação. Entendemos, em concordância com Lins (2001), que o Modelo dos Campos Semânticos constitui

> [...] uma simples, ainda que poderosa ferramenta para pesquisa e desenvolvimento na educação matemática [...] para guiar práticas de sala de aula e para habilitar professores a produzir uma leitura suficientemente fina, assim útil, do processo de produção de significados em sala de aula (p. 59, tradução nossa).

Além do MCS, utilizamos uma abordagem qualitativa de pesquisa, no sentido proposto por Bogdan e Biklen (1994).

A pesquisa de campo

Nossa pesquisa de campo se constituiu em um curso de Álgebra Linear de ementa livre, na modalidade de Seminário, voltada especificamente a alunos de Licenciatura em Matemática, sustentado pela concepção de Curso de Serviço apresentada anteriormente. Este curso foi denominado Seminário de Álgebra Linear e ministrado por nós e pelo professor/pesquisador Almeida (2013)[2]. Durante o curso, que durou aproximadamente dois meses, contamos com a participação de dois alunos de Graduação com pretensão de serem professores de Matemática. Entendemos que este curso nos ofereceu, entre outras contribuições, uma oportunidade de refletir em que circunstâncias os cursos de conteúdo matemático podem contribuir na prática docente de professores de Matemática.

---

[2] Este pesquisador realizou um estudo complementar ao nosso, com foco no estudo das Transformções Lineares.

Finalizando ideias

O objetivo de nosso estudo foi levantar as características de um curso de serviço voltado a alunos de Licenciatura em Matemática, com foco na Álgebra Linear. Ressaltamos que os resultados apontados pelo mesmo devem ser entendidos como reflexão para novas pesquisas e como suporte às licenciaturas já existentes e futuras licenciaturas que busquem por uma alternativa à estrutura empregada na maioria dos cursos de Licenciaturas em Matemática.

A priori, gostaríamos de mencionar que dividimos as características do curso em três grupos com a finalidade de melhor apresentar nossas posições metodológicas. São eles: características voltadas à metodologia de sala de aula; características que envolvem a nossa expectativa quanto a postura do professor de matemática; e, por fim, características voltadas ao conteúdo de Espaços Vetoriais e sua relação com a formação do professor de matemática. A fim de sermos pertinentes ao tema a que nos propomos, apresentaremos neste texto apenas as características referentes ao terceiro grupo indicado acima.

O estudo dos Espaços Vetoriais

A teoria de Espaços Vetoriais possui um conteúdo que, se conduzido em acordo com a metodologia proposta por nós, pode oferecer ao licenciando oportunidades de ampliar seus modos de produção de significado[3]. Acreditamos que algumas das principais características que este curso deve possuir são:

- a possibilidade de conviver com conceitos que oferecem uma discussão acerca de significados matemáticos e não-matemáticos, como as noções de Espaço, Vetor, Base e Dimensão;
- a manipulação dos conceitos discutindo sua natureza: algébrica ou geométrica;
- a oportunidade de manipular o conjunto dos números reais de forma distinta do que é dito em outras disciplinas e ter a oportunidade de analisar suas propriedades e refletir sobre sua aplicação;

[3] Segundo a visão do Modelo dos Campos.

- estender a ideia anterior ao manipular operações de adição e multiplicação em n-uplas de números reais.

Além disso, destacamos a importante discussão de tarefas, as quais foram formuladas a partir de um levantamento de dificuldades recorrentes em cursos de Álgebra Linear apontados por autores[4] que se dedicaram a analisar estas dificuldades.

Gostaríamos de ressaltar que estas características devem ser constantemente refletidas pelo educador universitário ao ministrar uma disciplina a alunos de Licenciatura em Matemática. Além disso, nosso objetivo era realizar uma pesquisa que indicasse novos horizontes para a (re)construção das Licenciaturas em Matemática.

Referências bibliográficas

Almeida, V. R. (2013). *Álgebra linear como um curso de serviço para a licenciatura em Matemática: O estudo das transformações lineares* (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, Brasil.

Alves, A. F. (2013). *Álgebra linear como um curso de serviço para a licenciatura em Matemática: O estudo dos espaços vetoriais* (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, Brasil.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). Investigação qualitativa em educação: Fundamentos, métodos e técnicas. In *Investigação qualitativa em educação* (pp. 15-80). Porto: Porto Editora.

Julio, R. S. (2007). *Uma leitura da produção de significados matemáticos e não-matemáticos para "dimensão"* (Dissertação de Mestrado). Universidade Estadual Paulista, Campus de Rio Claro, Brasil.

Lins, R. C. (2001). The production of meaning for algebra: A perspective based on a theoreticall model of semantic fields. In R. Sutherland et al., *Perspectives on school algebra*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Silva, A. M. (1997). *Uma análise da produção de significados para a noção de base em álgebra linear* (Dissertação de Mestrado). Universidade Santa Úrsula, Rio de Janeiro, Brasil.

Silva, A. M. (2003). *Sobre a dinâmica da produção de significados para a matemática* (Tese de Doutoramento). Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, Brasil.

Silva, A. M. (2011). Um curso de serviço para a licenciatura em Matemática. *XIII Conferência Interamericano de Educação Matemática* (pp. 1- 7). Recife: CIAEM.

[4] Por exemplo, em Silva (1997, 2003) e Julio (2007).

Revisão Científica

Ailton Paulo de Oliveira Júnior
Alexandra Gomes
Amarildo Melchiades da Silva
Ana Maria Boavida
Ana Henriques
Ana Isabel Silvestre
António Borralho
António Domingos
António Guerreiro
António Ribeiro
Aretha Fontes Alves
Carlos Manuel Morais
Carlos Miguel Ribeiro
Carolina Carvalho
Catarina Delgado
Cátia Rodrigues
Cecília Monteiro
Célia Maria Carolino Pires
Cristina Loureiro
Cristina Martins
Cristina Morais
Darlinda Moreira
Edda Curi
Eliel Constantino da Silva
Elma Daniela Bezerra Lima
Elvira Maria Santos
Ema Mamede
Fernando Santos
Floriano Viseu
Helena Maria Barros de Campos
Helena Rocha
Hélia Gonçalves Pinto
Hélia Jacinto
Hélia Oliveira
Henrique Guimarães
Isabel Cabrita
Isabel Velez
Jaime Carvalho e Silva
Joana Mata-Pereira
João Pedro da Ponte
José António Fernandes
José Duarte
José Manuel Matos
José Marcos Lopes
José Roberto Linhares de Mattos
Leonor Santos
Leticia Sosa Guerrero
Liamara Scortegagna
Lina Brunheira
Luciano Veia
Luís Menezes
Lurdes Serrazina
Manuel Joaquim Saraiva
Manuel Vara Pires
Manuela Pires
Marcelo Bergamini Campos
Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino
Marco Aurélio Kistemann Jr
Margarida Rodrigues
Maria da Conceição Costa
Maria de Fátima Mendes
Maria do Rosário Monteiro
Maria Helena Martinho
Maria Isabel Rocha
Maria Manuel Nascimento
Maria Paula Rodrigues
Maria Teresa Neto
Marisa Quaresma
Mercedes Carvalho
Miguel Figueiredo
Mónica Raquel Cerca
Nádia Diogo Ferreira
Nélia Maria Pontes Amado
Neusa Branco
Patrícia Sandalo Pereira
Paula Cristina da Cruz Serra Cabaço
Paula Cristina Quintas
Paula Maria Pereira de Barros
Paulo Henrique Rodrigues
Pedro Palhares
Renata Viviane Raffa Rodrigues
Rosa Antónia Tomás Ferreira
Sandra Nobre
Teresa Pimentel