ATAS DO XXVIII SEMINÁRIO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

2017

Editores

Luís Menezes
António Ribeiro
Helena Gomes
Ana Patrícia Martins
Fernanda Tavares
Hélia Pinto

APM
Associação de Professores
de Matemática

Título: Atas do XXVIII Seminário de Investigação em Educação Matemática

Editores: Luís Menezes, António Ribeiro, Helena Gomes, Ana Patrícia Martins, Fernanda Tavares, Hélia Pinto

Revisão científica:

Alexandra Gomes
Ana Maria Boavida
Ana Henriques
Ana Patrícia Martins
Ana Paula Canavarro
António Domingos
António Guerreiro
António Ribeiro
Carlos Miguel Ribeiro
Carlos Morais
Cátia Rodrigues
Cecília Costa
Conceição Costa
Cristina Loureiro
Cristina Martins
Cristina Morais
Dárida Fernandes
Elvira Santos
Fátima Mendes
Floriano Viseu
Helena Gomes
Helena Martinho
Helena Rocha
Hélia Oliveira
Hélia Pinto
Hugo Menino
Isabel Cabrita
Isabel Vale
Joana Brocardo
Joana Mata Pereira
João Pedro da Ponte
João Rocha
José António Fernandes
Leonor Santos
Lina Brunheira
Lina Fonseca
Luciano Veia
Luís Menezes
Lurdes Serrazina
Manuel Saraiva
Manuel Vara Pires
Margarida Rodrigues
Maria Manuel Nascimento
Maria P. Figueiredo
Marisa Quaresma
Nélia Amado
Neuza Branco
Pablo Flores
Paula Maria Catarino
Paulo Afonso
Pedro Palhares
Rogério Matias
Rosa Antónia Ferreira
Susana Carreira
Susana Colaço
Teresa Pimentel

ISBN: 978-972-8768-67-6

Capa: Luís Menezes

Edição: 1.ª edição - Viseu, abril de 2017

Editora: Associação de Professores de Matemática

ATAS DO XXVIII
SEMINÁRIO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Editores
Luís Menezes, António Ribeiro,
Helena Gomes, Ana Patrícia Martins,
Fernanda Tavares, Hélia Pinto

ÍNDICE

Posters

INTRODUÇÃO

Em 2017, realiza-se em Viseu, pela terceira vez, o Seminário de Investigação em Educação Matemática (SIEM), dinamizado pelo Grupo de Trabalho de Investigação (GTI) da Associação de Professores de Matemática (APM). Estes seminários aconteceram em 1992 e em 2002.

Em 1992 realizou-se na Escola Superior de Educação de Viseu o III SIEM. Foi neste seminário que surgiu, de forma mais visível, o Grupo de Trabalho de Investigação, com a aprovação dos seus objetivos e linhas orientadoras. A ideia de constituir, no seio da Associação de Professores de Matemática, um grupo de trabalho dedicado à Investigação em Educação Matemática vinha de trás, do Encontro de Professores de Matemática (ProfMat) de 1989, em Viana do Castelo, por iniciativa de João Pedro da Ponte. Em 1992, Viseu sucedia, assim, ao SIEM das Caldas da Rainha, em 1990, e ao SIEM do Porto, no ano seguinte.

A revista *Quadrante*, publicada pelo GTI, tem tantos anos quantos decorreram desde esse primeiro SIEM em Viseu, 25 anos. Pode dizer-se que a *Quadrante* nasceu em Viseu, na medida em que no seu número inaugural, que saiu nesse ano de 1992, publicou textos baseados em comunicações realizadas no III SIEM. O volume 1, n.º1, da *Quadrante*, inclui, por esta ordem, os artigos seguintes: Identidade profissional dos professores de Matemática, Diamantina Carmona; Calculadoras na Educação Matemática - uma experiência de formação de professores, Cristina Loureiro; Contributos para a avaliação do processo de lançamento experimental dos novos programas, Maria João Costa; O sentido de resolução de problemas, Ana Maria Boavida; "Aplicações e modelação" nos currículos de Matemática: contornos do debate atual, Susana Carreira; Acomodando a teoria de van Hiele a modelos cognitivos idealizados, José Manuel Matos; Um estudo sobre as capacidades geométricas (espaciais) de estudantes universitários, Maria Elfrida Ralha; O computador na aprendizagem da Geometria - uma experiência com alunos do 10º ano de escolaridade, Manuel Saraiva; Avaliação formativa por computador, Maria Paula Carvalho; Avaliação formativa - uma experiência; João Carlos Vieira; Fatores pessoais e situacionais do rendimento na Matemática: avaliação e intervenção, Ana Paula

Mourão, António M. Barros, Leandro Almeida. Olhando para aquilo que eram as preocupações da investigação em Educação Matemática na altura, no início da década de 1990, e para a investigação que é apresentada neste XXVIII Seminário de Investigação em Educação Matemática, em 2017, encontramos muitos pontos de contacto.

Um desses pontos é a figura do professor e dos processos formativos em que está envolvido. No XXVIII SIEM estão presentes diversos trabalhos que têm o professor como foco, por exemplo: Dinâmicas de aprendizagem de professores de matemática num estudo de aula na elaboração e análise de um diagnóstico dos conhecimentos dos alunos, Marisa Quaresma, João Pedro da Ponte; Práticas de condução de discussões matemáticas: os casos de dois professores, Cátia Rodrigues, Luís Menezes, João Pedro da Ponte; O conhecimento para ensinar probabilidades de futuros educadores e professores dos primeiros anos, José António Fernandes, María Magdalena Gea, Floriano Viseu. No XXVIII SIEM encontramos uma forte preocupação com o conhecimento do professor que ensina Matemática, em articulação com a sua prática letiva.

Um outro ponto de contacto é, naturalmente, o aluno, tanto no contexto da resolução de problemas como para a promoção de capacidades como o raciocínio: A resolução de tarefas num contexto fora da sala de aula por alunos do 1º ciclo do ensino básico, Fátima Fernandes, Isabel Vale, Pedro Palhares; Resolução de problemas e educação financeira: que relações?, Dárida Fernandes, Maria Santos; O desenvolvimento do raciocínio geométrico dos estudantes e a leitura de histórias em quadrinhos: uma articulação possível, Elias Assis, Maria Helena Martinho.

As tecnologias são também um tema de contacto, embora mais valorizado em 1992. Em 2017, encontramos: O professor e a fidelidade matemática da calculadora gráfica no estudo de funções, Helena Rocha. Também a avaliação continua a preocupar agora, como há 25 anos, os investigadores em educação matemática: Envolver os alunos através de práticas avaliativas reguladoras e tecnologia como componentes para regular o ensino, Elvira Santos, Leonor Santos; Avaliação e comunicação na aula de matemática: um projeto de investigação, António Guerreiro, Cristina Martins.

No XXVIII SIEM encontramos temas novos da investigação, em que se valoriza mais o contexto cultural do dia a dia para ensinar Matemática. São disso exemplos: A Etnomatemática e o Humor como recurso educativo: Estudo etnomatemático sobre danças folclóricas: simetria dos trajes, Sara Ribeiro, Pedro Palhares, María Jesús Salinas;

O humor nas práticas letivas dos professores que ensinam matemática, Luís Menezes, Floriano Viseu, António Ribeiro, Pablo Flores.

Hoje, como há 25 anos atrás, continuamos a perseguir o mesmo objetivo: compreender como se processa o ato educativo em que a Matemática, direta ou indiretamente está em jogo. Porque somos uma comunidade que nasceu no seio de um associação profissional de professores, não esquecemos que queremos colocar essa compreensão ao serviço do progresso social.

Viseu, abril de 2017

Luís Menezes, António Ribeiro,
Helena Gomes, Ana Patrícia Martins,
Fernanda Tavares, Hélia Pinto

CONFERÊNCIAS PLENÁRIAS

DESENVOLVIMENTO DA AUTORREGULAÇÃO DA APRENDIZAGEM DOS ALUNOS EM MATEMÁTICA: POSSIBILIDADES E DESAFIOS PARA A PRÁTICA DO PROFESSOR

Sílvia Semana[1], *Leonor Santos*[2]
[1]Greenfield Community School, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, silviasemana@yahoo.com.br
[2] Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, leonordsantos@sapo.pt

Resumo. *Nesta comunicação, apresenta-se uma investigação que visou compreender a prática avaliativa de uma professora, com o intuito de promover a autorregulação da aprendizagem dos alunos em matemática. Esta prática resultou de uma intervenção de ensino concebida e planificada num contexto de trabalho colaborativo entre professores de matemática do 3.º ciclo do ensino básico e a investigadora, e contemplou estratégias orientadas para três vertentes centrais: (i) comunicação oral em discussões matemáticas coletivas; (ii) apropriação dos critérios de avaliação pelos alunos; e (iii) autoavaliações escritas pelos alunos. A professora Joana implementou a intervenção de ensino ao longo de dois anos letivos, numa turma inicialmente do 8.º ano de escolaridade. Em sala de aula, Joana pôs em prática uma multiplicidade de ações intencionais em cada uma das vertentes consideradas e experienciou desafios associados com fatores diversos. Ao longo da intervenção de ensino e em relação com a prática de Joana, os alunos tenderam a apresentar um desempenho de melhor qualidade nas discussões coletivas, caminharam em direção à apropriação dos critérios de avaliação e revelaram melhorar a sua capacidade de autorregulação, num percurso individualizado e não linear.*

Abstract. *In this communication, it is presented a study aimed to understand the assessment practice of a teacher to promote student self-regulation of learning in mathematics. This practice was part of a teaching intervention designed and planned in collaboration by middle school mathematics teachers and the researcher, and has included strategies in three main areas of intervention: (i) oral communication in collective mathematical discussions; (ii) student appropriation of the assessment criteria; and (iii) student written self-assessments. The teacher, Joana, implemented the teaching intervention throughout two academic years in a grade 8 class (grade 9 in the second year). Joana has put into practice in the classroom a variety of intentional actions addressed at each of the main areas of intervention consider, and experienced challenges associated with multiple factors. Throughout the teaching intervention and in relation to Joana's practice, students have improved their performance in collective discussions, walked towards the appropriation of the assessment criteria and developed their self-regulation ability, following an individualized and non-linear route.*

Palavras-chave: *prática avaliativa, autorregulação, aprendizagem matemática, trabalho colaborativo.*

Introdução

A autorregulação da aprendizagem apresenta várias potencialidades para a melhoria da própria aprendizagem e do desempenho académico dos alunos (por exemplo, McMillan, 2013; Zimmerman & Schunk, 2011). Através de processos de autorregulação, os alunos monitorizam e avaliam o seu progresso em direção a objetivos, recorrendo a feedback interno que geram para determinar quando necessitam de apoio externo, quando devem persistir numa determinada abordagem ou quando ajustar as suas estratégias de aprendizagem (Zimmerman & Schunk, 2011). Um investimento intencional do professor para promover estes processos, em particular através de uma prática de avaliação reguladora, tende a resultar numa melhoria da capacidade de autorregulação dos alunos e da aprendizagem (Brown & Harris, 2013; Zimmerman & Schunk, 2011).

O estudo que aqui se apresenta é parte de uma investigação mais ampla[1] em que se procurou compreender a prática avaliativa de uma professora dirigida à promoção da autorregulação da aprendizagem dos alunos em matemática. A prática da professora é integrada numa intervenção de ensino planificada num contexto de trabalho colaborativo entre cinco professores do 3.º ciclo do ensino básico e a primeira autora, enquanto investigadora. Nesse âmbito são consideradas estratégias orientadas para três vertentes centrais: (i) promoção de uma comunicação oral intencional em discussões matemáticas coletivas; (ii) apropriação dos critérios de avaliação pelos alunos; e (iii) desenvolvimento de autoavaliações escritas pelos alunos. Neste artigo, o enfoque é colocado na prática da professora nas vertentes (ii) e (iii), e procura-se dar resposta a duas questões principais: Como se carateriza a prática avaliativa da professora na concretização da intervenção de ensino nas duas vertentes consideradas e quais os desafios principais que lhe são associados? Que aspetos da prática da professora se revelam especialmente potenciadores da autorregulação dos alunos?

Enquadramento teórico

Prática profissional do professor e ensino exploratório

A prática profissional do professor pode ser entendida como o conjunto de atividades que desenvolve regularmente, com determinados significados e intenções, nos seus

[1] Investigação financiada pela FCT - Bolsa de Investigação SFRH / BD / 74620 / 2010

contextos de trabalho (Ponte & Chapman, 2006). Neste estudo, o enfoque é colocado na prática letiva, isto é, aquela que decorre em sala de aula e que está mais diretamente orientada para a aprendizagem da matemática pelos alunos (Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013).

As atuais orientações curriculares para a matemática prescrevem um tipo de ensino designado por *ensino exploratório* (Ponte, 2014). O ensino exploratório adota uma perspetiva dialógica de construção de conhecimento, em que a ênfase é colocada no aluno e nas condições que favoreçam a sua participação, individual e coletiva, numa atividade de inquirição (Oliveira & Carvalho, 2014). Estas orientações estabelecem objetivos ambiciosos para a aprendizagem dos alunos e colocam desafios significativos à prática profissional do professor (Ponte, 2014).

Avaliação reguladora e autorregulação da aprendizagem

Uma avaliação reguladora da aprendizagem visa a melhoria da aprendizagem durante o próprio processo de aprendizagem (Santos, 2008) e, como a designação indica, compreende processos de regulação, que incluem: (i) a definição de objetivos; (i) a monitorização do progresso relativamente aos objetivos; (iii) a interpretação do feedback derivado do processo de monitorização; e (iv) a confirmação ou o ajustamento da ação dirigida aos objetivos, com eventual redefinição dos objetivos (Allal, 2010).

A autoavaliação apresenta-se como uma forma de regulação privilegiada, comparativamente com formas de regulação externa (Nunziatti, 1990; Santos, 2002, 2008). O que distingue a prática de autoavaliação de outras práticas de avaliação é que é realizada pelo próprio aluno, embora o grau de autonomia em relação a outros agentes educativos possa variar (Brown & Harris, 2013).

Os efeitos positivos da autoavaliação para os alunos são amplamente reconhecidos pela investigação e tendem a ser mais significativos quando esta não se limita a uma simples autoclassificação, mas recorre antes a critérios de avaliação, com foco num conceito de qualidade partilhado (Andrade, 2013; Black & Wiliam, 1998; Brown & Harris, 2013). Uma avaliação desta natureza mostra-se especialmente complexa, e pode resultar em julgamentos/apreciações com pouca acurácia (Brown & Harris, 2013). Tal como é entendida neste estudo, a autoavaliação pelos alunos pressupõe que estes: (i) possuam um conceito de qualidade (ou objetivo) a que possam aspirar; (ii) comparem o seu nível atual de desempenho com o nível desejado (objetivo); e (iii) se envolvam em ação apropriada que minimize ou elimine o fosso (gap) entre o nível atual e o desejado (Sadler, 1989). Neste contexto, o nível de qualidade desejado é refletido por critérios de avaliação partilhados por professora e alunos. A apropriação dos critérios de avaliação pelos alunos mostra-se, portanto, essencial (Black & Wiliam, 1998; Santos, 2002; Wiliam, 2007).

O campo da avaliação reguladora da aprendizagem, e em particular da autoavaliação, tem muitos pontos de interceção com o campo da autorregulação da aprendizagem. Zimmerman (2011) concebe a autorregulação em três fases: (i) *fase de antecipação*, em que o aluno analisa a tarefa em causa, estabelecendo objetivos e planos, e consciencializa-se de crenças automotivacionais; (ii) *fase de desempenho*, em que o aluno exercita autocontrolo e envolve-se em auto-observação (incluindo monitorização metacognitiva); (iii) *fase de autorreflexão*, em que o aluno se envolve em autojulgamento (incluindo atribuição de causas) e autorreação. A autoavaliação é um elemento central na autorregulação, já que envolve a tomada de consciência dos objetivos e a monitorização do progresso em direção a tais objetivos (Andrade, 2013).

Embora a autoavaliação, e mais geralmente a autorregulação, seja uma capacidade naturalmente presente no aluno, ela necessita de ser desenvolvida (Nunziati 1990), através de um processo de aprendizagem que deve ser suportado pelo professor (Sadler, 1989). A investigação mostra que um investimento intencional pelo professor na promoção da autoavaliação, e mais geralmente da autorregulação, pelos alunos tende a resultar em benefícios para a aprendizagem (Brown & Harris, 2013; McMillan, 2013; Zimmerman & Schunk, 2011). Em geral, os modelos de promoção da autorregulação pelos alunos visam passar de uma regulação externa, centrada no professor, para uma regulação interna, centrada no aluno (Laveault, 2014). A autorregulação pode ser promovida através de uma prática de avaliação reguladora da aprendizagem, sendo o professor responsável por: (i) promover a apropriação dos critérios de avaliação pelos alunos, ao envolve-los no processo de estabelecimento e compreensão dos critérios e ensiná-los a usar esses critérios; (ii) possibilitar o fornecimento de feedback que ajude os alunos a ter uma perceção mais precisa sobre a qualidade do seu trabalho; (iv) garantir a segurança psicológica na implementação da autoavaliação; e (v) assegurar condições para que os alunos se envolvam sistematicamente em reflexão (Black & Wiliam, 1998; Brown & Harris, 2013; Heritage, 2013; Santos, 2002, 2008, Wiliam, 2007, 2011).

Metodologia

Seguindo uma abordagem qualitativa, um paradigma interpretativo, e um design de estudo de caso (Yin, 2003), esta investigação debruçou-se sobre a prática avaliativa da professora Joana (definida como caso) dirigida à apropriação dos critérios de avaliação e ao desenvolvimento de autoavaliações escritas pelos alunos, no âmbito de uma intervenção de ensino com o intuito de promover a autorregulação da aprendizagem dos alunos em matemática, implementada ao longo de dois anos letivos, numa turma inicialmente do 8.º ano de escolaridade (que transitou para o 9.º ano no segundo ano).

Foram participantes no estudo cinco professores de matemática do grupo 500, enquanto elementos do grupo colaborativo. Para além de critérios associados à viabilidade do estudo, para a seleção dos professores presidiram dois critérios principais: manifestarem abertura para o desenvolvimento de uma prática avaliativa dirigida à promoção da autorregulação da aprendizagem pelos alunos; e apresentarem experiência profissional distinta (formação inicial e contínua, tempo de serviço, contacto com investigação…). Com o segundo critério procurou-se promover a diversidade de perspetivas, experiências e leituras da realidade, tendo em vista o enriquecimento do projeto colaborativo (Boavida & Ponte, 2002) e da própria intervenção de ensino, sem procura de qualquer representatividade. A seleção de Joana como caso prendeu-se essencialmente com aspetos de viabilização do processo de recolha de dados.

Foram ainda participantes os alunos da turma de Joana sujeita à intervenção de ensino. Dessa turma, foram selecionados cinco alunos como informantes privilegiados relativamente à sua capacidade de autorregulação e eventual relação com a prática da professora, com base em dois critérios diferenciadores – qualidade do desempenho em matemática e capacidade de autorregulação revelada pelo questionário Q1 (Tabela 1) – e dois critérios uniformizadores – intervenção na comunicação oral na sala de aula (alunos que participam nessa comunicação) e relativa facilidade de expressão oral/à vontade com a investigadora.

Tabela 1. Critérios diferenciadores para os alunos informantes privilegiados

Aluno	Desempenho matemática	Capacidade de autorregulação	Tempo sujeito à intervenção de ensino
Ivan	Fraco	Média	2 anos
Eduardo	Muito bom	Fraca	2 anos
Andreia	Bom	Média alta	2 anos
Filipe	Médio	Fraca	2 anos
Sandro	Médio	Fraca	1 ano

Nesta investigação, recorreu-se à observação participante de aulas e sessões de trabalho colaborativo (com registo em vídeo e áudio, e transcrição das gravações). Foram observadas 42 aulas de Joana, ao longo dos anos letivos 2010/2011 e 2011/2012, com a concretização de ações dirigidas a pelo menos uma das vertentes da intervenção, em particular negociação dos critérios de avaliação (NCA), e escrita de autoavaliações (AE). As sessões de trabalho colaborativo decorreram entre maio de 2010 e julho de 2012, num total de 57 sessões. Procedeu-se à realização de entrevistas individuais semiestruturadas, três à professora Joana (E1 – E3) e cinco a cada um dos alunos informantes privilegiados (E1 – E5), com exceção de Sandro, apenas sujeito a duas entrevistas. Foi ainda aplicado um questionário de autorregulação a todos os alunos da turma participante, por três vezes ao longo do estudo (Q1 – Q3).

A análise de dados contemplou as fases de redução, apresentação e interpretação dos dados (Merrian, 1988). Foram definidas categorias, emergentes dos dados, com base no referencial teórico e no problema do estudo. As categorias principais resultaram do cruzamento das dimensões: *vertente para a qual está dirigida a estratégia/ação da professora* (critérios de avaliação e autoavaliações escritas); e *momento em que é perspetivada* (conceção, concretização ou pós-reflexão). Para cada uma das vertentes, foram considerados dois focos distintos (prática da professora e desempenho/aprendizagem dos alunos) e subcategorias de análise (Critérios de avaliação: *Atribuição de significado,* e *Valorização e uso*; Autoavaliações escritas: *Significado e função*, *Tarefas de autoavaliação*, e *Suporte à escrita*).

Trabalho colaborativo e intervenção de ensino

O estudo desenvolveu-se num contexto de colaboração entre a investigadora e os professores participantes. A colaboração caraterizou-se por um trabalho conjunto, propiciador de um apoio mútuo e da consecução de objetivos, possivelmente diferenciados, em que todos beneficiam (Boavida & Ponte, 2002).

O trabalho colaborativo concretizou-se, especialmente, em sessões semanais de trabalho conjunto. Numa primeira fase, o trabalho incidiu na construção de um entendimento comum relativamente às temáticas em estudo e na conceção genérica da intervenção de ensino. Numa segunda fase, consistiu num ciclo de planificação, prática e reflexão, a propósito de estratégias e ações específicas no âmbito da intervenção de ensino.

A intervenção de ensino assentou num quadro de ensino exploratório e teve por base um conjunto de princípios orientadores. Assim, na sua conceção, a intervenção de ensino:

(i) favorece um modelo cíclico de aulas com realização da tarefa em pequenos grupos; discussão coletiva; e autoavaliação escrita pelos alunos;

(ii) contempla uma comunicação oral em discussões coletivas caraterizada por uma participação ativa dos alunos, em interação com os pares, e uma intervenção ponderada do professor, com valorização da partilha, do confronto e da argumentação de ideias e processos matemáticos, bem como da reflexão crítica. O desempenho esperado dos alunos é refletido através de critérios de avaliação;

(iii) privilegia um investimento do professor na apropriação dos critérios de avaliação pelos alunos, em particular através de processos de negociação;

(iv) contempla uma prática do professor dirigida ao desenvolvimento de autoavaliações escritas pelos alunos, em particular através da proposta de tarefas de autoavaliação significativas, e do fornecimento de orientações e feedback.

Embora assente nos princípios orientadores enunciados, a intervenção efetivamente concretizada por Joana apresentou contornos e características singulares.

Apresentação e discussão de resultados

A professora Joana

Joana é licenciada em matemática – ramo educacional e, à data de início do estudo, tinha 42 anos de idade, era solteira, e tinha uma filha. Ao longo de 18 anos de tempo de serviço, Joana desempenhou múltiplos cargos e funções, desde diretora de turma, a representante de grupo, coordenadora de departamento, e membro da direção de escola. Até à altura, Joana não tinha procurado complementar a sua formação inicial, na área da matemática ou da didática da matemática.

No que se refere ao ensino e aprendizagem da matemática, Joana valorizava a capacidade dos alunos pensarem, avaliarem e tomarem decisões, e descrevia como parte de uma aula típica a realização de trabalho a pares seguido de correção no quadro. Joana reconhecia valor à avaliação e à comunicação oral na sala de aula para regular o ensino e aprendizagem, no entanto com reflexos limitados na sua prática. Joana tendia a promover uma partilha unilateral dos instrumentos de avaliação com os alunos e a autoavaliação essencialmente como autoclassificação no final de cada período letivo:

> Eles levam no início do ano letivo (…) para também tomada de conhecimento dos encarregados de educação (…) que tipo de instrumentos vamos utilizar (…) pedir-lhes para eles fazerem [a autoavaliação], em termos de registo, não. Só mesmo no final do período. (Joana, E1)

Joana assumia que na discussão em grande-grupo o papel dos alunos era geralmente diminuto e ela desempenhava um papel central, principalmente devido a constrangimentos de tempo e ao modo menos positivo como reagia ao erro:

> … se esperar que todos expliquem de que maneira é que pensaram (…) eu percebo que não vou ter tempo, e aí digo: Então, isto era assim, assim e assim, não era? (…) Porque se não era também não vou saber que não era porque não lhes dei oportunidade de dizer que não era (…) Eu acho que eles às vezes, se calhar é por causa da minha reação, têm um bocadinho de medo de irem responder mal, e às vezes preferem ficar calados. (Joana, E1)

Critérios de avaliação

Joana promove processos de negociação com os alunos sobre os critérios de avaliação, quer em *momentos informais*, quando de forma natural inclui referências aos critérios durante as discussões coletivas, quer em *momentos formais*, intencionalmente pensados pelo grupo colaborativo. Os momentos formais incluem: (i) primeira abordagem aos critérios de avaliação na sala de aula; (ii) confrontos de avaliações de alunos e professora; (iii) reintrodução dos critérios na sala de aula; (iv) análise/reflexão sobre reflexões escritas dos alunos; (v) partilha de registos de autoavaliação informal.

A *negociação bilateral do significado* dos critérios de avaliação é consistentemente promovida por Joana em qualquer um dos diferentes momentos. O "recurso a uma estratégia adequada e sistemática" emerge como um dos critérios mais frequentemente discutidos. Considere-se um episódio de sala de aula típico da intervenção de ensino. Joana vai questionando os alunos no sentido de auscultar qual o significado que atribuem a "estratégia adequada e sistemática" e usa essa informação para reforçar ou clarificar um significado válido para o critério em causa, recorrendo a exemplos da sala de aula:

> **Professora:** E (…) apresentar uma estratégia que é adequada e sistemática? Vocês lembram-se (…) em que é que isto se aplicava?
> (…)
> **Andreia:** Oh stora, naquele exercício das sequências (…) o nosso grupo o ano passado nós íamos fazer as sequências todas.
> (…)

> **Professora:** …esse é um exemplo de uma estratégia, que embora seja correta (…) Portanto, quando estamos a pensar numa estratégia também temos de pensar se ela é a mais adequada ou (…) pensar em encontrar outra que seja mais sistemática, mais rápida, às vezes até mais simples de entender por outros, etc. Mas eu estou-me a lembrar de uma mais recente, eu era para ver se vocês se lembravam…
> **Guilherme:** O esquema em árvore, stora, também dá (…) Por exemplo, aquele exercício da mesa do restaurante, em vez de estar a fazer todas as possibilidades e aquilo percebe-se logo.
> **Professora:** Mais fácil. E eu estou-me a lembrar doutra do esquema em árvore (…) quando o Sandro foi ao quadro, agora na tarefa do octaedro e do cubo (…) [e] nós arranjamos uma estratégia que era mais sistemática que nos permitiu ver que para o B…
> **Sandro:** Para cada vértice diminuía sempre uma letra.
> **Professora:** Exatamente. Isso é um exemplo de uma estratégia sistemática! (NCA5)

As ações de Joana revelam-se frutuosas e contribuem para que os alunos desenvolvam a sua compreensão dos critérios de avaliação em particular na atribuição de um significado válido e comum ao do grupo colaborativo. O episódio anterior sugere que os alunos são nessa altura capazes de identificar “estratégias sistemáticas”.

Enquanto no primeiro ano Joana promove a *valorização dos critérios* quase exclusivamente *como referentes para a autoavaliação a posteriori*, no segundo ano passa a envolver os alunos num processo de *valorização dos critérios como referentes para uma regulação contínua, proactiva e interativa*. A reintrodução dos critérios de avaliação na sala de aula marca esta transição. Joana partilha um documento com a nova formulação dos critérios, sob a forma de orientações para o trabalho na sala de aula e explicita que os critérios devem ser usados também para orientar o trabalho futuro no sentido de melhorar:

> [Os] critérios de avaliação (…) têm que servir (…) não só para vocês avaliarem o trabalho que fazem, por exemplo, no final de uma aula (…) E ao mesmo tempo pensar “O que é que eu posso fazer para, na próxima aula, conseguir fazer algo mais do que isso? Ou conseguir atingir algum aspeto que não tenha conseguido?” (…) Avaliar o trabalho que nós fizemos só faz sentido se servir para, a seguir, melhorarmos, certo? (Joana, NCA5)

Os alunos evoluem no sentido de reconhecer e usar os critérios de avaliação como indicadores do que é esperado na aula de matemática e referentes para estabelecer objetivos e monitorizar o seu desempenho durante as aulas. Considere-se a título de exemplo o testemunho de um dos alunos informantes privilegiados:

> [Os critérios] é uma das formas para nós orientarmos os nossos objetivos. Por exemplo, imagine que está num exercício e não consegue obter, por

> exemplo, uma equação e então tenta fazer por tentativas, não é? (…) se formos ver aqui a ficha dos critérios de avaliação, aqui diz que é preciso apresentar uma estratégia adequada e sistemática, ou seja, nós não devemos [resolver] por tentativas e eu acho que isto é um bom guia para os trabalhos (…) Isso também me serve para os meus objetivos também, oriento-me por aí muito (Sandro, E4)

Autoavaliações escritas

Joana tende a privilegiar como objetivo da tarefa de autoavaliação a melhoria da capacidade de autorregulação dos alunos e promove a segurança psicológica e confiança dos alunos no processo, através duma *abordagem construtiva, não punitiva e sem associação à classificação*. Considere-se a título de exemplo a intervenção de Joana após um dos alunos expor a sua insegurança face à possibilidade da partilha da autoavaliação com a professora prejudicar os alunos, e mais concretamente a sua classificação na disciplina. Joana assegura que os alunos não sairão prejudicados, clarificando que ela tem uma perceção do trabalho dos alunos durante as aulas e o objetivo é que os alunos também tenham essa perceção para poderem melhorar:

> Eu quando estou aqui na aula (…) eu consigo perceber isso (…) Porque se eu vou vendo aquilo que tu estás a fazer na aula, eu consigo perceber se tu conseguiste relacionar os dados importantes da tarefa (…) agora idealmente tu também deves ser capaz de perceber isso e pensar que é uma coisa que tens que melhorar para a próxima aula. (Joana, AE10)

Esta abordagem de Joana resulta num ambiente de à vontade, em que os alunos partilham as suas autoavaliações sem receio e por iniciativa própria.

Joana *propõe tarefas de autoavaliação com formatos diversificados* (grelha de autoavaliação, reflexões escritas, e registos de autoavaliação informal). A grelha de autoavaliação surge numa fase inicial do estudo, face aos níveis reduzidos de autorregulação que lhe estão associados, com o objetivo primordial de promover a negociação de significados atribuídos aos critérios e o seu valor como referentes para a autoavaliação. Já as reflexões escritas, ao requerer níveis elevados de autorregulação, começam a ser propostas mais tardiamente, mas mais regularmente, num total de 10 vezes ao longo da intervenção.

As reflexões são escritas sob condições diversas, podendo *ser ou não suportadas por orientações específicas*. Cinco das dez reflexões não são suportadas por orientações, por opção deliberada do grupo colaborativo (para informar sobre a capacidade de autoavaliação dos alunos) ou por iniciativa de Joana associada a restrições de tempo. No primeiro ano, as orientações apontam as aprendizagens, as dificuldades sentidas e os critérios de avaliação como focos de reflexão. Já no segundo ano, passam a contemplar um compromisso para melhorar, no sentido dos alunos identificarem aspetos a melhorar e delinearem ações para atingir o estado desejado.

Joana fornece também *feedback regular* aos alunos, quer s*obre o seu desempenho na aula*, quer *sobre a sua autoavaliação escrita*. Considere-se, como exemplo, um episódio de partilha dos registos de avaliação informal. Sandro partilha o seu registo com a turma e em reação Joana fornece feedback com referência direta ao critério de avaliação "uso e relacionamento dos dados importantes da tarefa". Contrariamente ao aluno, Joana faz uma apreciação negativa do desempenho da turma, ao considerar que os alunos não atribuíram sentido aos dados fornecidos e avançaram de imediato para um procedimento rotineiro:

> **Sandro:** [Aspeto] negativo (…) usar os conceitos e resultados matemáticos e mostrar compreensão, e também usar os termos certos. E positivo (…) usar e relacionar os dados importantes da tarefa.
> **Professora:** Usar e relacionar os dados importantes… é aí que eu acho (…) que foi onde todos falharam (…) logo no primeiro exercício (…) eu acho que estão muito ligados à representação gráfica do sistema (…) fazem logo aquilo e nem sequer olham para as equações para tentar ver (…) que informação é que a equação me dá, antes mesmo de nos preocuparmos em representar aquela equação… (AE11)

O *foco do feedback* dirigido à autoavaliação *varia* em sintonia com o foco das orientações para as reflexões, passando no segundo ano a valorizar explicitamente um compromisso para melhorar. Considere-se a título ilustrativo um episódio de sala de aula enquadrado na análise da sétima reflexão escrita pelos alunos. Joana destaca a identificação de aspetos a melhorar como um dos aspetos menos conseguidos nas reflexões (com exceção da de Maria) e explica que não basta os alunos identificar um aspeto negativo, devem delinear como melhorá-lo e procurar fazê-lo efetivamente:

> … um aspeto que quase ninguém refere (…) a Maria (…) foi das únicas pessoas que fez isso (…) vocês dizerem (…) "Portei-me mal" ou "Não estive atento", só, sem mais nada, não serve para grande coisa (…) O que é que é importante pensarem? "O que é que posso fazer para melhorar isso?" (…) se não fizerem nada para isso se alterar, vai continuar tudo na mesma (…) têm que pensar nisso e… e tentar melhorar nos aspetos… Melhorar efetivamente... (Joana, AE16)

As ações e estratégias concretizadas por Joana resultam em autoavaliações com maior realismo. Em particular, ao confrontar-se as quatro primeiras autoavaliações dos alunos, e a avaliação realizada pela professora (com uso da grelha de avaliação), verifica-se uma tendência de atenuação das diferenças entre avaliação de alunos e professora e passam-se de autoavaliações positivamente enviesadas (com diferenças significativas) para autoavaliações negativamente enviesadas (com diferenças muito atenuadas), o que indicia um aumento do nível de exigência dos alunos relativamente àquilo que esperam do seu desempenho na aula de matemática. Joana reflete a este propósito numa das sessões de trabalho colaborativo:

> … aparentemente está tudo a correr muito bem (…) Na última confrontação já praticamente não há [diferenças]… aliás eles até acham que deste 3 e eles só mereciam 2, porque… por causa de um errozinho que eles se lembram, mas que achaste que não era significativo… (Joana, STC13).

Também as reflexões escritas indiciam uma melhoria da capacidade de autorregulação dos alunos. Ao longo da intervenção regista-se um crescendo significativo de alunos a autoavaliarem-se nas reflexões usando os critérios de avaliação como referentes (58%, 66%, 50%, 67%, 79%, 65%, 60%, 63%, 80% e 87% respetivamente nas reflexões 1 a 10). No entanto, para outras dimensões de análise, e em particular ao nível de um compromisso para melhorar, os resultados são mais variáveis e surgem associados a múltiplos fatores, entre eles as ações de Joana ao nível das orientações para reflexão. Note-se que nenhum aluno revela um compromisso para melhorar nas reflexões do primeiro ano, em sintonia com as orientações de Joana que não incluíram explicitamente esta componente. Estes resultados são também coerentes com as conceções iniciais dos alunos no sentido de que não reconheciam utilidade à autoavaliação para a melhoria da aprendizagem (apenas um aluno da turma aborda esta dimensão em resposta ao questionário Q1). Já no segundo ano, em todas as reflexões há alunos que expressam esse compromisso, embora com frequências muito variáveis (60%, 10%, 42%, 27% e 7% respetivamente nas reflexões 6 a 10). O incluir de um *compromisso para melhorar* nas orientações de Joana, no início do segundo ano, revela efeitos positivos nas reflexões seguintes. Imediatamente após as primeiras orientações neste âmbito regista-se a maior frequência de alunos a considerar esta dimensão (sexta reflexão). Tome-se como exemplo parte da reflexão de Sandro. O aluno compromete-se a melhorar as estratégias usadas, em particular ao identificar a necessidade de praticar a resolução de sistemas de equações para os resolver de modo mais eficiente (Figura 1).

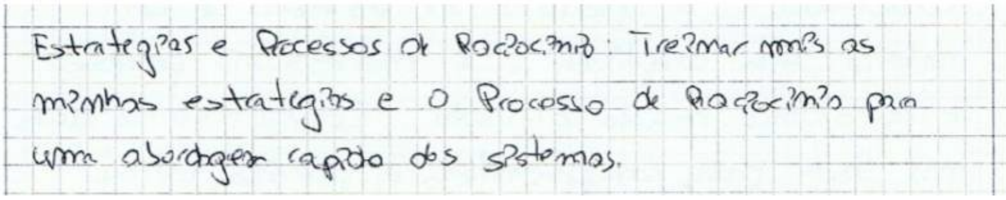


Figura 1. Excerto da sexta reflexão escrita de Sandro.

O nível de sucesso alcançado na sexta reflexão não se mantém, contudo, nas reflexões seguintes. Apenas na oitava reflexão se regista um sucesso comparável, com a segunda maior frequência de alunos a assumir um compromisso para melhorar, também na sequência de orientações explícitas de Joana (embora com ênfase menor). Em mais nenhuma das reflexões Joana fornece orientações neste sentido. Assim, embora as ações da professora tenham contribuído positivamente para a melhoria da autoavaliação pelos alunos, o processo de passagem de uma regulação externa para uma regulação interna, centrada no aluno, carece ainda de desenvolvimento.

Os próprios alunos reconhecem mais-valias às ações de Joana para a concretização da sua autorregulação. Ivan, por exemplo, reconhece vantagens ao feedback da professora sobre a autoavaliação dos alunos, referindo-se à discussão em torno da reflexão escrita de um colega, para ajudar a clarificar o que é esperado dessa autoavaliação:

> … a professora fala daquela que ela gostou mais (…) É bom (…) o Sandro, como foi das melhores, ouvimos a dele e tentamos fazer com os nossos tópicos que estavam presentes e com os tópicos que faltavam que era o Sandro que os tinha. (Ivan, E4)

Conclusões

A prática de Joana no âmbito da intervenção de ensino revela contribuir positivamente para a evolução da autorregulação da aprendizagem pelos alunos. Na vertente dirigida à apropriação dos critérios de avaliação, Joana promove processos de negociação com os alunos ao nível do significado dos critérios e do seu valor enquanto referentes para a regulação da aprendizagem. O privilegiar de processos de negociação bilateral (Santos, 2002), de forma consistente e integrada na sala de aula, e a valorização dos critérios não só numa perspetiva retroativa, mas também numa perspetiva de regulação contínua, proactiva e interativa (Allal, 1986), contribuem para que os alunos de Joana: (i) desenvolvam a sua compreensão na atribuição de um significado válido aos critérios e no reconhecimento dos critérios como indicadores do que é esperado na aula de matemática; (ii) evoluam na concretização de uma autorregulação criteriosa centrada em aspetos relevantes para a aprendizagem matemática, ao recorrer aos critérios como referentes para a autoavaliação, numa perspetiva de regulação retroativa, mas também para estabelecer objetivos pessoais e monitorizar o seu desempenho durante as aulas (Allal, 2010; Andrade, 2013; Sadler, 1989).

Na vertente dirigida à autoavaliação pelos alunos, Joana dissocia a autoavaliação da classificação na disciplina e elege como objetivo primordial da tarefa de autoavaliação a melhoria da capacidade de autorregulação dos alunos, comunicando uma mensagem coerente relativamente à função da autoavaliação e promovendo a segurança psicológica e confiança dos alunos mesmo quando as suas autoavaliações são tornadas públicas (Brown & Harris, 2013). Joana propõe tarefas de autoavaliação com formatos diversificados e apelo a diferentes níveis de autorregulação, em função de necessidades e objetivos mutáveis ao longo da intervenção de ensino. As reflexões escritas mostram-se particularmente relevantes, enquanto tarefas de autoavaliação que requerem níveis mais elevados de autorregulação (Laveault, 2014). As orientações explícitas para a escrita das reflexões e o feedback de Joana contribuem para clarificar o que é esperado da autoavaliação dos alunos e resultam numa tendência de melhoria da autoavaliação dos alunos. As autoavaliações com recurso à grelha de avaliação, em particular, indicam uma acurácia e um grau de exigência crescentes na autoavaliação pelos alunos. Já as reflexões escritas revelam um uso progressivo de critérios de avaliação legítimos como referentes para a identificação de discrepâncias ente o desempenho atual e o desejado (Brown & Harris, 2013; Sadler, 1989). A dimensão da autorregulação de planeamento de ação para minimizar ou eliminar o fosso entre o desempenho atual e o desejado (Sadler, 1989; Zimmerman, 2011) emerge nas reflexões escritas dos alunos, através de um compromisso para melhorar, como resultado imediato, mas não continuado das ações de Joana.

A relação visível entre as ações de Joana e as mais-valias para a autorregulação pelos alunos reforça a importância da prática do professor contemplar um investimento intencional para o desenvolvimento da capacidade de autorregulação dos alunos, ajustando-se o sistema de regulação externa ao longo do processo, até que a regulação passe a ser concretizada, pelo menos em grande parte, internamente pelo aluno (Laveault, 2014). Em particular, mostra-se importante investir na dimensão da autorregulação enquanto autorreação (Zimmerman, 2011).

Referências bibliográficas

Allal, L. (2010). Assessment and the Regulation of Learning. In: Penelope Peterson, Eva Baker, Barry McGaw, (Eds.), *International Encyclopedia of Education* (Volume 3, pp. 348-352). Oxford: Elsevier.

Allal, L. (1986). Estratégias de avaliação formativa: Concepções psicopedagógicas e modalidades de aplicação. In L. Allal, J. Cardinet e Ph. Perrenoud (Orgs.), *A avaliação formativa num ensino diferenciado*, pp. 175-209. Coimbra: Almedina.

Andrade, H. L. (2013). Classroom assessment in the context of learning theory and research. In J. H. McMillan (Ed.), *The SAGE Handbook of Research on Classroom Assessment* (pp. 17-34). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Boavida, A., & Ponte, J. (2002). Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas. In GTI (Eds.), *Refletir e Investigar sobre a Prática Profissional* (pp. 43-55) Lisboa: APM.

Black, P. and D. Wiliam (1998). Assessment and Classroom Learning. *Assessment in Education*, 5, pp. 7-71.

Brown, G. T. L., & Harris, L. R. (2013). Student self-assessment. In J. H. McMillan (Ed.), *The SAGE handbook of research on classroom assessment* (pp. 367-393). Thousand Oaks, CA: Sage.

Haritage, M. (2013). Gathering Evidence of Student Understandin. In J. H. McMillan (Ed.), *The SAGE Handbook of Research on Classroom Assessment* (pp. 179-195). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Laveault, D. (2014). The power of learning-centered task design: An exercise in the application of the variation principle. In C. Wyatt-Smith, V. Klenowski and P. Colbert (dir.), Designing Assessment for Quality Learning (p. 109-121), Berlin: Springer.

McMillan, J. H. (Eds.) (2013). *SAGE Handbook of Research on Classroom Assessment*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Merrian, S. (1988). *Case study research in education: A qualitative approach.* San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Nunziati, G. (1990). Pour construire un dispositif d´évaluation formatrice. *Cahiers Pedagogiques*, 280, pp. 47-62.

Oliveira, H., & Carvalho, R. (2014). Uma experiência de formação, com casos multimédia, em torno do ensino exploratório. In J. P. Ponte (Ed.), *Práticas profissionais dos professores de Matemática* (pp. 473-498). Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Oliveira, H., Menezes, L., Canavarro, A. P. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. *Quadrante*, 22 (2), 28-53, 2013.

Ponte, J. P. (2014). Apresentação. In J. P. Ponte (Ed.), *Práticas profissionais dos professores de Matemática* (pp. 5-9). Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 461-494). Roterdham: Sense.

Sadler, R. (1989) Formative assessment and the design of instructional systems. *Instructional Science*, 18, pp. 119-144.

Santos, L. (2008). Dilemas e desafios da avaliação reguladora. In L. Menezes; L. Santos; H. Gomes & C. Rodrigues (Eds.), *Avaliação em Matemática: Problemas e desafios* (pp. 11-35). Viseu: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação.

Santos, L. (2002). Auto-avaliação regulada: porquê, o quê e como? In P. Abrantes & F. Araújo (Coord.) *Avaliação das aprendizagens: das concepções às práticas* (pp. 75-84). Lisboa: ME-DEB.

Simão, A. M. (2004). O conhecimento estratégico e a auto-regulação da aprendizagem. In A. L. Silva; A. M. Duarte; I. Sá & A. M. V. Simão (Eds.) *Aprendizagem Auto-Regulada pelo Estudante* (pp.77-94). Porto: Porto Editora.

Wiliam, D. (2011). *Embedded Formative Assessment*. Bloomington, IN: Solution Tree Press.

Wiliam, D. (2007). Keeping Learning on Track: Formative Assessment and the Regulation of Learning. In F. K. Lester Jr. (ed.) *Second Handbook of Mathematics Teaching and Learning*, (pp. 1053–1098). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Yin, R. (2003). Case study research: Design and methods (Third Ed.). Newbury Park: Sage.

Zimmerman, B. J. (2011). Motivational sources and outcomes of self-regulated learning and performance. In B. J. Zimmerman & D. H. Schunk (Eds.), *Handbook of self-regulation of learning and performance* (pp. 49-64). New York: Routledge.

Zimmerman, B. J. & Schunk, D. H. (Eds.) (2011). *Handbook of self-regulation of learning and performance.* New York: Routledge.

EDUCAÇÃO E INOVAÇÃO: PREPARANDO AS NOSSAS CRIANÇAS E OS NOSSOS JOVENS PARA UMA SOCIEDADE DA INFORMAÇÃO E DO CONHECIMENTO – DESAFIOS PEDAGÓGICOS

Maria João Horta

EDUCOM – Associação Portuguesa de Telemática Educativa, mjh@educom.pt

Resumo. *A evolução social e tecnológica da sociedade do século XXI apela à necessidade de preparar os jovens para constantes e rápidas mudanças ao longo da vida. Os sistemas educativos têm, por isso, vindo a alterar-se, mudando de paradigmas centrados no conhecimento para outros que apelam ao desenvolvimento de competências mobilizadoras de conhecimentos, de capacidades e de atitudes adequadas aos exigentes desafios contemporâneos, que requerem cidadãos educados e socialmente integrados: jovens adultos capazes de pensar crítica e criativamente, adaptados a uma sociedade de multiliteracias, habilitados para a ação quer autónoma quer em colaboração com os outros, num mundo global e que se quer sustentável. Se a investigação em educação tem vindo desde há anos a apontar para a necessidade do desenvolvimento de competências como a da resolução de problemas e do pensamento crítico e criativo, o que parece ser novo no discurso educativo atual é a necessidade de os sistemas educativos enfatizarem e implementarem o desenvolvimento dessas competências de forma explícita e intencional, com mudanças deliberadas nos desenhos curriculares e nas propostas para novas práticas pedagógicas. Nesta conferência serão apresentadas questões complexas e que exigem amplo debate e reflexão, que a seguir se listam: Quais os desafios que se colocam à Educação, à Escola e aos Professores do século XXI, numa sociedade global? Como inovar em educação e como educar para a inovação? Qual o perfil do aluno no final dos atuais 12 anos de escolaridade obrigatória? Qual o papel das tecnologias enquanto alavancas da inovação em educação?*

Abstract. *The social and technological evolution of the 21st century society requires constant and fast changes throughout young people's life time. Education systems have therefore been changing. They shifted from knowledge-centered paradigms into models calling for new types of competences. Those competences ask for knowledge, skills and attitudes appropriate to the demanding contemporary challenges. The society calls for young adults able to think critically and creatively, living within multiliteracy societies, and empowered for action, either autonomously or in collaboration with others. Education research has been pointing to the need to develop skills such as problem solving and critical and creative thinking. What seems to be new in today's educational discourse is the need for educational systems to emphasize and Implement the development of these competencies in an explicit and intentional way, with deliberate changes in curriculum designs and proposals for new pedagogical practices. This conference will present complex questions that a require broad debate, listed below: What are the challenges that Education is facing in the 21st Century? How to innovate in education and how to* *educate for innovation? What is the profile of students at the end of the current 12 years of compulsory schooling? What is the role of technologies as levers of innovation in education?*

Palavras-chave: *Perfil dos alunos; competências; tecnologia; inovação em educação.*

Introdução

A evolução social e tecnológica da sociedade do século XXI apela à necessidade de preparar as crianças e os jovens para constantes e rápidas mudanças ao longo da vida. Os sistemas educativos têm, por isso, vindo a alterar-se, mudando de paradigmas centrados exclusivamente no conhecimento para outros focados no desenvolvimento de competências mobilizadoras não só de conhecimentos mas também de capacidades e de atitudes adequados aos exigentes desafios contemporâneos, que requerem cidadãos educados e socialmente integrados: jovens adultos capazes de pensar crítica e criativamente, adaptados a uma sociedade de multiliteracias, habilitados para a ação, quer autónoma, quer em colaboração com os outros, num mundo global e que se quer sustentável. A Educação formal de responder às necessidades atuais e futuras das crianças e dos jovens, tendo em conta as mudanças profundas e crescentes no modo de funcionar das sociedades e das economias, ou seja, é clara uma necessidade de mudança e de evolução dos modelos de ensino e das práticas pedagógicas.

Se a investigação em educação tem vindo, desde há anos, a apontar para a necessidade do desenvolvimento de competências como a da resolução de problemas e a do pensamento crítico e criativo, o que parece ser novo no discurso educativo atual é a necessidade de os sistemas educativos enfatizarem e implementarem o desenvolvimento dessas competências de forma explícita e intencional, com mudanças deliberadas nos desenhos curriculares e nas propostas para novas práticas pedagógicas. Assistimos em Portugal a uma tentativa de mudança de paradigma e interessa analisar os posicionamentos dos diversos autores e atores no terreno e os fundamentos que apresentam.

As questões que se colocam são complexas e exigem amplo debate e reflexão: Quais os desafios que se colocam à Educação, à Escola e aos Professores do século XXI, numa sociedade global? Como inovar em educação e como educar para a inovação? Qual deverá ser o perfil dos alunos no final dos atuais 12 anos de escolaridade obrigatória em termos de princípios, valores e competências-chave? Qual o papel das tecnologias enquanto alavancas da inovação em educação?

Para um debate em torno das questões supramencionadas, serão convocados autores como Figueiredo (2011, 2012), Dias (2012), entre outros, e resultados disponíveis em relatórios recentes da OCDE (2016), da *European Commission* (2016), do *World Economic Forum* (2016), da UNESCO (2015), a par de outros documentos, como por exemplo, documentos relativos a recentes revisões no currículo de países com a Austrália e a Finlândia, que concorrem e suportam o trabalho recente de vários países, nos quais se inclui Portugal, quanto à reorganização em curso do currículo.

Fundamento

Evolução social e tecnológica passada e recente

A industrialização do século XIX exigiu às escolas a massificação da educação, que teve por objetivo formar cidadãos alinhados com as necessidades de uma indústria baseada na mão-de-obra barata. A escola formava, maioritariamente, operários uniformizados para uma lógica de pleno emprego, que repetiam procedimentos à exaustão, sem rasgos ou oportunidades de inovação ou criatividade. Na escola esperava-se que os alunos fossem ouvintes, seguidores, conservadores e imitadores, dado que era pressuposta a geração de comportamentos uniformes. No século XX, esta lógica manteve-se e entramos no século XXI com salas de aula que, maioritariamente, cristalizaram neste paradigma da uniformização. Ao longo do século XX, Paulo Freire foi uma voz determinante na defesa de uma educação crítica e problematizadora, que recuse as pedagogias baseadas na transmissão do conhecimento, defendendo pedagogias de comunicação e de diálogo (Neves Vicente, 1995). Autores seminais, como Dewey (1959) e Rogers (1977), entre outros, defenderam a importância de centrar o processo educativo no aluno - ensinar é mais do que transmitir conhecimento, é despertar a curiosidade, é instigar o desejo de ir além do conhecido, é desafiar a pessoa a confiar em si mesma e dar um novo passo em busca de mais, educando para a vida e para novos os relacionamentos. O século XXI surge alicerçado na informação, no conhecimento e no digital. Solicita às escolas que promovam a inovação, a criação, a curiosidade, a persistência, a colaboração e a autonomia e, mais, a vontade (e a necessidade) de continuar a aprender ao longo da vida. Em Portugal, em 1997, surge o Livro Verde para a Sociedade da Informação antecipando as necessidades do século XXI: o desenvolvimento de uma economia baseada na informação, no conhecimento e no digital. Em pleno século XXI, perdem-se empregos rotineiros a um ritmo alucinante e a área das STEM (ciências, tecnologias, engenharias e matemáticas) crescem velozmente. Observa-se uma alteração profunda do mundo do trabalho e da natureza do mesmo, os empregos são voláteis e, como tal, torna-se premente preparar os jovens para serem projetistas, autónomos e líderes. À escola pede-se que prepare os jovens para que sejam capazes de construírem autonomamente a sua capacidade de criar e intervir num mundo global.

Observando a sociedade contemporânea, interrogamo-nos: Que escola temos? Que escola queremos? Estaremos a preparar cidadãos para o mundo em que vivemos ou estaremos estacionados no século XX, adaptando modelos do século XIX? Mantemo-nos numa escola que educa de forma tradicional, monolítica, segundo um modelo industrial que produz uniformidade e continua a formar funcionários iguais, de baixo custo, descartáveis e desempregáveis?

Os sistemas educativos do século XXI são chamados a dar resposta às necessidades de desenvolvimento de competências nos alunos, de forma explícita e intencional, através de mudanças no desenho curricular e nas práticas pedagógicas dos professores.

Numa era de aprendizagens sociais, estas são inter e multidisciplinares, partindo de uma visão orgânica, social e diferenciadora, centrando-se na colaboração, na autonomia, com especial enfoque na procura de soluções críticas e criativas (veja-se a nova lógica associada aos negócios dos hotéis *vs. booking*, táxis *vs. uber*, etc.). A escola terá de preparar os alunos para que, ao longo e no final da escolaridade obrigatória, sejam capazes de resolver problemas complexos (nomeadamente aqueles que ainda nem foram identificados), associando essa necessidade à competitividade, à conexão global e ao mundo cada vez mais global.

Bauman (2013), na obra *Liquid Times*, apresenta uma metáfora adequada para expressar o dinamismo do processo de transição entre a modernidade e a fase atual em que nos encontramos. O conceito recorrente, que permeia Tempos Líquidos, é o da insegurança existencial. Sendo assim, cabe aqui fazer uma inferência a respeito do termo. A insegurança apontada por Bauman (2013) tem a sua origem na desregulamentação, no enfraquecimento das relações humanas, na busca do esclarecimento por meio da liberdade. E é assim que entramos no século XXI, um século que se inicia marcado pelo efémero, em que nada pode ser marcado pela certeza. Resta-nos educar para um futuro que se desconhece e tal só será possível através de um processo de acompanhamento orgânico e reflexivo que analise dificuldades, avalie consequências e defina caminhos de progressão.

Competências essenciais do século XXI

Conceber o currículo e, simultaneamente, a prática pedagógica, numa lógica de competências, implica uma renovação da ação educativa e uma nova postura de professores, alunos e escola, porque o desenvolvimento destas não enfatiza um processo rotineiro de memorização da informação, antes pelo contrário, recorre ao desenho de situações de aprendizagem complexas, onde a informação é pesquisada, transformada, processada e mobilizada de forma útil pelos alunos. Para Roldão (2003), as competências devem ser vistas como o contrário de saberes inertes, porque todos os saberes são para serem utilizados a qualquer nível e não acumulados sem finalidade. Os conhecimentos contribuem para o desenvolvimento de competências quando mobilizados de forma inteligente ou adequada a diversas situações, e daí a necessidade de a aprendizagem se basear na ação, mas com sentido e finalidade.

O *World Economic Forum* (2016) considera os três seguintes conjuntos de competências para o século XXI (Figura 1): Literacias fundacionais (competências cruciais que os alunos devem aplicar para alcançarem os objetivos do dia a dia, como sejam, a literacia, a numeracia, a literacia científica, a literacia TIC, a literacia financeira e a literacia cultural e cívica); competências (abordagens dos alunos aos desafios complexos, como sejam, o pensamento crítico e a resolução de problemas, a criatividade, a comunicação e a colaboração); caráter (abordagens dos alunos às mudanças com que se confrontam, como sejam, a curiosidade, a iniciativa, a persistência, a adaptabilidade, a liderança e a consciência social e cultural).

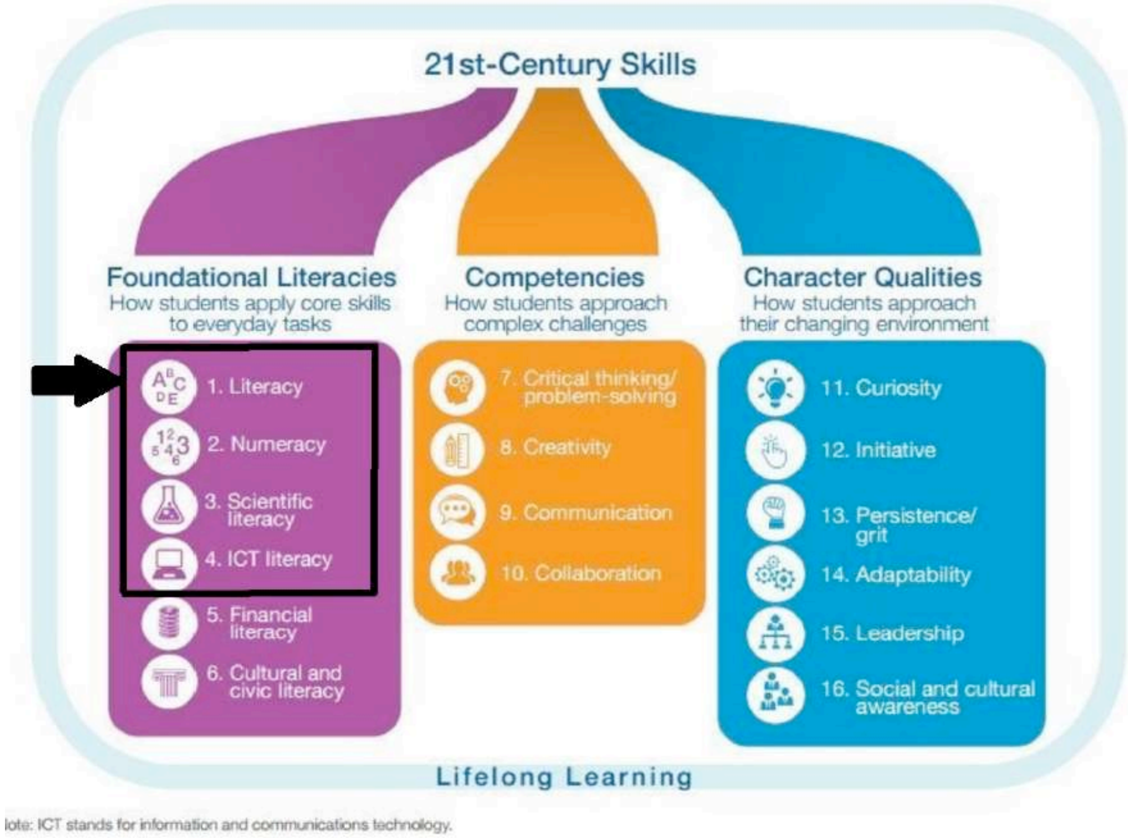


Figura 1. Competências para o século XXI (adaptado de World Economic Forum, 2016).

Os pontos 1, 2, 3 e 4, facilmente são identificados no currículo atualmente em vigor, mas todos os outros muito dificilmente serão identificados no panorama curricular atualmente em vigor em Portugal.

O Perfil dos Alunos para o século XXI no final da escolaridade obrigatória de 12 anos definido recentemente em Portugal (ME, 2017) apresenta uma visão assente nos princípios estruturantes da autonomia e da liberdade, considerando que a melhor educação é a que se desenvolve como construtora de postura no mundo. Em pleno século XXI, a escola tem de preparar para o imprevisto, o novo, a complexidade e, sobretudo, tem de desenvolver em cada indivíduo a atitude, a capacidade e o conhecimento que lhe permita aprender ao longo da vida. O referido documento define competências como combinações complexas de conhecimentos, capacidades e atitudes que permitem uma efetiva ação humana em contextos diversificados e apresenta-as agrupadas em torno das seguintes áreas: (i) Linguagens e textos. (ii) Informação e comunicação. (iii) Raciocínio e resolução de problemas. (iv) Pensamento crítico e pensamento criativo. (v) Relacionamento interpessoal. (vi) Autonomia e desenvolvimento pessoal. (vii) Bem-estar e saúde. (viii) Sensibilidade estética e artística. (ix) Saber técnico e tecnologias. (x) Consciência e domínio do corpo.

Estas competências visam dotar os jovens portugueses, no final de 12 anos de escolaridade, das ferramentas cognitivas, emocionais e sociais que lhes permitam prosseguirem estudos ou enfrentarem o mercado de trabalho. Figueiredo (2017a) considera que um referencial de competências deve ser capaz de induzir inovação e mudança e de mobilizar, se possível até, de apaixonar os que possam colaborar na sua aplicação. A evolução deste nosso mundo, segundo este autor, impõe a clarificação das competências que os jovens devem possuir. Alerta ainda para o facto de o cidadão comum, os alunos e encarregados de educação e até os professores terem de reconhecer e compreender essa necessidade.

Se o alvo for apenas a questão de emprego, deixando para já outras dimensões civilizacionais críticas, prevê-se a perda de muitos (milhões) de empregos, por via da robotização, da automação e de outras evoluções científicas e tecnológicas que obrigarão a profundas mudanças no tecido empresarial e na necessária adequação da qualificação dos jovens. Como refere Figueiredo (2017b) num segundo texto que recentemente fez circular sobre o Perfil dos Alunos (ME, 2017), um empregador da atualidade procura quem saiba fazer e não quem apenas tenha saberes. No Perfil dos Alunos à saída da escolaridade obrigatória, que segue, entre outros, o referencial da OCDE 2030 (2016), as competências são entendidas, como já anteriormente foi referido, como "(…) combinações complexas de conhecimentos, capacidades e atitudes que permitem uma efetiva ação humana em contextos diversificados. As competências são de natureza cognitiva e metacognitiva, social e emocional, física e prática" (ME, 2017, p. 10). A figura que se segue, utilizada no documento "Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória" (ME, 2017) demonstra precisamente este intricado conceito inerente ao termo "competências", que não separa nem privilegia conhecimentos, capacidades ou atitudes, antes os toma como uma trança que os combina no sentido do desenvolvimento de competências em múltiplas áreas.

Figura 2. Esquema conceptual de definição de competência (adaptado de OECD, 2016).

Países como a Austrália, a Finlândia, a Nova Zelândia, o Canadá, entre muitos outros, estão a fazer um percurso nesta área, renovando e refrescando os seus currículos com o objetivo de responder aos desafios da sociedade do século XXI, nomeadamente na inclusão do desenvolvimento de competências transversais no currículo. A Austrália apresenta[1] um currículo para 10 anos de escolaridade obrigatória que dá especial enfoque às capacidades gerais: "The general capabilities play a significant role in the Australian Curriculum in equipping young Australians to live and work successfully in the twenty-first century." Consideram que os alunos devem desenvolver competências quando simultaneamente mobilizam capacidades, aplicam conhecimentos e demostram atitudes de confiança, adequadamente em circunstâncias complexas e sujeitas a mudanças constantes, quer nas aprendizagens que ocorrem na escola, quer nas suas vidas fora da escola. As sete competência essenciais do currículo australiano são apresentadas na figura 2.

[1] http://www.australiancurriculum.edu.au/generalcapabilities/overview/introduction

Figura 3. Capacidades gerais enunciadas no currículo australiano (Australian Curriculum, 2015).

Já na Finlândia[2], a título de apresentação de mais um exemplo que ajude à discussão da existência também em Portugal de um Perfil dos Alunos centrado nas competências, estão implementados pela Finnish National Board of Education os: "National Goals for Basic Education and Transversal Competences", que consideram: (i) *knowledge*, (ii) *skills*, (iii) *values*, (iv) *attitudes* e (v) *will*, desdobrando-as de acordo com o que se apresenta na figura 4:

Figura 4. Competências Transversais no currículo finlandês

[2] http://www.oph.fi/download/175015_education_in_Finland.pdf

O Perfil dos Alunos à saída da escolaridade obrigatória em Portugal, depois da fase de discussão pública e em fase, agora (março de 2017), de reformulação, não se afasta dos referenciais apresentados e vai para além destes. Resumindo, destaquem-se as visões generalizadas da importância de dotar crianças e jovens de competências essenciais que os preparem para uma cidadania participativa e ativa e para a inclusão num mundo global e competitivo que solicita cidadãos concretizadores, inovadores, criadores e autónomos, capazes de aprender e de continuar a aprender ao longo da vida. Um mundo global que vive da mudança e se centra na informação e no conhecimento, onde todos competem com todos, sem fronteira (Friedman, 2006).

Desafios à educação (numa sociedade global)

À escola

O perfil dos alunos no final da escolaridade obrigatória (ME, 2017) estabelece uma visão de escola e uma matriz para a tomada de decisão sobre as opções de desenvolvimento curricular, consistentes com a visão de futuro definida como relevante para os jovens portugueses do nosso tempo. Deve ser entendido como um guia que enuncia os princípios fundamentais em que assenta uma educação que se quer inclusiva. Deste modo, da escola, espera-se que seja capaz de formar os cidadãos com as características já referidas que a seguir se listam: jovens competentes na utilização de **linguagens e de textos**, utilizadores de modo proficiente de diferentes linguagens simbólicas associadas às línguas (língua materna e línguas estrangeiras), à literatura, à música, às artes, às tecnologias, à matemática e à ciência; capazes de aplicar estas linguagens de modo adequado aos diferentes contextos de comunicação, em ambientes analógico e digital dominando capacidades nucleares de compreensão e de expressão nas modalidades oral, escrita, visual e multimodal. Jovens competentes nos domínios da **informação e da comunicação**, sendo para tal fundamental que saibam utilizar e dominar instrumentos diversificados para pesquisar, descrever, avaliar, validar e mobilizar informação de forma crítica e autónoma, verificando diferentes fontes documentais e a sua credibilidade; ágeis na transformação da informação em conhecimento, sabendo comunicar e colaborar de forma adequada e segura, utilizando diferentes tipos de ferramentas (analógicas e digitais), seguindo as regras de conduta próprias de cada ambiente. Jovens com competências associadas ao ***raciocínio e resolução de problemas***, sendo que estas implicam que estejam capacitados para: (i) planear e conduzir pesquisas; (ii) gerir projetos e tomar decisões para resolver problemas; (iii) desenvolver processos conducentes à construção de produtos e de conhecimento, usando recursos diversificados. Considera-se também a importância de estes jovens desenvolverem competências associadas ao ***Pensamento crítico Pensamento criativo***, o que implica que sejam capazes de (i) pensar de modo abrangente e em profundidade, de forma lógica, observando, analisando informação, experiências ou ideias, argumentando com recurso a critérios implícitos ou explícitos, com vista à tomada de posição fundamentada; (ii) convocar diferentes conhecimentos, utilizando diferentes metodologias e ferramentas para pensarem criticamente; (iii) prever e avaliar o impacto das suas decisões; (iv) desenvolver novas ideias e soluções, de forma criativa e inovadora, como resultado da interação com outros ou da reflexão pessoal, aplicando-as a diferentes contextos e áreas de aprendizagem. Considera-se que os jovens devem desenvolver ao longo da escolaridade obrigatória competências associadas ao ***relacionamento interpessoal***, o que implica que sejam capazes de: (i) adequar comportamentos em contextos de cooperação, partilha, colaboração e competição; (ii) trabalhar em equipa e usar diferentes meios para comunicar e trabalhar presencialmente e em rede; (iii) ouvir, interagir, argumentar, negociar e aceitar diferentes pontos de vista, ganhando novas formas de estar, olhar e participar na sociedade e que desenvolvam competências associadas ao ***desenvolvimento pessoal e autonomia***, o que implica que sejam capazes de (i) identificar áreas de interesse e de necessidade de aquisição de novas competências; (ii) consolidar e aprofundar as que já possuem, numa perspetiva de aprendizagem ao longo da vida; (iii) estabelecer objetivos, traçar planos e projetos e serem autónomos na sua concretização. Também as competências associadas ao ***bem-estar e saúde*** devem ser desenvolvidas e implicar que todos os alunos sejam capazes de: (i) adotar comportamentos que promovem a saúde e o bem-estar, designadamente nos hábitos quotidianos, na alimentação, na prática de exercício físico, na sexualidade e nas suas relações com o ambiente e a sociedade; (ii) manifestar consciência e responsabilidade ambiental e social, trabalhando colaborativamente para o bem comum, com vista à construção de um futuro sustentável. Consideram-se também fundamentais que os jovens terminem a escolaridade obrigatória sendo competentes nas áreas da ***sensibilidade estética e artística*** o que implica que sejam capazes de: (i) apreciar criticamente as realidades artísticas e tecnológicas, pelo contacto com os diferentes universos culturais; (ii) entender a importância da integração das várias formas de arte nas comunidades e na cultura; (iii) compreender os processos próprios à experimentação, à improvisação e à criação nas diferentes artes, tanto em relação ao património cultural material e imaterial, como à criação contemporânea. No final da escolaridade obrigatória são fundamentais as competências associadas ao ***saber técnico e às tecnologias***, ou seja, os alunos devem ser capazes de: (i) manipular e manusear materiais e instrumentos diversificados para controlar, utilizar, transformar, imaginar e criar produtos e sistemas; (ii) executar operações técnicas, segundo uma metodologia de trabalho adequada, para atingir um objetivo ou chegar a uma decisão ou conclusão fundamentada, adequando os meios materiais e técnicos à ideia ou intenção expressa; (iii) adequar a ação de transformação e criação de produtos aos diferentes contextos naturais, tecnológicos e socioculturais, em atividades experimentais e aplicações práticas em projetos desenvolvidos em ambientes físicos e digitais e consolidarem competências associadas à ***consciência e domínio do corpo***, ou seja, estarem capacitados para: (i) ter consciência do seu próprio corpo; (ii) ajustar o tipo de comportamento motor a adotar, face à ação desejada; (iii) controlar e dominar o corpo segundo a natureza da atividade e os contextos em que ocorrem.

Aos professores

O documento Perfil dos Alunos (ME, 2017) apresenta um conjunto de implicações práticas baseadas na seguinte premissa: "A assunção de princípios, valores e competências chave para o perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória implica alterações de práticas pedagógicas e didáticas de forma a adequar a globalidade da ação educativa às finalidades do perfil de competências dos alunos." (p. 16). O papel dos professores é fundamental na formação deste cidadão e tal implica alterações de práticas pedagógicas e didáticas de forma a adequar a globalidade da ação educativa às finalidades do perfil de competências dos alunos. Os professores têm um papel determinante no desenvolvimento das competências atrás descritas. Práticas pedagógicas centradas no aluno e no desenvolvimento das suas competências serão fundamentais: ensino pela descoberta, trabalho de projeto, resolução de problemas, contextos reais de aprendizagem, *role play*, entre outras, associadas a estratégias, por exemplo, de utilização de tecnologias, trabalho em ambientes colaborativos, *gamificação*, devem ter um papel preponderante na construção da autonomia dos alunos, assumindo o professor um papel de orientador das aprendizagens dos seus alunos.

A participação dos professores em ambientes formativos que os preparem para estas novas práticas será fundamental. Ambientes formativos, também eles alicerçados numa lógica de desenvolvimento de competências para a ação. Em síntese, o modelo de formação tem de colocar, ao mesmo nível, a reflexão sobre o potencial do desenvolvimento de competências e a prática relativa ao desenvolvimento dessas mesmas competências, quer no ambiente de formação, quer, posteriormente, na intervenção que o professor-formando fará na sala de aula. Os resultados dessa intervenção devem ser alvo de apresentação ao grupo de formação e de avaliação para que, numa perspetiva de colaboração e partilha, se tracem novos percursos alicerçados na reflexão sobre as práticas pedagogicamente inovadoras. Nesta fase, o processo complexifica-se, pois o trabalho de promoção da mudança nas práticas pedagógicas do professor cruza-se com outras variáveis não completamente endereçáveis no ambiente de formação e que envolvem a escola no seu todo e não apenas o professor (Horta, 2013).

A formação contínua de professores continua a ser uma ferramenta de ação fundamental para fazer evoluir os sistemas educativos: provavelmente nada no interior da escola terá mais impacto nas aprendizagens dos alunos, no desenvolvimento das suas competências, confiança, autonomia e comportamento em sala de aula do que a atitude e posicionamento do professor e o seu desenvolvimento profissional. Adequar as necessidades de desenvolvimento profissional dos professores à oferta geográfica de formação poderá e deverá ser um problema ultrapassado com o potencial das tecnologias e o conhecimento que a investigação fornece em torno das comunidades de prática, nomeadamente as que se sustentam nas redes digitais. Outra possibilidade é a de localmente se desenvolverem projetos nas comunidades, alicerçados também na formação e no apoio aos professores envolvidos, numa lógica de formação, reflexão, prática, intervenção e avaliação, ou seja, em ambiente de formação os professores refletem sobre as suas práticas, ensaiam, preparam e planificam intervenções a realizar nas suas salas de aula e que, de regresso à formação, avaliem as intervenções, reflitam e incorporem novas práticas pedagógicas, inovadoras e capazes de responder aos desafios colocados à formação dos jovens em pleno século XXI, jovens dotados de literacia cultural, científica e tecnológica que lhes permitam analisar e questionar criticamente a realidade, avaliar e selecionar a informação, formular hipóteses e tomar decisões fundamentadas no seu dia-a-dia; jovens livres, autónomos, responsáveis e conscientes de si próprios e do mundo que os rodeia; jovens capazes de lidar com a mudança e a incerteza num mundo em rápida transformação; jovens que reconheçam a importância e o desafio oferecidos conjuntamente pelas Artes, as Humanidades, a Ciência e Tecnologia para a sustentabilidade social, cultural, económica e ambiental de Portugal e do mundo; jovens que sejam capazes de pensar crítica e autonomamente, que sejam criativos, com competência de trabalho colaborativo e capacidade de comunicação, aptos a continuarem a sua aprendizagem ao longo da vida, como fator decisivo do seu desenvolvimento pessoal e da sua intervenção social; jovens que conheçam e respeitem os princípios fundamentais da sociedade democrática e os direitos, garantias e liberdades em que esta assenta, que valorizem o respeito pela dignidade humana, pelo exercício da cidadania plena, pela solidariedade para com os outros, pela diversidade cultural e pelo debate democrático, rejeitando todas as formas de discriminação e de exclusão social.

Inovação por via das tecnologias

Falar de inovação continua a ser obrigatório pois é recorrente a menção às escolas e especialmente às salas de aula como sendo espaços que continuam no século XIX: mesas enfileiradas com alunos sentados lado a lado, olhando na mesma direção, a do professor, que apresenta a sua aula magistral, como que num púlpito, pedindo atenção e concentração aos jovens, que devem ouvir em silêncio o que o professor lhes transmite e ensina. Socorrem-se muitos destes professores de equipamentos eletrónicos para apoiarem as suas apresentações mas continuam a exigir silêncio aos seus alunos, que o devem acompanhar em ritmo idêntico e sem questionamentos. A lógica é a da escola que produz uniformidade e prepara para iguais exames finais, e espera dos alunos respostas únicas e certas. Uma escola que prepare os jovens para que sejam cidadãos capazes de construírem autonomamente a sua capacidade para criar e intervir num mundo global tem de se centrar no desenvolvimento de competências muitas delas associadas à utilização qualificada das tecnologias: "Technology holds enormous promise to help foster 21stcentury skills, including social and emotional skills. It can personalize learning, engage the disengaged, complemente what happens in the classroom, extend education outside the classroom and provide access to learning to students who otherwise might not have sufficient educational opportunities" (World Economic Forum, 2016, p. 11).

As tecnologias podem ser vistas como alavanca e catalisador de mudanças mas numa perspetiva de que o que importa é a construção de um modelo educativo sustentável que convoque as tecnologias na exata medida em que elas estão no dia-a-dia de todos (Lubin, 2016). Tal implica não medidas uniformizadoras que tratem as escolas todas como iguais, mas antes o desenvolvimento e o apoio a projetos piloto que, atuando nas margens do sistema, o consigam contaminar e alterar. Projetos piloto recentes têm conseguido resultados inquestionáveis mas precisam de estratégias que lhes permitam ganhar escala. Trata-se de fenómenos de inovação disruptiva, segundo o conceito de Christensen (2011) ou seja, fenómenos de inovação que atuam nas margens do sistema, permitindo que a mudança cresça discretamente até começar a transformá-lo irreversivelmente. Em Portugal, e recentemente, podemos assinalar o trabalho específico feito nas escolas TEIP, escolas experimentais incumbidas de promover mudanças transformacionais em comunidades sociais degradadas onde se integram, escolas-piloto que exploram novos modelos pedagógicos e organizacionais, como sejam a escola da ponte[3] e o arco maior[4], inúmeros projetos de maior ou menor abrangência que promovem modelos pedagógicos diferenciados, com camadas de apoio e disponibilização de recursos educativos e atuam especificamente na melhoria das aprendizagens dos alunos. Exemplos com informação disponível e de detalhe na Internet são: (i) eTwinning; (ii) Programação no 1.º Ciclo; (iii) TTS; (iv) Apps for Good; (v) Matemática e KA entre muitos outros que poderiam aqui ser mencionados, em curso, atualmente em Portugal. São projetos com uma lógica de rede de apoio que passa pela disponibilização de recursos educativos de qualidade, de apoio aos professores por via de formação contextualizada e de dinamização de atividades com sentido e alicerçadas em contextos reais de aprendizagem.

Notas finais

As atuais e futuras gerações enfrentam desafios e oportunidades que requerem novas abordagens aos processos de ensino e aprendizagem. A resolução de problemas complexos, e muitos ainda nem sequer identificados, obrigarão à colaboração, à criatividade e a preocupações com a sustentabilidade do planeta, a saúde e o bem-estar,

[3] http://www.escoladaponte.pt/
[4] http://arcomaior.pt/

como nunca antes aconteceu. Colaborar com cidadãos de diferentes culturas e áreas do saber será inevitável para a criação de valor económico e social. Quais as aprendizagens que são responsabilidade da escola? Que competências devem ser desenvolvidas na escola, neste século XXI, diverso culturalmente mas ao mesmo tempo tão conectado em termos comunicacionais? O Perfil dos Alunos à saída da Escolaridade Obrigatória (versão de março de 2017) apresenta princípios, visão, valores, competências essenciais e implicações práticas que se constituem como um quadro de referência que pressupõe por parte de todos os elementos das comunidades educativas, a liberdade, a responsabilidade, a valorização do trabalho, a consciência de si próprio, a inserção familiar e comunitária e a participação na sociedade que nos rodeia de todos os jovens.

O Perfil do Aluno tem uma base humanista e procura responder às necessidades atuais e futuras tendo em conta as mudanças profundas e crescentes no modo de funcionar das sociedades e das economias, ou seja, é clara uma necessidade de mudança e de evolução dos modelos de ensino e das práticas pedagógicas. Sugere: (i) abordar os conteúdos de cada área do saber associando-os a situações e a problemas presentes no quotidiano da vida do aluno ou presentes no meio sociocultural e geográfico em que se insere, recorrendo a materiais e recursos diversificados; (ii) organizar o ensino prevendo a experimentação de técnicas, instrumentos e formas de trabalho diversificados, promovendo intencionalmente, na sala de aula ou fora dela, atividades de observação, questionamento da realidade e integração de saberes; (iii) organizar e desenvolver atividades cooperativas de aprendizagem, orientadas para a integração e a troca de saberes, a tomada de consciência de si, dos outros e do meio e a realização de projetos intra ou extraescolares; (iv) organizar o ensino prevendo a utilização crítica de fontes de informação diversas e das tecnologias da informação e comunicação; (v) promover de modo sistemático e intencional, na sala de aula e fora dela, atividades que permitam ao aluno fazer escolhas, confrontar pontos de vista, resolver problemas e tomar decisões com base em valores; (vi) criar na escola espaços e tempos para que os alunos intervenham livre e responsavelmente; (vii) valorizar, na avaliação das aprendizagens do aluno, o trabalho de livre iniciativa, incentivando a intervenção positiva no meio escolar e na comunidade. A ação educativa é, pois, compreendida como uma ação formativa especializada, fundada no ensino, que implica a adoção de princípios e estratégias pedagógicas e didáticas que visam a concretização da aprendizagem. Trata-se de encontrar a melhor forma e os recursos mais eficazes para todos os alunos aprenderem, isto é, para que se produza uma apropriação efetiva dos conhecimentos, capacidades e atitudes que se trabalharam, em conjunto e individualmente, e que permitem desenvolver as competências chave ao longo da escolaridade obrigatória.

Conclui-se reforçando o papel que as tecnologias podem ter na consecução deste perfil, nomeadamente enquanto alavancas de mudança e catalisadoras do sucesso por via da motivação dos alunos e pelas capacidades inatas de criarem contextos reais de aprendizagem. Não se trata de apenas mudar um modelo de educação que não integra as tecnologias para outro que as incorpora. É clara a necessidade de evoluir de projetos muito dirigidos à utilização instrumental das tecnologias, para projetos que se centram nas mudanças culturais e de práticas pedagógicas num mundo por si repleto de tecnologias, ou seja, um modelo educativo sustentável, que convoque as tecnologias na exata medida em que elas estão no mundo de hoje - uma educação com as tecnologias mas para além das tecnologias.

Referências bibliográficas

Australian Curriculum. (2015). V8.3 F-10 Curriculum. Information and Communication Technology (ICT) Capability. Acedido em abril de 2016, em http://www.australiancurriculum.edu.au/generalcapabilities/information-andcommunication-technology-capability/introduction/key-ideas .

Bauman, Z. (2013). *Liquid times: Living in an age of uncertainty*. Nova Jersey: John Wiley & Sons.

Christensen, C., Horn, M., & Johnson, C. (2008). *Disrupting class: How disruptive innovation will change the way the world learns*. New York: McGraw-Hill.

Dewey, J. (1959). Democracia e educação: introdução à filosofia da educação. Companhia Editora Nacional.

Dias, P. (2012). Comunidades de educação e inovação na sociedade digital. *Educação, Formação & Tecnologias*, v.5, n.2, p.4-10.

European Commission. (2016). New Skills Agenda for Eupope, EC. Acedido em janeiro de 2017, em http://ec.europa.eu/social/main.jsp?catId=1223&langId=en

Fadel, C., Bialik, M. & Trilling, B. (2015). *Educação em quatro dimensões*, Boston: Center for Curriculum Redesign.

Figueiredo, A. D. (2011). Inovar em Educação, Educar para a Inovação. In Domingos Fernandes (Org.), *Avaliação em Educação: Olhares Sobre uma Prática Social Incontornável* (pp. 13-28). Pinhais, Brasil: Editora Melo.

Figueiredo, A. D. (2012). A geração 2.0 e os novos saberes. *Revista do Centro de Investigação e Inovação em Educação*, 2(1), 79-91.

Figueiredo, A. D. (2017a). Que Competências para as Novas Gerações? [I] Acedido em março de 2017 https://medium.com/@adfig/que-compet%C3%AAncias-para-as-novas-gera%C3%A7%C3%B5es-eeedee676c8d#.5o25asebt

Figueiredo, A. D. (2017b). Que Competências para as Novas Gerações ? [II] Acedido em março de 2017 https://medium.com/@adfig/que-compet%C3%AAncias-para-as-novas-gera%C3%A7%C3%B5es-ii-e000f41e16b2#.zihgeh52r

Figueiredo, A. D. (2017c). Que Competências para as Novas Gerações ? [III] Acedido em março de 2017 https://medium.com/@adfig/que-compet%C3%AAncias-para-as-novas-gera%C3%A7%C3%B5es-iii-e6dd55272a16#.7ig7nxclw

Finnish National Agency for Education (2016). Education in Finland. Acedido em fevereiro, 2017, em http://www.oph.fi/download/175015_education_in_Finland.pdf .

Friedman, T. (2006). *The world is flat: The globalized world in the twenty-first century*. London: Penguin.

Horta, M. J. (2013). *A formação de professores como percurso para o uso das TIC em actividades práticas pelos alunos na sala de aula*. Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal.

Lubin, I. (2016). *Intentional ICT: Curriculum, education and development.* UNESCO International Bureau of Education

ME. (2017). *Perfil dos Alunos para o Século XXI*. Lisboa: Ministério da Educação.

Missão para a Sociedade da Informação (1997). *Livro Verde para a Sociedade da Informação em Portugal*. Lisboa: Ministério da Ciência e da Tecnologia.

Neves Vicente, J. (1995). Educação, Diálogo, Crítica e Libertação na Acção e no Pensamento de Paulo Freire. *Revista Filosófica de Coimbra*, n.º 8, 373-406.

OECD. (2012). E-Skills for The 21st Century: Fostering Competitiveness, Growth and Jobs, OECD.

OECD. (2016). Global competency for an inclusive world. Acedido em novembro de 2016, em https://www.oecd.org/education/Global-competency-for-an-inclusive-world.pdf

OECD. (2016). Progress report on the Draft OECD EDUCATION 2030 Conceptual Framework - 3rd Informal Working Group (IWG) on the Future of Education and Skills: OECD Education 2030.

Rogers, C., (1977). *Tornar-se Pessoa*, 4.ª edição, trad. M. J. Carmo Ferreira, Lisboa: Morais Editores.

Roldão, M. C. (2003). *Gestão do currículo e avaliação de competências: as questões dos professores*. Lisboa: Presença.

UNESCO. (2015). Incheon Declaration and SDG4 – Education 2030 Framework for Action, Ensure inclusive and equitable quality education and promote lifelong learning opportunities for all, ED-2016/WS/28.

World Economic Forum. (2016). New Vision for Education: Fostering Social and Emotional Learning through Technology.

COMUNICAÇÕES

DINÂMICAS DE APRENDIZAGEM DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA NUM ESTUDO DE AULA NA ELABORAÇÃO E ANÁLISE DE UM DIAGNÓSTICO DOS CONHECIMENTOS DOS ALUNOS

Marisa Quaresma[1], *João Pedro da Ponte*[2]
[1]*Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, jpponte@ie.ulisboa.pt*
[2]*Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, mq@campus.ul.pt*

Resumo. *Neste artigo analisamos as dinâmicas de aprendizagem desenvolvidas num estudo de aula por um grupo de cinco professoras do 2.º ciclo na elaboração e análise de uma tarefa de diagnóstico. Especificamente, o nosso objetivo é analisar as mudanças ocorridas no seu conhecimento didático, nas vertentes de conhecimento do currículo, dos alunos e dos seus processos de aprendizagem, e da prática letiva. Os dados foram recolhidos por observação participante, com gravação áudio das sessões, recolha documental e realização de um diário de bordo Os resultados sugerem que a elaboração e análise de um diagnóstico durante o estudo de aula, através de um processo reflexivo, deram oportunidade às professoras para desenvolverem conhecimento didático sobre as orientações curriculares para o conteúdo específico, o pensamento dos alunos, as tarefas e o papel das diferentes representações na aprendizagem dos números racionais. Este trabalho permitiu também aos professores mudarem o seu conhecimento sobre os alunos, mais concretamente, sobre as suas reais capacidades, levando-os a valorizar os aspetos positivos das resoluções dos alunos e não só centrar-se nas suas dificuldades.*

Abstract. *In this paper we analyze the learning dynamics of a group of five middle school teachers that took place in a lesson study during the elaboration and analysis of a diagnostic task. Specifically, we aim to analyze the changes that occurred in the teachers' didactical knowledge, notably in their curriculum knowledge, knowledge of students and in their learning processes, and knowledge of teaching practice. Data were collected by participant observation, with audio recording of the sessions, collection of participants' written documents, and by making a research journal. The results suggest that the elaboration and analysis of a diagnostic task during the lesson study, through a reflexive process, gave the teachers an opportunity to develop didactical knowledge about curriculum guidelines for the specific content, students' thinking, tasks, and the role of different representations for learning rational numbers. This work also allowed the teachers to change their knowledge about the students and, more specifically, about their real capacity, leading the teachers to value the positive aspects of their students' solutions and not only attend to their difficulties.*

Palavras-chave: *Desenvolvimento profissional; Estudo de aula; Tarefas; Conhecimento didático; Dinâmicas de aprendizagem de professores.*

Introdução

Durante os anos 80 e 90 debateram-se largamente mudanças para o ensino e a aprendizagem da Matemática (Cockcroft, 1982; NCTM, 1980, 1989). Em Portugal, nos anos 90, a par do que acontecia internacionalmente, questionaram-se os modelos usuais de formação de professores e começou a dar-se atenção à noção de desenvolvimento profissional (Ponte, 1998). Por se centrar mais na prática letiva e nas reais necessidades dos professores, o conceito de desenvolvimento profissional tem tido um papel importante no incentivo que dá aos professores na superação dos desafios que se lhes colocam com as constantes mudanças dos contextos de ensino e das orientações curriculares etc…

O estudo de aula é um processo de desenvolvimento profissional usado há mais de um século no Japão onde tem um valor proeminente junto de professores e educadores (Shimizu, 2014). Uma marca fundamental dos estudos de aula é a sua natureza reflexiva e colaborativa. Nesta atividade formativa, os professores trabalham em conjunto identificando dificuldades dos alunos, considerando alternativas curriculares e preparando cuidadosamente uma aula que depois observam e analisam (Fernández, Cannon & Chokshi, 2003; Perry & Lewis, 2009). Trata-se, portanto, de um processo muito próximo de uma pequena investigação que os professores realizam sobre a sua própria prática profissional (Quaresma & Ponte, 2015).

O estudo de aula parece estar desde há muito otimizado e estabilizado no seu país de origem. Contudo, dado que a sua disseminação para outras culturas é relativamente recente, é importante pensar e investigar em que medida os estudos de aula podem ajudar a promover o desenvolvimento profissional de professores em Portugal, em que medida podem responder às necessidades de desenvolvimento profissional e como se podem adaptar a essas necessidades.

Neste artigo analisamos as dinâmicas de aprendizagem desenvolvidas por um grupo de cinco professoras do 2.º ciclo num estudo de aula, durante a elaboração e análise de um diagnóstico dos conhecimentos dos alunos. Mais concretamente, pretendemos analisar as mudanças ocorridas no conhecimento didático, nas suas vertentes de conhecimento do currículo, dos alunos e dos seus processos de aprendizagem e da prática letiva.

Desenvolvimento profissional

Historicamente, as mudanças no conhecimento dos professores estavam associadas a atividades planeadas de formação. Nos anos 90 em Portugal, a investigação em educação matemática dedicou-se bastante ao estudo do desenvolvimento profissional dos professores. Ponte (1998) assinalou as diferenças principais entre os conceitos de "formação" e "desenvolvimento profissional": (i) a formação era então muito vinculada à frequência de cursos numa perspetiva escolar enquanto o desenvolvimento profissional ia para além disso incluindo "outras atividades como projetos, trocas de experiências, leituras, reflexões" (p. 28); (ii) a formação tem uma lógica "de fora para dentro" enquanto no desenvolvimento profissional o movimento acontece "de dentro para fora", o professor toma decisões sobre as "questões que quer considerar" (p. 28); (iii) a formação caracteriza-se por ser segmentada por temas, áreas ou capacidades onde se considera haver um défice de conhecimento; enquanto o desenvolvimento profissional caracteriza-se por considerar "a pessoa do professor como um todo"; (iv) a formação baseia-se, essencialmente, na teoria que tenta "transmitir" enquanto o desenvolvimento profissional considera "teoria e prática duma forma interligada" (p. 28). Por fim, Ponte (1998) e Clarke e Hollingsworth (2002) salientam ainda que na formação é dada especial atenção àquilo que se considera que o professor não sabe, enquanto no desenvolvimento profissional se procura desenvolver o que os professores já conhecem.

Para Day (2001) e Ponte (1998) o desenvolvimento profissional refere-se aos processos de aprendizagem relacionados com o exercício da docência, decorre ao longo da vida profissional do professor e pressupõe o seu investimento em questões diversas, incluindo as que se prendem diretamente com o ensino das disciplinas que tem a seu cargo. Ponte (1998) refere ainda a necessidade do professor refletir sobre a sua própria experiência e estudar e aprofundar temas do seu interesse. Na sua perspetiva, o desenvolvimento profissional é uma exigência da própria profissão.

Apresentamos aqui o modelo de desenvolvimento profissional proposto por Clarke e Hollingsworth (2002) (Figura 1). Este modelo surgiu em oposição a modelos anteriores que, segundo os autores, têm estruturas essencialmente lineares e, por isso, não reconhecem a complexidade dos processos de aprendizagem dos professores. Neste modelo destaca-se a estrutura inter-relacional, sugerindo que a mudança acontece através dos processos de materialização e reflexão, em quatro domínios: (i) o pessoal, que inclui os conhecimentos, crenças e atitudes do professor; (ii) o das práticas de ensino; (iii) o das consequências na aprendizagem dos alunos; e (iv) o externo. Assim, o desenvolvimento profissional resulta da reflexão que os professores realizam nos vários domínios, mas também da experimentação de novas formas de atuação.

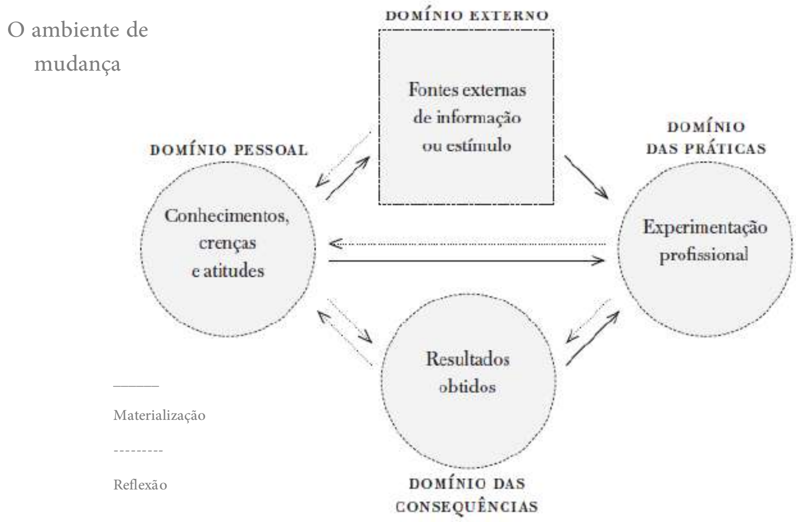


Figura 1. Modelo inter-relacional de desenvolvimento profissional (Clarke & Hollingsworth, 2002).

Uma das vertentes de desenvolvimento profissional diz respeito ao conhecimento profissional. No que se refere ao conhecimento profissional do professor de Matemática, Ponte (2012) dá especial destaque ao conhecimento didático por ser o que se liga mais diretamente à prática letiva e aquele onde está presente de um modo mais forte a especificidade da disciplina. O autor distingue quatro vertentes neste conhecimento. Em primeiro lugar surge o conhecimento da Matemática enquanto disciplina escolar. A segunda vertente é o conhecimento do aluno e dos seus processos de aprendizagem, onde inclui conhecer os alunos como pessoas, os seus interesses, os seus gostos e o modo como aprendem. A terceira vertente diz respeito ao conhecimento do currículo que envolve o "conhecimento das grandes finalidades e objetivos do ensino da Matemática, bem como a organização dos conteúdos, o conhecimento dos materiais e das formas de avaliação a utilizar" (p. 87). Por fim, surge o conhecimento sobre a prática letiva que, segundo o autor, é o núcleo fundamental do conhecimento didático e inclui a planificação, "a conceção das tarefas e tudo o que respeita à condução das aulas de Matemática, nomeadamente as formas de organização do trabalho dos alunos, a criação de uma cultura de aprendizagem na sala de aula, o desenvolvimento e a regulação da comunicação e a avaliação das aprendizagens dos alunos e do ensino do próprio professor" (p. 88).

Estudos de aula

O estudo de aula é uma abordagem para melhorar o ensino e a aprendizagem da Matemática através de uma forma particular de atividade de um grupo de professores. Proporciona aos professores participantes oportunidades ricas de aprendizagem enquanto trabalham em colaboração com os colegas, debruçando-se sobre o conteúdo matemático, a forma como os alunos aprendem e como mudar o ensino na sala de aula (Shimizu, 2014). Esta prática começou no fim do século XIX, quando professores japoneses dos primeiros anos se começaram a juntar para "estudar aulas" observando e refletindo de modo crítico sobre essas aulas. De um modo geral, um estudo de aula é um processo que envolve ciclos sucessivos de trabalho colaborativo em que: (i) os professores estudam os conteúdos curriculares e os materiais de ensino; (ii) planeiam uma aula; (iii) lecionam e observam essa aula; e (iv) discutem os dados recolhidos durante a observação dessa aula para daí retirarem implicações para o ensino e a aprendizagem (Fujii, 2013; Lewis, 2016; Lewis & Hurd, 2011; Shimizu, 2014).

Atendendo às suas potencialidades como processo de desenvolvimento profissional, os estudos de aula têm sido usados em diferentes contextos e realidades, sofrendo, naturalmente, várias adaptações, proporcionando um vasto leque de aprendizagens aos professores participantes. Por exemplo, Bruce, Flynn e Bennett (2016) apresentam um estudo realizado no Canadá visando compreender melhor o que as crianças mais novas conseguem fazer em Matemática. Uma equipa de investigadores trabalhou com 11 grupos de professores (6 a 10 professores em cada grupo) dos alunos mais novos (4-7 anos) durante quatro anos em miniciclos de, aproximadamente, seis meses. Os resultados deste estudo indicam que os professores desenvolveram a sua capacidade para ouvir e compreender o pensamento dos alunos, o que influenciou o planeamento das tarefas que se seguiram.

Estudos de aula realizados em Portugal (Baptista et al., 2012; Ponte et al., 2012) com professores do 3.º e do 7.º ano mostram que estes podem realizar aprendizagens profissionais relativamente à seleção de tarefas a propor, à atenção a dar aos processos de raciocínio dos alunos e às suas dificuldades, bem como à comunicação na sala de aula, em especial na condução de discussões coletivas.

Metodologia de investigação

Esta investigação, de natureza qualitativa e interpretativa (Erickson, 1986), resulta da realização de um estudo de aula no ano letivo de 2013-14 numa escola de Lisboa. O estudo de aula envolveu cinco professoras do 2.º ciclo que constituíam todo o grupo disciplinar de Matemática e Ciências da Natureza daquela escola (Francisca, Maria e Luísa, que lecionavam turmas de 5.º ano, e Inês e Tânia, que lecionavam turmas de 6.º ano). A equipa do IE que conduziu este trabalho é formada por quatro membros, tendo Marisa e Joana dinamizado as sessões de trabalho, João Pedro coordenado a formação e participado em algumas sessões e Mónica assumido o papel de observadora, coadjuvada por uma bolseira.

O estudo de aula teve oito sessões de trabalho, a que se seguiram quatro sessões de seguimento. A sessão 1 teve por objetivo apresentar o estudo de aula a todas as professoras e as sessões 2 a 6 pretenderam aprofundar o seu conhecimento sobre comparação e ordenação de números racionais e preparar uma aula sobre esse tópico. A sessão 7 consistiu na observação de uma aula tendo por base a tarefa selecionada e adaptada pelas professoras. A sessão 8 foi dedicada a refletir sobre a aula de investigação e sobre o trabalho realizado até aí. Nas quatro sessões de seguimento as professoras foram convidadas a planear e a refletir sobre duas aulas. Na última sessão foi feito ainda um balanço global sobre todo o trabalho realizado. As doze sessões constituíram uma oficina de formação creditada.

Os dados aqui analisados dizem respeito à elaboração e análise da tarefa de diagnóstico que decorreu nas sessões 3 e 4 com o objetivo de obter informação sobre o conhecimento dos alunos que pudesse informar a preparação da aula de investigação. Os dados foram recolhidos por observação participante e recolha documental através da elaboração de um diário de bordo (realizado usualmente por Mónica) e gravação áudio das sessões.

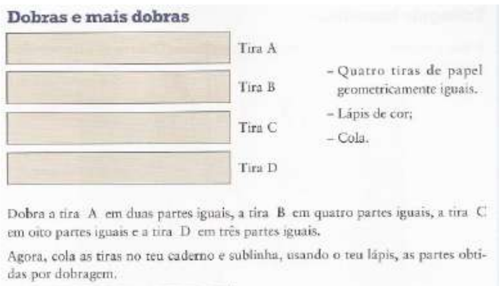
As estratégias de análise de dados incluem a indução analítica, a comparação constante e a categorização em tipologias tendo em vista concetualizar a partir dos dados (Goetz & LeCompte, 1984). A análise dos dados começou por identificar momentos significativos nas diversas sessões, olhando para as respetivas transcrições e, quando pertinente, para a gravação áudio. Através do modelo proposto por Clarke e Hollingsworth (2002) para a análise do desenvolvimento profissional dos professores, procuramos analisar de modo sistemático e aprofundado a elaboração e análise do teste de diagnóstico para assim identificar as dinâmicas de aprendizagem desenvolvidas e as mudanças ocorridas no conhecimento das professoras, considerando três das quatro vertentes do conhecimento didático indicadas por Ponte (2012): (i) conhecimento do aluno e dos seus processos de aprendizagem; (ii) conhecimento do currículo; e (iii) conhecimento da prática letiva. Uma vez que não analisamos as práticas letivas das professoras, consideramos que as suas aprendizagens se enquadram, essencialmente, no domínio pessoal. Contudo, e de uma forma diferente de Clarke e Hollingsworth (2002), no domínio das práticas inserimos todas as formas de experimentação profissional, incluindo as ações e atividades desenvolvidas pelas professoras dentro das sessões de trabalho do estudo de aula.

Elaboração do diagnóstico

A elaboração do diagnóstico decorreu na terceira sessão do estudo de aula. Nesta sessão definimos os objetivos do diagnóstico com base na análise dos documentos curriculares; elaborámos e selecionámos tarefas para o diagnóstico a partir de propostas levadas pelas professoras e pela equipa do IE e definimos a forma como cada professora iria aplicar o diagnóstico nas suas turmas. Num primeiro momento, as professoras analisaram o anterior programa do 1.º ciclo (ME, 2007), onde verificaram as aprendizagens que os alunos já deviam ter feito, e analisaram o atual programa de 5.º ano (MEC, 2013), onde verificaram as aprendizagens que os alunos teriam de fazer. Esta análise foi feita por sugestão de Marisa, que conduzia a sessão, pelo que se situa no domínio externo. Comparando o que os alunos já deviam saber e o que deviam aprender, as professoras selecionaram os objetivos para a tarefa de diagnóstico (conhecimento da prática letiva). Esta discussão sobre as aprendizagens realizadas e a realizar pelos alunos promoveu um processo de reflexão (seta 1 na Figura 4) que levou a alterações no conhecimento das professoras sobre o que podiam solicitar aos alunos no diagnóstico (conhecimento do currículo e da prática letiva).

Com base no conhecimento do domínio pessoal proveniente das suas experiências sobre as potencialidades do uso de diferentes representações de número racional, mas também envolvendo novo conhecimento sobre tarefas, estratégias e dificuldades dos alunos e sobre os objetivos a atingir com base no novo programa (MEC, 2013), as professoras realizaram um processo de materialização (seta 2) que as conduziu a uma prática de planificação (conhecimento da prática letiva). Assim, analisaram as tarefas que tinham levado (de acordo com o que tinha sido solicitado na sessão anterior) e conseguiram facilmente identificar tarefas adequadas à maioria dos objetivos. Perante alguns objetivos, as professoras não só identificaram tarefas como discutiram ativamente como as poderiam ajustar aos objetivos visados e aos conhecimentos que os alunos supostamente deviam ter.

O episódio que aqui analisamos diz respeito à adaptação de uma tarefa para o objetivo “ler e escrever números na representação decimal e relacionar diferentes representações”. Para este objetivo, as professoras selecionaram uma tarefa dos materiais de apoio ao professor de um manual escolar (Figura 2) (domínio das práticas – processo de materialização com base no domínio pessoal) e, de seguida, discutiram vários aspetos a alterar, chegando a uma tarefa com características bastante diferentes da original (Figura 3).

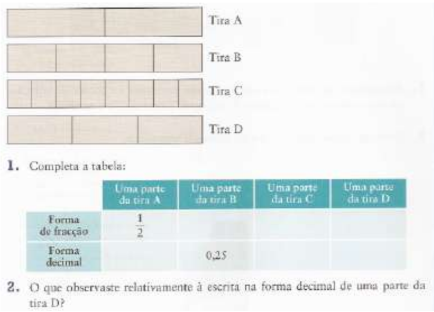

Dobras e mais dobras

Tira A
Tira B
Tira C
Tira D

- Quatro tiras de papel geometricamente iguais.
- Lápis de cor;
- Cola.

Dobra a tira A em duas partes iguais, a tira B em quatro partes iguais, a tira C em oito partes iguais e a tira D em três partes iguais.

Agora, cola as tiras no teu caderno e sublinha, usando o teu lápis, as partes obtidas por dobragem.


Tira A
Tira B
Tira C
Tira D

1. Completa a tabela:

	Uma parte da tira A	Uma parte da tira B	Uma parte da tira C	Uma parte da tira D
Forma de fracção	$\frac{1}{2}$			
Forma decimal		0,25		

2. O que observaste relativamente à escrita na forma decimal de uma parte da tira D?

Figura 2. Tarefa selecionada pelas professoras (Neves & Faria, 2010, p. 123).

Tânia começou por propor a tarefa às colegas, indicando desde logo que se trata de uma tarefa complexa para o diagnóstico, sendo necessário simplificá-la:

> Eu vi este, não sei. É um bocadinho elaborado… Vejam lá este das dobras… Por causa das tiras de papel! . . . Não tem de se aproveitar tudo. Podemos fazer… A primeira já está, não é? “1/2” eles depois têm de representar na forma [decimal]… 1, 2, 3, 4, portanto, 0,25. Com certeza eles vão ter de… Identificar que está dividido em quatro partes, não é? E portanto corresponde a “um quarto”.

Tendo por base o conhecimento (domínio pessoal) dos alunos e dos documentos curriculares mas também das tarefas, Tânia destaca o facto de a tarefa ter “as tiras de papel”, valorizando assim as representações pictóricas, e sugere a possibilidade de alterações começando por analisar as tiras A e B (Figura 4) que lhe parecem acessíveis aos alunos.

Implicitamente, as professoras assumiram que a componente de manipulação dos materiais (tiras de papel com existência física) não era viável para o diagnóstico, decidindo trabalhar com a sua representação pictórica. Discutiram principalmente em quantas partes devem ser divididas as tiras na tarefa a propor aos alunos (Figura 3):

Tânia: É mais fácil a dividir [a tira C] por 10.

Inês: Então passamos isto para 10.

Marisa: Podemos escolher “um em dez”, “um em quatro”.

Maria: “Um em dois”.

Marisa: 2, 4 e 10?

Maria: O três também vamos ter de o tirar daqui, porque depois isto dá dízimas infinitas e ainda é pior.

. . .

Luísa: “1/5” não é assim muito óbvio.

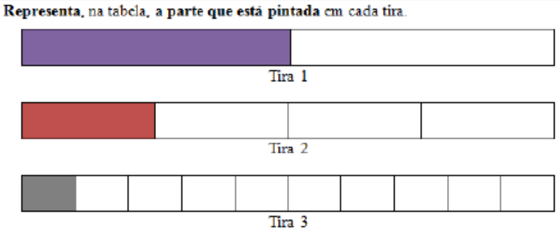
Francisca: Não. Não.

. . .

Maria: “1/4” dá!

As professoras: “1/4”; “1/2”; e “1/10”.

Representa, na tabela, **a parte que está pintada** em cada tira.



	Tira 1	Tira 2	Tira 3
Fração			
Número decimal			
Percentagem			

Figura 3. Tarefa proposta para o diagnóstico.

Nesta discussão, as professoras alteraram o número de partes da tira C (obtendo a tira 3) e tentaram encontrar um número de partes para a tira D que não envolvesse dízimas infinitas e que se enquadrasse nos conhecimentos que esperavam que os alunos tivessem sobre frações unitárias em várias representações, obtendo a tira 2 (materialização proveniente do domínio pessoal). Dada a dificuldade em encontrar uma quarta fração unitária, optaram por apresentar apenas três tiras e excluíram a questão 2, propondo apenas o preenchimento da tabela. Contudo, atendendo a que um dos objetivos que definiram para o diagnóstico envolvia várias representações dos números racionais, decidiram ainda acrescentar uma linha à tabela para que a questão envolvesse não apenas a representação em fração e em numeral decimal, mas também em percentagem (Figura 3) (processo de materialização proveniente do domínio pessoal).

As alterações feitas pelas professoras têm por base processos de reflexão provenientes do domínio externo – análise dos documentos curriculares – e, por outro lado, processos de materialização provenientes do domínio pessoal – conhecimento sobre os alunos e sobre o ensino-aprendizagem do tópico. Este episódio decorreu no domínio das práticas e tem por base processos de reflexão provenientes do domínio externo (Figura 4) – análise de documentos curriculares – e também processos de materialização provenientes do domínio pessoal – conhecimento sobre os alunos e sobre o ensino-aprendizagem do tópico (conhecimento dos alunos e da prática letiva).

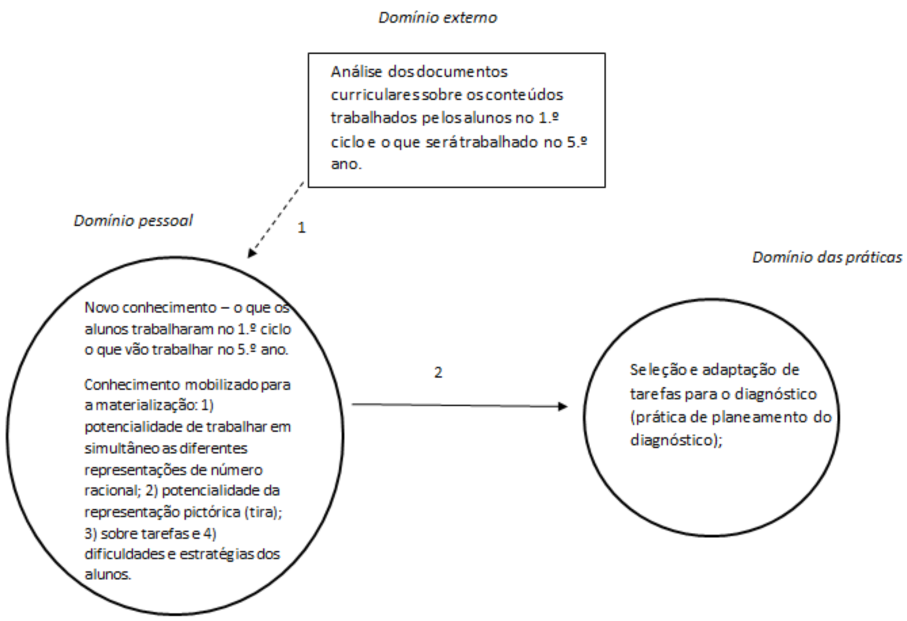


Figura 4. Dinâmica de aprendizagem das professoras no episódio 2 da elaboração do diagnóstico.

Análise dos resultados dos alunos

Neste episódio debruçamo-nos sobre a discussão dos resultados do diagnóstico realizado pelas professoras. Um dos objetivos da sessão 4 era analisar os resultados do diagnóstico elaborado na sessão anterior e aplicado pelas professoras nas suas turmas. Esta análise ocorreu por processos de reflexão sobre os resultados dos alunos (Seta 1 na Figura 5 – domínio das consequências). Procurando contrariar a tendência de muitos professores para se centrarem, principalmente, nas dificuldades dos alunos, Marisa começou por pedir às professoras que indicassem situações em que elas tinham ficado positivamente surpreendidas com o desempenho dos alunos. Apesar do desafio, as professoras começaram por manifestar forte tendência para valorizar mais as dificuldades do que os aspetos positivos do trabalho dos alunos:

> Em relação ao 5.º C os meninos pintaram com facilidade as frações, mas a representação em fração muitas vezes não a fizeram. Só leem metade, pronto. Depois, nesta da ligação [questão 3], onde eles tiveram mais dificuldade foi exatamente no 1/4 e no 1/8. Foi muito difícil para eles. (Francisca)

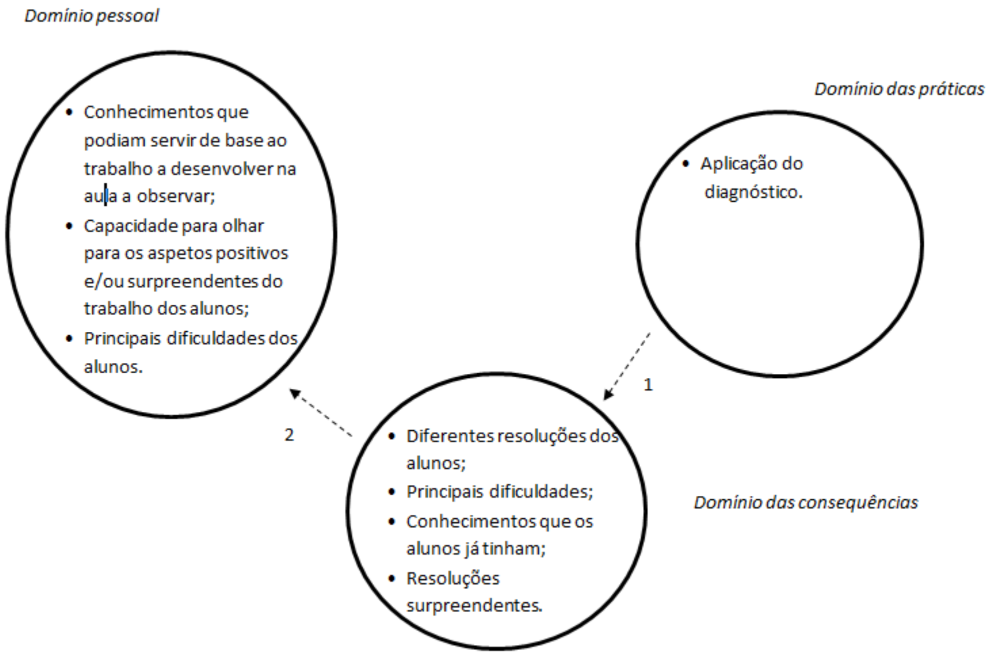


Figura 5. Aprendizagens das professoras na análise dos resultados dos alunos.

Na sua primeira intervenção, Francisca referiu que os seus alunos conseguiram pintar com facilidade a metade e a terça parte das figuras apresentadas para logo a seguir começar a enunciar um conjunto de dificuldades. No seu papel de condutora da sessão, Marisa sentiu necessidade de intervir no sentido de reorientar a discussão para os aspetos positivos (as "surpresas"):

> Marisa: Se calhar fazíamos as surpresas primeiro e depois as dificuldades.
>
> Francisca: Surpresas, surpresa, foi no exercício 4, eles conseguiram facilmente chegar a 1/4 do chocolate. Eu achei giríssimo, porque já sabem fazer a conta. Não estava à espera. [4/4 – 3/4 = 1/4]

Depois desta nova chamada de atenção, Francisca fez um esforço para referir os aspetos positivos do trabalho dos alunos:

> As minhas surpresas foram realmente aqui no grupo 4, eu achei isto fantástico. Esta representação de fração, numeral e percentagem, que eu achava que a maior parte deles não ia conseguir fazer, e a maior parte conseguiu fazer. Tanto numa turma como noutra. (Francisca)

De uma maneira geral, o discurso das professoras começou por se centrar mais nas dificuldades dos alunos do que naquilo que estes conseguiam fazer. Neste segmento verificamos a dificuldade que Francisca sentiu em destacar os aspetos positivos do trabalho dos alunos. Contudo, apesar desta dificuldade inicial, as professoras conseguiram também destacar elementos interessantes do trabalho dos alunos. Tânia foi a última professora a apresentar as surpresas que teve no desempenho dos alunos. Teve mais facilidade em centrar-se apenas nestes aspetos e conseguiu ainda fazer uma interessante reflexão sobre as alterações na altura introduzidas pelo programa anterior (PMEB, 2007):

> Tânia: E é o facto de eles já representarem e as frações equivalentes.
>
> Marisa: Representarem o quê?
>
> Tânia: Por exemplo, antigamente [antes do programa de 2007], quando eles chegavam aqui nós tínhamos de começar por toda esta fase, porque eles sabiam o que era 1/4, 1/2, mas não passavam daí. Não, eles agora já sabem o que é 3/8, 3/5, portanto...
>
> Marisa: Nas questões, na 1 e na 2, eles representam com frações equivalentes?
>
> Tânia: Sim, sim.
>
> Inês: Portanto, já vêm mais desenvolvidos.
>
> Tânia: Portanto, esta primeira fase eu acho que temos de passar isto à frente porque temos de dar como adquirido, porque isto vê-se que já foi trabalhado. Tenho muitos… por exemplo, aqui: escrevem a fração mas escrevem 1/2 em todas; então resolveram em vez de pôr os 4/8, 3/6, põem 1/2 em todas. Mas pronto está correta, é a metade, é a fração equivalente. Hum... E foram assim as grandes surpresas.

Com esta intervenção, Tânia reflete sobre as alterações que devem ser feitas na prática dos professores em consequência das alterações introduzidas pelo *Programa de Matemática do Ensino Básico* (2007). Ao contrário do que acontecia anteriormente, estes alunos já tinham trabalhado frações equivalentes no 1.º ciclo e as professoras ficaram surpreendidas com o conhecimento que eles já tinham sobre esse tema. Inclusivamente, Tânia começou a fazer sugestões para o trabalho a desenvolver na aula de investigação, dizendo que se podia dar por adquirido que os alunos já conheciam frações equivalentes.

A análise dos resultados do diagnóstico proporcionou às professoras um momento de reflexão (seta 1 – Figura 5) sobre os resultados dos alunos numa perspetiva diferente, a de olhar para aquilo que estes conseguem fazer, e que é surpreendente, ao invés de olhar apenas para os seus erros e dificuldades. Por sua vez, a sistematização desses resultados através de um novo processo de reflexão (seta 2) proporcionou conhecimento novo, não apenas sobre as dificuldades dos alunos mas também sobre aquilo que estes já sabiam e que podia ser considerado na realização das tarefas para a aula de investigação.

Conclusão

Para elaborarem o diagnóstico, as professoras participantes compararam as orientações curriculares anteriores e atuais, o que as levou a desenvolver conhecimento do currículo e da prática letiva sobre o que se deve esperar dos alunos e como podem mobilizar da melhor forma esse conhecimento para promover as aprendizagens preconizadas pelo programa.

A elaboração e análise do diagnóstico foram fortemente influenciadas por processos de reflexão que provocaram alterações no conhecimento didático das professoras. A seleção e adaptação das tarefas foram mediadas por um processo de materialização onde as professoras usaram tanto o seu conhecimento de práticas anteriores como os conhecimentos recentemente desenvolvidos (conhecimento sobre o currículo). De grande relevância para a aprendizagem das professoras parecem ter sido os processos de reflexão desencadeados pela análise dos resultados dos alunos, que lhes deu oportunidade para desenvolver o seu conhecimento sobre os conhecimentos e as dificuldades dos alunos. É ainda de destacar que a análise das resoluções dos alunos dando atenção aos aspetos positivos e muitas vezes surpreendentes dessas resoluções parece não ser uma prática natural para as professoras. Contudo, após algum esforço e insistência por parte da equipa do IE estas passaram a olhar para as resoluções dos alunos de uma forma bastante positiva, não vendo apenas erros e dificuldades, tal como descrito também no estudo desenvolvido por Bruce, Flynn e Bennett (2016).

O modelo apresentado por Clarke e Holligsworth (2002), ajuda-nos a verificar que o estudo de aula aqui apresentado, que valoriza o diagnóstico do conhecimento prévio dos alunos e o estudo dos documentos curriculares, foi promotor de dinâmicas de trabalho e aprendizagem entre as professoras fortemente marcadas por processos de reflexão e materialização que deram origem a mudanças no seu conhecimento didático. Em particular, verificamos que a dinâmica do estudo de aula tem capacidade para promover mudanças no conhecimento do currículo das professoras, através do estudo dos documentos curriculares e dos materiais de ensino, bem como no conhecimento dos alunos e dos seus processos de aprendizagem, através da análise de resoluções dos alunos, e ainda no conhecimento da prática letiva, através das ações de planeamento e preparação do diagnóstico dos conhecimentos dos alunos e na conceção das respetivas tarefas.

Agradecimento

Trabalho financiado por fundos nacionais através da FCT–Fundação para a Ciência e Tecnologia por meio de uma bolsa atribuída a Marisa Quaresma (SFRH/BD/97702/2013).

Referências bibliográficas

Baptista, M., Ponte, J. P., Costa, E., Velez, I., & Belchior, M. (2012). Lesson study na formação de professores do 1.º ciclo do ensino básico. In *Actas do XXIII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 11-30). Coimbra: APM.

Bruce, C., Flynn, T, & Bennett, S. (2016). A focus on exploratory tasks in lesson study: The Canadian "Math for Young Children" project. *ZDM Mathematics Education*, *48*(4), 541-554.

Clarke, D. J., & Hollingsworth, H. (2002). Elaborating a model of teacher professional growth. *Teaching and Teacher Education*, *18*(8), 947-967.

Cockcroft, W. (1982). *Mathematics counts: Report of the Committee of Inquiry into the Teaching of Mathematics in Schools under the chairmanship of W. H. Cockcroft.* London: HMSO.

Day, C. (2001). *Desenvolvimento profissional de professores: Os desafios da aprendizagem permanente.* Porto: Porto Editora.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 119-161). New York, NY: MacMillan.

Fernández, C., Cannon, J., & Chokshi, S. (2003). A US-Japan lesson study collaboration reveals critical lenses for examining practice. *Teaching and Teacher Education, 19*, 171-185.

Fujii, T. (2013). Adapting and implementing lesson study: Focusing on designing task in lesson study. *Proceedings of 6th East Asia Regional Conference on Mathematics Education* (pp. 163-172), 17-22 March 2013, Phuket.

Goetz, J. P., & LeCompte, M. D. (1984). *Ethnography and qualitative design in educational research*. San Diego, CA: Academic Press.

Lewis, C. (2016). How does lesson study improve mathematics instruction? *ZDM Mathematics Education*, 48(*4*), 571-580.

Lewis, C., & Hurd, J. (2011). *Lesson study step by step: How teacher learning communities improve instruction*. Portsmouth, NH: Heinemann.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC.

MEC (2013). *Programa e metas curriculares Matemática: Ensino básico.* Lisboa: Direção Geral de Educação.

NCTM (1980). *An agenda for action: Recommendations for school mathematics for the 1980s*. Reston: NCTM.

NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Neves, M., & Faria, L. (2010). *Matemática*. Porto Editora.

Perry, R., & Lewis, C. (2009). What is successful adaptation of lesson study in the US? *Journal Educational Change, 10*, 365-391.

Ponte, J. P. (1998). Da formação ao desenvolvimento profissional. In *Actas do ProfMat98* (pp. 27-44). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. In N. Planas (ed.), *Educación matematica: Teoría, critica y práctica*. Barcelona: Graó.

Ponte, J. P., Baptista, M., Velez, I., & Costa, E. (2012). Aprendizagens profissionais dos professores de Matemática através dos estudos de aula. *Pesquisas em Formação de Professores na Educação Matemática, 5,* 7-24.

Quaresma, M., & Ponte, J. P. (2015). Comunicação, tarefas e processos de raciocínio: Aprendizagens profissionais proporcionadas por um estudo de aula. *Zetetiké, 23*(44), 297-310.

Shimizu, Y. (2014). Lesson study in Mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp.358-360): Dordrecht: Springer.

O HUMOR NAS PRÁTICAS LETIVAS DOS PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA

Luís Menezes[1], *Floriano Viseu*[2], *António Ribeiro*[3], *Pablo Flores*[4]
[1] Escola Superior de Educação de Viseu e CI&DETS, menezes@esev.ipv.pt
[2] Universidade do Minho e CIEd, fviseu@ie.uminho.pt
[3] Escola Superior de Educação de Viseu e CI&DETS, ribeiro@esev.ipv.pt
[4] Universidade de Granada, pflores@ugr.es

Resumo. *Este texto relata uma investigação realizada com o objetivo de conhecer como os professores portugueses, que ensinam Matemática, desde o 1.º ciclo do ensino básico até ao ensino superior, recorrem ao humor nas suas aulas e por que razão o fazem. Para isso, aplicou-se um questionário a professores de Portugal continental, tendo-se obtido 601 respostas. Os dados recolhidos foram submetidos a análise quantitativa e qualitativa. Os resultados permitem concluir que os professores consideram o ensino da Matemática compatível com o uso do humor. Consistentemente com isso, os professores dizem utilizar regularmente o humor para ensinar Matemática, com a função primordial de criar um clima facilitador da aprendizagem (função afetiva), mas também com o objetivo de ensinar temas matemáticos (função cognitiva).*

Abstract. *This paper reports an investigation to know how Portuguese teachers, who teach mathematics, from primary to higher education, use humor in their classes and why they do it. For this, we applied a questionnaire to teachers of continental Portugal, having obtained 601 responses. The collected data were submitted to quantitative and qualitative analysis. The results show that teachers consider teaching mathematics compatible with the use of humor. Consistent with this, teachers say they regularly use humor to teach mathematics, with the primary goal of creating a climate that facilitates learning (affective function), but also for the purpose of teaching mathematical topics (cognitive function).*

Palavras-chave: *Práticas letivas dos professores; ensino da Matemática; humor instrucional.*

Introdução

O humor é um fenómeno social complexo que está presente nas interações comunicativas, na generalidade das culturas (Martins, 2015). O humor anda habitualmente associado ao riso, mas não se confunde com ele (Adão, 2008; Martin, 2007). O riso é uma reação física do corpo humano a situações diversas, muitas das quais nada têm a ver com o humor. O humor corresponde a um ato cognitivo intencional, numa situação comunicativa, com o objetivo de fazer rir os outros (Adão, 2008; Flores & Moreno, 2011; Martin, 2007; Martins, 2015).

O estudo dos mecanismos do humor tem sido realizado desde a antiguidade grega até à atualidade, mobilizando autores de diversos campos científicos (Martins, 2015). Também no campo da Educação, diversos autores têm estudado a utilização do humor no ato educativo, procurando compreender como ele acontece na sala de aula, como é utilizado pelo professor e que impacto tem nas aprendizagens dos alunos (Banas, Dunbar, Rodriguez & Liu, 2011; Guitart, 2012; Guitart & Flores, 2003¸Martin, 2007). Alguns destes trabalhos focam aulas de Matemática e o professor de Matemática, relatando experiências de recurso ao humor (Guitart, 2012; Shmakov & Hannula, 2010). Em Portugal, o conhecimento sobre o que se passa nas salas de aula de Matemática, nos diversos níveis de ensino, em relação à utilização do humor para ensinar, é escasso. É neste enquadramento que surge o projeto HUMAT – *Humor in Mathematics Teaching*, envolvendo instituições de Portugal, Espanha e Argentina, em que um dos seus objetivos é conhecer o que pensam os professores que ensinam Matemática sobre o humor e o seu valor educativo e como o utilizam nas suas salas de aula. Neste artigo, circunscrevemo-nos, sobretudo, à forma como o humor é usado pelos professores portugueses nas aulas de Matemática e às razões para o fazerem. Nestes termos, o nosso objetivo é conhecer como os professores portugueses que ensinam Matemática, desde o 1.º ciclo do ensino básico (CEB) até ao ensino superior, recorrem ao humor nas suas aulas e por que razão o fazem.

Estudo do humor

O humor é algo que faz parte da experiência humana, tendo uma forte natureza comunicativa, jogando abundantemente com a ambiguidade, a polissemia e o ridículo, conjugando cognição e emoção, com o objetivo de levar os outros a rir (Martin, 2007; Meyer, 2015). Banas *et al* (2011) referem que "o humor envolve a comunicação de múltiplos significados incongruentes que são divertidos de alguma maneira" (p. 117). Apesar desta ligação do humor ao rir, é importante ter em conta que se trata de conceitos diferentes. O rir é um ato fisiológico do ser humano que pode decorrer de diferentes motivações, muitas das quais nada têm a ver com o humor, como, por exemplo, fazer cócegas a alguém. Apesar de o humor procurar esse comportamento, pode não o alcançar por diferentes razões, a primeira das quais é por não ser compreendido, mas também por não ser apreciado.

O estudo do humor tem uma longa tradição, tendo as suas origens nos autores clássicos gregos como Platão e Aristóteles, que depois foi continuado pelos autores latinos e se prolongou até à atualidade, a partir de diversas disciplinas científicas como a Psicologia, a Linguística, a Sociologia, a História e também a Educação (Banas *et al*, 2011; Martins, 2015; Martin, 2007).

Existem várias teorias que procuram explicar o funcionamento do humor. Destas, destacamos as teorias da superioridade, da incongruência e da libertação (Adão, 2008; Banas *et al*, 2011; Martins, 2015; Meyer, 2015). Para a teoria da superioridade, o humor resulta do sentido de superioridade do sujeito em relação a algo ou alguém (Adão, 2008). Este mecanismo, muito usado no humor político, é uma característica do humor britânico, traduzindo-se na ridicularização de alguns comportamentos das pessoas (Martins, 2015). A teoria da incongruência, que se insere nas teorias cognitivistas, ao contrário da teoria da superioridade que se enquadra nas teorias sociológicas (Martins, 2015), descreve o humor como um processo em duas fases, onde a incongruência percebida entre elas deve, depois da surpresa inicial, ser reconhecida, interpretada e assumida como engraçada (Banas *et al*, 2011).

A teoria da libertação, enquadrada nas teorias psicológicas, atribui ao humor o papel de alívio de uma determinada situação de tensão e, o riso, como "forma de escape que permite ao indivíduo sentir prazer ao mesmo tempo que se liberta de uma tensão acumulada" (Adão, 2008, p.27).

O humor pode cumprir diversas funções. A par da função de distrair e dispor bem as pessoas, em situações de lazer (como o são, por exemplo, programas televisivos espetáculos humorísticos, ou livros de humor), o humor pode cumprir funções importantes em contextos de trabalho. Isso leva alguns autores a falar da "seriedade do humor" (Martins, 2015) ou do "lado sério do humor" (Adão, 2008). Nestes contextos, como as empresas e a escola, o humor pode ser usado com as funções de criar um clima agradável, de gerir conflitos, de motivar e de despertar a criatividade (Adão, 2008; Banas *et al*, 2011; Guitart, 2012; Martins, 2015; Meyer, 2015).

Utilização educativa do humor

A investigação sobre a utilização educativa do humor não tem sido forte nos últimos anos, registando-se um pico nas décadas de 80 e 90 do século XX (Banas *et al*, 2011; Martin, 2007). Martin (2007) salienta que grande parte das investigações sobre o recurso ao humor com fins educativos para além de ter já alguns anos, não foi replicada nos anos mais recentes. Nestes trabalhos é possível identificar duas linhas predominantes no estudo do humor no campo educativo, uma que se centra na sua função *afetiva* e outra na sua função *cognitiva* (Banas *et al*, 2011; Guitart, 2012).

Na primeira linha – função afetiva – situam-se as investigações que relacionam as emoções positivas e prazerosas que habitualmente estão associadas ao humor com a melhoria das aprendizagens dos alunos. Esta linha de trabalho, que tem sido explorada em diversas disciplinas escolares, encontra na disciplina de Matemática um campo especialmente visado em virtude da conjugação frequente de emoções contrárias nos alunos: por um lado, muitos alunos expressam emoções pouco favoráveis à Matemática e à sua aprendizagem e, por outro lado, o humor suscita na generalidade dos alunos sentimentos positivos, motivadores para a aprendizagem da disciplina (Guitart, 2012; Flores & Moreno, 2011).

Na segunda linha – função cognitiva – encontram-se os estudos que, não esquecendo a dimensão afetiva, colocam o seu foco no desenvolvimento cognitivo que o humor pode proporcionar, ou seja, o humor torna-se mais do que um simples adjuvante à aprendizagem, associado à comunicação humorística do professor, torna-se no próprio foco da aprendizagem, intimamente associado aos conteúdos que estão a ser aprendidos (Guitart, 2012).

Opplinger (2003) olha para as investigações sobre o uso educativo do humor e procura identificar nelas dimensões específicas. O autor encontra na investigação cinco dimensões fundamentais: (a) frequência com que os professores usam o humor em sala de aula; (b) efeitos que o uso do humor provoca no clima da aula; (c) impacto do humor na capacidade de aprendizagem e memorização; (d) efeitos na ansiedade e rendimento escolar da inclusão do humor em exames escolares; e (e) papel do humor nos manuais escolares.

Procurando sistematizar resultados da investigação realizada nas últimas quatro décadas sobre o impacto do humor na aprendizagem, Martin (2007) e Banas *et al* (2011) assinalam que o humor tende a ser valorizado como uma forma de comunicação interpessoal, ou seja, como uma componente do discurso do professor que apoia o ensino: “O uso do humor é um comportamento predominante na comunicação em ambientes pedagógicos e serve para diferentes propósitos” (Banas *et al*, 2011, p. 137).

Martin (2007) assinala que o humor pode ser usado pelos professores para ilustrar conteúdos, para tornar o ambiente de aprendizagem mais agradável e interessante para os alunos e para facilitar a memorização de informação. Este autor refere também que os estudos mostram que o professor deve ajustar o humor aos alunos a quem é dirigido, usando-o de forma moderada, construtiva e focada nos conceitos (Martin, 2007). A investigação apontou igualmente para bons resultados no desempenho dos alunos resultante da utilização do humor em provas de avaliação. A investigação sobre o uso do humor em manuais escolares indica que este pode ser útil para melhorar a atenção dos alunos durante o estudo, mas não existem evidências de que melhore a compreensão dos conceitos (Martin, 2007).

A maioria dos estudos revistos por Banas *et al* (2011) e Martin (2007) pautaram-se por focarem o humor presente no discurso oral do professor (um género de comunicação marcado pelo estilo individual do professor) e por adotarem metodologias quantitativas, que perdem a riqueza das interações que ocorrem na sala de aula. Banas *et al* (2011) consideram que este segundo aspeto limita a relevância destes estudos, sugerindo a realização de estudos naturalísticos centrados na sala de aula.

Guitart (2012) estuda o uso do humor no ensino da estatística num curso de engenharia. Para isso, realiza uma investigação-ação analisando o impacto na aprendizagem da Estatística em resultado da inclusão de material humorístico no seu ensino. O estudo conclui por aprendizagens significativas dos conceitos estatísticos graças à evocação das situações humorísticas.

Metodologia

Neste artigo, procuramos dar a conhecer como é que os professores que ensinam Matemática, desde o 1.º CEB até ao ensino superior (estes últimos, ligados a cursos de formação de professores), recorrem ao humor nas suas aulas e por que razão o fazem. Para isso, concebemos um questionário e, mais tarde, procederemos também a observação de aulas e realização de entrevistas a professores. O questionário é constituído por três partes: a) Humor e sentido de humor (3 questões); b) Valor educativo do humor no ensino-aprendizagem da Matemática (5 questões); e c) O uso do humor no ensino da Matemática (3 questões). As questões são de resposta fechada (com escala) e de resposta aberta (3 questões). Após a elaboração do questionário, ele foi apresentado a dois especialistas para validação. Os comentários ao questionário serviram para o melhorar. Depois disso, ele foi respondido e comentado por dois professores de níveis de ensino diferentes, o que originou nova reformulação.

O questionário foi aplicado via *online*, tendo sido enviado para agrupamentos de escolas de Portugal continental, sendo pedido que fosse distribuído aos professores que ensinam Matemática desde o 1.º CEB até ao ensino secundário. Foi ainda enviado a professores de Matemática e sua Didática que ensinam em instituições ligadas à formação de professores (escolas superiores de educação e universidades).

Os dados quantitativos foram alvo de tratamento estatístico (estatística descritiva) e os dados qualitativos foram submetidos a análise de conteúdo (recorrendo a categorias de análise explicitadas à frente). Neste artigo, damos conta da análise das respostas a algumas perguntas das duas últimas partes do questionário relativas, respetivamente, ao valor educativo do humor no ensino-aprendizagem da Matemática e ao uso do humor no ensino da Matemática.

Apresentação e análise de dados

Responderam ao questionário 601[1]professores distribuídos por todos os distritos de Portugal continental, merecendo destaque os distritos do Porto (14%), Lisboa (13%), Viseu (12%) e Aveiro (10%). A amostra é constituída, maioritariamente, por pessoas do género feminino (82%), variando as idades entre 24 e 66 anos, com uma média de 47,3 anos. O tempo médio de serviço docente dos participantes é de, aproximadamente, 23 anos, variando entre 1 e 43 anos. Cerca de 73% tem entre 16 e 25 anos de serviço. Os níveis de ensino mais representados são o 1.º CEB (37%) logo seguido do 2.º CEB (20%) e o 3.º CEB /Ensino secundário (15%).
No que diz respeito ao grau académico, verifica-se que uma maioria destacada é detentora do grau de licenciado (73%), sendo de salientar a percentagem de docentes com o grau de mestre (21%). Os restantes (6%) têm o grau de doutor. No que diz respeito à área de formação, verifica-se grande dispersão. No entanto, acima de 10% encontram-se as áreas de "Ensino de Matemática e Ciências da Natureza" (19%), "Matemática" (17%), "1.º CEB" (16%) e "Ensino da Matemática" (13%).

Humor como recurso para ensinar Matemática. Com uma maioria expressiva (97%), os professores inquiridos consideraram que o ensino da Matemática é compatível com recurso ao humor. Pedia-se, neste caso, que utilizando uma escala de 1 (concordo pouco)

[1] Para efeitos de caracterização do ponto de vista das idades e do tempo de serviço, apenas foram consideradas 588 respostas dado que alguns professores não indicaram a idade e/ou tempo de serviço e um deles, talvez por lapso na digitação, indicou um valor absurdo.

a 4 (concordo muito) assinalassem o seu nível de concordância relativamente a afirmações que lhes eram apresentadas. A tabela 1 resume as respostas obtidas:

Tabela 1. Razões que levam os professores a considerar que o ensino da Matemática é compatível com o uso do humor.

	1		2		3		4		Total
	ni	%	ni	%	ni	%	ni	%	
As aulas de Matemática com humor são mais agradáveis	1	0,2%	20	3,5%	261	45,5%	292	50,9%	574
O humor estimula o pensamento matemático	6	1,0%	51	8,8%	291	50,4%	229	39,7%	577
O humor facilita a comunicação matemática	3	0,5%	40	7,0%	291	50,8%	239	41,7%	573
O humor torna a Matemática mais atrativa	4	0,7%	26	4,5%	226	39,5%	316	55,2%	572
O humor facilita a relação pedagógica entre o professor e os alunos	1	0,2%	16	2,8%	183	32,0%	375	65,6%	575

Os elevados níveis de concordância com todas as afirmações apresentadas revelam que os professores reconhecem que o humor na sala de aula pode contribuir, pela relação pedagógica que se pode estabelecer entre os professores e os alunos, para uma visão mais atrativa da Matemática e onde se privilegia o pensamento matemático. Para além destas, os professores apresentam outras razões como o desenvolvimento da memória – "O humor cria pontos de referência que podem estimular a memória dos alunos", o modo como encaram a escola ou disciplina – "O humor ajuda algumas crianças a serem um pouco mais felizes na escola"; "Ajuda a "ver" a Matemática duma forma menos preconceituosa".

Para os professores que consideraram que o ensino da Matemática não é compatível com recurso ao humor, foram apresentadas, também, algumas afirmações que tinham como objetivo identificar alguns dos motivos que poderiam justificar tal posição. Na tabela 2 apresentam-se os resultados obtidos:

Tabela 2. Razões que levam os professores a considerar que o ensino da Matemática não é compatível com o uso do humor.

	1		2		3		4		Total
	ni	%	ni	%	ni	%	ni	%	
A Matemática é demasiado séria para se recorrer ao humor	1	5,6%	7	38,9%	9	50,0%	1	5,6%	18
O humor na aula pode levar à perda do controlo da turma	0	0,0%	5	33,3%	5	33,3%	5	33,3%	15
A Matemática é uma ciência exata onde não pode haver humor	3	17,6%	8	47,1%	5	29,4%	1	5,9%	17
Nem todos os professores têm sentido de humor para o usar	1	6,3%	4	25,0%	5	31,3%	6	37,5%	16
Os currículos de Matemática não contemplam o uso do humor	0	0,0%	2	12,5%	4	25,0%	11	68,8%	17

Verifica-se que, apesar de alguns professores identificarem algumas razões que os levam a considerar que o ensino da Matemática não é compatível com o uso do humor, o seu nível de concordância com cada uma das afirmações não é, de uma forma geral, muito elevado. A razão com maior concordância é "Os currículos de Matemática não contemplam o uso do humor" o que permite supor que a verdadeira razão não será a Matemática em si, mas, pelo contrário, os currículos com que os professores se debatem.

O humor nas práticas dos professores de Matemática. Os professores foram questionados sobre a utilização do humor nas práticas de sala de aula de Matemática em duas situações: (1) Recorda-se de ter tido algum professor de Matemática que usasse o humor na sala de aula? (2) Utiliza, algumas vezes, nas suas aulas, o humor para ensinar Matemática? Enquanto que cerca de 34% se recorda de algum dos seus professores de Matemática ter recorrido ao humor, 89,5% dos professores afirma que utiliza, algumas vezes, nas suas aulas, o humor para ensinar Matemática. A tabela 3 resume as finalidades que, no entender destes professores, justificavam a utilização do humor pelos seus professores de Matemática:

Tabela 3. Finalidades da utilização do humor pelos seus professores de Matemática.

	1		2		3		4		Total
	ni	%	ni	%	ni	%	ni	%	
Criar bom ambiente	2	1,0%	8	3,9%	90	44,3%	103	50,7%	203
Motivar	3	1,4%	10	4,6%	97	44,3%	109	49,8%	219
Fazer pensar	3	1,5%	29	14,3%	97	47,8%	74	36,5%	203
Ensinar conceitos	12	5,9%	45	22,2%	98	48,3%	48	23,6%	203

A análise da tabela 3 revela que as finalidades "Criar bom ambiente", "Motivar" e "Fazer pensar" recolhem um nível de concordância mais elevado do que "Ensinar conceitos".

Desafiados a relatar como ocorria o uso do humor pelos seus professores de Matemática, os professores respondem de forma extensiva. Esses relatos foram analisados de acordo com cinco categorias: (i) Tipo de humor *(mecanismo utilizado)*; (ii) Conteúdo matemático do humor *(temas visados)*; (iii) Objetivo do humor (*função instrutiva*); (iv) Desafio ao aluno *(ação a desenvolver)*; (v) Forma de apresentação (*suporte discursivo*).

As situações relatadas pelos professores respondentes não permitem, repetidas vezes, identificar o tipo de humor utilizado pelos seus professores de Matemática e nem sempre explicitam os temas e processos matemáticos visados pelo humor. Identificam como funções instrutivas do humor as de proporcionar um ambiente agradável e motivar os alunos a aprender. As situações de humor eram apresentadas pelos seus professores, sobretudo, oralmente e através de histórias/anedotas/cenas caricatas, em que o aluno se limitava a observar em detrimento de ser desafiado a discutir situações de sala de aula, resolver tarefas ou de pensar. A tabela 4 regista as frequências de cada uma das ocorrências:

Tabela 4. Uso do humor pelos seus professores de Matemática.

Categorias	Indicadores	Frequência
Tipo de humor	*Utiliza incoerência*	–
	Utiliza o ridículo	19
	Não definido	94
Conteúdo matemático do humor	*Temas e subtemas*	
	▪ *Números e operações*	2
	▪ *Geometria e Medida*	6
	▪ *Álgebra*	1
	▪ *Probabilidades*	–
	▪ *Estatística*	3
	▪ *Outros*	4
	Processos matemáticos	
	▪ *Raciocínio (abstração, generalização, prova...)*	–
	▪ *Resolução de problemas*	4
Objetivo do humor	*Cria um clima agradável*	25
	Gera conflitos cognitivos	3
	Desperta a criatividade	–
	Motivar os alunos	11
Desafio ao aluno	*Observa*	48
	Discute	–
	Resolve uma tarefa (a partir da situação)	5
	Pensa	3
Forma de apresentação	*Oral*	51
	Texto	3
	Gráfico	–
	Misto (BD, Cartoon)	6
	História/anedotas/cenas caricatas	16

Tipo de humor. Relativamente ao tipo de humor utilizado, as situações de ridículo surgem na exploração dos nomes dos alunos – "No 2.º ciclo a minha professora ria constantemente e todas as situações de trabalho envolviam humor (…) problemas com alcunhas de alunos da turma" –, nos trabalhos de casa propostos aos alunos – "O professor quando enviava TPC nunca lhe atribuía esse nome mas sim aqui vão uns exercícios para o serão em família" –, e nas situações vivenciadas com os alunos – "Durante as aulas contava alguns episódios com humor de situações já vividas por ele e alunos dele ou com outras pessoas relacionadas com as situações do momento". Quanto às situações apresentadas que não definem o tipo de humor, são exemplos as seguintes afirmações: "O professor criava situações encenadas em que os dispositivos eletrónicos de um circuito se tornavam personagens de uma história"; "exemplos do dia-a-dia com humor"; "as aulas eram mais alegres e com boa disposição".

Conteúdo matemático do humor. Nas situações apresentadas sobre o humor expresso pelos seus professores, a maior parte não especifica um conteúdo matemático. Entre as que contrariam esta tendência, há quem faça referência a tópicos de Números e Operações – "as crianças, para dividirem determinada quantidade de rebuçados por 23 alunos, bastava-lhes fazerem a tabuada dos 23 e, aí, encontrarem a resposta"; "relação interpessoal entre algarismos" –, de Geometria e Medida – "o perímetro do círculo a partir da medida de lâmpadas redondas colocadas no teto. Como lá chegar para medir?"; "ensinou o Teorema de Pitágoras com uma rima engraçada"; "inventava histórias com a senhora semirreta e o amigo segmento", de Álgebra – "com humor tudo é mais fácil, até mesmo dar a definição de derivada", de Estatística – "uma notícia num jornal sobre estatística com interpretação errada". Outros conteúdos matemáticos, ligados à história da matemática, são referidos, como ilustram as seguintes afirmações: "histórias engraçadas acerca dos matemáticos", "relações entre o conhecimento matemático, a história da sua construção", "situações sobre factos históricos". Ligado aos conteúdos matemáticos surgem algumas referências à resolução de problemas "com trocadilhos de palavras: -Acorda (a corda); com enunciados escritos e orais para a resolução de problemas", "o professor brincava com os termos usados ou com a forma como nos mandava resolver os problemas usando linguagem comum em conceitos específicos o que nos dava vontade de rir", "os problemas eram abordados com introduções exageradas".

Objetivo do humor**.** Ao recordarem situações de humor que os seus professores recorriam nas aulas, os respondentes evidenciam algumas das suas funções instrutivas. Entre essas funções, destaca-se: (i) a criação de um ambiente de aprendizagem agradável –"bom ambiente na sala de aula"; "as aulas eram mais alegres e com boa disposição"; "normalmente relatava situações do quotidiano e aplicava-as para criar um bom ambiente na sala de aula, de modo a que os alunos se sentissem estimulados para novas aprendizagens"; (ii) a intenção de motivar os alunos – "introduzia um exemplo que lhe possibilitasse passar para uma situação divertida, que cativava os alunos, predispondo-os a ouvir com atenção a parte séria da aula", "usava provérbios e expressões para nos cativar", "as matérias eram introduzidas de uma forma leve e engraçada de forma a cativar a atenção dos alunos com recurso à boa disposição"; e (iii) a gestão de conflitos cognitivos – "ocorria no discurso do professor, por exemplo para nos levar a avaliar da razoabilidade dos resultados obtidos para situações problemáticas colocadas", "aprender com os próprios erros de forma humorística".

Desafio ao aluno. Na promoção de situações de humor, o aluno era desafiado a resolver tarefas, como, por exemplo, "aquando da resolução de problemas", a observar, o que se torna explicito pela centralidade que adquire na ação do professor na apresentação dessas situações, e a "pensar sobre outro ângulo de pensamento", ato esse que também é referido quando os professores contavam "histórias sobre a vida de cientistas e a forma como tinham feito descobertas valorizando o pensamento crítico e o pensar fora das rotinas".

Forma de apresentação. As situações decorriam, sobretudo, oralmente, pela voz do professor, e algumas delas através de histórias/anedotas/cenas caricatas – "contava pequenas histórias"; "o professor contextualizava o conteúdo com recurso a uma história adequada (sobre a época, sobre o matemático…)"; "metade da aula, o professor contava anedotas"; "havia sempre uma situação caricata para contar, que se relacionava com o conteúdo da matéria a lecionar" – ou através de banda desenhada/vinhetas/cartoons – "o professor motivava sempre com recurso ao humor, utilizava bandas desenhadas"; "associando a matemática a uma banda desenhada, como introdução de um novo conceito matemático"; "situações apresentadas na forma de vinhetas"; "as situações de trabalho envolviam humor, cartoons, muitas fichas produzidas por ela com situações engraçadas"; "cartoons ao introduzir um tema e diálogo com os alunos".

Como vimos antes, 89,5% dos professores que responderam ao questionário dizem utilizar o humor nas próprias aulas. Relativamente à frequência com que o fazem, 4% (17 professores) responderam "Raramente". Dos restantes, cerca de 46% (176 professores) responderam "Pontualmente" e cerca de 54% (224 professores) responderam "Regularmente". A tabela 5 apresenta as finalidades dessa utilização do humor e o seu grau de concordância com cada uma delas:

Tabela 5. Finalidades da utilização do humor nas suas próprias práticas de Matemática.

	1		2		3		4		Total
	ni	%	ni	%	ni	%	ni	%	
Criar bom ambiente	9	1,7%	28	5,3%	222	41,7%	274	51,4%	533
Motivar	2	0,3%	12	2,1%	242	42,0%	320	55,6%	576
Fazer pensar	4	0,8%	68	12,8%	242	45,6%	217	40,9%	531
Ensinar conceitos	28	5,3%	125	23,5%	239	45,0%	139	26,2%	531

As finalidades com maior concordância de nível 4 (concordo muito) são: "Criar bom ambiente" e "Motivar", ambas com um nível de concordância 4 superior a 50%. Se se considerar o nível de concordância 3 ou superior, estas opções foram assinaladas por uma percentagem superior a 93%, destacando-se a opção "Motivar" com, aproximadamente, 98%.

Pedia-se, ainda, que, caso pretendessem indicar outra finalidade para além daquelas que eram apresentadas, o fizessem. Entre as respostas recolhidas há, com efeito, quatro onde se evidenciam preocupações de natureza cognitiva como a memorização – "Ajudar a memorizar com situações adequadas e estimulantes"; "É mais fácil memorizar algo que se compreende e simultaneamente associa a algo agradável como o humor inteligente". Todas as restantes apontam no sentido de que a principal preocupação destes professores se coloca ao nível da relação que se pode estabelecer entre os alunos e a Matemática – "Descontrair e criar uma maior empatia com os alunos"; "Quebrar a tensão que existe na relação direta com o grau de dificuldade dos conteúdos abordados".

A tabela 6 apresenta as razões apontadas pelos professores para a não utilização do humor nas suas próprias aulas de Matemática:

Tabela 6. Razões apontadas para a não utilização do humor nas próprias aulas de Matemática.

	1		2		3		4		Total
	ni	%	ni	%	ni	%	ni	%	
Não tenho tempo	20	36,4%	16	29,1%	15	27,3%	4	7,3%	55
Não é útil	26	41,9%	17	27,4%	17	27,4%	2	3,2%	62
Não tenho sentido de humor	9	15,8%	20	35,1%	17	29,8%	11	19,3%	57
Não tive formação para o usar	9	15,8%	9	15,8%	17	29,8%	22	38,6%	57
Não há materiais didáticos que recorram ao uso do humor	8	13,8%	15	25,9%	20	34,5%	15	25,9%	58
Tenho receio que gere indisciplina na sala de aula	7	12,3%	12	21,1%	22	38,6%	16	28,1%	57

Se a análise da tabela 6 não permite uma identificação clara dessas razões, dado que as respostas se distribuem entre os níveis 1 (concordo pouco) e 4 (concordo muito), há, no entanto, três delas que entre o nível 3 (concordo) e o nível 4 (concordo muito) foram assinaladas por mais do que 50% destes professores: "Não tive formação para o usar", "Não há materiais didáticos que recorram ao uso do humor" e "Tenho receio que gere indisciplina na sala de aula".

No caso de os professores recorrerem ao humor nas suas aulas de Matemática, solicitou-se que relatassem episódios. Da análise desses relatos, verifica-se que predomina um tipo de humor não definido e, em alguns deles, a utilização do ridículo. Quanto aos conteúdos matemáticos contemplados destaca-se o de Números e Operações, seguido do de Geometria e Medida, Álgebra e Estatística. O objetivo do uso do humor na sala de aula é sobretudo o de criar um clima agradável aos intervenientes no processo instrucional, em que o aluno é remetido a observar as situações criadas pelo professor ou a resolver tarefas a partir dessas situações. A apresentação dessas situações dá-se através da oralidade e de BD/Vinhetas/Cartoons. A tabela 7 regista as frequências de cada uma das ocorrências de acordo com as categorias definidas:

Tabela 7: Uso do humor nas suas aulas de Matemática.

Categorias	Indicadores	Frequência
Tipo de humor	*Utiliza incoerência*	–
	Utiliza o ridículo	42
	Não definido	121
Conteúdo matemático do humor	*Temas e subtemas*	–
	▪ *Números e operações*	42
	▪ *Geometria e Medida*	19
	▪ *Álgebra*	13
	▪ *Probabilidades*	3
	▪ *Estatística*	12
	▪ *Outros*	–
	Processos matemáticos	
	▪ *Raciocínio (abstração, generalização, prova...)*	2
	▪ *Resolução de problemas*	–
Objetivo do humor	*Cria um clima agradável*	17
	Gera conflitos cognitivos	2
	Desperta a criatividade	–
	Motivar os alunos	7
Desafio ao aluno	*Observa*	54
	Discute	2
	Resolve uma tarefa (a partir da situação)	18
	Pensa	7
Forma de apresentação	*Oral*	62
	Texto	5
	Gráfico	4
	Misto (BD, Cartoon)	22
	História/anedotas/cenas caricatas	10

<u>Tipo de humor.</u> Muitas das situações relatadas como sendo de humor, por parte dos respondentes, são classificadas de humor não definido porque estes não explicitam qualquer teor humorístico, como ilustram as seguintes afirmações: "utilização de banda desenhada"; "mostrei um vídeo sobre o uso indevido da divisão"; "em todas as aulas tenha uma atitude bem-disposta e até brincalhona com os conteúdos". Outras afirmações apresentam um tipo de humor classificado de ridículo pelo contraste que apresentam entre a situação e o conteúdo matemático: "nas subtrações por empréstimo do 2.º ano costumo fazer o desenho de um burrinho com uma vara e uma cenoura à frente do focinho e dizer que somos como o burrinho que está no meio da ponte: não pode andar para trás porque a cenoura está à frente do nariz"; "quando em geometria falamos do raio costumo

perguntar: Quem sabe o que é pior que ser atingido por um raio?"; "fazer com que os algarismos falem entre si e com os sinais das operações"; "a Matemática prova cientificamente que as mulheres são racionais e os homens irracionais, basta pensar nas dízimas. Isto é, dizima infinita periódica: racional (as mulheres têm período, são racionais) e dízima infinita não periódica: irracional (tal como os homens)".

Conteúdo matemático do humor. Nos relatos apresentados sobre o uso de humor na sala de aula emergem vários conteúdos matemáticos, relacionados com Números e Operações – "uma aluna não conseguia distinguir potência de potência de um número elevado a uma potência. Então resolvi fazê-la imaginar a seguinte situação" –; com Geometria e Medida – "brincadeiras que relevam para a importância em saber ler e dominar a leitura das unidades do tempo"; "uso uma mesa de brincar no capítulo de geometria do espaço e digo que roubei às minhas filhas quando eram pequenas: é garantido o riso dos alunos e um bom ambiente para explicar como definir um plano" –; com Álgebra – "apresentei uma caneca que tinha a palavra *love* escrita por representações de Funções"; "para explicar as correspondências que são funções e as que não são com base nas alcunhas que os alunos colocam uns aos outros (caso estas sejam aceites pelo próprio)" –; e com Estatística – "o conceito da média: Duas pessoas vão a um restaurante e mandam vir um frango assado, um come tudo, outro não come nada. À saída, comem em média meio frango cada um".

Objetivo do humor**.** A recorrência ao humor em contexto de sala de aula tem como objetivo fundamental criar um clima agradável de aprendizagem – "utilizo muito o meu nome em compras que invento em situações problemáticas, que eles acham o máximo pela diversão e boa disposição que envolve e também envolve os alunos" –; como também de motivar os alunos para aprender – "recorro ao humor, nomeadamente para os incentivar a enveredarem pela procura da prova matemática. Uma expressão que uso com alguma frequência é algo do tipo — se não conseguem encontrar contraexemplos para refutar a conjetura, das duas uma ou é "nabice" vossa ou é uma impossibilidade matemática... Normalmente, a partir daqui, surgem conversas bem dispostas em que os estudantes, querendo evitar enquadrar-se na categoria de "nabos", se esforçam por ir mais além na análise da validade da conjetura" –; e gerar conflito cognitivo – "quando um aluno responde de forma incorreta, procuro utilizando o humor levar o aluno a perceber o erro".

Desafio ao aluno. O teor dos relatos dos respondentes vincula mais o professor como gerador de situações de humor do que o aluno, o que se subentende que tende a contemplá-las e, por vezes, a reagir a tais situações através da "resolução de desafios", da "explicação de resultados impossíveis" ou a "chegar ao resultado". Numa ou noutra situação, o uso do humor tem por finalidade fazê-los "pensar sobre as limitações dos números sem introdução de outros valores ou descrições que clarifiquem as situações" ou "refletir usando a lógica".

Forma de apresentação. As formas de apresentação das situações humorísticas são variadas, com destaque para a oralidade, o que emerge de uma forma implícita através da ênfase que os respondentes dão ao seu discurso na apresentação dessas situações à turma, e para a utilização de "situações caricatas de banda desenhada", de "cartoons", de "personagens de desenhos animados", de "anedotas" e de "histórias divertidas".

Conclusões

Apesar de o tema do humor no ensino da Matemática estar pouco divulgado em Portugal, ele suscita o interesse dos professores. Esse interesse traduz-se, por um lado, no elevado número de respostas obtidas. Por outro lado, pelo elevado número de respostas às questões abertas do questionário em que se pedia para relatar episódios de uso de humor pelos seus professores de Matemática e por si próprios.

Uma ideia forte deste estudo é que praticamente todos professores consideram o ensino da Matemática compatível com o uso de humor, destacando que o humor facilita a relação pedagógica entre o professor e os alunos e que torna a disciplina mais atrativa. Esta compatibilidade do humor com o ensino da Matemática releva a seriedade do humor enquanto estratégia do profissional de ensino, resultado que é consistente com as perspetivas de diversos autores (Adão, 2008; Martin, 2008; Martins, 2015; Meyer, 2015).

Uma outra ideia importante que resulta do estudo é que o humor está presente nas aulas de Matemática, facto que é consistente com a forte valorização que os professores fazem dele. Cerca de um terço dos professores (34%) recorda-se de algum dos seus professores de Matemática ter recorrido ao humor e, mais significativo ainda, quase 90% dos professores diz usar o humor nas suas aulas e destes, mais de metade diz fazê-lo regularmente. Esta discrepância de valores no uso do humor pode decorrer de diversas razões. Uma delas é a possibilidade de o humor ter significados diferentes para alunos e professores (o humor recordado foi apreciado quando estes professores eram alunos). Pode também acontecer que eventuais situações de humor usadas não tenham sido percebidas pelos alunos em resultado da sua falta de competência matemática para o fazer. Podemos ainda conjeturar que, face à idade média dos professores (cerca de 47 anos), na altura em que foram alunos o ensino da Matemática tendia a ser “mais sério”.

Quanto às razões que, para os professores, justificam o uso do humor, sobressai a função afetiva de criar um clima agradável nas aulas, facilitando a relação com os alunos e o discurso do professor (Banas *et al*, 2011; Guitart, 2012; Martin, 2007). Embora a função cognitiva esteja menos presente, ela aparece nos relatos dos episódios dos professores associados a diversos temas matemáticos. Os episódios revelam, nestes casos, que os professores são capazes de detalhar mais as situações recordadas, indicando o tipo de desafio colocado aos alunos e a forma de apresentação, o que facilita a identificação do mecanismo do humor. Este resultado vai na linha dos estudos apresentados por diversos autores (Banas *et al*, 2011; Flores & Moreno, 2011; Guitart, 2012; Martin, 2007) que assinalam as potencialidades do humor para evocar aprendizagens realizadas.

Agradecimentos

Este trabalho inscreve-se no projeto HUMAT – *Humor in Mathematics Teaching* (PROJ/CI&DETS/2015/005), financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia, I.P., no âmbito do projeto UID/Multi/04016/2016. Agradecemos adicionalmente ao Instituto Politécnico de Viseu e ao CI&DETS pelo apoio prestado.

Referências bibliográficas

Adão, T. (2008). *O lado sério do humor – uma perspectiva sociolinguística do discurso humorístico*. Famalicão: Editorial Novembro.

Banas, J. A., Dunbar, N., Rodriguez, D., & Liu, S. J. (2011). A review of humor in educational settings: Four decades of research. *Communication Education*, *60*(1), 115-144.

Flores, P. (2003). *Humor gráfico en el aula de Matemáticas*. Granada: Arial.

Flores, P., & Moreno, A.J. (2011). *Matemáticamente competentes para reír*. Barcelona: Graó.

Guitart, M. & Flores, P. (2003). Humor gráfico para la enseñanza y el aprendizaje del azar. *Suma*, 42, 81-89.

Guitart, M. (2012). P*ermitido reír... Estamos en clase. El humor como recurso didáctico en aula de Estadística* (Tese de Doutoramento, Universidade Nacional de Cuyo, Mendoza, Argentina).

Martin, R. (2007). *The psychology of humor – An integrative approach.* London: Elsevier Academic Press.

Martins, A. I. (2015). A seriedade do Humor ao longo dos séculos: uma retórica do poder político ou de um contra-poder?. *Revista Iberoamericana de Estudios de Desarrollo*, *4*(1), 323-346.

Meyer, J. C. (2015). *Understanding Humor Through Communication: Why be Funny, Anyway*?. Lanham: Lexington Books.

Shmakov, P., & Hannula, M. S. (2010). Humour as means to make mathematics enjoyable. In *Proceedings of CERME* (Vol. 6, pp. 144-153).

O CONHECIMENTO PARA ENSINAR PROBABILIDADES DE FUTUROS EDUCADORES E PROFESSORES DOS PRIMEIROS ANOS

José António Fernandes[1], *María Magdalena Gea*[2], *Floriano Viseu*[3]
[1]Universidade do Minho, jfernandes@ie.uminho.pt
[2]Universidad de Granada, mmgea@ugr.es
[3]Universidade do Minho, fviseu@ie.uminho.pt

Resumo. *O presente estudo teve por objetivo estudar o conhecimento para ensinar probabilidades de futuros educadores e professores dos primeiros anos escolares. Participaram no estudo 62 alunos, futuros educadores e professores dos primeiros anos, que se encontravam a frequentar o 2.º ano do curso de Licenciatura em Educação Básica numa universidade do Norte de Portugal. Para tal, os alunos resolveram várias tarefas, cada uma com duas questões: na primeira o aluno determinava probabilidades de acontecimentos e na segunda averiguava a correção ou incorreção das resoluções de três alunos da mesma questão. Este trabalho apresenta os resultados de uma tarefa, em que se salienta o razoável desempenho dos alunos, melhor na classificação correta das resoluções dadas do que na determinação das probabilidades, a existência de vários erros e a determinação correta das probabilidades repercutiu-se, mais frequentemente, na classificação correta das três resoluções dos alunos que eram dadas.*

Abstract. *The present work aimed to study the knowledge to teach probability of prospective educators and primary school teachers. The study included 62 students, prospective educators and primary school teachers, who were attending the 2nd year of the Basic Education Degree course at a Northern Portuguese university. In order to achieve this, the students solved several tasks, each with two questions: in the first one the student solved probabilities problems and in the second one checked three students' resolutions of the same question in order to determine their correctness or not. In this paper we present the students' results of a task where they exhibit a reasonable performance. Their performance was better when they had to check three students' resolutions than when they had to solve the probability problems. The existence of several errors and the correct determination of probabilities was more often reflected in the correct checking of the three students' resolutions given.*

Palavras-chave: *conhecimento para ensinar; probabilidades; futuros educadores e professores dos primeiros anos.*

Introdução

Os recentes desenvolvimentos da área de probabilidades e estatística e as suas inúmeras aplicações às mais variadas situações científicas, sociais e políticas têm-se repercutido, cada vez mais, na importância social que lhe é reconhecida e numa maior visibilidade do seu ensino nas escolas.

No nosso país, os temas de Probabilidades e Estatística, integrados conjuntamente no domínio matemático de Organização e Tratamento de Dados (OTD) fazem parte dos programas de todos os anos escolares, desde o 1.º ao 12.º ano de escolaridade (Ministério da Educação e Ciência, 2013).

Ora, a introdução destes temas nos primeiros anos escolares requer que os professores dessas crianças tenham uma formação compatível em termos do que lhes é requerido para o ensino (Batanero, 2009). Trata-se de uma exigência relativamente recente pois até à introdução dos novos programas escolares da década de 90 estes temas não faziam parte da aprendizagem escolar destas crianças, donde também não faziam parte do programa formativo dos respetivos professores.

Assim, face às atuais exigências dos programas escolares, a inclusão destes temas nos programas formativos destes futuros educadores e professores reveste-se de uma grande importância, seja em termos de formação inicial, seja em termos de formação contínua, pois com um conhecimento adequado é possível ministrar um ensino de qualidade às crianças implicadas no processo de ensino-aprendizagem (Vasquez & Alsina, 2015).

Neste contexto, no presente estudo investiga-se o conhecimento para ensinar probabilidades de futuros educadores e professores dos primeiros anos escolares. Por outro lado, sendo o conhecimento do professor para ensinar um conhecimento multifacetado, neste estudo salientam-se o conhecimento comum do conteúdo e o conhecimento do conteúdo e os alunos (Hill, Ball & Schilling, 2008).

Em termos de estruturação do texto, de seguida abordaremos o enquadramento teórico, os aspetos metodológicos, a resolução da tarefa pelos alunos e, por último, a conclusão.

Enquadramento teórico

O conhecimento para ensinar é um conhecimento multifacetado, em que se intervêm variadas áreas científicas, como sejam o conhecimento da disciplina, o conhecimento do aluno e o conhecimento do currículo. Esses conhecimentos servem de pilar para a construção do conhecimento profissional, que tem um impulso decisivo nos cursos de formação inicial de professores e se desenvolve com a experiência que se acumula com a prática letiva.

O interesse pelo conhecimento profissional do professor ganhou relevância com os trabalhos de Shulman (1986, 1987). Debruçando-se sobre o conhecimento que o professor precisa para ensinar, este autor organiza-o em conhecimento do conteúdo, conhecimento pedagógico, tanto geral como específico do conteúdo, e conhecimento do currículo. Nesta classificação, salienta-se o conhecimento pedagógico do conteúdo pois é um "conhecimento que vai mais além do conhecimento do conteúdo em si, [trata-se de] um conhecimento do conteúdo para ensinar" (Shulman, 1986, p. 9) e inclui as formas de representação e estratégias para ensinar um tema e o conhecimento da aprendizagem do aluno.

Posteriormente, Hill et al. (2008) focam-se no conhecimento do conteúdo e no conhecimento pedagógico do conteúdo. No caso do conhecimento do conteúdo, distinguem três tipos de conhecimento: o comum, no horizonte matemático e o especializado. O conhecimento comum do conteúdo traduz o conhecimento que qualquer pessoa com formação matemática manifesta quando responde corretamente a uma tarefa matemática, enquanto o conhecimento no horizonte matemático se refere a aspetos mais avançados do conteúdo. O conhecimento especializado do conteúdo é o que distingue o professor de Matemática de qualquer outra pessoa que também utiliza matemática. Este conhecimento está na base da capacidade do professor para explicar a razão de ser dos procedimentos matemáticos e a especificidade da linguagem matemática. É este conhecimento especializado que permite ao professor usar representações adequadas dos conceitos matemáticos.

No conhecimento pedagógico do conteúdo inclui-se o conhecimento do currículo e relaciona-se o conhecimento do conteúdo com os alunos e com o ensino, resultando no conhecimento do conteúdo e os alunos e no conhecimento do conteúdo e o ensino, respetivamente (Hill et al., 2008).

De entre as múltiplas facetas do conhecimento para ensinar, atendendo à natureza do objetivo deste trabalho, destacamos o conhecimento comum do conteúdo e o conhecimento do conteúdo e os alunos (em termos de Hill et al., 2008), que na classificação de Ponte (2012) podemos identificar com o conhecimento do conteúdo e o conhecimento dos alunos e da aprendizagem.

O conhecimento dos alunos e dos seus processos de aprendizagem abrange o conhecimento dos alunos como pessoas, dos seus interesses, dos seus gostos, das suas formas habituais de reagir, dos seus valores, das suas referências culturais (Santos & Ponte, 2002) e das formas como aprendem e desenvolvem as suas ideias matemáticas (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001). Ball, Thames e Phelps (2008), ao analisarem a relação entre o conteúdo e os alunos, identificam que o conhecimento do conteúdo e os alunos resulta da combinação do conhecimento sobre os alunos e sobre a Matemática. Trata-se de um conhecimento que ajuda a compreender as reações dos alunos e o que emerge do seu pensamento. A tarefa apresentada neste trabalho exige uma compreensão matemática específica neste sentido, sobre as conceções mais comuns e as conceções erróneas dos alunos em relação a um conteúdo matemático de probabilidades.

Não são muito frequentes os estudos de investigação sobre o conhecimento para ensinar probabilidades de futuros educadores e professores dos primeiros anos, até porque se trata de uma temática recentemente introduzida nos programas escolares dos primeiros anos de escolaridade.

Numa investigação em que participaram 37 futuros professores do 1.º e 2.º ciclo do ensino básico, que já tinham concluído o estudo de Probabilidades e Estatística, Fernandes e Barros (2005) verificaram dificuldades dos futuros docentes em formular acontecimentos, em compreender acontecimentos compostos e frequentemente recorriam a um raciocínio aditivo para comparar probabilidades. Também neste nível de ensino, Begg e Edwards (1999) verificaram que cerca de dois terços dos professores do ensino primário em serviço e em formação, de um total de 36, considerava todos os acontecimentos como sendo igualmente prováveis e muito poucos compreendiam o conceito de independência.

No caso da afirmação da equiprobabilidade dos acontecimentos, trata-se de avaliar os acontecimentos como sendo igualmente prováveis pelo facto de serem aleatórios, isto é, pela impossibilidade de se determinar antecipadamente os resultados a obter. Lecoutre e Durand (1988) designaram este raciocínio falacioso por enviesamento de equiprobabilidade e demonstraram que ele é resistente a variados fatores, como sejam variações da situação experimental (tipo de informação disponibilizada) e classificação dos sujeitos (formação, género e prática de jogos de sorte e azar).

Em vários estudos, envolvendo futuros educadores e professores dos primeiros anos de escolaridade, Fernandes, Viseu e Gea (2016) constataram que os futuros educadores e professores, à exceção do caso da probabilidade simples, em que a generalidade dos sujeitos foi capaz de responder corretamente, demonstraram um desempenho muito limitado: 60% nos itens de definição de acontecimentos certos; 72% nos itens de probabilidade simples; 56% nos itens de probabilidade condicionada e 26% nos itens de probabilidade conjunta. Para estes autores, quando se trabalha no contexto da extração com ou sem reposição, como aqui aconteceu, a maior dificuldade dos alunos na probabilidade conjunta pode explicar-se por este conceito ser mais elaborado do que o conceito de probabilidade condicionada, pois esta última foi explorada a partir da restrição do espaço amostral.

Também no contexto espanhol, Contreras, Estrada, Díaz e Batanero (2010), num estudo em que participaram 69 futuros professores do ensino primário, sobre o cálculo da probabilidade simples, composta e condicionada a partir de dados apresentados numa tabela de dupla entrada, concluíram que os futuros professores tiveram uma grande dificuldade no cálculo da probabilidade condicionada e conjunta e alguns desses futuros professores aderiram à falácia da condicional transposta (trocar o acontecimento condicionante com o condicionado) e à falácia da conjunção (atribuir à probabilidade da interseção de dois acontecimentos um valor superior à probabilidade de um desses acontecimentos, contrariando assim a lei da extensão).

Ao nível dos raciocínios erróneos, Fernandes, Batanero, Correia e Gea (2014) observaram que os futuros educadores e professores dos primeiros anos combinaram erradamente os valores de probabilidades, em que se destaca a aplicação da operação de adição em vez da de multiplicação, consideraram apenas a probabilidade de uma das duas ordens possíveis e determinaram o valor de probabilidade de apenas um dos acontecimentos envolvidos na probabilidade conjunta.

Tal como se constatou nos estudos antes referidos, também Vásquez e Alsina (2015) concluíram que os professores do ensino primário do Chile revelaram um conhecimento insuficiente nas diferentes categorias que compõem esse conhecimento.

Em síntese, os estudos revistos mostram que os futuros educadores e professores dos primeiros anos revelam um conhecimento para ensinar probabilidades muito limitado, manifestam muitas dificuldades e frequentemente aderem a raciocínios probabilísticos erróneos.

Método

O estudo, aqui relatado, teve por objetivo averiguar o conhecimento de futuros educadores e professores dos primeiros anos escolares para ensinar probabilidades. Estes futuros professores poderão lecionar matemática no 1.º ciclo ou no 1.º e 2.º ciclo, consoante o curso de mestrado para a docência que tenham a frequentado.

Participaram na investigação 62 alunos que se encontravam a frequentar o 2.º ano do curso de Licenciatura em Educação Básica, de uma universidade do Norte de Portugal. À entrada na universidade, estes alunos tinham uma formação muito variada em matemática, o que explica que muitos deles tenham declarado ter dificuldades a matemática; especificamente 64,5% declararam ter dificuldades ou muitas dificuldades, 33,9% declararam ter poucas dificuldades e apenas 1,6% declararam não ter dificuldades.

No âmbito do estudo, os participantes resolveram três tarefas sobre probabilidades, que foram administradas num contexto de avaliação formal em sala de aula, das quais, por razões de espaço, é aqui estudada apenas uma (Figura 1). Essa tarefa foi aplicada na unidade curricular de Números e Probabilidades, quando os alunos já tinham concluído o estudo do tema de Probabilidades.

a) Miguel e Luís jogam um jogo com dois dados vulgares (como sabes cada dado está numerado de 1 a 6). Lançam os dois dados e multiplicam os números obtidos. Miguel ganha um euro se o produto é par; se o produto é ímpar, Luís ganha um euro.
O jogo é equitativo? Porquê? Se o Miguel ganha 1 euro, quanto teria que ganhar o Luís para que o jogo seja equitativo?

b) Apresentam-se, a seguir, as respostas dadas por três alunos a esta tarefa. Classificar as respostas dos alunos em corretas ou incorretas. No caso das respostas incorretas explicar os erros cometidos pelos alunos.

A	O Miguel tem mais 2 possibilidades de ganhar que o Luís, logo considero justo que o Luís ganhe 2 euros.	☐ Correta ☐ Incorreta
	Erros:	
B	O Luís deve ganhar 6 euros para que seja justo porque tem menos possibilidades.	☐ Correta ☐ Incorreta
	Erros:	
C	Se o Luís ganhar 3 euros, o jogo estaria equilibrado uma vez que o Miguel tem três vezes mais oportunidades de ganhar que o Luís e de cada vez que ganha recebe um euro.	☐ Correta ☐ Incorreta
	Erros:	

Figura 1. Enunciado da tarefa proposta aos alunos.

A tarefa é constituída por duas questões: na questão a), relativa ao conhecimento comum do conteúdo, os alunos deveriam avaliar se o jogo é equitativo; e na questão b), relativa ao conhecimento do conteúdo e os alunos, deviam averiguar se as respostas dadas por três alunos à mesma questão eram corretas ou incorretas e indicar os erros no caso das respostas incorretas. Uma vez que em ambas as questões estava em jogo a mesma pergunta, para evitar qualquer contaminação entre as respostas, os alunos responderam à questão a), cujas resoluções foram recolhidas, e só depois foi distribuída a questão b).

Em termos de análise de dados determinaram-se frequências dos tipos de resposta (correta e incorreta) dos alunos e dos erros cometidos e relacionaram-se as frequências de respostas corretas e incorretas à questão a) com as respostas corretas à questão b).

Também, nos itens abertos da questão b), determinaram-se frequências dos tipos erros identificados pelos alunos.

Resolução da tarefa pelos futuros educadores e professores

Na Tabela 1 apresentam-se as frequências de respostas corretas e erradas, bem como as não respostas, apresentadas pelos alunos na questão a) e nos itens fechados da questão b).

Tabela 1. Frequências (%) dos tipos de resposta nos itens das questões a) e b)

Resposta	a)	b)		
		A	B	C
Correta	41(66,1)	54(87,1)	57(91,9)	52(83,9)
Incorreta	20(32,3)	6(9,7)	4(6,5)	9(14,5)
Não resposta	1(1,6)	2(3,2)	1(1,6)	1(1,6)

Na questão a) pretendia-se que os alunos averiguassem se um jogo com dois dados era ou não equitativo, questionando-se ainda os alunos para que estabelecessem a quantia que cada jogador deveria ganhar na condição do jogo ser equitativo. Nesta questão cerca de dois em cada três alunos (66,1%) responderam corretamente, o que corresponde a um desempenho razoável dos alunos e que, por sua vez, denota um razoável conhecimento comum do conteúdo por parte dos alunos.

Quase todas as respostas corretas se basearam na descrição dos casos possíveis e favoráveis numa tabela de dupla entrada (Figura 2), tendo apenas dois alunos enumerado esses casos sem a ajuda de uma tabela tal como se ilustra na resolução do aluno A6 da Figura 3.

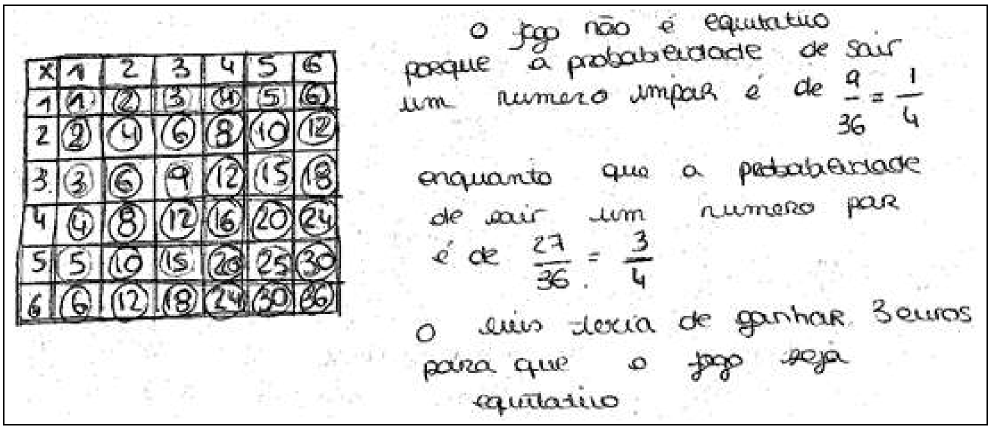


Figura 2. Resposta do aluno A59 à questão a).

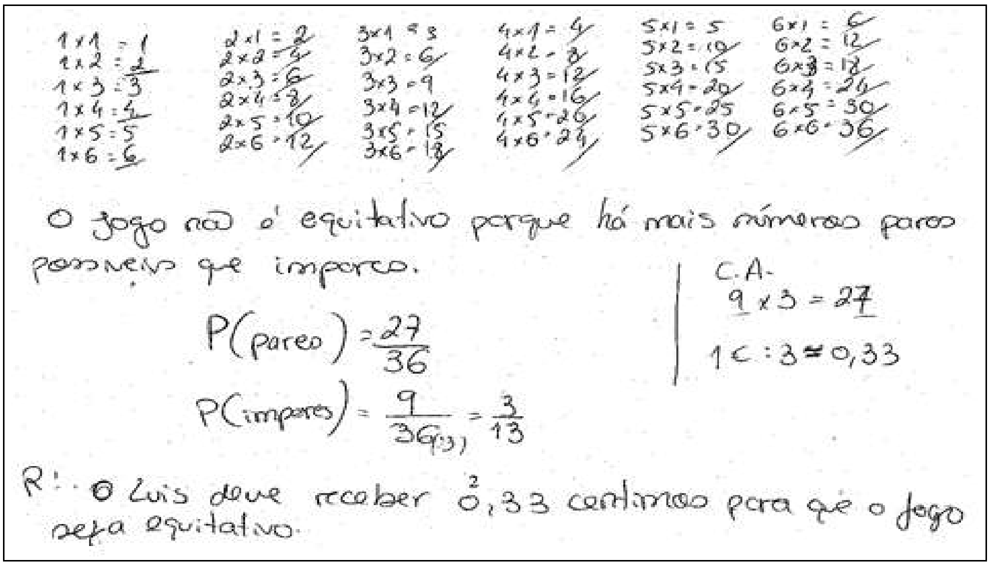


Figura 3. Resposta do aluno A6 à questão a).

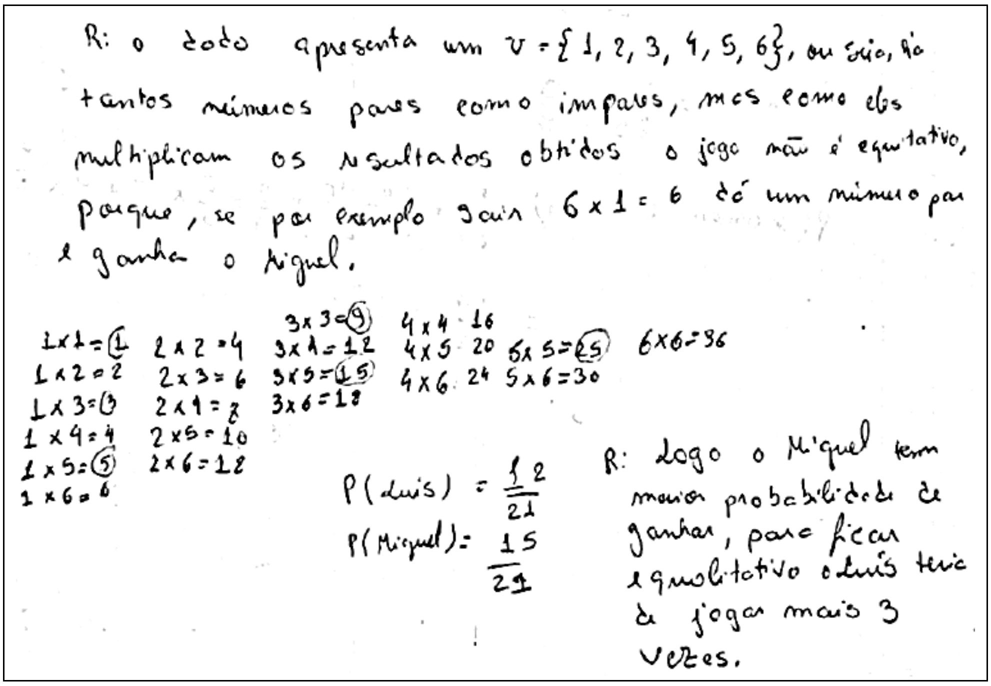
Na Figura 3 pode observar-se que o aluno falhou na simplificação da fração $\frac{9}{36} = \frac{3}{13}$ e também trocou os nomes pois deveria ser o Miguel a ganhar 0,33 cêntimos se Luís ganha 1 euro (para que o jogo seja equitativo).

Em relação às respostas incorretas, foram vários os erros cometidos pelos alunos, conforme se pode constatar na Tabela 2.

Tabela 2. Frequências (%) dos tipos de erro na questão a)

Erro	Frequência (%)
Não ordem	3(4,8)
Equiprobabilidade de obter n.º par e n.º ímpar	4(6,5)
Enumeração não exaustiva	8(12,9)
Comparar as diferentes formas de obter n.º par e n.º ímpar	2(3,2)
Adicionar em vez de multiplicar os valores dos dados	2(3,2)
Não inteligível	1(1,6)
Não resposta	1(1,6)

De entre os erros dos alunos destacam-se, pela sua frequência, os erros de não ordem (Figura 4), de equiprobabilidade de obter número par e número ímpar (Figura 5) e de enumeração não exaustiva (Figura 6).

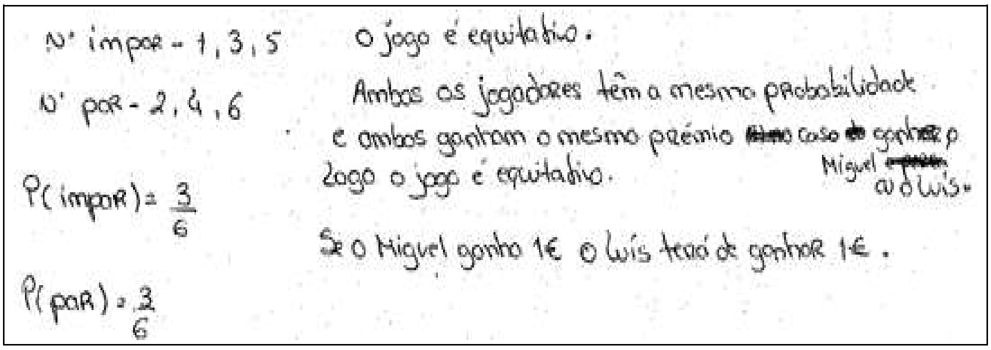

R: o dado apresenta um U = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, ou seja, há tantos números pares como ímpares, mas como eles multiplicam os resultados obtidos o jogo não é equitativo, porque, se por exemplo sair 6 x 1 = 6 dá um número par e ganha o Miguel.

1x1=1 1x2=2 1x3=3 1x4=4 1x5=5 1x6=6
2x2=4 2x3=6 2x4=8 2x5=10 2x6=12
3x3=9 3x4=12 3x5=15 3x6=18
4x4=16 4x5=20 4x6=24
6x5=25 5x6=30 6x6=36

P(Luís) = 12/21
P(Miguel) = 15/21

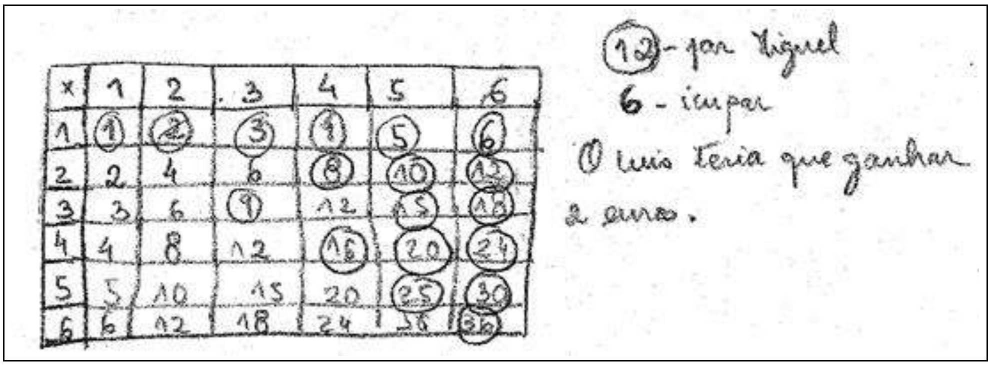
R: Logo o Miguel tem maior probabilidade de ganhar, para ficar equitativo o Luís teria de jogar mais 3 vezes.

Figura 4. Resposta do aluno A22 à questão a).


Nº ímpar - 1, 3, 5
Nº par - 2, 4, 6
P(ímpar) = 3/6
P(par) = 3/6

O jogo é equitativo.
Ambos os jogadores têm a mesmo probabilidade e ambos ganham o mesmo prémio caso ganhe o Miguel ou o Luís.
Logo o jogo é equitativo.
Se o Miguel ganha 1€ o Luís terá de ganhar 1€.

Figura 5. Resposta do aluno A26 à questão a).



x	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	36	36

12 - par Miguel
6 - ímpar
O Luís teria que ganhar 2 euros.

Figura 6. Resposta do aluno A29 à questão a).

No caso da resolução do aluno A22, exemplificativa do erro de ordem, verifica-se que este também determinou erradamente o número de casos favoráveis do Luís.

Seguidamente analisam-se as respostas dos alunos à questão b) da tarefa, com a qual se pretende avaliar o conhecimento do conteúdo e os alunos.

Nos itens fechados da questão b), em que era pedido aos alunos para decidirem se cada uma das três resoluções dadas, atribuídas a outros alunos, era correta ou incorreta, observa-se pela Tabela 1 que a percentagem de respostas corretas foi de 87,1%, 91,9% e 83,9%, respetivamente para as respostas A, B e C. Conclui-se, assim, que o desempenho dos alunos na classificação das resoluções dadas, como correta ou incorreta, foi claramente melhor do que nas suas próprias resoluções da mesma tarefa (questão a)).

Quando se pediu aos alunos para identificarem os erros, nos itens abertos da questão b), em geral, observou-se uma considerável diminuição do desempenho dos alunos. Na Tabela 3 apresentam-se as frequências dos erros identificados pelos alunos em cada uma das três resoluções apresentadas.

Tabela 3. Frequências (%) dos erros identificados nos itens abertos da questão b)

	Frequência (%)		
Erros	A	B	C
O Miguel tem mais do que 2 possibilidades	20(32,3)	—	—
Igual probabilidade de ganhar	4(6,5)	3(4,8)	3(4,8)
O Miguel tem mais 3 possibilidades de ganhar/triplo	18(29,0)	23(37,1)	—
O Luís passaria a ganhar mais/o dobro	—	28(45,2)	—
O Miguel tem menos do que 3 vezes mais hipóteses de ganhar	—	—	5(8,1)
Calcular e comparar as probabilidades	9(14,5)	—	—
Repetir em parte ou no todo o enunciado	3(4,8)	3(4,8)	1(1,6)
Sem erros	6(9,7)	4(6,5)	52(83,9)
Não resposta	2(3,2)	1(1,6)	1(1,6)

Na resolução A, em que se adota um raciocínio aditivo para comparar as chances do Luís ganhar em relação ao Miguel, muito poucos alunos (9,7%) a classificaram como correta. Em relação aos erros identificados pelos alunos, em termos de frequência, salienta-se que o Miguel tem mais do que 2 possibilidades de ganhar (32,3%) ou tem mais três possibilidade ou o triplo em relação ao Miguel (29,0%), em que os alunos se reportam ao número de casos favoráveis por comparação com o Luís; calcularam e compararam as respetivas probabilidades (14,5%); e poucos alunos afirmaram a igual probabilidade do Luís e o Miguel ganharem (6,5%). Neste último caso, dois alunos basearam-se na igualdade da probabilidade de obter um número par e um número ímpar, enquanto os restantes não esclareceram a origem da sua resposta.

Na resolução B, em que é referida uma quantia excessiva para o Luís, sem a explicitação de uma relação que a justifique, também muito poucos alunos a identificaram como correta (6,5%). Já em relação aos erros identificados pelos alunos, verifica-se que muitos deles afirmaram que o Miguel tem mais 3 possibilidades de ganhar do que o Luís ou o triplo do Luís (37,1%), e ainda mais alunos reconheceram que o jogo passaria a beneficiar o Luís (45,2%), tornando novamente o jogo não equitativo. Destes alunos, alguns foram mais específicos, referindo que nesta hipótese o Luís passaria a ganhar o dobro do Miguel. Poucos alunos afirmaram a igual probabilidade do Luís e o Miguel ganharem (4,8%).

Finalmente, a resolução C está correta, verificando-se que mais de quatro em cada cinco alunos a identificaram como tal. Em termos dos poucos erros identificados pelos alunos, salienta-se que o Miguel teria menos do que três vezes mais hipóteses de ganhar em relação ao Luís (8,1%), tendo mesmo dois alunos referido que o Miguel teria duas vezes mais hipóteses de ganhar. Neste último caso, é possível que estes dois alunos tenham sido influenciados por um raciocínio aditivo, tal como se salientava na resolução A. Como aconteceu nas resoluções anteriores, poucos alunos afirmaram a igual probabilidade do Luís e o Miguel ganharem (4,8%).

Assim, embora o desempenho nos itens fechados da questão b) seja superior ao observado na questão a), esse desempenho diminui quando é solicitado aos alunos para identificarem os erros nas resoluções dadas.

Por último, estudou-se a influência dos tipos de resposta (correta e incorreta) à questão a) sobre a resposta correta à questão b). Para tal, determinaram-se as percentagens de respostas corretas em cada um dos itens (A, B e C) da questão b) segundo as respostas corretas e incorretas da questão a), que constam da Tabela 4.

Tabela 4. Percentagens de respostas corretas nos itens da questão b) segundo o tipo de resposta (correta e incorreta) dada na questão a)

	% de respostas corretas de b)		
Tipo de resposta de a)	A	B	C
Correta	97,6	97,6	97,6
Incorreta	73,7	85,0	60,0

Pelos valores da Tabela 4 verifica-se que, sistematicamente, as percentagens de respostas corretas nos itens da questão b) são maiores quando o aluno respondeu também corretamente ao item a) do que quando respondeu incorretamente, tendo o teste Exato de Fischer determinado diferenças estatisticamente significativas no caso dos itens A ($p = 0{,}010$) e C ($p = 0{,}000$). Deste resultado, conclui-se que o conhecimento comum do conteúdo tem uma influência positiva sobre o conhecimento do conteúdo e os alunos.

Conclusão

Quando comparado com outros estudos (e.g., Fernandes et al., 2014, 2016), em que também estavam implicadas probabilidades de acontecimentos em experiências compostas, no presente estudo os futuros educadores e professores dos primeiros anos escolares revelaram um melhor desempenho na tarefa proposta. A este resultado não terá sido estranho o facto de que quase todos os alunos que resolveram corretamente a questão recorreram à representação dos resultados possíveis e favoráveis através de uma tabela de dupla entrada. A ser assim, tal como Fischbein (1975) advoga, devemos enfatizar na formação inicial destes futuros educadores e professores representações em diagrama de árvore e em tabela de dupla entrada.

Apesar de muitos futuros educadores e professores dos primeiros anos escolares terem sido capazes de identificar as respostas corretas nos itens fechados da questão b), quando se tratou de identificar e explicar os erros cometidos nas três resoluções dadas a situação complicou-se, tendo muito menos futuros educadores e professores sido capazes de o fazer. Num sentido complementar, Gómez-Torres, Batanero, Díaz e Contreras (2016) também concluíram que os futuros professores do ensino primário revelaram um conhecimento comum do conteúdo razoável, mas revelaram muitas dificuldades no conhecimento do conteúdo no horizonte matemático (em termos de Hill et al., 2008).

Finalmente, confirmou-se que às respostas corretas dos futuros educadores e professores na resolução da questão a), em geral, correspondeu também um melhor desempenho na classificação correta das resoluções dadas dos alunos, o que significa que o domínio do conhecimento comum do conteúdo repercutiu-se positivamente no conhecimento do conteúdo e os alunos.

A concluir, em termos da formação dos futuros educadores e professores dos primeiros anos, consideramos ser conveniente aprofundar o conhecimento comum do conteúdo e o conhecimento do conteúdo e os alunos (Hill et al. 2008), em particular, desenvolver a sua compreensão acerca dos erros dos alunos.

Agradecimento.

Este trabalho é financiado pelo CIEd — Centro de Investigação em Educação, UID/CED/01661/, Instituto de Educação, Universidade do Minho, através de fundos nacionais da FCT/MCTES-PT; Proyecto EDU2016-74848-P (MEC) e grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referências bibliográficas

Ball, D., Thames, M. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Batanero, C. (2009). Retos para la formación estadística de los profesores. In J. A. Fernandes, F. Viseu, M. H. Martinho & P. F. Correia (Orgs.), *Actas do II Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola* (pp. 7-21). Braga (Portugal): Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.

Begg, A. & Edwards, R. (1999). Teachers' ideas about teaching statistics. Paper presented at the *Annual Meeting of the Australian Association for Research in Education and the New Zealand Association for Research in Education*. Melbourne, Australia.

Contreras, J. M., Estrada, A., Díaz, C. & Batanero, C. (2010). Dificultades de futuros profesores en la lectura y cálculo de probabilidades en tablas de doble entrada. In M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T. A. Sierra, (Eds.), *Investigación en educación matemática XIV* (pp. 271-280). Lleida: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Fernandes, J. A. & Barros, P. M. (2005). Dificuldades de futuros professores do 1º e 2º ciclos em estocástica. In *Actas do V Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática* (CIBEM). Porto (Portugal): Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.

Fernandes, J. A., Batanero, C., Correia, P. F. & Gea, M. M. (2014). Desempenho em probabilidade condicionada e probabilidade conjunta de futuros professores do ensino básico. *Quadrante*, *XXIII*(1), 43-61.

Fernandes, J. A., Viseu, F. & Gea, M. M. (2016). O conhecimento de probabilidades de futuros educadores e professores dos primeiros anos. In L. G. W. Coan, & M. T. Moretti (Orgs.), *Aplicações matemáticas com tecnologias de informação e comunicação* (pp. 123-142). Florianópolis, SC: Editora Insular.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Gómez-Torres, E., Batanero, C., Díaz, C. & Contreras, J. M. (2016). Developing a questionnaire to assess the probability content knowledge of prospective primary school teachers. *Statistics Education Research Journal*, *15*(2), 197- 215.

Hill, H. C., Ball, D. L. & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*(4), 372-400.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (Eds.) (2001). *Adding it Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington, D. C.: National Academy Press.

Lecoutre, M.-P. & Durand, J.-L. (1988). Jugements probabilistes et modèles cognitifs: étude d'une situation aléatoire. *Educational Studies in Mathematics*, *19*(3), 357-368.

Ministério da Educação e Ciência. (2013). *Programa de matemática para o ensino básico*. Lisboa: Autor.

Ponte, J. P. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. In N. Planas (Coord.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (pp. 83-98). Barcelona, España: Graó.

Santos, L. & Ponte, J. P. (2002). A prática lectiva como actividade de resolução de problemas: Um estudo com três professoras do ensino secundário. *Quadrante, 11*(2), 29-54.

Shulman, L. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 3-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: foundations of new reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1-22.

Vásquez, C. & Alsina, C. (2015). El conocimiento del profesorado para enseñar probabilidad: un análisis global desde el modelo del conocimiento didáctico-matemático. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *7*, 27-48.

PRÁTICAS DE CONDUÇÃO DE DISCUSSÕES MATEMÁTICAS: OS CASOS DE DOIS PROFESSORES

Cátia Rodrigues[1], *Luís Menezes*[2], *João Pedro da Ponte*[3]
[1]Agrupamento de Escolas de Vila Flor e UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, *catiamat@gmail.com*
[2]Escola Superior de Educação de Viseu e CI&DETS, menezes@esev.ipv.pt
[3]Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, jpponte@ie.ul.pt

Resumo. *As discussões matemáticas podem ser uma ferramenta poderosa na promoção da aprendizagem com compreensão, na medida em que favorecem a apresentação, justificação e argumentação sobre diversas estratégias de resolução decorrentes do trabalho dos alunos com tarefas. O professor desempenha um papel importante na preparação e condução dessas discussões. Nesta comunicação procuramos compreender como dois professores de Matemática do 3.º ciclo do ensino básico conduzem discussões coletivas que decorrem de tarefas algébricas. Com vista à compreensão das suas práticas, o estudo segue uma abordagem qualitativa e interpretativa e baseia-se no estudo de caso de professores. Os resultados evidenciam que os dois professores conduzem a discussão por três momentos principais e gerem o discurso com vista à generalização de ideias algébricas. Empreendem um conjunto de ações instrucionais que favorecem a apresentação e justificação de diversas estratégias de resolução e argumentação sobre as dos colegas.*

Abstract. *Mathematical discussions can be a powerful tool in promoting learning with understanding, as they favor the presentation, justification, and argumentation of various strategies of resolution resulting from students' work on tasks. The teacher plays an important role in the preparation and conduction of that discussions. In this paper, we try to understand how two Mathematics teachers of the 3rd cycle of elementary education conduct collective discussions about algebraic tasks. In order to understand this practices, the study follows a qualitative and interpretative approach and is based on the case study of teachers. The results show that the two teachers lead the discussion through three main moments and generate the discourse for the generalization of algebraic ideas. They undertake a set of instructional actions that support the presentation and justification of several strategies and arguments about the colleagues.*

Palavras-chave: *Discussões coletivas; Professor de Matemática; Práticas e conhecimento didático; Álgebra.*

Introdução

A aprendizagem dos alunos com compreensão pressupõe que se envolvam na resolução de tarefas matematicamente significativas, apresentem e justifiquem as suas estratégias, avaliem e argumentem sobre as dos colegas, negociando significados para as ideias partilhadas (Ponte, Mata-Pereira & Quaresma, 2013; Sherin, 2002; Stein, Engle & Hughes, 2008). Neste sentido, a relevância deste estudo resulta das potencialidades que as discussões oferecem para a aprendizagem dos alunos, ao permitir que estes se envolvam na apresentação, justificação, argumentação e negociação de significados para as diversas ideias resultantes do seu trabalho sobre tarefas. Em particular, a participação dos alunos em discussões envolvendo tarefas algébricas favorece o desenvolvimento da capacidade de generalização e simbolização. A relevância deste estudo resulta também das atuais orientações curriculares que referem que "os alunos devem ser incentivados a expor as suas ideias, a comentar as afirmações dos seus colegas e do professor (…) explicando adequadamente o seu raciocínio e apresentando as suas conclusões de forma clara."(Ministério da Educação e Ciência, 2013, p.5). O professor desempenha um papel importante na organização e promoção das aulas que permitam aos alunos envolverem-se em discussões matemáticas coletivas.

Neste texto apresentamos os casos de dois professores de Matemática do 3.º ciclo do ensino básico (EB), a partir dos quais procuramos compreender como conduzem discussões coletivas relativas ao trabalho dos alunos com tarefas algébricas.

Práticas de discussão

O professor tem um papel importante na promoção de discussões matemáticas que favoreçam a apresentação, justificação, argumentação e negociação de ideias resultantes do trabalho dos alunos com tarefas algébricas. O modelo das cinco práticas de Stein et al. (2008) pode ser uma ferramenta importante no apoio à condução de discussões matemáticas produtivas. A primeira prática – antecipar – pressupõe que o professor antecipe possíveis estratégias de resolução a desenvolver pelos alunos, de eventuais dificuldades que possam enfrentar na resolução das tarefas e formas de as ultrapassar e como pode levar os alunos a atingir o propósito que define para a discussão. A segunda prática – monitorizar – prevê que o professor acompanhe o trabalho dos alunos com vista à identificação das resoluções mais importantes para serem apresentadas à turma, quer em termos de representações usadas quer em termos de conceitos mobilizados. A terceira prática – selecionar – supõe que o professor escolha as estratégias de resolução que pretende que os alunos apresentem e justifiquem, de acordo com o objetivo que tem para a discussão. A quarta prática – sequenciar – está relacionada com a forma como o professor organiza a apresentação das estratégias de resolução, tendo em conta o propósito que pretende alcançar. A quinta prática – estabelecer conexões – pressupõe que o professor leve os alunos a relacionarem conceitos e representações, a justificarem raciocínios e a argumentarem sobre os dos colegas.

Em sala de aula, Sherin (2002) considera que uma discussão coletiva pode ser organizada em três momentos principais: *i)* apresentação; *ii)* comparação e avaliação e *iii)* filtragem. No primeiro momento, os alunos apresentam e justificam as suas estratégias; no segundo, comparam as suas estratégias com as apresentadas pelos colegas e, em simultâneo, avaliam as representações, conceitos e generalizações presentes nas estratégias partilhadas. Os contributos mais importantes são filtrados pelo professor em conjunto com os alunos. Durante o envolvimento dos alunos em discussão, o discurso que se gera sofre um processo de estreitamento de ideias, (Sherin, 2002), com vista à generalização.

Na condução da discussão, o professor realiza um conjunto diversificado de ações instrucionais (Ponte, Mata-Pereira & Quaresma, 2013), com objetivos distintos: *i)* ações de convidar: introduzem o aluno na discussão; *ii)* ações de apoiar/guiar: promovem a continuidade dos alunos na discussão; *iii)* ações de informar/sugerir: apresentam informação e argumentos ou validam respostas; e *iv)* ações de desafiar: levam o aluno a introduzir representações, interpretar e estabelecer conexões, a raciocinar, a argumentar e a avaliar. O envolvimento dos alunos na discussão coletiva resulta das ações que o professor empreende para os levar a apresentar e justificar as suas estratégias de resolução, confrontá-las com as dos colegas, procurando pontos comuns e distintos, justificando essas semelhanças ou diferenças e estabelecer as principais conclusões resultantes da partilha de ideias.

Metodologia de investigação

O estudo apresentado é interpretativo qualitativo e segue a modalidade de estudo de caso (Bogdan & Biklen, 1994). A recolha de dados baseia-se na observação participante de cinco aulas e de dez sessões de trabalho colaborativo onde os professores se integram, nas entrevistas no início (EI) e no fim (EF) do estudo e no relatório individual (RI), apoiados em notas de campo (NC). As entrevistas são de natureza semiestruturada e, neste texto, são usadas para a apresentação dos professores. O relatório individual é apresentado pelos professores no âmbito do Projeto Práticas de discussão matemática no ensino da Álgebra. A análise de dados recorre à análise de conteúdo, com definição de categorias de codificação (Bardin, 1994), apoiada nos quadros teóricos de: Ponte

(2011); Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013) e Sherin (2002). Tendo por base esses quadros, cada caso de estudo está organizado em duas secções – apresentação do professor e condução da discussão coletiva – que correspondem a dimensões de análise, para as quais se definiram temas que são concretizados em diversas categorias (Quadro 1). As categorias são aplicadas transversalmente às diversas aulas observadas a cada professor e demais dados recolhidos. Focando o tema ações instrucionais, neste estudo usam-se a categorias *ações de elicitar*, em vez de convidar, *ações de apoiar*, em vez de apoiar/guiar e *ações de informar*, em vez de informar/sugerir, como propostas por Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013), porque a análise preliminar de dados indicou que caraterizam melhor as ações empreendidas pelos professores.

Dimensão	Temas	Categorias definidas
Condução da discussão	Componentes da discussão, processo e conteúdo do discurso	Apresentação; comparação e avaliação e filtragem; conclusão Solicitação e discussão de muitas ideias; filtragem das ideias partilhadas; solicitação e discussão de muitas ideias Conteúdo matemático não filtrado; conteúdo matemático filtrado
	Ações instrucionais	Elicitar; apoiar; informar; desafiar

Quadro 1: Dimensão, temas e categorias de análise

A escolha dos professores baseou-se nos seguintes critérios: estar a lecionar aos 7.º e/ou 8.º anos de escolaridade e manifestar interesse em participar no estudo.

Os casos que se apresentam fazem parte de um trabalho de investigação mais amplo – Projeto Práticas de discussão matemática no ensino da Álgebra (PPDMEA) – que ocorreu em contexto de um trabalho colaborativo e envolveu a primeira autora e o grupo de professores de Matemática de uma escola do EB do centro de Portugal, no qual os professores estavam inseridos. O trabalho colaborativo desenvolveu-se ao longo de nove meses, em dez sessões, com uma duração aproximada de três horas cada uma. Nessas sessões privilegiou-se a reflexão sobre textos e episódios de sala de aula relacionados com as discussões e com o tema da Álgebra (a partir das próprias experiências dos professores) e a preparação, em pequenos grupos, de tarefas, tendo em conta o modelo das cinco práticas de Stein et al. (2008). As tarefas foram selecionadas a partir de um conjunto de propostas introduzidas pela investigadora ou pelos professores e adaptadas, tendo em conta as características das turmas e os conteúdos que estavam a ser abordados em sala de aula e no PPDMEA. Neste texto, apresentamos dados relativos à condução de discussões coletivas sobre as tarefas Palitos (P) – primeira tarefa explorada pelo professor Afonso, Eleição do delegado de turma (EDT) – segunda tarefa explorada pelo professor Jorge e terceira pelo professor Afonso, sendo a segunda no 8.º ano e Funções e futebol (FF) – primeira tarefa explorada pelo professor Jorge e segunda tarefa explorada pelo professor Afonso, embora sendo a primeira no 8.º ano (Anexos 1, 2 e 3, respetivamente), por serem representativas do conjunto de dados. As tarefas foram exploradas pelos professores nas suas aulas, que decorreram em paralelo com o desenvolvimento das sessões do grupo colaborativo, tendo aí sido refletidas.

Apresentação e discussão de resultados

O caso do professor Afonso

O professor Afonso

É um professor com 25 anos de serviço, no momento do estudo, que se encontra a lecionar aos 7.º e 8.º anos de escolaridade. Apesar da sua vasta experiência profissional, não aposta muito na sua formação, pois não costuma frequentar encontros de professores de Matemática nem participar em projetos. Decide participar no PPDMEA porque identifica nos seus temas algumas potencialidades: vê na discussão um meio para os alunos realizarem aprendizagens significativas, em virtude da partilha de ideias: “Muitas vezes da discussão de ideias surgem (...) aprendizagens (...) tem uma aprendizagem completamente diferente, muito mais consolidada. (EI_set 2013).

A Álgebra é outro tema que lhe desperta interesse, por reconhecer que levanta grandes dificuldades aos alunos, fundamentalmente na simbologia que mobiliza: “A Álgebra é um dos temas onde os alunos (...) revelam muitas dificuldades. (...) um tema abstrato (...) É esta vontade em combater estes aspetos inibidores da aprendizagem dos meus alunos que procuro experimentar novas situações, usando metodologias variadas.” (RI_jul 2014).

Afonso vê na sua participação no PPDMEA uma forma de desenvolver a sua prática letiva, através da produção de materiais curriculares para as suas aulas e da troca de experiências resultantes da exploração desses materiais com os seus alunos, em particular no que se refere à condução de discussões no ensino da Álgebra.

Condução da discussão

Componentes da discussão, processo e conteúdo do discurso

Afonso inicia a *apresentação* das estratégias com o convite a alunos específicos, ao contrário do que fazia nas suas práticas letivas anteriores. Na tarefa EDT, opta por começar a apresentação das estratégias por um grupo que exibe uma resolução única na turma e que não envolve linguagem algébrica – estratégia por tentativa organizada numa tabela:

> **Professor:** Mas essa tabela como é que surgiu? (...) Foste por tentativas? (...) Começaste ali pela Sandra, tens ali *10*, depois a Francisca *5*, *5*. Mas o total é *20*. E a turma tinha *30* alunos.
> **Aluna:** Depois experimentei a Francisca com *9* que depois dava *7* e a Sandra ficava com *14*. O Lucas ficava com *7*. Depois deu o resultado de *30*.
> **Professor:** Mas tu foste ajustando os valores de modo a que tivesses aí um total de *30*. (Aula Equações_21 jan 2014).

Afonso acompanha de perto a exposição da aluna, apoiando-a na clarificação do seu raciocínio. Contudo, dá-lhe pouca liberdade de expressão e oferece alguns argumentos que deviam ser apresentadas por ela, nomeadamente a razão para ter abandonado a primeira tentativa. É também o professor que induz a identificação do tipo de estratégia seguida pelo grupo, com o tipo de questionamento que promove. Afonso, na reflexão que faz da aula, reconhece a sua dificuldade em articular a sua intervenção com a dos alunos: "Há sempre uma tendência de falar (...) aquilo acho que é um bocadinho mais forte que eu." (4.ª SC_9 jan 2014). Justifica-se pelo desejo que tem em levá-los a clarificar as suas ideias e a atingir o pretendido e admite que essa intenção condiciona, por vezes, a sua prática e origina situações em que a sua intervenção se sobrepõe à dos alunos: "O professor serve ali como um mediador e encaminha as coisas por onde quer não é? Pronto. E ajuda-os no sentido de clarificar." (EI_set 2013).

O professor filtra os contributos mais importantes, em particular reforça a razão para se ter abandonado a primeira tentativa e alerta para a verificação das condições apresentadas na tarefa.

Afonso promove a *comparação e avaliação* de estratégias através da introdução de uma resolução diferente na discussão – escrita de uma equação – desafiando a aluna a relacionar as duas resoluções:

> **Aluna:** Também baseei-me na Francisca e depois isto corresponde aos da, o $x+5$ corresponde aos da Sandra.

Professor: Porque ela dizia que tinha mais *5* votos do que a Francisca, certo? (...)
Aluna: E este é os do Lucas, x mais *5* a dividir por *2*.
Professor: E porquê a dividir por *2*? (...) Queres ver o enunciado?
Aluna: Porque era metade dos votos da Sandra.
Professor: Como a Sandra tinha x mais *5*, não é? Portanto, fizeste x mais *5* sobre *2*, certo? (...) O total que era o número de alunos da turma, certo? (Aula Equações_21 jan 2014).

Com o convite que dirige à aluna, Afonso pretende que os alunos comparem e avaliem duas estratégias distintas, a partir da mesma interpretação da informação dada no enunciado. Durante a sua apresentação, *filtra* os contributos mais importantes para que sejam reconhecidos como ideias válidas pelos outros e questiona, com vista a avaliar os raciocínios apresentados, procurando levá-los a relacionar as linguagens matemática e natural.

O professor encaminha o discurso com vista à clarificação e justificação de raciocínios, já que com a sua primeira intervenção tem como propósito *solicitar muitas ideias* para serem discutidas mas com o evoluir da apresentação, direciona o discurso para ideias específicas – *filtragem das ideias partilhadas*.

A *conclusão* da discussão serve para reforçar, na tarefa EDT, a possibilidade de abordagens diversificadas para a resolução de um mesmo problema:

Investigadora: Reparem que obtiveram 3 equações diferentes. Esta última não tinha denominadores, enquanto as anteriores tinham. (...) Dependendo do que escolhiam. (Aula Equações_21 jan 2014).

O professor, para além de alertar para a existência de diversas formas de se resolver um mesmo problema destaca os conceitos que mobilizam e a razão para o aparecimento de equações diferentes – designação da incógnita.

O professor Afonso conduz a discussão por três momentos principais e gere o discurso, de modo a selecionar os contributos mais importantes. (Figura 1).

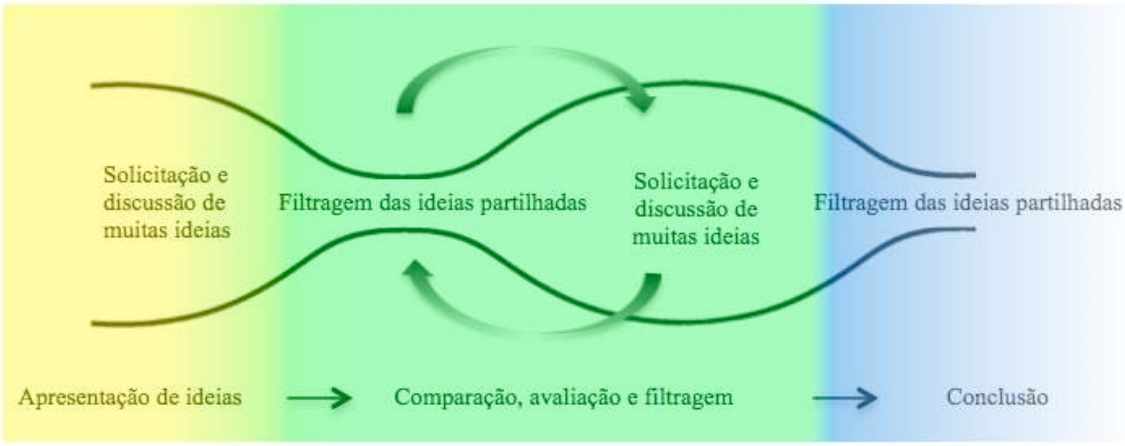


Figura 1: Condução da discussão coletiva

Ações instrucionais

Durante a condução da discussão, Afonso recorre às *ações de elicitar* para levar os alunos a apresentar as suas estratégias. Dirige, sempre, o convite a alunos previamente selecionados, ao contrário do que fazia antes da sua participação no PPDMEA. Na tarefa P, opta simplesmente por indicar qual é o aluno a apresentar, talvez pela própria estrutura da tarefa (organizada em várias questões, com um crescente grau de complexidade): "Qual é que é o grupo? (...) Vá Ricardo." (Aula Sequências_4 dez 2013). Na tarefa EDT, o convite já surge acompanhado do pedido de explicação dos seus raciocínios: "Mas explica aos teus colegas como é que pensaram." (Aula Equações_21 jan 2014), possivelmente pelo facto da tarefa não ser tão estruturada como a anterior. Ainda nessa tarefa, recorre a outras ações para promover a apresentação de estratégias e despertar o interesse da turma para a sua análise:

> **Professor:** Talvez, este grupo que fez uma maneira um bocadinho diferente. (...)
> **Aluna:** Nós escolhemos a Sandra, em que x era o número de votos da Sandra.
> **Professor:** x. A vossa colega anterior considerou o x como sendo o número de votos da Francisca, este grupo considerou o x o número de votos da Sandra, portanto o resultado vai ter que dar diferente, certo? (...)
> **Aluna:** O x menos *5* é os votos da Francisca, porque dizia que a Francisca tinha menos *5* votos que a Sandra, ou que a Sandra tinha mais *5* votos que a Francisca.
> **Professor:** Ok, tudo bem.
> **Aluna:** Depois fizemos mais um meio de x, porque o Lucas tinha um meio dos votos da Sandra. (...) (Aula Equações_21 jan 2014).

Afonso, para além de convidar os alunos a mostrar a sua resolução, alerta a turma para a existência de estratégias distintas das já partilhadas – *ações de informar*. Com essa ação, desperta o seu interesse para a análise de uma outra estratégia e comparação com as já apresentadas. Usa ainda estas ações para os incentivar a pensar sobre o resultado da equação. Pretende, assim, negociar com os alunos um certo procedimento: conjunto solução diferente em virtude da escrita de uma equação diferente. Recorre também às *ações de apoiar* para focar a sua atenção no aspeto fundamental da resolução e que a distingue das anteriores, comparando as designações das incógnitas. Essas ações são também usadas para transmitir confiança à aluna que está a apresentar, mostrando concordância com as suas explicações.

Na tarefa P, Afonso apoia-se nas *ações de desafiar* para incitar a aluna a explicar uma estratégia única na turma:

> **Carolina:** Eu fiz esta linha aqui de cima consoante a figura tem *n*, a linha debaixo também.
> **Professor:** Vai aumentando sempre. O *n* é, na primeira tem *1* em cima, na segunda tem *2*, na terceira tem *3*. (...)
> **Carolina:** E no meio, os palitos que estão na vertical eu fiz *n* mais *1*.
> **Professor:** *n* mais *1*. Porquê *n* mais 1? (Aula Sequências_4 dez 2013).

Afonso procura que a aluna justifique os raciocínios para que sejam interpretados pelos colegas, uma vez que é uma estratégia diferente de todas as apresentadas e recorre à análise do padrão configurativo da imagem. À medida que a aluna vai apresentando os seus argumentos, oferece interpretações de forma a clarificá-los para a turma – *ações de apoiar*.

O professor Afonso desempenha um conjunto de ações que levam os alunos a envolverem-se em discussão.

O caso do professor Jorge

O professor Jorge

É um professor que tem no momento do estudo 30 anos de serviço. É também formador na especialidade de tecnologias na sala de aula. Apesar da sua vasta experiência, continua a apostar na sua formação através da participação em projetos. Vê na sua participação no PPDMEA um meio para aprofundar um tema matemático tão importante como a Álgebra e que levanta grandes dificuldades aos alunos, principalmente a simbolização e a generalização: “Mesmo nas regularidades e sequências, eles conseguem perceber às vezes muito bem as regularidades, mas depois quando têm que formalizar aquilo numa expressão, torna-se um bocadinho difícil.”

(EI_set 2013). Com o trabalho que desenvolve no PPDMEA, Jorge trabalha colaborativamente com outros colegas, produzindo materiais para explorar com os seus alunos em sala de aula, que favoreçam o seu envolvimento na discussão.

Condução da discussão

Componentes da discussão, processo e conteúdo do discurso

Jorge inicia sempre a discussão com o convite à *apresentação* das estratégias menos poderosas do ponto de vista algébrico. Na tarefa EDT, dirige o convite a um grupo específico de alunos para apresentação de uma estratégia diferente das demais e que se baseia na produção de um texto acompanhada de alguns cálculos numéricos (Figura 2):

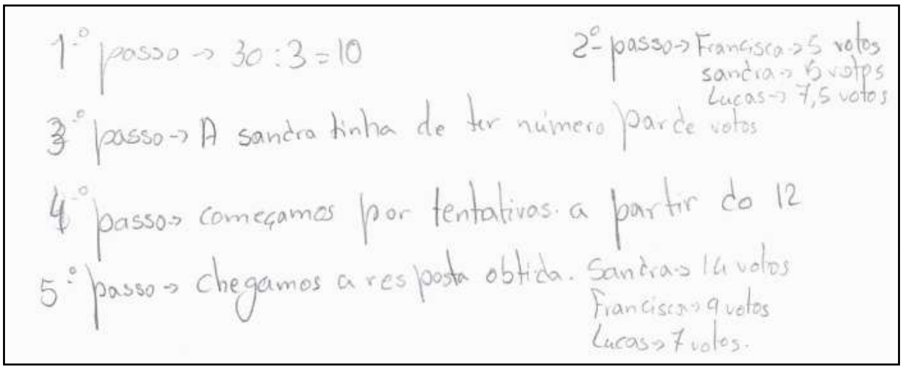

1.º passo -> 30 : 3 = 10
2.º passo -> Francisca -> 5 votos
Sandra -> 15 votos
Lucas -> 7,5 votos
3.º passo -> A sandra tinha de ter número par de votos
4.º passo -> começamos por tentativas a partir do 12
5.º passo -> chegamos a resposta obtida. Sandra -> 14 votos
Francisca -> 9 votos
Lucas -> 7 votos.

Figura 2. Estratégia de resolução baseada em linguagem natural

Assim que a resolução é exposta no quadro, desafia os alunos a analisarem o segundo passo e a apresentarem uma justificação para a incorreção do raciocínio exposto:

> **Professor:** Vocês começaram pelo 10, foi? (...) Por que é que aquele segundo passo está mal?
> **Mafalda:** Então porque não há meios votos.
> **Professor:** A conclusão está correta, mas esse segundo passo não está muito correto. (...)
> **Aluno:** Não podemos ter 7 votos e meio.
> **Professor:** Exatamente. (Aula_Equações_jan 2014).

Embora a aluna responda à sua solicitação, Jorge continua a insistir na ideia da existência de um erro na resolução, de modo a levá-los a procurarem outra justificação, sem deixar de valorizar os seus contributos. Decide focar mais a atenção dos alunos, levando-os a pensar sobre os votos específicos da Francisca e da Sandra:

> **Professor:** Qual era a relação entre os votos da Sandra e da Francisca?
> **Mafalda:** 5 votos de diferença.
> **Professor:** Então e quantos estão ali no quadro?
> **Aluno:** 10.
> **Professor:** (...) Pronto, mas o que o grupo pensou foi o seguinte: bem, pelo menos eu já sei que a Sandra nunca pode ter um número ímpar de votos,

> portanto e já restringiu nos 30 votos (...) depois fizeram por tentativas. (Aula_Equações_jan 2014).

Essa opção conduz os alunos à conclusão pretendida e à apresentação de várias justificações para o raciocínio do segundo passo. Jorge tem como objetivo alertá-los para a importância da escrita ser matematicamente rigorosa e exprimir claramente os seus raciocínios, recorrendo à negociação da interpretação de um argumento apresentado pelos alunos. O discurso instrutivo de Jorge mostra que, numa primeira fase, pretende ter muitas ideias para serem discutidas a partir da apresentação da estratégia de um grupo – *solicitação e discussão de muitas ideias* – não se preocupando, assim, com o conteúdo das mesmas – *conteúdo matemático não filtrado*. Contudo, mais tarde, oferece um raciocínio para analisarem – *filtragem* – que leva à *solicitação e discussão de mais ideias*. Nesse momento, tem propósitos explícitos para debater certos raciocínios, com o objetivo de alertar para o rigor da escrita matemática – *conteúdo matemático filtrado*.

Avança, de seguida, para a *apresentação* das estratégias que envolvem linguagem matemática formal, com recurso explícito a conceitos e procedimentos matemáticos:

> **Professor:** Para perceberem que a abordagem mesmo sendo feita com equações, nem sempre pode ser igual (...) Qual foi a diferença entre a resolução daquele grupo para este grupo?
> **Filipa:** Nós aqui pusemos o x na Francisca e eles puseram na Sandra.
> **Professor:** Obviamente que se a minha incógnita, o meu x é posto numa pessoa diferente, todos os outros também alteram. (...) aqui o x vai representar os votos da Sandra, ali foi os da Francisca. (...) e será que havia possibilidades de fazer uma equação daquelas sem denominadores? (Aula_Equações_jan 2014).

Com o objetivo de levar os alunos a *comparar* estratégias que recorrem ao mesmo conceito matemático, Jorge alerta-os para a existência de uma estratégia distinta das já apresentadas. Embora incentive a aluna a explicar a sua estratégia, rapidamente pega na sua fala e conclui todas as explicações e comparações que deviam ter sido oferecidas por ela. Jorge reconhece que tem dificuldade em articular a sua intervenção com a dos alunos, acabando por sobrepor o seu discurso, mesmo sem ser a sua intenção: "Quando dá conta já está a ultrapassar o aluno, eu isso reconheço que é um defeito que, às vezes, pelo menos eu tenho, não nego." (EF_jun 2014). Neste caso, justifica-se com a vontade de atingir um dos objetivos definidos para a aula – escrita de uma equação não envolvendo o uso de denominadores: "Porque uma pessoa tem uma expectativa quando vai para uma aula" (EI_set 2013).

Na tarefa FF, Jorge usa a *conclusão* da discussão para evidenciar que procedimentos algébricos devem adotar na resolução analítica de uma questão:

> Reparem o que o Tomás fez: pegou na expressão, pegou no ponto (9,7). Não se esqueçam que este é o objeto e aquele é a sua imagem e foi à expressão e substituiu (...) Fez a conta (...) passou o *b* para o lado de lá e quando passa de um lado para o outro troca o sinal (...) e tirou o valor de *b*. Estão a ver? Isto é o que é preciso fazer algebricamente. (Aula_Funções_jan 2014).

Jorge sente a necessidade de promover este tipo de conclusão, porque reconhece que os alunos apresentam dificuldades no trabalho com as Funções, em particular no uso da linguagem associada a este tema: "Ali o objeto e imagem, eles confundem aquilo sempre." (3.ª SC_dez 2013). Pretende, assim, contribuir para a clarificação dessas ideias junto dos alunos e fomentar o uso da terminologia associada a este tópico. Procura, também, salientar que é o procedimento matemático que devem usar em resoluções analíticas, interpretando-o em conjunto com os alunos e explicando todos os passos seguidos.

O professor Jorge conduz a discussão por três momentos fundamentais e gere o discurso com vista a garantir que são partilhadas ideias importantes (Figura 1 apresentada anteriormente).

Ações instrucionais

Jorge recorre a diferentes tipos de ações instrucionais para fomentar a discussão coletiva. Recorre às de *elicitar* para promover o início da discussão com a apresentação das estratégias desenvolvidas pelos alunos. Essas ações cumprem objetivos distintos, em função da natureza da tarefa e dos seus propósitos. Na tarefa FF, atendendo à particularidade de ser explorada com o recurso à calculadora gráfica, inicia a discussão solicitando as ilações que podem estabelecer a partir do trabalho desenvolvido: "O que é que se reteve deste segundo desafio? Alguém é capaz de dizer? (Aula_Funções_jan 2014). Nas restantes discussões que fomenta, escolhe os alunos que quer convidar para iniciar a apresentação das estratégias e indica o que pretende que seja mostrado e explicado à turma: "Quero que passes exatamente esses passos que tens aí. Depois explicas mais ou menos como é que pensaram." (Aula_Equações_jan 2014). Com essa ação, evidencia o que realmente é importante de ser analisado. Na tarefa FF, recorre às ações de apoiar, informar e desafiar para continuar a discussão que se gera em torno da identificação da ordenada na origem:

> **Professor:** O que se pretendia aqui era saber o valor de *b* sabendo que aquela trajetória batia naquele ponto que ali estava (...) Como é que eu posso saber qual é o valor de *b*? Alguns eu já vi aí que tentaram por tentativas, foram experimentando até dar com a calculadora mas era sem a calculadora.(...)
> **Marcelo:** Ó professor, não sei explicar.
> **Professor:** Porque *9* era o valor de quê?
> **Marcelo:** Do ponto.
> **Professor:** Da abcissa que é o valor de quê? Que interseta o valor de quê?
> **Marcelo:** Do *y*.
> **Professor:** Estão cá as contas, mas não se percebem muito bem. O que é que ele esteve a fazer? Ele esteve a pôr ali o *9* no lugar do *x*, que era o objeto *9*. (...) *9* vezes *2* deu *18* depois dividiu por *3* que deu quanto? Deu *6*. Deste lado dava quanto? Deu *7*. *7* e ali *6*. *7* menos *6* dá o valor do *b* que é *1*, só que aquilo está escrito de uma maneira muito estranha. Tomás, fizeste aquilo como deve ser? (...) Este é o raciocínio que vocês vão ter que fazer algebricamente quando é necessário. (Aula_Funções_jan 2014).

Jorge começa por recordar o propósito da tarefa para, de seguida, desafiar um aluno a apresentar a justificação da estratégia seguida na sua resolução – *ações de desafiar*. Esse convite surge depois de informar a turma da existência de uma estratégia que não era válida – *ações de informar*. Perante a dificuldade do aluno em expor o seu raciocínio, recorre às ações de apoiar para o ajudar a iniciar a sua explicação. Foca a sua atenção no valor que representa a ordenada na origem, levando-o a interpretar esse parâmetro – *ações de apoiar*. Aproveita as respostas do aluno para as repetir, mas recorrendo ao uso de terminologia correta, de forma a que se habituem a usar progressivamente vocabulário adequado a cada situação – *ações de apoiar*. De seguida, sugere uma interpretação para a resolução do aluno – *ações de apoiar* – reforçando a validade do raciocínio e a pouca clareza na sua apresentação. Dessa forma, insta outro aluno a apresentar uma resolução adequada e acessível, destacando que é a estratégia matematicamente correta. Jorge desempenha um conjunto de ações que promovem o envolvimento dos alunos em discussão.

Considerações finais

Os professores, apesar de terem uma vasta experiência profissional, decidem participar no PPDMEA por reconhecerem potencialidades nos temas do projeto e oportunidade para aprofundar as suas práticas.

Conduzem a discussão coletiva por três momentos principais: i) apresentação; ii) comparação, avaliação e filtragem; e iii) conclusão, tal como é sugerido por Sherin

(2002). Os professores iniciam a apresentação das estratégias pelas que surgem de forma isolada na turma e envolvem linguagem matemática informal, avançando posteriormente para as que mobilizam linguagem algébrica. Acompanham a exposição dos alunos mas reconhecem dificuldades do desempenho dessa ação, acabando por introduzir, no discurso da aula, informação que devia ser apresentada por eles. Promovem a comparação e avaliação de estratégias através do convite à análise e justificação de resoluções distintas, no caso de Afonso e da análise de raciocínios incorretos, no caso de Jorge. Afonso usa a conclusão da discussão para evidenciar a possibilidade de abordagens diversificadas e Jorge para destacar os procedimentos matemáticos a usar na resolução analítica de uma questão. Os professores gerem o discurso com vista à clarificação e justificação de raciocínios e de modo a evidenciar a necessidade da transição para a linguagem algébrica.

Os professores recorrem a quatro tipos de ações instrucionais para envolver os alunos em discussão. Usam as de elicitar para convidar os alunos a apresentar e justificar as suas estratégias. Atendendo possivelmente à estrutura da tarefa e ao momento em que promovem a discussão, os professores nas tarefas P e FF convidam somente os alunos a apresentar as suas estratégias, enquanto nas discussões seguintes já solicitam a explicação das estratégias desenvolvidas. Os professores recorrem às ações de informar para alertar para a existência de estratégias distintas (caso de Afonso) e raciocínios incorretos que devem ser analisados (caso de Jorge) e às ações de apoiar para focar aspetos importantes, ajudar os alunos a avançar nas suas explicações e repetir argumentos, usando linguagem correta. Afonso usa as ações de desafiar para levar os alunos a relacionar a solução de uma equação com a resposta ao problema e Jorge para promover a explicação de raciocínios.

De um modo geral, os professores, têm percursos profissionais bastante diferentes, em especial no que se refere ao investimento em formação. Possivelmente, este aspeto tem impacto nas suas práticas de discussão. Focando o momento da discussão comparação, avaliação e filtragem verifica-se que enquanto o professor Afonso se restringe ao estabelecimento de relações entre as diferentes resoluções, o professor Jorge destaca os conceitos mobilizados, realçando que utilizando o mesmo conceito surgem estratégias diferentes. Jorge promove, ainda, a comparação através da análise de raciocínios incorretos. Também no momento da conclusão, enquanto o professor Afonso conclui que o mesmo problema pode ter abordagens diversificadas, o professor Jorge alerta para os procedimentos algébricos a usar em resoluções analíticas. No que se refere às ações que empreendem, também se reconhecem algumas diferenças que podem estar relacionadas com o percurso profissional dos professores. Jorge usa as ações de apoiar para ajudar os alunos nas suas explicações, focando aspetos importantes; repetir argumentos, usando terminologia correta e para sugerir interpretações para as resoluções dos alunos, enquanto Afonso recorre às ações de apoiar para focar aspetos importantes e transmitir confiança aos alunos que estão a apresentar. Nas ações de informar também se reconhecem intencionalidades diferentes na atuação dos professores, já que Afonso recorre a este tipo de ações para alertar para a existência de estratégias diferentes e Jorge para avisar a turma da existência de estratégias que não são válidas.

Referências bibliográficas

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em Educação. Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Ministério da Educação e Ciência. (2013). Programa de Matemática para o Ensino Básico. Lisboa.

Ponte, J. P. (2011). Estudando o conhecimento e o desenvolvimento profissional do professor de matemática. En N. Planas (Ed.), *Educación matematica: Teoría, critica y prática* (pp. 83-98). Barcelona: Graó.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante*, *22* (2), 55-81.

Sherin, M. G. (2002). A balancing act: developing a discourse community in a mathematics classroom. Journal of Mathematics Teacher Education, 5, 205-233.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*, 313-340.

ANEXOS

Anexo 1:

Tarefa: Palitos

Considera a seguinte sequência de figuras construídas com palitos que continua da forma que a imagem sugere:

1. Quantos palitos terá a 5.ª figura? E a 15.ª?

2. Será possível construir uma figura desta sequência com 76 palitos? Explica como pensaste.

3. Escreve uma regra que te permita determinar o número de palitos de qualquer figura desta sequência. Explica como a obtiveste.

4. A Aurora, que também resolveu esta tarefa, diz que o número de palitos de qualquer figura, T, desta sequência pode ser obtido a partir da seguinte regra:

$$\boldsymbol{T = 4 \times n - (n - 1)}$$

Explica como poderá ter pensado.

Como se relaciona esta regra com a que escreveste na questão número 3?

Anexo 2:

Tarefa 1 – "Eleição para o delegado de turma"

A diretora de turma que coordenou o processo de eleição do delegado de turma, informou no final que:

- ✓ Os 30 alunos da turma votaram e não houve votos brancos ou nulos;
- ✓ Apenas três alunos receberam votos: a Francisca, o Lucas e a Sandra;
- ✓ A Sandra recebeu mais cinco votos que a Francisca;
- ✓ O Lucas recebeu metade dos votos que recebeu a Sandra.

Quem ganhou as eleições? Com quantos votos?

Não te esqueças de apresentar e explicar o teu processo de resolução.

Anexo 3: Funções e futebol

Temos na escola um candidato a grande guarda-redes!
Para que ele consiga esse objectivo é preciso que treine muito.
Vamos ajudá-lo!
Comecemos por preparar o terreno de jogo.
Como mostra a figura ao lado, na tua calculadora gráfica estão marcados os pontos A(9,4) e B(9,7) que serão os postes das balizas e o ponto C(0, 5) o local onde o jogador fará o primeiro remate à baliza.

Primeiro vamos treinar os remates à baliza.

A trajetória destes remates está associada a uma reta definida por uma função, do tipo $y = mx + b$, em que **m** representa a inclinação da reta (***declive***) e **b** o ponto onde esta intersecta o eixo Oy (***ordenada na origem***).

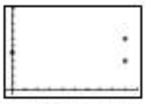
Por exemplo, experimenta fazer o primeiro remate utilizando a função

$$y = 0{,}6x + 5 \quad (m=0{,}6 \text{ e } b=5)$$

O que aconteceu? Acertaste na baliza?

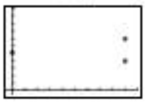
1º desafio:

Encontra uma expressão para a função de modo que o remate acerte na baliza...
Já conseguiste?
Desenha e regista a solução encontrada



y = ________

Será que esta é a única solução?
Se encontraste outra, regista-a também a seguir:



y = ________

Ok, estás pronto para novos desafios?

A pontaria está afinada?
O treino vai começar a aquecer!

4º desafio:

a) Desta vez, jogador fez um remate muito forte mas a pontaria não foi a melhor e acertou num poste, conforme mostra a figura. Sabe-se que a expressão da trajetória do remate foi:

$$y = -\frac{2}{9}x + 6$$

Sem utilizares a calculadora, indica a posição C de onde o rematador chutou.
Confirma o resultado com a calculadora.

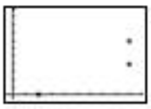
b) A pontaria está afinada e no remate seguinte acertou, desta vez, no outro poste, com a trajetória dada pela expressão

$$y = \frac{2}{3}x + b$$

Determina, **sem utilizares a calculadora**, o local em que foi executado o remate.
Confirma com a calculadora.

c) Um jogador vai agora rematar duas bolas do local C(2,0) com as seguintes trajetórias definidas pelas funções:

$y_1 = 0{,}5x - 1$
e
$y_2 = x - 2$



Sem utilizares a calculadora, verifica se alguma delas acerta num dos postes?
Confirma os resultados com a calculadora.

2º desafio:

O rematador, muda de sítio cada vez que faz um remate. Para cada localização do ponto C, a seguir indicado, determina a solução para que a bola acerte na baliza:

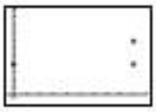
a) C(0,1)

y = ________

b) C(0,8)

y = ________

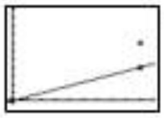
c) C(0,4)



y = ________

3º desafio:

Num dos remates, o jogador colocado em C(0,0), rematou segundo a expressão $y = \frac{4}{9}x$ e acertou num dos postes.
Confirma utilizando a calculadora.

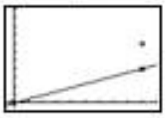


Descobre a expressão da função de modo que o remate tenha uma trajetória paralela à dada e indica em cada caso o local C em que o jogador rematou, de modo que a bola:

a) entre na baliza

y = ________ C(,)

b) bata no outro poste



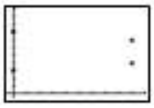
y = ________ C(,)

Finalmente o último teste às capacidades do guarda-redes: dois jogadores a chutarem ao mesmo tempo!

5º desafio:

Um remata do ponto C(0,3) e outro do ponto D(0,8). Ambos acertam na baliza.
Descobre uma expressão para cada uma das funções de modo que:

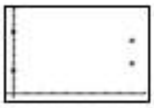
a) as trajetórias dos remates não se cruzem antes de cada bola entrar na baliza.



y = ________

y = ________

b) as trajetórias dos remates se cruzem antes de as bolas entrarem na baliza.



y = ________

y = ________

6º desafio:

Nos últimos remates do treino, os dois jogadores, colocados em sítios diferentes, remataram ao mesmo tempo e as bolas seguiram trajetórias definidas pelas funções:

$$y_1 = 2x \quad \text{e} \quad y_2 = -2x+8$$

Curiosamente, as bolas acabaram por bater uma na outra.
Verifica, **sem utilizares a calculadora**, em qual dos seguintes pontos as bolas chocaram:

a) X(3,5) b) Y(2,4) c) Z(2,2)

CONHECIMENTOS MOBILIZADOS POR PROFESSORES QUANDO PREPARAM ATIVIDADES MATEMÁTICAS PARA O ENSINO DE POLINÔMIOS NA ESCOLA BÁSICA[1]

Etienne Lautenschlager[1], *Alessandro Jacques Ribeiro*[2]
[1]Universidade Federal do ABC (UFABC), Secretaria Municipal de Educação de São Paulo (SME/SP), elautens@yahoo.com.br
[2]Universidade Federal do ABC (UFABC, alessandro.ribeiro@ufabc.edu.br

Resumo. *A presente comunicação tem por objetivo identificar e analisar tipos de conhecimentos mobilizados por um grupo de professores de Matemática durante uma formação sobre o ensino de polinómios para a Escola Básica, bem como compreender a contribuição dessa proposta para a aprendizagem dos professores. Para isso, analisamos produções dos professores em um episódio composto por dois encontros dentre os dez realizados com os professores. Utilizamos os pressupostos do modelo do Conhecimento Especializado do Professor de Matemática (MTKS) em nossas análises e, dentre as principais conclusões, pudemos observar uma ampliação e evolução nos subdomínios do MTKS mobilizados pelos professores ao longo do processo de formação continuada, tanto no que se refere aos conhecimentos específicos sobre o conceito de polinómios, quanto no conhecimento didático para o ensino de tal conceito matemático.*

Abstract. *This paper aims to identify and analyze types of knowledge mobilized by a group of teachers of mathematics during a process of teacher education based on the teaching of polynomials for the Basic School, as well as, analyze the contribution of this proposal for teachers' learning. For this, we analyze teachers' productions in an episode consists of two meetings of the ten made with teachers. We used the assumptions of the Mathematics Teacher Specialist Knowledge (MTKS) model in our analyzes and, among the main conclusions, we could observe an expansion and evolution in the MTKS subdomains mobilized by the teachers throughout the continuous training process, both in Refers to the specific knowledge about the concept of polynomials, as well as the didactic knowledge for the teaching of such mathematical concept.*

Palavras-chave: *Ensino de Polinómios; Formação Continua de Professores; Conhecimento Profissional Docente; Ensino de Álgebra.*

Introdução: apresentando nosso problema de pesquisa

A Álgebra tem sido reconhecida como um marco fundamental na aprendizagem matemática dos alunos; assim, pesquisadores em educação matemática têm investido crescentes esforços para caracterizar o conhecimento matemático dos professores em

[1] Pesquisa desenvolvida no âmbito do Programa Observatório da Educação (OBEDUC), financiado pela Coordenadoria de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), processo 1600/2012.

contextos de ensino e de aprendizagem, bem como auxiliar os estudantes na compreensão dos conceitos algébricos (Artigue, Assude, Grugeon & Lefant; 2001; Doerr, 2004; Ribeiro, 2012; Aguiar, 2014; Lautenschlager & Ribeiro; 2014; Ribeiro & Cury; 2015).

Ao evidenciarmos o ensino de conteúdos matemáticos pautado numa metodologia que emprega a mera memorização de procedimentos operatórios, isso nos leva a refletir sobre o quanto o papel do professor é importante para que a construção do conhecimento conceitual seja realmente favorecida.

Diante disso, o presente trabalho[2] se propõe analisar a estrutura da base de conhecimentos mobilizados por um grupo de professores de Matemática durante uma formação sobre o ensino de polinómios para a Educação Básica, utilizando-se da perspectiva teórica MTSK[3] (em inglês *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge*) elaborada por Carrillo, Climent, Contreras & Muñoz-Catalán (2013).

No Brasil, o início do ensino de polinómios ocorre nos anos finais do Ensino Fundamental (estudantes com idades entre 12 e 14 anos), momento no qual também se inicia a sistematização do pensamento algébrico por meio do ensino de: expressões algébricas, equação polinomial do 1.° grau, sistemas de inequação, polinômios, produtos notáveis, fatoração, função, dentre outros.

A pesquisa realizada por Ibrahim (2015) ratifica nossa preocupação com o ensino de polinómios, uma vez que a autor aponta "os polinómios" como um dos mais importantes conceitos trabalhados no campo da Álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental nas escolas brasileiras. Para além do currículo escolar brasileiro, Eisenberg & Dreyfus (1995) apontam que, nos últimos 20 anos, parece ter havido uma nítida redução na ênfase aos tópicos relacionados a este tema – o ensino de polinómios, no currículo escolar de diversos países.

Retomando a pesquisa de Ibrahim (2015), observa-se que o livro didático é uma ferramenta decisiva das ações docentes e, muitas vezes, é a única diretriz para o professor em suas salas de aula. Neste sentido, a pesquisadora nos indica que a maioria dos livros didáticos por ela analisados, desenvolve os conceitos envolvendo polinómios de forma

---

[2] O presente trabalho é parte de uma pesquisa de doutoramento desenvolvida pela primeira autora desse trabalho, sob a orientação do segundo autor (Lautenschlager, 2017)

[3] Utilizaremos em todo o texto as siglas originais oriundas da língua inglesa, como tem sido feito na literatura internacional sobre o tema.

puramente algorítmica, privilegiando a fixação das regras e na repetição de exercícios. Situação semelhante identificada na pesquisa de Koerich (2000).

Tudo isso nos faz refletir sobre a importância de os professores não trabalharem exaustivamente a memorização de procedimentos ou de fórmulas, mas sim, dar ênfase ao desenvolvimento de conceitos matemáticos construídos com suporte na contextualização, na compreensão e no significado, ampliando o modo como, em geral, ele é trabalhado nas escolas (Araújo, 1999). Assim sendo, chamamos a atenção para a necessidade de identificar e de compreender os conhecimentos que o professor deve elaborar/mobilizar durante sua formação inicial ou continuada, para que possa ter exito em seu oficio docente.

Referencial teórico: um modelo para analisar o conhecimento profissional docente

Muitos modelos teóricos para analisar o conhecimento dos professores vêm sendo desenvolvidos apoiados na premissa apresentada por Shulman (1986, 1987) sobre a existência de um conjunto de “conhecimentos base” (*knowledge base*) para o ensino. Na área da Educação Matemática temos os trabalhos de Ball, Thames & Phelps (2008) e Carrillo et al. (2013).

Em nosso estudo, tomamos por referencial teórico o modelo proposto Carrillo et al. (2013) sobre o conhecimento profissional que é específico de professores de Matemática, o MTSK. Esse modelo encontra-se dividido em dois domínios: o conhecimento matemático (MK[4]) e o conhecimento pedagógico do conteúdo (PCK[5]), sendo cada um deles divididos em três subdomínios. Assim, o conhecimento matemático é dividido em conhecimento de tópicos (KoT[6]), conhecimento da estrutura Matemática (KSM[7]) e o conhecimento sobre matemática (KAM[8]).

O KoT inclui o conhecimento de conceitos e procedimentos matemáticos e a sua fundamentação teórica correspondente. O conhecimento das principais ideias e estruturas, as conexões entre tópicos (avançados e elementares, prévios e futuros, de diferentes áreas matemáticas etc., exceto as de fundamentação previstas em KoT) que permitem

---

[4] No original em inglês, *mathematical knowledge*.
[5] No original em inglês, *pedagogical content knowledge*.
[6] No original em inglês, *knowledge of topics*.
[7] No original em inglês, *knowledge of the structure of mathematics*.
[8] No original em inglês, *knowledge about mathematics*.

reconhecer certas estruturas da Matemática, bem como, vê-la como um sistema de elementos integrados (Moriel-Junior & Carrillo; 2014, p. 466) fazem parte do KSM.

O KAM inclui o conhecimento de formas de conhecer e criar ou produzir em Matemática (conhecimento sintático), aspectos de comunicação matemática, raciocínio e teste, saber definir e utilizar definições, estabelecer relações (entre conceitos, propriedades, etc.), correspondências e equivalências, selecionar representações, argumentando, generalizando e explorando.

Ainda segundo os mesmos autores, o MK estende-se sobre toda a gama de conhecimentos matemáticos, abrangendo todo o universo da Matemática, compreendendo conceitos e procedimentos, estruturando ideias, conexões entre conceitos, razão ou origem de procedimentos, meios de teste e qualquer forma de proceder em matemática, junto com linguagem Matemática e sua precisão.

O conhecimento pedagógico do conteúdo também é divido em três subdomínios, a saber: conhecimento do ensino de Matemática (KMT[9]), conhecimento das características de aprendizagem de Matemática (KFLM[10]) e o conhecimento das normas da aprendizagem de Matemática (KMLS[11]).

O KMT diz respeito ao emprego e à utilização de materiais, recursos, modos de apresentar um conteúdo (incluindo a organização de um procedimento de passos, ou etapas ligadas, correlacionadas para tornar mais eficiente o processo de aprendizado). Também inclui o conhecimento de elementos teóricos sobre o ensino da Matemática. O KFLM diz respeito ao conhecimento sobre como os estudantes aprendem conteúdos matemáticos. Já o KMLS se refere às especificações curriculares envolvendo o que está previsto em cada etapa da educação escolar em termos de conteúdos e competências, normas mínimas e as formas de avaliação que possibilitam a progressão de um ano para outro, objetivos e medidas de desempenho desenvolvidos por organismos externos (Moriel-Junior & Carrillo; 2014, p. 467).

Assim temos:

---

[9] No original em inglês, *knowledge of mathematics teaching*.
[10] No original em inglês, *knowledge of features of learning mathematics*.
[11] No original em inglês, *knowledge of mathematics learning standards*.

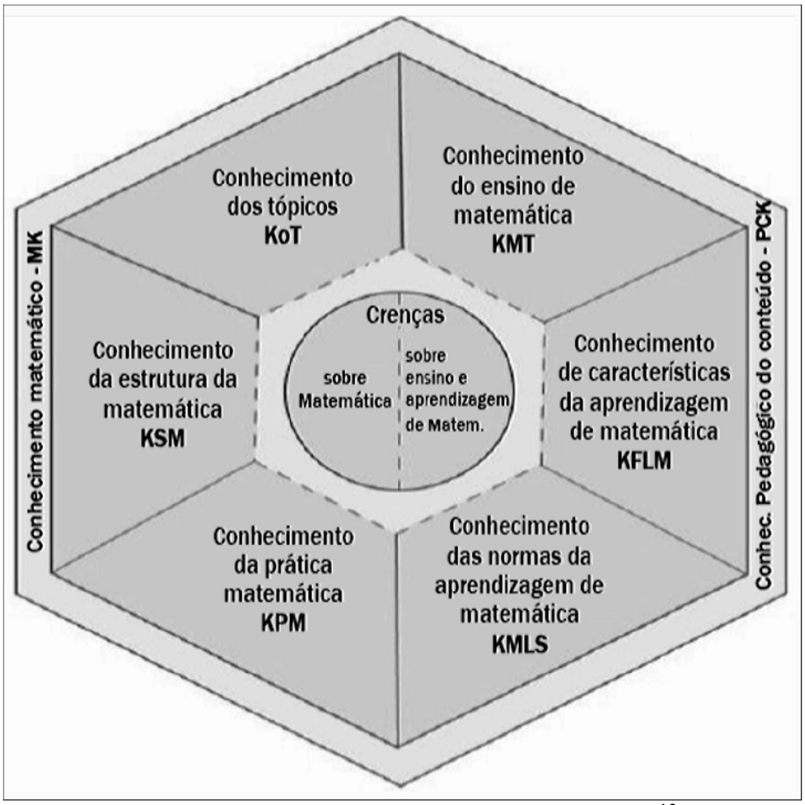


Figura 1. Domínios e subdomínios do MTSK[12]

Corroborando as ideias de Moriel-Junior & Carrillo (2014), também entendemos que esses "seis subdomínios descrevem como entender o conhecimento específico de um professor de Matemática e servem como 'categorias' de análise em investigações" (Moriel-Junior & Carrillo; 2014, p. 467). Nesse sentido, parece-nos que tal modelo teórico atende as necessidades e especificidades de nosso trabalho e poderá nos fornecer uma importante ferramenta de análise dos dados produzidos em nosso estudo, como passaremos a explorar na próxima seção.

A metodologia do estudo: nosso contexto de pesquisa e os procedimentos de coleta de dados

Considerando a proposta de nossa pesquisa identificar e analisar tipos de conhecimentos mobilizados por um grupo de professores de Matemática durante uma formação sobre o ensino de polinómios para a Escola Básica, bem como também, analisar a contribuição

[12] Podemos observar que na figura 1 o KAM é denominado KPM, porém sua essência não é alterada (Moriel-Junior & Carrillo; 2014).

dessa proposta para a aprendizagem dos professores, tomamos por abordagem metodológica princípios da pesquisa qualitativa (Bogdan & Biklen; 1994; Garnica, 2004), numa perspectiva teórica interpretativa (Crotty, 1998).

Para a realização da nossa pesquisa tomamos como fonte de dados a serem analisados as produções de professores que participaram de um curso de extensão destinado a professores da Educação Básica da rede pública do estado de São Paulo, no Brasil, referido daqui em diante como "o curso". Nesse sentido, entendemos ser relevante para a compreensão de nossa investigação que seja apresentado o referido curso e seu contexto. Esse curso de extensão, que foi realizado no período de março a dezembro de 2016, priorizou a realização de estudo, análise e discussão de diferentes atividades envolvendo a Álgebra e seu ensino, sobretudo no que se refere mais especificamente às estruturas algébricas e suas possíveis conexões com a Álgebra Escolar. O curso contou também com a participação, na equipe de organização, de estudantes da pós-graduação e professores universitários[13].

O curso foi ministrado na Universidade Federal do ABC (UFABC), com uma carga horária 180 horas em dois módulos de 90 horas cada. Foram realizados 31 encontros presenciais e nove sessões à distância, cada uma com duração de 4 horas e 30 minutos. Foram discutidos os temas: (1) grupos colaborativos; (2) conjuntos dos números naturais, conjunto dos números inteiros, anéis e anéis de polinómios, conjunto dos números racionais e a noção de corpo dos racionais; (3) estudo de funções e de equações e suas relações com o ensino na Educação Básica. Na Tabela 1 apresentamos o período do curso no qual a produção de dados de nossa investigação foi considerado, com destaque para os encontros nos quais recolhemos os dados apresentados neste trabalho:

Tabela 1. Atividades realizadas no curso de extensão

Encontro nº	Atividade realizada
2	***Apresentação do curso*** ***Elaboração da sequencia didática***
3	Estudo do conjunto dos números naturais
4	Estudo do conjunto dos números inteiros
5	Estudo da estrutura algébrica: anel
6	Estudo da estrutura algébrica: anel
7	Estudo dos polinómios

[13] Projeto de pesquisa *"Conhecimento Matemático para o Ensino de Álgebra: uma abordagem baseada em perfis conceituais"*, desenvolvido no âmbito do Programa Observatório da Educação (OBEDUC), da Capes (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), protocolo 1600/2012.

8	Estudo dos polinómios
9	Estudos da estrutura algébrica: anel dos polinómios
10	***Reelaboração da sequência didática***

Fonte: Elaborado pelos autores

As atividades desenvolvidas nos encontros presenciais foram concebidas de modo a abordar os assuntos em diferentes níveis de sofisticação, isto é, desde os conceitos e procedimentos mais elementares até os mais complexos. Como por exemplo, citamos o estudo da construção do conjunto dos números inteiros, suas propriedades e operações, o ensino dos números inteiros na Educação Básica e a teoria de anéis que possuem propriedades (de certa forma) similares às dos números inteiros. Em cada sessão, os temas escolhidos foram discutidos no grupo, destacando as dificuldades de compreensão, resolução e de conceitos matemáticos envolvidos nos mesmos.

Nossos dados foram produzidos por dez professores licenciados em matemática que atuavam nos ensinos Fundamental e/ou Médio, cujo perfil consta na Tabela 2:

Tabela 2 – Perfil dos participantes da pesquisa

Identificação dos Professores	Idade	Sexo	Ano de conclusão da licenciatura	Pós-Graduação
A	39	M	2002	Mestrado
B	30	M	2015	NÃO
C	29	F	2011	Mestrado
D	29	M	2011	*Lato Sensu*[14]
E	45	M	2012	*Lato Sensu*
F	42	M	2003	*Lato Sensu*
G	38	M	2015	*Lato Sensu*
H	31	M	2011	NÃO
I	51	F	1987	NÃO
J	37	M	2001	Mestrado

Fonte: elaborado pelos autores

A proposta de trabalho que subsidiou nossa coleta de dados ocorreu da seguinte maneira: foi solicitado aos professores que, no segundo encontro do curso, com base no roteiro indicado na Tabela 3, elaborassem uma sequência didática[15] com o objetivo de ensinar polinómios para alunos da Educação Básica. Depois disso, a partir do terceiro encontro

[14] No Brasil, os cursos de pós-graduação *lato sensu* se definem com sendo os de especialização em qualquer área do conhecimento. Normalmente é um curso de, no mínimo, 360 horas (com duração de 18 meses, em média).

15 Utilizamos os termos "sequência didática", "sequência de aulas", "plano de aula", "planos de ensino" como sinônimos, pois, de fato, estamos interessados nas produções que os professores organizaram como sendo propostas de atividades matemáticas para serem desenvolvidas em salas de aula da Educação Básica.

(conforme indicado na Tabela 1), o curso contou com oito encontros que discutiram os temas: construção lógico-formal dos números inteiros, ensino dos números inteiros, conjunto dos números naturais, polinómios (do ponto de vista da Álgebra acadêmica e escolar), anéis e anel dos polinómios. Também foram contempladas nos encontros questões referentes às dificuldades dos alunos no estudo da Álgebra e tendências em Educação Matemática. No décimo encontro foi solicitado aos professores que reelaborassem a sequência didática. Essa proposta teve por objetivo verificar se as sequências didáticas elaboradas anteriormente pelos professores sofreriam alterações após sua participação no curso. Vale destacar que, em ambos os momentos, os professores poderiam consultar todos os materiais que julgassem necessários para a elaboração da sequência didática, desde que indicassem, ao final, a bibliografia consultada. Destacamos que esta atividade foi realizada individualmente, pois considerando que se tratava de um grupo composto por professores com diferentes experiências e formação acadêmica, nosso intuito era observar, também, se tais fatores poderiam interferir nas respostas produzidas por eles.

O roteiro, pensado com a finalidade de orientá-los sobre os elementos que poderiam constar em suas sequências didáticas, é apresentado a seguir:

Tabela 3 – Roteiro para elaboração da sequência didática

Seu objetivo é ensinar sobre polinómios para um grupo de alunos.
1) Qual o público alvo? Para qual ano da Educação Básica essa aula será ministrada?
2) Qual o número de aulas necessárias?
3) Quais são os conhecimentos prévios dos alunos para que eles possam compreender e participar nessa aula?
4) Quais estratégias que serão empregadas?
5) Quais recursos que serão utilizados?
6) Quais questionamentos serão feitos? (ou pretende fazer?)
7) Dê exemplos de atividades que serão propostas para a turma.
8) Da atividade proposta, qual(is) seria(m) a(s) possível(is) solução(ões) que os alunos fariam? Qual seria a solução que você faria? Existem outras soluções? Se sim, apresente-as. Se não, por quê?
9) Há alguma explicação que você considere indispensável ser dada? Qual?
10) Quais as dificuldades que os alunos poderiam apresentar, em relação ao conceito matemático abordado em sua aula? E na resolução da situação matemática?
11) O conceito matemático abordado no plano de aula será/deverá ser retomado, posteriormente, em outro ano da Educação Básica? Tal conceito será/poderá ser utilizado como conhecimento prévio para a aprendizagem de outro conceito matemático?

Fonte: Dados da pesquisa

Apresentação e análise dos dados: os conhecimentos mobilizados pelos professores

Uma vez que os dados produzidos em nosso estudo se deram em dois momentos, o segundo e o décimo encontro do curso, optamos por organizar nosso processo de análise da seguinte forma: primeiramente apresentamos e discutimos as sequências didáticas elaboradas pelos professores no início do processo (segundo encontro). Em seguida, analisaremos as sequências (re)elaboradas num segundo momento (décimo encontro) e, por fim, buscamos apresentar algumas comparações nas sequências produzidas com a finalidade de identificar se elas sofreram alterações após a participação no curso (dos encontros terceiro ao nono) e, em caso afirmativo, como isso se deu. Vale destacar que nossas análises não tinham por propósito julgar se as propostas dos professores estavam bem ou mal elaboradas. Nosso objetivo foi trazer à tona, a partir da análise das sequências didáticas, identificar e compreender elementos dos conhecimentos mobilizados pelos professores no que se referem ao ensino dos polinómios na/para a Educação Básica.

Iniciamos então, com a análise das primeiras sequências didáticas desenvolvidas pelos professores, tomando-se por base a organização que propomos na Tabela 4, a qual busca relacionar as questões por nós elaboradas (apresentadas na Tabela 3) que serviram de roteiro para os professores elaborarem suas sequencias e os domínios do MTSK (Carrillo et al.; 2013). A partir desse pressuposto, chegamos à seguinte configuração:

Tabela 4. Modelo do MTSK e Questões[16]

	Subdomínio	*Envolve...*	*Questões*
Conhecimento pedagógico do conteúdo (PCK)	KMT	Conhecimento de como o ensino pode ou deve ser realizado. Estratégias de ensino diversas que auxilie o aluno no desenvolvimento de suas capacidades procedimentais e conceituais em matemática. Realizar a seleção de exemplos ou escolher um livro.	4, 5, 6, 7 e 9
	KFLM	O conhecimento de como os alunos aprendem os conteúdos matemáticos, as características desse processo de compreensão, erros comuns, dificuldades, obstáculos e a linguagem normalmente usada pelos estudantes ao lidar com cada conceito. A identificação das características da aprendizagem matemática.	8 e 10

[16] Consideramos que as questões 3 e 11 estão relacionadas ao conhecimento que engloba as conexões entre tópicos avançados ⇔ elementares, prévios ⇔ futuros, pertencente ao subdomínio KSM e, por essa razão, não as consideramos nas análises desse trabalho.

	KMLS	Conhecimento das especificações curriculares envolvendo o que está previsto em cada etapa da educação escolar em termos de conteúdos e competências (conceituais, procedimentais, atitudinais e de raciocínio matemática nos diversos momentos educativos), normas mínimas e as formas de avaliação que possibilitam a progressão de um ano para outro.	1

Fonte: Elaborado pelos autores

Em relação à primeira questão do roteiro sugerido, observamos que todos os professores indicaram o 8º ano como sendo o momento adequado na escolaridade básica para a introdução ao estudo dos polinómios. O conhecimento que permite aos professores indicarem o que está previsto em cada etapa da educação escolar em termos de conteúdos e competências insere-se no subdomínio KMLS e, em nossa interpretação, os professores foram capazes de mobilizar tal forma de conhecimento e adequarem o estudo dos polinómios ao momento escolar correspondente.

No que se refere às estratégias de ensino no entanto, observamos que 9 dos 10 professores investigados parecem seguir "um roteiro pronto" para o ensino dos polinómios, roteiro esse que se inicia pela definição de monómios e de polinómios e, em seguida, passa a abordar as operações envolvendo polinómios. Evidências disso podem ser observadas no protocolo apresentado na Figura 2. Este cenário parece ratificar o que Koerich (2000) aponta em sua pesquisa, no que se refere à forma como o conceito de polinômio é apresentado nos livros didáticos e como os professores organizam suas propostas de aulas. Ibrahim (2015) evidencia que, geralmente, nos livros didáticos, a proposta para o estudo dos polinómios, segue a seguinte ordem: expressões algébricas, monómios, polinómios, operação com polinómios, produtos notáveis, e fatoração de polinómios.

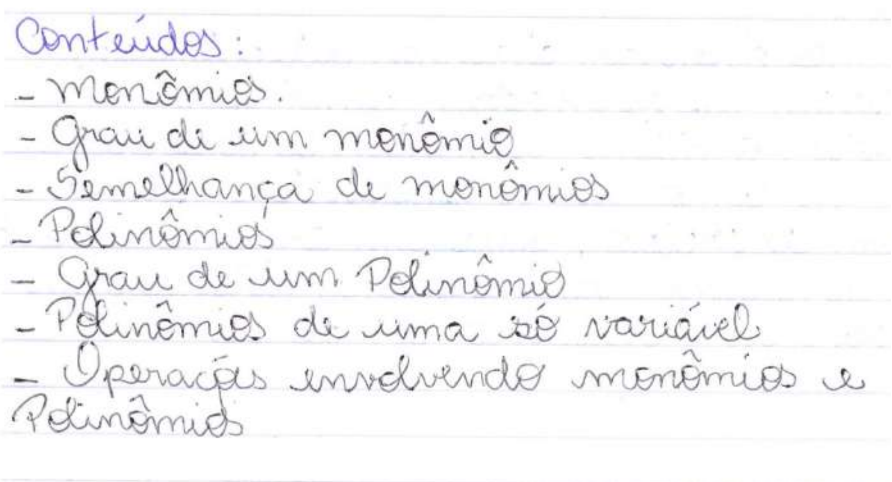
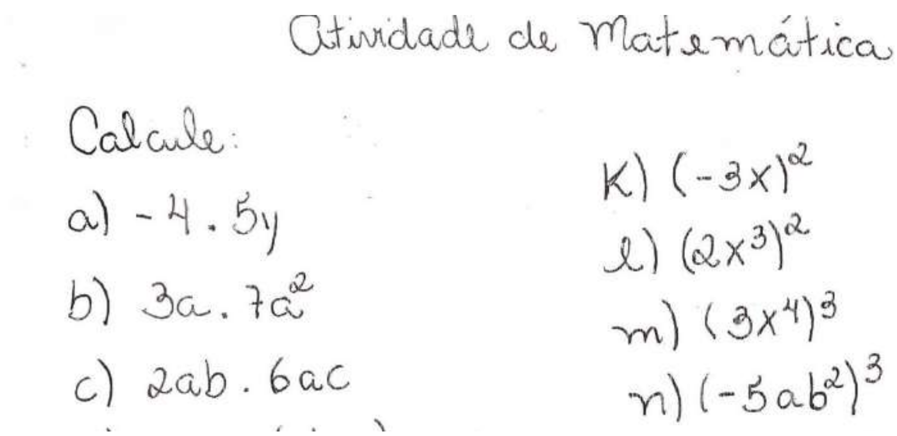

Conteúdos:
- Monômios.
- Grau de um monômio
- Semelhança de monômios
- Polinômios
- Grau de um Polinômio
- Polinômios de uma só variável
- Operações envolvendo monômios e Polinômios

Figura 2. Roteiro para o ensino dos polinómios elaborado pelo professor B

O conhecimento que permite aos professores escolherem um livro e optarem por uma série particular de (contra)exemplos, ao invés de usar outros recursos e materiais, para ajudar os alunos a compreenderem o significado de algum tópico matemático faz parte do subdomínio KMT. A partir das evidências que obtivemos em nosso estudo, notamos a falta de estratégias variadas, tais como, uso em atividades para modelar diferentes situações (por exemplo, no mercado de ações, para descrever a trajetória de um projétil, entre outras), as quais poderiam possibilitar uma compreensão do conceito de polinômio por parte dos estudantes, que rompesse com a simples manipulação de métodos e técnicas de resolução. Em assim sendo, os dados nos sugerem limitações do conhecimento dos professores no que tange a este subdomínio, o KMT.

Os professores mencionam em suas sequencias didáticas que os estudantes apresentam dificuldades em operar com polinómios; “enxergar” a expressão algébrica como uma possível resposta de um exercício; identificar o grau do polinômio. Esse tipo conhecimento, que permite a identificação das dificuldades apresentadas pelos alunos é parte do KFLM e, segundo nossos dados, parece que os professores mobilizam tal conhecimento em suas sequencias didáticas, uma vez que são capazes de identificar e de reconhecer possíveis dificuldades de seus estudantes em relação ao ensino de polinómios.

Com relação à tipologia de atividades propostas, notamos que a maioria dos professores oportuniza atividades que requerem a aplicação de fórmulas e procedimentos para seus estudantes. Um exemplo disso pode ser observado no protocolo apresentado na Figura 3. Isso leva-nos a concluir que os professores privilegiam em suas aulas o desenvolvimento de habilidades algorítmicas e a memorização de regras, deixando para um segundo plano a atenção ao desenvolvimento do conhecimento conceitual, se é que o fazem. Tal evidência reforça os resultados de pesquisas indicadas em nossa revisão de literatura (Araújo, 1999; Aguiar, 2014; Lautenschlager & Ribeiro; 2014; Ribeiro, 2016; Lautenschlager & Ribeiro; 2017).


Atividade de Matemática

Calcule:

a) $-4 . 5y$

b) $3a . 7a^2$

c) $2ab . 6ac$

k) $(-3x)^2$

l) $(2x^3)^2$

m) $(3x^4)^3$

n) $(-5ab^2)^3$

Figura 3 – Exemplo de atividade elaborada pelo professor B

Para além disso, tal evidência parece sugerir ainda que os professores possivelmente ensinam tal conteúdo da mesma maneira como aprenderam, isto é, sem atribuir sentido aos conceitos matemáticos, de maneira mecanizada e que grande parte desses professores não consegue estabelecer relações que ultrapassem o abismo existente entre o que lhes ensinaram na universidade e o que eles, futuramente, irão ensinar nas escolas, devido sua formação inicial não elucidar os aspectos essenciais que serão desenvolvidos em sala de aula (Wu, 2002). Isso parece nos leva a sugerir que a formação inicial de professores precisa considerar as relações entre conteúdo e pedagogia (Ponte, 2014) no sentido de formar um professor que seja capaz de compreender e utilizar uma matemática voltada para o ensino e para a aprendizagem de seus estudantes.

Uma lacuna que também pudemos perceber a partir dos dados analisados refere-se à não mobilização de elementos do KMLS, uma vez que nenhum dos professores indicou, em suas sequencias, formas de avaliação - pontual ou contínua - da aprendizagem de seus estudantes.

A fim de verificar se e como os estudos realizados durante o curso proporcionaram uma reflexão acerca do ensino dos polinómios ou a ampliação e/ou aprofundamento dos conhecimentos necessários para o ensino de polinómios na Educação Básica, como já indicamos anteriormente, solicitamos aos professores que olhassem novamente para a sequência didática que tinham produzido e, se julgassem adequado, realizassem modificações em suas produções.

Dos dez professores participantes da pesquisa, quatro mantiveram a mesma sequência, justificando que não havia necessidade de alguma alteração. Isso nos chamou a atenção, uma vez que era esperado, ou ao menos desejado, que, após o processo de formação, os professores repensassem sua proposta de aula e, de certa forma, refletissem sobre sua própria prática de sala de aula e organizassem uma nova sequencia de atividades para propor a seus alunos.

Por outro lado, somente seis professores restantes apresentaram alguma proposta de alteração em suas sequencias, buscamos sintetizar na Tabela 5 o que identificamos de mudanças em relação aos conhecimentos mobilizados pelos professores ao analisarmos as duas sequencias. Vejamos:

Tabela 5. Quadro Síntese dos Registros obtidos nas Sequências Didáticas

Podemos observar na primeira sequência didática...	**Podemos observar na segunda sequência didática ...**
Alta incidência da aplicação do recurso didático que chamamos de "cálculo da área do retângulo" e do uso de situações-problema relacionadas ao dia-a-dia como estratégias para o ensino dos polinómios.	Inclusão de atividades manipulativas para o cálculo da área de figuras planas.
8 dentre os 10 professores, optam por iniciar pela definição de monómios e de polinómios e, em seguida, passam a abordar as operações envolvendo polinómios.	Ainda há a preocupação em iniciar pela definição de monómios e polinómios. Também não observamos emprego de estratégias variadas.
Os professores ensinam a Álgebra que é apresentada nos livros didáticos.	Observamos a ocorrência de uma proposta de atividade sobre a construção de diversos gráficos, variando-se os parâmetros, as raízes e o grau do polinômio, considerando a fatoração de polinómios e a utilização de um aplicativo informático para sua construção
Ausência de estratégias variadas, tais como, uso em atividades para modelar diferentes situações.	Quatro professores mantiveram a mesma sequência, justificando que não havia necessidade de alguma alteração.
A maioria dos professores oportuniza atividades para a aplicação de fórmulas e procedimentos.	Um professor modificou toda a estrutura de sua sequência didática, alterando, inclusive, o público-alvo – de alunos do Ensino Fundamental, para alunos do Ensino Médio.

Fonte: elaborado pelos autores

Dos seis professores que refletiram acerca das sequencias produzidas no início do curso e consideraram a importância de se reorganizar a proposta de ensino que eles utilizariam em suas aulas sobre polinómios, destacaremos a seguir o caso de dois professores (A) e o (J), os quais apresentaram mudanças mais significativas em suas produções.

Na segunda versão o professor (A), assim como o professor (J), modificou toda a estrutura de sua sequência didática, alterando, inclusive, o público-alvo – de alunos do Ensino Fundamental, para alunos do Ensino Médio. Ele, o professor (A), também incorporou atividades mais dinâmicas nas quais o professor "dialoga" com os estudantes ao propor uma roda de conversa sobre o ensino dos polinómios. Também percebemos que o professor menciona “atividades de construção e exploração” do conteúdo (Figura 4).

2ª Aula

- Retomar os conceitos/procedimentos trabalhados na aula anterior com uma breve Roda de Conversa e organizando na lousa.
- Propor atividades de construção e exploração da forma fatorada e das relações ente coeficientes e raízes para equações de 3º grau, por meio de atividades em classe e tarefa para casa.

Figura 4 - Registro elaborado pelo professor (A) na 2ª versão da Sequencia Didática

Observamos na reorganização da proposta de ensino do professor (A) uma maior mobilização de elementos dos subdomínios KMT e KLMS, conforme tínhamos conjecturado ao organizar nosso roteiro de orientação para a elaboração das propostas de ensino (ver Tabela 4). Isso nos faz refletir que, no caso desse professor, a participação no curso pode ter contribuído para que ele repensasse sobre a sua prática em sala de aula, ao menos no que se refere à proposição de atividades para seus estudantes.

O professor (J) propôs atividades sobre a construção de diversos gráficos, variando-se os parâmetros, as raízes e o grau do polinômio, considerando a fatoração de polinómios e a utilização de um aplicativo informático para sua construção, isto sugere uma ampliação do *conhecimento do ensino de matemática* após a participação no processo de formação continuada (Figura 5). No caso do professor (J), observamos uma evolução e maturidade na mobilização dos diferentes subdomínios do MTSK, fenômeno que julgamos ter sido proveniente das intervenções propostas ao longo dos encontros sobre a temática no curso de extensão.

7. Dê exemplos de atividades que serão propostas para a turma.

Construir diversos gráficos variando os parâmetros raiz e grau do polinômio;
Sobrepor os gráficos;
Verificar os interceptos dos gráficos como eixo das abscissas e ordenadas.

Figura 5 – Exemplo de Atividade porposta pelo Professor J

Para além dos dois professores acima indicados, pudemos observar ainda que, de maneira geral, os outros 4 professores participantes propuseram a inclusão de atividades manipulativas com o recurso do cálculo da área de figuras planas, o que nos remete a interpretar uma maior mobilização do KMT destes professores, muito embora as mudanças propostas em suas sequencias didáticas não tenham sido tão significativas, como foram as dos professores (A) e (J).

Algumas conclusões e considerações

Uma vez que o objetivo de nosso trabalho era identificar e analisar tipos de conhecimentos mobilizados por um grupo de professores de Matemática durante uma formação sobre o ensino de polinómios na Escola Básica, bem como compreender a contribuição dessa proposta para a aprendizagem dos professores, entendemos que, por meio do modelo MTSK (Carrillo, Climent, Contreras & Muñoz-Catalán, 2013), foi possível identificar e analisar se e quais subdomínios foram mobilizados pelos professores participantes em nosso curso.

Prioritariamente, observamos a mobilização de três subdomínios do modelo teórico MTSK e, embora tenhamos circunscrito nossas análises a "apenas" duas sequências didáticas elaboradas pelos professores, entendemos ter sido possível associar certos conhecimentos a determinados subdomínios:

- Conhecer dúvidas dos alunos sobre os polinómios e poder refletir sobre dificuldades de aprendizagem como, operar com polinómios; enxergar a expressão algébrica como uma possível resposta de um exercício; identificar o grau do polinômio; evidenciam a mobilização de elementos do subdomínio conhecimento das características da aprendizagem matemática – KFLM.

- Conhecer diferentes métodos ou tipos de abordagem para propiciar o estudo, como, por exemplo, utilizar uma determinada representação (a utilização do cálculo de área de figuras planas), ao propor o ensino de polinómios e suas operações pertence ao subdomínio KMT.

- Conhecer o momento, no currículo escolar, em que o conceito de polinómio deve ser ensinado está relacionado ao KMLS.

No entanto, apesar de identificamos a mobilização de diferentes subdomínios do MTSK em relação ao ensino de polinómios, as evidências levantadas em nossa pesquisa indicam que tal situação se restringe a parte dos professores investigados e, além disso, de maneira parcial. Isso parece-nos reforçar o que tantas outras pesquisas na área nos apontam sobre a necessidade de ser aprofundada e mantida formação do professor da Educação Básica que contemple "olhar" para o conteúdo a ser ensinado para além da própria estrutura interna matemática, bem como para romper com um modelo de formação que supervalorize aspectos didáticos e pedagógicos gerais (Ribeiro, 2012; Aguiar, 2014; Lautenschlager & Ribeiro; 2014; Ribeiro & Cury; 2015).

Entendemos que os nossos resultados podem ajudar na elaboração de um *design* para a formação de professores quando apontam a necessidade de se trabalhar com equidade os diferentes tipos de conhecimento, como os que são contemplados no modelo do MTSK (Carrillo, Climent, Contreras & Muñoz-Catalán, 2013).

Propomos que sejam considerados em processos de formação continuada de professores, como a que buscamos desenvolver em nosso curso de extensão, situações e atividades matemáticas que articulem o conhecimento específico matemático com os conhecimentos pedagógicos do conteúdo inerentes à Matemática da escola básica. Para, além disso, certamente é fundamental que tais processos de formação tematizem a articulação com a prática docente do professor em suas salas de aula.

Referências bibliográficas

Aguiar, M. (2014). *O Percurso da Didatização do Pensamento Algébrico no Ensino Fundamental: uma análise a partir da Transposição Didática e da Teoria Antropológica do Didático* (Doctoral dissertation, Universidade de São Paulo).

Artigue, M., Assude, T., Grugeon, B., & Lenfant, A. (2001). Teaching and learning algebra: Approaching complexity through complementary perspectives. In: *The future of the Teaching and Learning of Algebra, Proceedings of 12 th ICMI Study Conference*, The University of Melbourne, Australia (pp. 21-32).

Ball, D., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special?. *Journal of teacher education*, 59(5), 389-407.

Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução às teorias e aos métodos.* trad. Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Portugal: Porto Editora.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., & Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining specialized knowledge for mathematics teaching. In: *Proceedings of the CERME* (Vol. 8, pp. 2985-2994).

Crotty, M. (1998). *The foundations of social research: Meaning and perspective in the research process*. Sage.

Cruz, E. D. S. (2005). *A noção de variável em livros didáticos de Ensino Fundamental: um estudo sob ótica da organização praxeológica.* Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

Doerr, H. M. (2004). Teachers' knowledge and the teaching of algebra. In: *The Future of the Teaching and Learning of Algebra The 12 th ICMI Study* (pp. 265-290). Springer Netherlands.

Eisenberg, T., & Dreyfus, T. (1994). *Os Polinômios no Currículo da Escola Média. As idéias de álgebra.* Organizadores Arthur F. Coxford; Alberto P. Shulte. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual.

Ibrahim, S. A. (2015). *A apropriação dos significados de polinômios: um estudo na perspectiva da teoria histórico-cultural.* Dissertação (mestrado) – Universidade de Uberaba. Programa de Mestrado em Educação.

Lautenschlager, E. (2017, no prelo). *Conhecimento matemático para o ensino de polinômios na educação básica*. Tese de Doutorado (Doutorado em Neurociência e Cognição), Universidade Federal do ABC, 177f.

Lautenschlager, E., & Ribeiro, A. J. (2014). Reflexões acerca do impacto do conhecimento matemático dos professores no ensino: a álgebra da Educação Básica. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, 7(3).

Lautenschlager, E.,& Ribeiro, A. J. (2017, no prelo) Conhecimento matemático sobre o conceito de polinômios de um grupo de professores da Educação Básica.

Moriel-Junior, J. G., & Carrillo, J. (2014). Explorando indícios de conhecimiento especializado para ensinar matemática como modelo MTSK. In: *M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 465-474). Salamanca: SEIEM.

Ponte, J. P. (2014). Formação do professor de matemática: perspectivas atuais. In: PONTE, J. P. (Org.). *Práticas profissionais dos professores de matemática*. Lisboa: IE/UL (pp. 343-358).

Ribeiro, A. J. (2012). Equação e Conhecimento Matemático para o Ensino: relações e potencialidades para a Educação Matemática. *Bolema*, Rio Claro (SP), 26(42B), 535-557.

Ribeiro, A. J., & Cury, H. N. (2015). Álgebra para a Formação do Professor: explorando os conceitos de equação e de função. *Educação Matemática em Revista*, 83-84.

Ribeiro, A. J. (2016). Álgebra e seu ensino: dando eco às múltiplas "vozes" da educação básica. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 7(4), 1-14.

Schulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *CERAS*, School of Education, Stanford University.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard educational review*, 57(1), 1-23.

Wu, H. (2002). What is so difficult about the preparation of mathematics teachers. CBMS *National Summit on the Mathematical Education of Teachers*.

O PROFESSOR E A FIDELIDADE MATEMÁTICA DA CALCULADORA GRÁFICA NO ESTUDO DE FUNÇÕES

Helena Rocha[1]
[1]Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade NOVA de Lisboa, hcr@fct.unl.pt

Resumo. *O conhecimento que o professor tem da fidelidade matemática da tecnologia e o impacto que este tem na sua prática é o foco deste artigo. Tendo por base a conceptualização do Conhecimento para Ensinar Matemática com a Tecnologia (KTMT), e no âmbito do ensino de Funções ao nível do 10.º ano, analisam-se: as situações de falta de fidelidade matemática consideradas pelo professor nas aulas, a forma como este gere o contacto dos alunos com situações de falta de fidelidade matemática, e o modo como apoia os alunos quando estes estão perante uma situação de falta de fidelidade matemática. As conclusões alcançadas apontam para: alguma desvalorização das situações de falta de fidelidade matemática, com apenas um tipo de situação a ser alvo de atenção explícita; uma atenção cuidada à seleção das tarefas de modo a procurar assegurar que estas situações não ocorrem demasiado cedo; um foco na identificação por parte dos alunos deste tipo de situações, com indicação do que podem fazer para confirmar a suspeita mas sem implementação efetiva do processo. O conhecimento da fidelidade matemática acaba assim por não se traduzir num KTMT pleno e identificável na prática do professor.*

Abstract. *The teacher's knowledge of the mathematical fidelity of technology and the impact it has on the teacher's practice is the focus of this article. Based on the conceptualization of Knowledge for Teaching Mathematics with Technology (KTMT), and involving the teaching of Functions at the 10th grade, we analyze: the situations of lack of mathematical fidelity considered by the teacher in the classes, the way how the teacher manages students' contact with this kind of situations, and how the teacher supports students when they are faced with a lack of mathematical fidelity. The conclusions reached point to: some devaluation of the situations of lack of mathematical fidelity, with only one type of situation being explicitly addressed; a careful selection of tasks, in order to ensure that these situations do not occur too soon; a focus on the identification by the students of this type of situation, suggesting what they can do to confirm the suspicion but without effective implementation of the process. As a consequence, knowledge of mathematical fidelity does not necessarily have a relevant impact on teacher's practice and it is not easily transformed into a deep teacher's KTMT.*

Palavras-chave: *Fidelidade matemática; KTMT; Calculadora gráfica; Funções.*

Introdução

O potencial da tecnologia para o ensino e a aprendizagem da Matemática é amplamente reconhecido (Zbiek, Heid, Blume, & Dick, 2007), bem como o papel central que o conhecimento do professor desempenha na forma como a tecnologia é integrada na sala de aula (Doerr & Zangor, 2000; Hoyles & Lagrange, 2010). Um dos elementos do Conhecimento para Ensinar Matemática com a Tecnologia (KTMT) é a fidelidade matemática da tecnologia e é sobre este que incide o presente artigo.

A fidelidade matemática da tecnologia corresponde ao nível de concordância entre os resultados apresentados pela Matemática e pela Matemática da tecnologia (Dick, 2008). Apesar de ser naturalmente desejável uma fidelidade da tecnologia relativamente à Matemática, tal nem sempre acontece. Dick (2008) recorre a esta noção para realçar a importância de estar ciente que a tecnologia nem sempre apresenta ou representa a Matemática da forma que efetivamente carateriza o conhecimento científico, o que pode originar situações em que a Matemática que os alunos experienciam ao utilizar a tecnologia difere daquela que experienciam quando não a utilizam. Neste sentido é particularmente importante que o professor tenha conhecimento destas situações e de como lidar com elas. Assim, neste artigo pretende-se analisar, à luz do modelo KTMT, o conhecimento que o professor tem da fidelidade matemática da calculadora gráfica e qual o impacto deste sobre a sua prática. Mais concretamente, considerando o ensino de Funções no 10.º ano de escolaridade, pretende-se analisar:

- Quais as situações de falta de fidelidade matemática consideradas pelo professor nas aulas,
- Como é que o professor gere o contacto dos alunos com situações de falta de fidelidade matemática,
- Como é que o professor apoia os alunos quando estes estão perante uma situação de falta de fidelidade matemática.

Conhecimento para Ensinar Matemática com a Tecnologia – KTMT

O Conhecimento para Ensinar Matemática com a Tecnologia – KTMT (Rocha, 2013) é uma conceptualização do conhecimento profissional do professor que pretende integrar num único modelo a investigação desenvolvida no âmbito do conhecimento profissional e no âmbito da integração da tecnologia na prática profissional. Como tal, é uma conceptualização que enfatiza os aspetos que a investigação tem apontado como centrais na integração da tecnologia. Trata-se de um modelo que tem em conta, entre outros, os trabalhos de Shulman (1986), Ball, Thames e Phelps (2008) e Petrou e Goulding (2011), e inclui quatro domínios base do conhecimento: Matemática, Ensino e Aprendizagem, Tecnologia, e Currículo. Este último domínio difere dos restantes, sendo conceptualizado de forma transversal e, como tal, influente sobre os demais. Para além dos domínios base do conhecimento, este modelo valoriza particularmente dois conjuntos de conhecimentos inter-domínios, desenvolvidos na confluência de mais de um domínio: o Conhecimento da Matemática e da Tecnologia (MTK) e o Conhecimento do Ensino-Aprendizagem e Tecnologia (TLTK). O MTK incide sobre a forma como a tecnologia influencia a Matemática, potenciando ou limitando certos aspetos e inclui necessariamente conhecimento da fidelidade matemática da tecnologia, conhecimento das novas ênfases que a tecnologia coloca nos conteúdos matemáticos, conhecimento de novas sequências de conteúdos, e fluência representacional. O TLTK incide sobre a forma como a tecnologia afeta o processo de ensino e aprendizagem, permitindo ou restringindo certas abordagens, e inclui conhecimento de novos aspetos que a tecnologia coloca aos alunos, conhecimento da concordância matemática das tarefas propostas, e conhecimento do potencial da tecnologia para o ensino e aprendizagem da Matemática. Em ambos os casos o currículo é considerado uma influência transversal, sempre presente. Por fim, o KTMT inclui Conhecimento Integrado (IK). Este é um conhecimento que articula simultaneamente conhecimento em cada um dos domínios base e nos dois conjuntos de conhecimentos inter-domínios. É um conhecimento que se desenvolve a partir da interação entre todos os domínios e que se carateriza pela sua natureza global e abrangente mas, simultaneamente, pela sua particularidade, no sentido que é este conhecimento que maximiza o potencial específico da tecnologia para permitir uma melhor aprendizagem matemática. É este conhecimento que é a verdadeira essência do KTMT (ver Rocha (2013, 2014) para mais detalhes).

KTMT e a fidelidade matemática da calculadora gráfica

Como já referi, o conhecimento da fidelidade matemática da tecnologia que está a utilizar (e, em particular, da falta desta) é um dos conhecimentos que o professor precisa de ter para ensinar com a tecnologia.

A falta de fidelidade matemática pode ter diferentes origens. Dick (2008) refere-se aos casos em que esta se deve às limitações inerentes à representação de fenómenos contínuos através de estruturas discretas e à precisão finita dos cálculos numéricos. O primeiro dos casos é uma situação comum ao representar graficamente uma função numa calculadora gráfica. Por exemplo, a representação gráfica das funções $sen(2x)$ e $sen(50x)$ numa TI-84 Plus considerando $x \in [-2\pi, 2\pi]$, são dois gráficos absolutamente coincidentes. E, no entanto, estas são funções que têm períodos muito diferentes e, como tal, nunca poderão ter representações gráficas coincidentes. Este é pois um dos casos em que a resposta disponibilizada pela tecnologia não é fiel à Matemática.

Existem muitas outras situações similares que fazem com que sejam representadas linhas que não pertencem ao gráfico (por exemplo, as rectas verticais que surgem ao traçar o gráfico de $tg(x)$ na janela *standard* da trigonometria), ou pontos que não pertencem ao domínio da função (por exemplo, para x = 1 ao traçar o gráfico de $\frac{x^2-1}{x-1}$ na janela *standard*), ou pontos que pertencendo ao gráfico não são representados (por exemplo, os pontos próximos do eixo dos xx no gráfico de $\sqrt{81-x^2}$ traçado na janela *standard*), ou zonas horizontais ou verticais em partes curvas do gráfico (por exemplo, no gráfico de $-x^2 + 10x - 20$ traçado na janela *standard*, onde a zona horizontal na parte superior da parábola pode fazer pensar que a função alcança o valor máximo para vários valores de x).

Relativamente às situações relacionadas com a precisão finita da máquina seria igualmente possível apresentar vários exemplos, como o da expressão $10^{14} + 10 - 10^{14} - 2$, cujo resultado facilmente se conclui ser 8, mas que a calculadora afirma ser -2. E este tipo de situações, em que a falta de fidelidade matemática surge na sequência da realização de operações aritméticas, merece um comentário particular de Olive, Makar, Hoyos, Kor, Kosheleva, & Strässer (2010), que aludem ao mito genericamente partilhado de que a máquina nunca se engana e à consequente importância de desmitificar estas situações.

Todas estas limitações da calculadora têm sido alvo de atenção por parte de diversos autores, como Burrill (1992), Cavanagh e Mitchelmore (2003) e Consciência (2008). No entanto, o foco dessa análise é geralmente colocado de uma forma mais abrangente, considerando as limitações da calculadora conjuntamente com outras questões, como as relacionadas com a janela de visualização utilizada. Ainda assim, o conhecimento de todas estas situações é valorizado no âmbito de um conhecimento que não se limita à tecnologia, mas que é um conhecimento matemático da tecnologia, como realça Burrill (1992).

Uma outra área onde ocorre falta de fidelidade matemática está relacionada com a discrepância entre a ferramenta e as convenções de sintaxe matemática. Tal como refere Dick (2008), estas situações, ao contrário das anteriores, já não decorrem de uma qualquer limitação da tecnologia, sendo antes o resultado de opções conscientemente tomadas pelos responsáveis pelo desenvolvimento da tecnologia, ao privilegiarem a facilidade de utilização. Uma situação onde é frequente ocorrerem discrepâncias a este nível é na prioridade das operações. Em Matemática existe uma hierarquia estabelecida, no entanto, as calculadoras gráficas, ao tentarem adotar um funcionamento mais agradável para o utilizador, assumem por vezes regras próprias que acabam por originar situações que podem eventualmente induzir em erro.

Zbiek *et al*. (2007) ponderam as consequências destas discrepâncias, referindo que estudos realizados sugerem que estas têm potencial para gerar uma certa confusão tanto aos alunos como aos professores, no entanto, os resultados alcançados até ao momento têm sido inconclusivos relativamente a se se trata de meros transtornos ou se podem surgir consequências mais sérias, com reflexos na aprendizagem dos alunos. Segundo os autores, quando estas situações surgem no decorrer de uma aula, a tendência é para que as implicações sobre os alunos sejam fortemente influenciadas pelas reações do professor e pela interpretação que este lhe dá. Aparentemente o impacto pode eventualmente ser maior sobre o professor do que sobre os alunos. Com efeito, estas situações podem afetar a atitude do professor face à tecnologia e, eventualmente, interferir com a futura utilização que é feita desta. Parece assim que o conhecimento que o professor detém deste tipo de situações é importante.

Cavanagh e Mitchelmore (2003) referem a importância dos professores aprenderem sobre as limitações e as inconsistências que podem surgir no decorrer da utilização da calculadora, para que as possam abordar com os seus alunos, permitindo assim o desenvolvimento daquilo que designam por uma utilização competente. E Oliver *et al*. (2010) salientam que o objectivo é uma noção básica das representações internas da máquina e uma consciência genérica das limitações e potenciais problemas inerentes, pois uma compreensão efetiva do que a máquina faz internamente envolve conhecimentos matemáticos que estão para além dos detidos pela maioria dos alunos (focando-se apenas na representação numérica interna, os autores referem a necessidade de conhecimento de números racionais e irracionais, conhecimento da representação numérica em diferentes bases e uma desenvolvida noção de limite).

Consciência (2008) defende igualmente a importância do professor conhecer o funcionamento da calculadora e compreender as suas limitações técnicas, referindo-se-lhe como um conhecimento fundamental para que a calculadora possa efectivamente ser integrada no ensino e na aprendizagem da Matemática. Cavanagh e Mitchelmore (2003) apontam mesmo a influência desse conhecimento sobre as caraterísticas do uso que depois o professor atribui à calculadora na sala de aula, associando um menor nível de conhecimento com uma maior estruturação da aula. Esta é aliás uma relação igualmente defendida por Doerr e Zangor (2000), que associa um maior conhecimento destas situações por parte do professor, ao incentivo junto dos alunos de uma postura mais reflexiva e inquiridora face à máquina.

Por seu turno, Guin e Trouche (1999) destacam a importância das tarefas selecionadas pelo professor e a forma como estas têm em conta estas situações de falta de fidelidade matemática, realçando que é importante pensar bem esta questão. Cavanagh e Mitchelmore (2003) consideram delicada a decisão relativamente aos momentos em que será conveniente evitar o contacto dos alunos com este tipo de situações e aos momentos em que esse contacto deve ser deliberadamente provocado. Os autores entendem que os exemplos escolhidos pelo professor devem ser cuidadosamente pensados, começando por situações em que as potenciais dificuldades decorrentes do contacto dos alunos com este género de problemas devem ser minimizadas. Frisam, no entanto, que se posteriormente este não proporcionar aos alunos oportunidades para se confrontarem com exemplos mais exigentes que permitam o contacto com todas estas situações, tal tenderá a fazer com que a compreensão dos alunos não se desenvolva tanto quanto poderia. O conhecimento do professor relativamente a estas questões e a forma que escolhe para as abordar parece assim ser particularmente importante.

Metodologia

A investigação que aqui se apresenta adota uma abordagem de natureza qualitativa e interpretativa, envolvendo a realização de um estudo de caso sobre a professora Carolina. Estiveram igualmente envolvidos os alunos de uma turma desta professora que utilizavam calculadoras gráficas dos modelos TI-84 Plus, TI-84 Plus Silver Edition e TI-82 Stats. A recolha de dados envolveu a realização de entrevistas, a observação de aulas e recolha documental. Foram realizadas entrevistas semi-estruturadas antes e depois de cada aula observada, com a intenção de conhecer o que a professora preparara e as razões base dessas opções (entrevistas pré-aula) e o balanço que fazia da forma como a aula decorrera (entrevistas pós-aula). Todas as entrevistas se centraram em aspetos globais de utilização da calculadora gráfica, não sendo explícito para a professora nenhum enfoque específico em questões de fidelidade matemática da tecnologia. Tanto as entrevistas como as aulas foram áudio-gravadas e posteriormente transcritas. Foi ainda elaborado um diário de bordo das 14 aulas observadas e recolhidos documentos como fichas de trabalho e outros materiais disponibilizados pela professora aos alunos. A análise de dados revestiu-se essencialmente dum caráter descritivo e interpretativo, partindo da identificação de situações envolvendo questões de fidelidade matemática.

Apresentação e análise de dados

As tarefas que Carolina propõe aos alunos onde está prevista a utilização da calculadora gráfica consistem em explorações de famílias de funções, onde se pretende que os alunos identifiquem o efeito da variação do parâmetro sobre o aspeto do gráfico, ou em situações com contexto da realidade ou mais raramente com contexto estritamente matemático, onde se pretende que os alunos encontrem os valores para os zeros ou extremos de funções. Tanto nas situações em contexto da realidade como em contexto estritamente matemático, as funções são cuidadosamente escolhidas por Carolina de forma a serem passíveis de representação na janela de visualização *standard* e de modo a que os valores calculados pelos alunos sejam inteiros. Só perto do final do estudo do tema, quando considera que os alunos já estão familiarizados com o funcionamento da máquina, deixa de dar atenção a estes aspetos ao selecionar uma tarefa.

Carolina sabe que nem sempre o que a máquina apresenta está matematicamente correto. Já se deparou com circunstâncias em que a calculadora não apresenta o valor exato, mas antes uma sua aproximação, por exemplo para o zero da função ou para o máximo ou maximizante. Estas são caraterísticas importantes do funcionamento da tecnologia que considera necessário abordar com os alunos. Entende, contudo, que este tipo de situações devem ir sendo abordadas num processo progressivo, não sendo boa ideia fazê-lo quando os alunos ainda trabalham há pouco tempo com a calculadora.

Assim, depois de cerca de mês e meio de experiência na utilização da calculadora, Carolina considerou que era altura de começar a abordar estas questões. Preparou então uma ficha de trabalho para a qual escolheu uma função que entendeu potenciar a indicação por parte da máquina de repostas que não fossem exatas:

> P - Essa [função] é fácil eles irem ver os zeros. Agora o que pode acontecer é, no caso de eles serem valores exatos, não lhes aparecer o valor exato, não é? (…) Por exemplo, aqui nos extremos [desta função], portanto tem um máximo para x=-1 e tem um mínimo para o x=1 e por acaso não aparece 1, aparece 1,0001, estás a ver? (…)
>
> I - Escolheste-a de propósito assim ou calhou?

P - Foi (ri-se), foi. Por acaso até foi. (pré-aula 10)

Relativamente à abordagem que deve ser seguida nestes casos, Carolina entende que os alunos devem estar cientes deste tipo de respostas menos corretas por parte da máquina, para suspeitarem de qual é efetivamente o zero e pedirem à calculadora que determine a imagem desse valor para assim confirmarem a sua suspeita. Neste sentido pretende dizer aos alunos:

P - Olha quando for assim vocês experimentam, portanto mandam calcular o valor no ponto suponhamos 1. Calcular a imagem do ponto 1 e depois vejam o que é que acontece. (pré-aula 10)

Na verdade, esta é uma situação com que Carolina já se deparou este ano. Na altura optou por não a abordar com toda a turma, em virtude de apenas ter ocorrido com uma aluna:

I - Mas fizeste isso para a turma toda?

P - Não, não foi para a turma toda. Porque o que é que tinha acontecido… Porque os outros apareceu-lhes o valor exato, estás a ver? Tinham definido uma janela onde até aparecia o valor exato. E naquela [calculadora] aparecia… foi até a propósito do zero da função, aparecia suponhamos 3,0001 e depois na imagem em lugar de aparecer zero aparecia dois vírgula não sei quantos E^{-10} (a professora refere-se a um valor em notação científica). E ela não estava a identificar aquilo com zero. (pré-aula 10)

No entanto, embora afirme que a janela de visualização escolhida pelos alunos pode fazer com que nem todos se deparem com esta questão, a importância que lhe reconhece levam-na a expressar a intenção de, se necessário, a fazer surgir deliberadamente, para que todos tenham ocasião de a analisar:

I - Se não vier a propósito pões a hipótese de não o abordar ou achas que tens mesmo que abordar isso?

P - Não, eu acho que era importante abordar porque eles podem não se lembrar ao ver aqueles cinco ou seis zeros, podem não se lembrar que o maximizante ou o minimizante ou o zero pode ser um valor inteiro. E se calhar estão a pôr, sei lá, quando vão fatorizar, por exemplo, se calhar vão entrar com o zero como sendo 1,0001 quando ao fim e ao cabo é o x=1. Eu acho que era importante eles, quando surgisse uma situação dessas, eles irem verificar se é mesmo assim ou se é 1 e a máquina é que lhes dá aquele valor. Portanto, se não colocarem a questão, muito provavelmente eu, estou a pensar colocar eu. (pré-aula 10)

Durante a aula, Carolina opta por abordar a questão com toda a turma, recorrendo ao projetor para efetuar o cálculo do mínimo diante de todos:

Prof- E agora o que é que aconteceu?... O que é que aconteceu?

Aluna- Deu-nos o valor do mínimo.

Prof- Ora bem, e que valores é que nos foram dados?

Aluno- Um vírgula zero zero… é 1.

Prof- Ora bem, mas aquilo não é o 1 que lá está. E houve, não sei se foi para o mínimo se foi para o máximo que vocês tinham obtido um 0,999, não é? Pronto. Ali está 1,003. Ora com estes resultados é de crer o quê? Que o valor de x para o qual é atingido o mínimo seja? (…) Portanto é de crer que seja x=1, apesar de não nos aparecer ali o x=1. Aparece 1,003. Ou, no caso da Sofia, aparecer 0,999 não sei quantos. Então como é que vocês podem certificar-se que realmente é?... (…) O que é que vocês acham que podemos ir fazer para confirmar que realmente quando o x é igual a 1 temos um mínimo? (aula 10)

Perante os resultados obtidos levanta a possibilidade do minimizante ser 1 e avança com a necessidade de confirmar esta hipótese, sugerindo três formas diferentes de o fazer: ampliar o gráfico para assim tentar uma melhor aproximação e conseguir eventualmente chegar ao valor exato; recorrer a uma tabela adequadamente construída em torno do valor 1 e com incrementos bastante pequenos para, a partir daí, constatar que o mínimo é efetivamente obtido quando o x é 1; ou calcular a imagem de 1. Nas suas próprias palavras:

Prof- Mandar calcular o valor. Podemos mandar calcular o valor da função quando o x for igual a 1. (…) Ou então se calhar tínhamos que ir fazer uma ampliação maior para termos um valor efetivamente adequado. Ou então fazer uma tabela, definir uma tabela ali em torno do ponto 1, sei lá com uma aproximação de uma centésima, suponhamos, não é? (…) (interrompe a explicação para ralhar com alguns alunos) Portanto o que eu estava a dizer é que ou fazíamos uma ampliação e víamos o que é que se passava… À medida que vamos ampliando o gráfico em torno ali de uma determinada região acabamos por ter uma informação muito mais rigorosa daquilo que se está a passar. Ou então podíamos fazer uma tabela. Porque víamos, portanto à medida que variava o x variavam as imagens e víamos quando é que a imagem atingia um valor mínimo. Portanto ela ia decrescendo e depois a partir de determinada altura começava a subir. Portanto tínhamos ali o mínimo. (aula 10)

Apesar de Carolina parecer considerar importante explicar aos alunos como poderiam fazer para confirmar que efectivamente o minimizante é 1, esta é uma confirmação que nunca é feita. Sendo algo que os alunos nunca fizeram, em particular a estratégia que recorre à tabela, pois os alunos nunca usam a tabela nas aulas, não deixa de ser curioso que essa confirmação nunca seja feita.

É igualmente interessante notar que este é um aspeto que não parece causar qualquer confusão aos alunos. Quando a professora pretende abordar a questão e pergunta aos alunos qual o valor obtido, há um aluno que começa a ler o valor na calculadora, mas rapidamente interrompe a leitura concluindo que a resposta é 1. A razão para tal pode residir na experiência anterior dos alunos. Estes estão habituados a obter na calculadora respostas com várias casas decimais que rapidamente arredondam. É portanto possível que os alunos considerem esta situação igual às anteriores, não se apercebendo que os valores que a máquina calcula ao determinar zeros e extremos de uma função são respostas aproximadas.

Uma outra situação, ocorrida na quarta aula em que os alunos usavam calculadora, parece nem ter sido notada pelos alunos. Ao procurar os zeros da função definida por $N(x)=-x^2+4x+9$, no âmbito de uma situação em contexto real, os alunos obtiveram x=5.6055513 e y=1E-12 (alguns alunos em vez desta resposta obtiveram y=-1E-12). E, apesar daquela forma de representar números em notação científica lhes ser estranha, ninguém parece ter estranhado a resposta ao ponto de questionar o seu significado. Aparentemente os alunos pretendiam o valor de x e nem terão olhado para o valor dado pela calculadora para o y. Por seu lado Carolina optou por não lhes chamar a atenção por considerar ser demasiado cedo para o efeito.

Conclusão

A professora envolvida neste estudo proporciona aos seus alunos oportunidades para se depararem com situações de gráficos em que surgem partes retas onde deviam ser representadas partes curvas (uma situação comum nos gráficos de funções quadráticas) e situações onde a calculadora é utilizada para determinar zeros ou extremos de funções e onde a resposta disponibilizada pela máquina difere da resposta exata. Na literatura, e ao nível dos conteúdos trabalhados no 10.º ano, é possível encontrar ainda referência a situações de falta de fidelidade matemática com origem na discrepância considerável dos valores envolvidos em cálculos, contudo tal não sucedeu nas aulas desta professora.

Carolina considera importante assegurar que situações como estas não surgem demasiado cedo, quando os alunos ainda não estão familiarizados com a utilização da máquina. Esta preocupação em evitar um contacto com situações mais complexas antes de os alunos terem tempo para se habituar à máquina não é no entanto exclusiva das situações de falta de fidelidade matemática (por exemplo, Carolina preocupa-se igualmente em evitar situações onde encontrar uma janela de visualização adequada não seja fácil), traduzindo-se numa cuidadosa escolha de tarefas. A professora dá assim bastante atenção às funções envolvidas, mostrando preferência por questões que originam respostas com valores inteiros. Entende no entanto que é fundamental que os alunos estejam cientes de como a calculadora pode nem sempre disponibilizar a resposta exata/correta e prepara deliberadamente uma tarefa envolvendo valores que não são inteiros e através da qual espera confrontar os alunos com uma situação de falta de fidelidade matemática. Ainda assim, a opção por trabalhar em torno de números inteiros não é necessariamente garantia para que não surja uma situação de falta de fidelidade matemática. Essas situações são contudo raras e restritas a um ou dois alunos, pelo que Carolina opta por auxiliar individualmente o aluno envolvido a ultrapassar a situação.

Carolina considera importante que os alunos estejam familiarizados com as situações de falta de fidelidade matemática e que saibam lidar com elas. Incentiva-os assim a desconfiar que o valor que estão a ver pode não corresponder ao valor exato. E aponta estratégias a que podem recorrer para confirmar a sua desconfiança. Contudo nunca concretiza nenhuma dessas estratégias de confirmação. Esta atuação parece sugerir algum desconforto da parte de Carolina relativamente a estas respostas menos exatas dadas pela calculadora. Por um lado sente necessidade de indicar formas de confirmar qual a resposta exata, mas por outro lado parece não achar necessário efetivamente efetuar essa confirmação. Apesar da preocupação da professora em apoiar os alunos e ensiná-los a lidar com estas situações, os alunos parecem lidar com elas de uma forma descontraída, arredondando de imediato os valores exibidos pela calculadora e parecendo nem se aperceber das discrepâncias a que a professora se refere. Um aspeto que confirma a ideia avançada por Zbiek *et al*. (2007) relativamente ao impacto destas situações ser maior sobre o professor do que sobre os alunos. Quanto às situações de natureza gráfica (como aquelas em que partes retas são representadas em zonas curvas do gráfico), estas ocorrem frequentemente sem que sejam alvo de qualquer atenção por parte de Carolina ou originem qualquer problema aos alunos.

O conhecimento ao nível do funcionamento da calculadora e das situações de falta de fidelidade matemática parece assim ter algum impacto (ainda que de forma relativamente pontual) sobre as opções de ensino assumidas em termos do tipo de situação colocada aos alunos. É identificável alguma hesitação quanto à forma de trabalhar as situações de falta de fidelidade matemática em sala de aula (que se traduz na sugestão aos alunos de estratégias que não são concretizadas) e algum desajuste entre as expectativas da professora relativamente às dificuldades dos alunos e as suas dificuldades reais.

Paralelamente não é feita uma abordagem às respostas disponibilizadas pela calculadora com suporte na Matemática (pois as abordagens que a podiam incluir não chegam a ser concretizadas). Assim, o MKT e em particular o conhecimento da fidelidade matemática, embora tendo alguma influência sobre o TLTK do professor, acaba por não o alterar substancialmente, indiciando que não existe uma influência directa entre o MKT e o TLTK (e que o IK não decorre automaticamente destes conhecimentos), mas também, e fundamentalmente, que as questões relativas à fidelidade matemática da calculadora não são particularmente valorizadas pelo professor na sua prática.

Referências bibliográficas

Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special?. *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.

Burrill, G. (1992). The graphing calculator: a tool for change. In J. Fey & C. Hirsch (Eds.), *Calculators in Mathematics Education* (pp. 14-22). Reston, Va.: NCTM.

Cavanagh, M., & Mitchelmore, M. (2003). Graphics calculators in the learning of mathematics: teacher understandings and classroom practices. *Mathematics Teacher Education and Development*, 5, 3-18.

Consciência, M. (2008). Calculadoras gráficas: alguns aspectos técnicos a ter em conta na sua utilização. In A. Canavarro, D. Moreira & M. Rocha (Eds.), *Tecnologias e Educação Matemática* (pp. 250-265). Lisboa: SEM-SPCE.

Dick, T. (2008). Keeping the faith: fidelity in technological tools for mathematics education. In G. Blume & M. Heid (Eds.), *Research on Technology and the teaching and learning of mathematics: cases and perspectives* (pp. 333-340). Charlotte: IAP, NCTM.

Doer, H., & Zangor, R. (2000). Creating meaning for and with the graphing calculator. *Educational Studies in Mathematics*, 41, 143-163.

Guin, D., & Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: the case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 3, 195-227.

Hoyles, C., & Lagrange, J. (Eds.) (2010). *Mathematics Education and Technology – rethinking the terrain (the 17th ICMI study)*. New York, NY: Springer.

Olive, J., Makar, K., Hoyos, V., Kor, L., Kosheleva, O., & Strässer (2010). Mathematical knowledge and practices resulting from acess to digital technologies. In C. Hoyles & J. Lagrange (Eds.), *Mathematics Education and Technology – rethinking the terrain (the 17th ICMI study)* (pp.133-178). New York: Springer.

Petrou, M., & Goulding, M. (2011). Conceptualising teachers' mathematical knowledge in teaching. In T. Rowland & K. Ruthven (Eds.), *Mathematics Knowledge in Teaching* (pp. 9-26). Dordrecht: Springer.

Rocha, H. (2013). Knowledge for teaching mathematics with technology – a new framework of teacher knowledge. In Lindmeier, A. & Heinze, A. (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 105-112). Kiel, Germany: PME.

Rocha, H. (2014). The influence of teacher's knowledge for teaching mathematics with technology on the implementation of investigation tasks. In L. Gómez Chova, A. López

Martínez & I. Candel Torres (Eds.), *Proceedings of 8th International Technology, Education and Development Conference* (pp. 494-503). Valencia, Spain: INTED.

Shulman, L. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

Zbiek, R., Heid, M., Blume, G., & Dick, T. (2007). Research on technology in mathematics education. In F. Lester Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 1169-1207). Charlotte: NCTM.

A ADAPTAÇÃO DOS ESTUDOS DE AULA AO CONTEXTO PORTUGUÊS

João Pedro da Ponte[1], Marisa Quaresma[2], Joana Mata-Pereira[3], Mónica Baptista[4]
[1]Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, jpponte@ie.ulisboa.pt
[2]Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, mq@campus.ul.pt
[3]Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, joanamatapereira@campus.ul.pt
[4]Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, mbaptista@ie.ulisboa.pt

Resumo. *Um estudo de aula constitui um processo formativo originário do Japão que se tem vindo a divulgar por todo o mundo. No entanto, a sua adaptação aos diferentes contextos nacionais levanta problemas que começam a merecer a atenção dos investigadores. Nesta comunicação, procuramos saber o modo como os participantes em estudos de aula encaram este processo formativo, no que se refere à sua dinâmica e à perspetiva sobre o ensino da Matemática que lhes está subjacente. Assim, apresentamos a abordagem curricular exploratória subjacente ao nosso trabalho, com especial atenção ao desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. Indicamos também o modo como organizamos os estudos de aula, indicando a forma de convite aos professores e a organização do trabalho, com destaque para a fase de planeamento e a aula de investigação. Apresentamos dois exemplos de estudos de aula, um realizado com professores do 2.º ciclo do ensino básico e outro realizado na formação inicial de professores do 3.º ciclo e ensino secundário, referindo o balanço feito pelos participantes. Terminamos com uma discussão sobre as adaptações que temos feito neste processo formativo, procurando sistematizar a razão de ser das suas potencialidades.*

Abstract. *A lesson study is a formative process with origin in Japan that has been spread all over the world. However, its adaptation to the different national contexts raises problems that begin to deserve the attention of researchers. In this communication, we seek to know how the participants in lesson studies view this professional development process, regarding its dynamics and the underlying perspective about the teaching of mathematics. We present the exploratory curriculum approach that underlines our work, with especial attention to the development of students' mathematical reasoning. We also indicate the way we organize the lesson studies, indicating the form of invitation to teachers and the organization of work, especially in the planning phase and in the research lesson. We present two examples of lesson studies, one conducted with in-service teachers of the 2nd cycle of basic education and another held in the initial teacher education with prospective teachers of the 3rd cycle and secondary education, indicating the general perspective about it made by the participants. We end up with a discussion on the adjustments that we have made in this professional development process, with a view to its suitability to the Portuguese reality the reason of its potential.*

Palavras-chave: *Estudo de aula; Desenvolvimento profissional; Formação inicial; Formação contínua.*

Introdução

Existe presentemente um movimento internacional de estudos de aula[1], bem evidenciado na sua organização WALS (*World Association of Lesson Studies*), nos seus encontros internacionais anuais e nas suas revistas especializadas como o *International Journal of Lesson and Learning Studies*. Originários do Japão, os estudos de aula conheceram grande divulgação nos Estados Unidos da América com o livro *The teaching gap* (Stigler & Hiebert, 1999) e, a partir daí, por todo o mundo. No entanto, trata-se de um processo formativo exigente e a sua divulgação tem-se revelado problemática. Autores como Fujii (2014) criticam o facto da utilização dos estudos de aula noutros países terem por detrás conceções erradas acerca dos estudos de aula japoneses. No entanto, devemos notar que, para além das dificuldades de transposição resultantes das diferenças no sistema educativo e na cultura profissional dos professores, no Japão os estudos de aula são uma prática generalizada, realizada em grande escala com o apoio das autoridades educativas, enquanto nos outros países tendem a ser uma prática marginal, realizada em pequena escala e de modo sobretudo exploratório.

Sem minimizar a importância de conhecer o modo como os estudos de aula são realizados no Japão, preocupa-nos sobretudo saber como este processo formativo pode ser adaptado ao contexto português no ensino da Matemática. Tal como Stigler e Hiebert (2016), assumimos que uma determinada prática cultural (neste caso, uma prática de formação de professores), originária de uma dada cultura, pode conhecer uma ampla difusão noutras culturas, embora sofrendo transformações e adaptações em função das especificidades desses contextos culturais. Esse processo de transformação tanto pode representar um empobrecimento, com o enfraquecimento dos aspetos mais significativos da prática cultural original, como pode haver um enriquecimento, levando à criação de práticas mais robustas ou mais flexíveis na sua adaptação às necessidades de sistemas educativos muito variados. Neste quadro, o nosso objetivo é saber o modo como os participantes em estudos de aula por nós conduzidos encaram este processo formativo, no que se refere à sua dinâmica e à perspetiva sobre o ensino da Matemática que lhes está subjacente.

[1] O termo "*estudos de aula*" tem sido o mais usado em Portugal. O termo japonês original é "*jugyo kenkyuu*", que significa "*pesquisa de aula*", em inglês usa-se "*lesson study*" e em espanhol "*estudio de classe*". Na lógica de valorização do português como língua de comunicação de ciência, consideramos importante procurar, sempre que possível, termos nesta língua que possam representar adequadamente os conceitos educacionais com que trabalhamos e daí a nossa opção por usar o termo português "*estudo de aula*" em vez dos termos em inglês ou em japonês.

Os estudos de aula como processo formativo

Os estudos de aula têm sido objeto de numerosas descrições, nem sempre coincidentes (Fuji, 2014; Lewis, 2002; Lewis, Perry, & Hurd, 2009; Murata, 2011). De um modo geral, num estudo de aula, um grupo de professores trabalha em conjunto, começando por identificar dificuldades que habitualmente os alunos têm num determinado tópico ou objetivo curricular. Procuram então preparar uma aula que possa dar um contributo decisivo para ultrapassar essas dificuldades. Para isso, documentam-se sobre as orientações curriculares, as estratégias e materiais de ensino disponíveis e fazem um diagnóstico o mais preciso possível das dificuldades dos seus alunos. Procuram também conhecer os resultados da investigação sobre as dificuldades dos alunos e as estratégias de ensino relativas ao tópico ou objetivo curricular selecionado. Com base nisto, preparam em grande detalhe uma aula sobre o tópico em questão[2]. A aula, designada de "*aula de investigação*", é lecionada por um dos professores e observada pelos restantes sendo o foco da atenção o trabalho dos alunos, as suas estratégias e dificuldades (e não o trabalho do professor). Depois, o grupo reflete em conjunto sobre o modo como os alunos trabalharam, os processos que usaram na resolução das tarefas, as respostas que deram às questões do professor e as eventuais dificuldades que manifestaram. Por vezes, escrevem as suas reflexões que divulgam junto dos seus colegas de escola ou em encontros profissionais. No decurso deste processo, os professores definem uma questão de interesse para aprofundar, pesquisam documentos e materiais, recolhem dados junto dos seus alunos, analisam e interpretam cuidadosamente informação diversa e procuram sistematizar e divulgar as conclusões a que chegaram. Trata-se, por isso, de um processo muito próximo de uma pequena investigação realizada no quadro da sua própria prática profissional, em contexto colaborativo (Ponte, 2002). Embora à primeira vista possa parecer muito semelhante às "observações de aulas" feitas nos estágios na formação inicial ou no decurso de processos de avaliação docente, existe aqui a grande diferença que o foco da observação não é o trabalho do professor, mas sim o trabalho dos alunos, tendo em vista perceber como se desenvolve a sua aprendizagem.

Comum a todos os estudos de aula realizados é o grande cuidado posto na fase de planeamento que conduz à preparação da aula de investigação. São analisados os conceitos-chave envolvidos no tópico em questão bem como as tarefas que podem ser

[2] O modo como essa preparação pode ser realizada é apresentado em pormenor em Ponte, Quaresma e Mata-Pereira (2015).

colocadas aos alunos, tendo em vista identificar as suas possíveis dificuldades. Isto envolve a realização de um trabalho matemático significativo (na resolução de tarefas que, por vezes, envolvem algum desafio para os próprios professores) bem como um trabalho de natureza didática (discutindo questões de ensino e de aprendizagem). Este planeamento tem em atenção as orientações curriculares e os resultados de investigações anteriores relativas à aprendizagem dos alunos no tópico em questão. Um elemento importante desse planeamento é o diagnóstico do conhecimento prévio dos alunos e das suas dificuldades, nomeadamente em conceitos que sejam importantes para a aprendizagem do tópico.

Subjacente aos estudos de aula por nós realizados está uma orientação curricular de natureza exploratória (Ponte, 2005). Nesta abordagem, os alunos trabalham em tarefas em que têm que construir as suas próprias estratégias de resolução, usando com flexibilidade diferentes representações matemáticas. Para isso, o professor propõe aos alunos tarefas que os levem a desenvolver conceitos, representações e procedimentos matemáticos. Isto é muito diferente da sala de aula usual, em que o professor começa por apresentar conceitos, representações e procedimentos, mostrando exemplos e propondo aos alunos exercícios para praticar—o que muitas vezes se designa por "ensino direto" (Ponte, 2015). A abordagem exploratória tem dois suportes principais, a escolha de tarefas apropriadas e o estabelecimento de um ambiente de comunicação na sala de aula capaz de favorecer a participação e reflexão por parte dos alunos, com relevo para os momentos de discussão coletiva, que valorizam a negociação de significados e argumentação. Esta abordagem enfatiza a construção de conceitos, a modelação de situações e também a utilização de definições e propriedades de objetos matemáticos para chegar a conclusões. Presta atenção aos aspetos computacionais da Matemática, mas não deixa esquecidos os aspetos concetuais. Ou seja, é importante obter resultados, mas mais importante ainda é perceber a estratégia geral que foi usada e a sua justificação. Esta abordagem é semelhante ao que alguns autores chamam "*inquiry-based mathematics teaching*" (Artigue & Blomhøj, 2013), "*reinvenção guiada*" (Gravemeijer, 2005), "*cenários de investigação*" (Skovsmose, 2000) ou "*reform mathematics*" (Cobb & McClain, 2006). Outro aspeto muito importante destes estudos de aula é a sua atenção ao raciocínio matemático dos alunos, especialmente no que respeita à realização de conjeturas e generalizações (raciocínio abdutivo e indutivo) e justificações utilizando propriedades matemáticas, definições ou representações (raciocínio dedutivo). Esta atenção materializa-se na condução das sessões do estudo de aula, através das tarefas e dos exemplos de trabalho dos alunos (resoluções de tarefas e extratos de momentos de discussão) que envolvem processos de raciocínio e que são objeto de análise.

Metodologia de investigação

Nos estudos de aula que temos realizado, a liderança é assumida pela nossa equipa, embora procurando valorizar o papel de lideranças espontâneas eventualmente existentes nos grupos de professores participantes. Usualmente, um dos membros da equipa do IE tem a responsabilidade de conduzir as sessões, mas estas são preparadas em reuniões de toda a equipa onde se faz, igualmente, um balanço sobre a evolução do trabalho. Durante as sessões do estudo de aula participam sempre um ou mais membros na qualidade de observadores que, por vezes, também participam dando contributos para o desenvolvimento da sessão. Na aula de investigação participam todos os professores do grupo, da nossa equipa e ainda um ou outro convidado especial (por exemplo, um dos Subdiretores da escola). Nesta comunicação referimo-nos em especial a dois estudos de aula, sendo os respetivos participantes apresentados mais adiante. Em ambos os casos, os dados foram recolhidos por observação participante com elaboração de um diário de bordo (por um membro da equipa), gravação áudio das sessões e vídeo da aula de investigação, sendo sempre feitas as respetivas transcrições, e ainda entrevistas aos participantes. Os dados foram analisados de forma indutiva, procurando identificar no discurso dos professores temas ilustrativos da sua perceção sobre os estudos de aula em que participaram.

Um estudo de aula com professores do 2.º ciclo

O nosso primeiro exemplo é um estudo de aula realizado com professores em serviço do 2.º ciclo (5.º e 6.º ano) de um agrupamento de Lisboa em 2013-14. Destas professoras, três lecionavam no 5.º ano e duas no 6.º ano. Três das professoras (Francisca, Inês, Maria) tinham larga experiência (mais de 35 anos de serviço) e eram efetivas na escola. As outras duas professoras (Luísa, Tânia) tinham também uma experiência significativa (cerca de 10 a 15 anos de serviço), sendo professoras contratadas. Para além do elemento da equipa do IE responsável pela dinamização da sessão, participaram sempre mais dois ou três elementos, intervindo igualmente no desenvolvimento do trabalho. O estudo de aula correspondeu a uma oficina de formação creditada com 25 horas presenciais. [3] A realização deste estudo de aula ocorreu no ano em que entrou em vigor o programa de Matemática de 2013. Neste caso o tópico escolhido foi a comparação de números racionais (do 5.º ano), como ficou definido coletivamente logo na Sessão 1. Trata-se de um tópico em que diversos membros da equipa do IE tinham feito trabalho anterior, pelo que foi possível localizar com facilidade bastantes tarefas e materiais para explorar nas sessões de trabalho com as professoras participantes. O diagnóstico dos conhecimentos dos alunos foi um aspeto muito importante do trabalho realizado, tendo atravessado duas sessões, primeiro na preparação (Sessão 3), depois na análise dos resultados dos alunos (Sessão 4). A definição de qual seria o professor a realizar a aula de investigação foi feita na Sessão 5 e foi um momento difícil no grupo. As duas professoras efetivas na escola que lecionavam o 5.º ano recusaram esse papel, uma delas argumentando com as caraterísticas da sua turma e a outra por, segundo disse, não estar disposta a assumir a condição de "professora avaliada", pelo que a aula acabou por ser realizada por uma professora contratada[4]. Esta começou por ter algum constrangimento com a situação, que foi ultrapassando à medida que avançava o planeamento detalhado desta aula. A tarefa a usar na aula de investigação foi preparada com a liderança da professora que assumiu a responsabilidade desta aula, assumindo a forma de uma ficha de trabalho com três questões, cada uma das quais com diversas alíneas. A aula de investigação constituiu a Sessão 7 do estudo de aula e a respetiva discussão a Sessão 8.

Um aspeto interessante deste estudo de aula foi a realização de sessões de seguimento (Sessões 9-12). Estas sessões, que surgiram em função da necessidade de completar as horas de formação presenciais, revelaram-se um momento de trabalho muito interessante. Nestas sessões, as cinco professoras prepararam novas tarefas seguindo as ideias discutidas ao longo do estudo de aula para levar para as suas aulas, propuseram estas tarefas aos seus alunos e relataram as suas reflexões sobre as experiências realizadas. Nestas sessões, houve assim oportunidade para rever e sistematizar muitas das discussões e aspetos da prática profissional identificados nas sessões iniciais.

Na última sessão fez-se um balanço global de todo o processo. Começamos por abordar a estranheza inicial que as professoras manifestaram relativamente a este modelo de

---

[3] Informação adicional sobre este estudo de aula, com relevo para as aprendizagens profissionais dos professores participantes encontra-se em Ponte, Quaresma, Mata-Pereira e Baptista (2015a).
[4] As outras duas professoras, como referimos, não tinham turmas do 5.º ano.

formação. Maria referiu que não percebia como se iria "perder todo aquele tempo, entre aspas, para preparar uma única aula". Luísa indicou que esperava que se pudessem "trabalhar tópicos diferentes." Francisca afirmou que teria preferido trabalhar a Geometria. Tânia deu conta do seu desapontamento por sentir necessidade de analisar em profundidade as novas metas curriculares. Perguntámos então às professoras se tinha valido a pena o investimento nesta formação. Todas responderam afirmativamente, destacando sobretudo o trabalho conjunto. A este respeito Francisca afirmou:

> Ao longo das sessões nós fomos vendo que isto realmente é proveitoso e que aprendemos a trabalhar colaborativamente. Isso para mim foi suficiente. Tanto que eu acho que [os membros do] nosso grupo de Matemática, neste momento, conseguem falar uns para outros sem entraves. Eu acho que isso é uma mais-valia. Este aspeto para mim foi o principal, nós começámos a trabalhar como um grupo.

A resolução de tarefas de Matemática foi vista de modo positivo por todas as professoras. Maria salientou que gostava de ser desafiada e de resolver tarefas que a obrigassem a pensar, de modo a não ficar estagnada na Matemática que ensina aos seus alunos: "Às vezes preciso de um bocadinho mais de Matemática, e acho que estas sessões nos ajudaram [nisso]".

Perguntámos às professoras qual a sua perspetiva sobre o trabalho realizado na análise da natureza das tarefas e o raciocínio dos alunos. Todas valorizaram este trabalho. Tânia, por exemplo, criticou os professores que se focam demasiado nos alunos com dificuldades, limitando o grau de desafio das questões colocadas: "Nós temos que abrir o leque e . . . Nós temos alunos que vão estar nos exercícios, exercício e mais exercício, mas temos de pensar que há alunos que têm capacidade para muito mais do que isso". As professoras consideraram que a realização do diagnóstico conduziu a uma importante discussão sobre os conhecimentos prévios dos alunos e proporcionou uma outra perspetiva sobre as suas reais capacidades.

Para Francisca e Luísa, o reconhecimento do valor da discussão coletiva foi a grande aprendizagem realizada ao longo do estudo de aula. O mesmo aconteceu com Maria que afirmou:

> Não tivemos tempo de fazer tudo no quadro, mas quando explicavam como é que tinham lá chegado… . . . Aliás, foi uma das coisas que eu aprendi aqui nesta ação que é: chatear os rapazes para explicarem como é que pensaram . . . Agora explicam tudo tintim por tintim, e explicam com pormenor. Acho que isso foi esta ação que me trouxe, esta discussão…

Relativamente às quatro sessões que se seguiram à aula de investigação, as professoras referiram que foram importantes para porem em prática nas suas aulas aquilo que tinham anteriormente trabalhado nas sessões do estudo de aula:

> Eu acho que é um caminho lógico. Porque . . . Isto não foi só os racionais, nós tivemos como pano de fundo os racionais e estivemos a trabalhar mais coisas, e aquilo que aprendemos na aula observada aplicámos agora. . . . Aplicámos no final aquilo que eu acho que é essencial e que todas nós aprendemos, que foi a discussão. A discussão com os nossos alunos é o ponto fulcral disto tudo. (Francisca)

Finalmente, Maria destacou de modo especial a importância do trabalho em grupo e da partilha:

> De qualquer modo, para acabar, só queria dizer uma coisa: acho que todos os professores deviam fazer um estudo de aula. Uma vez na vida deviam ter a oportunidade de preparar uma aula desta maneira, porque realmente é uma experiência diferente e deixa muitas coisas pequeninas que a gente vai retirando de uma sessão, de outra sessão, de outra sessão.

Um estudo de aula na formação inicial de professores

Apresentamos, agora, um outro estudo de aula realizado na formação inicial de professores de Matemática do 3.º ciclo do ensino básico e ensino secundário. Os participantes foram sete futuros professores no 1.º ano do seu mestrado em ensino (o 4.º ano de estudos superiores), a professora cooperante e três membros da equipa do IE. O estudo de aula decorreu no 7.º ano de escolaridade, em função da disponibilidade da professora cooperante. O tópico deste estudo de aula foi a semelhança de triângulos, escolhido tendo em conta o ritmo das aulas onde este trabalho foi realizado, a planificação anual da professora cooperante e também o facto de se tratar de um tópico onde habitualmente os alunos experimentam sérias dificuldades de aprendizagem. A condução das sessões de trabalho foi feita por um dos membros da equipa do IE, responsável pela unidade curricular onde este trabalho se inseriu, e as aulas de investigação foram lecionadas pela professora cooperante. Esta decisão decorreu do facto de que seria impossível todos os futuros professores lecionarem uma aula no decurso deste processo, sendo considerado inapropriado que apenas alguns o fizessem, e também porque os futuros professores estavam ainda numa fase inicial do seu programa de formação, não estando ainda devidamente preparados para assumir a direção de uma aula.[5]

[5] Informação adicional sobre este estudo de aula, com relevo para as aprendizagens profissionais dos professores participantes encontra-se em Ponte, Quaresma, Mata-Pereira e Baptista (2015b).

Tendo em conta o facto de serem sete os futuros professores envolvidos neste estudo de aula, foi decidido realizar um processo duplo, envolvendo duas aulas de investigação – aulas consecutivas da professora cooperante. Assim, a primeira aula foi dedicada à abordagem inicial ao conceito de semelhança, tendo por objetivo chegar à formulação dos critérios de semelhança de triângulos, e a segunda aula foi dedicada à resolução de problemas envolvendo semelhança de triângulos. Numa primeira fase, foi feita uma análise aprofundada das atuais orientações curriculares para o estudo das figuras semelhantes e, em especial, dos triângulos semelhantes. Os futuros professores resolveram várias tarefas matemáticas envolvendo triângulos semelhantes, muitas das quais por eles selecionadas e trazidas para as sessões de trabalho. Os futuros professores discutiram as características dessas tarefas e analisaram as possíveis dificuldades dos alunos. Isto correspondeu a um trabalho bastante aprofundado de natureza matemática (analisando várias definições e abordagens ao conceito de figuras semelhantes) bem como de natureza didática (diferentes tipos de tarefa passíveis de propor aos alunos bem como representações a usar). O planeamento foi feito coletivamente por todos os participantes em sessões de trabalho com uma forte participação da professora cooperante.

Os futuros professores foram divididos em dois grupos e todos eles observaram as duas aulas, tendo cada grupo ficado responsável por analisar uma aula. A professora cooperante, como responsável pela turma, tomou as decisões mais importantes sobre a adaptação do conteúdo matemático para os seus alunos. Assim, decidiu não apresentar a definição formal de figuras semelhantes indicada no programa oficial que considerou fora do alcance da compreensão dos seus alunos. Em alternativa, apresentou uma definição matematicamente menos rigorosa, mas mais intuitiva. Também decidiu que os critérios de triângulos semelhantes (que são as principais ferramentas que os alunos têm para resolver problemas sobre esse assunto) deveriam ser apresentados de forma intuitiva e não deduzidos de outros teoremas matemáticos que os alunos não conheciam sobre relações de segmentos em retas paralelas, como estabelecido no programa. A professora tomou estas decisões com base no seu conhecimento dos alunos e na sua determinação em fazer as adaptações que considerou necessárias no programa.

Na fase de preparação os futuros professores estranharam esta flexibilidade na interpretação dos documentos curriculares, mas mais tarde, perante a observação das aulas de investigação, reconheceram que eram as mais apropriadas para a turma em causa. Na sua reflexão final, os futuros professores reconheceram que este trabalho os ajudou a desenvolver uma melhor compreensão dos processos de identificação de dificuldades dos alunos e de planeamento de uma aula que procura promover um forte envolvimento dos alunos.

No final do estudo de aula, procurámos perceber de que modo este foi percebido pelos futuros professores. Um dos aspetos que estes valorizaram foi o trabalho bastante intenso de seleção e análise de tarefas. Uma das participantes considera até que esse trabalho deveria ter sido mais aprofundado:

> Acho que foi interessante, sim, acho que até deveríamos era ter tratado mais as nossas tarefas, que foi um pouco rápido essa parte. Que sublinhámos só alguns exercícios e se calhar outros que também tinham interesse foram postos de parte. (Cristina)

Relativamente à questão de qual a sua aprendizagem mais importante sobre o tópico, outra futura professora referiu que não tinha sido relativamente ao tópico da semelhança, com o qual estava bastante familiarizada, mas sim no que se refere à sua abordagem:

> Se calhar foi a forma de introduzir a tarefa mais como uma exploração... Acho que foi mais isso que... Que eu trabalhei, porque normalmente não é assim que se costuma trabalhar. Como nós trabalhámos, mesmo quando andámos na escola, por isso acho que foi mais a nível de... De ser uma tarefa. (Amélia)

Deste modo, os futuros professores valorizaram a aprendizagem que realizaram no estudo de aula no que respeita ao tipo de tarefas a propor aos alunos. Também destacam a sua aprendizagem no que respeita à planificação:

> Foi a primeira vez que nós elaborámos um plano de aula. Por isso, algum dia tínhamos que o fazer assim, detalhado. E... E, por mim, eu acho que estava fantástico, mas, se calhar foi o primeiro plano de aula que nós fizemos. Mas, deu para, para ver todos os pormenores que nós temos que pensar. (Cristina)

Os futuros professores valorizam também o trabalho feito com vista ao reconhecimento das dificuldades dos alunos na aprendizagem do tópico:

> O que eu achei mais importante nessa, para mim, não foi propriamente a resolução, por mim, dessas tarefas, nessa fase. Foi o aperceber-me das dificuldades gerais dos alunos… (Amélia)

> Nós já sabíamos alguma coisa, não é, mas achei interessante, nós a fazermos em grupo, com os meus colegas . . . Anteciparmos as dificuldades dos alunos. E entre nós pensarmos em várias estratégias . . . Acho que se aprende muito, muito nesse confronto. Porque surgem várias ideias diferentes. (Cristina)

A abordagem exploratória foi também valorizada pelos futuros professores. Por exemplo, uma participante afirma:

> Porque. . . Geralmente, todos os livros, o que dizem, é, apresentam os critérios [de semelhança]. E acho que... Eles conseguiram aprender melhor chegando aos critérios, apesar de não ter havido muito tempo, se houvesse mais tempo, acho que seria um tópico, no meu futuro, tratarei com método exploratório. Para eles conseguirem chegar lá… (Cristina)

Outra futura professora refere-se do seguinte modo à organização da aula em três fases caraterística da abordagem exploratória:

> Pode, posso, posso falar antes e depois do mestrado. Antes nunca tinha pensado como é importante os momentos que falámos agora, e, e ver como a definição destes momentos são muito importantes para gerirmos a aula, a sala de aula, e o trabalho que é feito e as aprendizagens dos alunos. Acho que é bastante importante. (Amélia)

A criação de um ambiente colaborativo não é muito fácil no caso dos estudos de aula realizados na formação inicial de professores, dadas as diferenças de estatuto entre os participantes. A este respeito é interessante registar a reflexão de uma das futuras professoras:

> Na primeira sessão, estávamos assim um pouco mais calados, porque era muito estranho, porem tarefas à frente, e vá, agora discutam. Aquilo era um pouco diferente. Acho que depois com o passar do tempo fomos esquecendo que quem estava desse lado eram professores, sinceramente, esqueci-me um pouco da câmara, e era mais um grupo grande, de trabalho . . . Acho que depois até fomos produzindo mais e melhor. Portanto, acho que evoluiu positivamente. (Cristina)

Conclusão

Em termos de orientação curricular, o traço principal destes estudos de aula é a ênfase na abordagem exploratória, com especial atenção ao desenvolvimento do raciocínio. Em termos de organização, destaca-se em todos os estudos a valorização do trabalho em torno das tarefas, a planificação e as sessões de seguimento nos estudos de aula com professores em serviço. Estas sessões, embora tivessem surgido de modo circunstancial, revelaram constituir um momento muito importante de trabalho, levando os professores participantes a assumir maior iniciativa e ajudando-os a pôr em prática e aprofundar a reflexão sobre as questões trabalhadas durante a fase inicial do estudo de aula. A organização adotada na formação inicial de professores revelou-se adequada aos objetivos visados, no âmbito das unidades curriculares de iniciação à prática profissional. Os professores e futuros professores participantes nestes estudos valorizam a abordagem curricular seguida, reconhecendo a importância para a aprendizagem de tarefas desafiantes e de momentos de discussão, propiciadores do desenvolvimento do raciocínio dos alunos. Valorizam, também, a dinâmica do processo formativo, destacando em especial a sua natureza colaborativa.

Na nossa abordagem aos estudos de aula, estes constituem uma pequena investigação coletiva do grupo de participantes, realizada na sua própria prática (Ponte, 2002). Começamos com a formulação de uma questão de partida, efetuamos um trabalho sistemático para preparar uma experiência (a aula de investigação), recolhemos e analisamos dados sobre essa aula e tentamos aplicar o conhecimento resultante deste processo a outras situações. Fazemo-lo procurando promover a integração de conhecimentos de natureza experiencial dos participantes (da sua experiência passada e da sua experiência no estudo de aula) com conhecimento de investigação (evidenciado a partir das atividades e nas discussões realizadas nas sessões). Procuramos fazer este trabalho com os professores também de um modo exploratório e num ambiente colaborativo, ou seja, em vez de dizermos como os "professores devem agir", procuramos criar situações em que sejam eles, através do seu trabalho coletivo, a descobrir como atuar. Combinando momentos de trabalho estruturado e momentos de trabalho exploratório, combinando conhecimento proveniente da investigação e conhecimento experiencial dos professores ou futuros professores, os estudos de aula afiguram-se um contexto promotor de desenvolvimento profissional dos participantes sobre questões relacionadas com a interpretação do currículo e a aprendizagem dos alunos e também, de forma indireta, sobre questões relacionadas com a sua própria prática de ensino.

Referências bibliográficas

Artigue, M., & Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM Mathematics Education, 45*, 797–810.

Cobb, P., & McClain, K. (2006). The collective mediation of a high-stakes accountability program: Communities and networks of practice. *Mind, Culture, and Activity, 13*(2), 79-99.

Fujii, T. (2014). Implementing Japanese lesson study in foreign countries: Misconceptions revealed. *Mathematics Teacher Education and Development, 16*(1), 65-83.

Gravemeijer, K. P. E. (2005). What makes mathematics so difficult, and what can we do about it? In L. Santos, A. P. Canavarro & J. Brocardo (Eds.), *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 83-101). Lisboa: APM.

Hargreaves, A. (1998). *Os professores em tempos de mudança: O trabalho e a cultura dos professores na idade pós-moderna*. Lisboa: McGraw Hill.

Lewis, C. C. (2002). *Lesson study: A handbook of teacher-led instructional change*. Philadelphia, PA: Research for Better Schools.

Lewis, C. C., Perry, R. R., & Hurd, J. (2009). Improving mathematics instruction through lesson study: A theoretical model and North American case. *Journal of Mathematics Teacher Education, 12*(4), 263-283.

Murata, A. (2011). Introduction: Conceptual overview of lesson study. In L. C. Hart, A. Alston & A. Murata (Eds.), *Lesson study research and practice in mathematics education: Learning together* (pp. 1-12). New York, NY: Springer.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2017). Lesson studies in initial mathematics teacher education *International Journal of Lesson and Learning Studies,* 6*(2)*, 1-14.

Ponte, J. P., Quaresma, M., Baptista, M., & Mata-Pereira, J. (2014). Teachers' involvement and learning in a lesson study. In S. Carreira, N. Amado, K. Jones & H. Jacinto (Eds.), *Proceedings of the Problem@Web International Conference: Technology, creativity and affect in mathematical problem solving* (pp. 321-333). Faro, Portugal: Universidade do Algarve.

Ponte, J. P., Quaresma, M., & Mata-Pereira, J. (2015). É mesmo necessário fazer planos de aula? *Educação e Matemática, 133*, 26-35.

Ponte, J. P., Quaresma, M., Mata-Pereira, J., & Baptista, M. (2015a). Exercícios, problemas e explorações: Perspetivas de professoras num estudo de aula. *Quadrante, 24*(2), 11-134.

Ponte, J. P., Quaresma, M., Mata-Pereira, J., & Baptista, M. (2015b). Lesson study and curriculum development. In *II European Conference on Curriculum Studies* (pp. 584-593). Porto.

Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação. *Bolema, 14*, 66-91.

Stigler, J. W., & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap*. New York, NY: Free Press.

Stigler, J. W., & Hiebert, J. (2016). Lesson study, improvement, and the importing cultural routines. *ZDM Mathematics Education, 48*(4), 581-587.

INDICADORES DE IDONEIDADE DIDÁTICA EM CONTEXTO DE FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESORES: O CASO DA ANA

Isabel Cláudia Nogueira[1], *Teresa B.Neto*[2]
[1]Escola Superior de Educação de Paula Frassinetti / CIPAF, isa.claudia@esepf.pt
[2]CIDTFF - Centro de Investigação Didática e Tecnologia na Formação de Formadores, Universidade de Aveiro, teresaneto@ua.pt

Resumo. *O objetivo desta comunicação é apresentar um caso sobre a aplicação do conceito de idoneidade didática, num contexto de formação inicial de professores de matemática, desenvolvido numa Instituição do Ensino Superior portuguesa. O caso apresentado indica que a futura professora revela conhecer, compreender e valorizar o conceito de idoneidade didática, através da sua aplicação coerente e sustentada, quer ao nível da preparação do ensino de um conceito matemático, quer ao nível da reflexão após o processo de ensino desse mesmo conceito. O caso desta futura professora permite compreender a contribuição da idoneidade didática na promoção de competências na análise didática do ensino e da aprendizagem de conceitos matemáticos.*

Abstract. *This presentation has the goal of depicting a case concerning the application of the concept of didactical suitability, in a context of mathematics teachers' initial training, developed in a Portuguese University. The case in question shows a teacher apprentice that is aware of and intent on valuing the concept of didactical probity through its cohesive and sustained application. The future teacher accomplishes this as much at the step of teaching preparation regarding a mathematical concept, as at the step of posterior reflection on the teaching process of said concept. This future teacher's case allows us to understand the contribution of didactical suitability in the promotion of competences in didactical analysis of the teaching and learning of mathematical concepts.*

Palavras-chave: *Formação de professores; enfoque Ontossemiótico; análise didática; competências profissionais.*

1. Introdução

Permitindo detetar conflitos decorrentes das distintas interações nela ocorridas, localizar a origem de desajustes nas várias dimensões que implicam e, portanto, possibilitando a conceção de propostas educativas criteriosas que orientem futuras implementações, a análise de práticas educativas configura-se uma fonte de conhecimento inestimável à compreensão das formas de produção de interações entre os processos de aprendizagem e os processos de ensino em Matemática, assumindo assim particular relevância no desenvolvimento profissional docente. Subscrevemos um perfil de professor reflexivo

(Schön, 2000) e implicado no seu próprio desenvolvimento profissional, partilhando com Perrenoud (2004) da necessidade de disponibilização de marcos concetuais específicos para cada disciplina que lhe permitam compreender, organizar e analisar a informação em reflexão: nesta aceção, entendemos que a promoção de competências de análise de práticas pode (e deve) ser promovida já no âmbito da sua formação inicial e mediante a análise da sua própria prática.

Neste trabalho, propomo-nos apresentar resultados (preliminares) obtidos no âmbito de uma investigação em curso que tem como objetivo explicar como a aplicação de indicadores de idoneidade didática influencia o desenvolvimento de competências de análise didática. O caso da Ana, que aqui apresentamos, situa-se no contexto da formação inicial de professores de matemática ao nível do 3.º Ciclo do Ensino básico e Ensino secundário e decorre da sua Prática de Ensino Supervisionada em Matemática.

2. Marco teórico de referência

Constituindo um instrumento poderoso ao serviço da elaboração de conhecimento teórico sobre a *praxis* educativa, encaramos a modelização de processos de ensino da matemática suportada em constructos disponibilizados pelo enfoque Ontossemiótico da Cognição e Instrução Matemática (EOS) como um contributo para a sua melhoria. Considerando que os fenómenos didáticos apresentam em simultâneo uma dimensão pessoal e uma dimensão institucional, o EOS propõe uma articulação das perspetivas epistemológica e cognitiva mediante a estruturação da sua base teórica em cinco componentes: (i) *sistemas de práticas*, de natureza operativa, discursiva e normativa, assumindo uma visão antropológica tanto do ponto de vista institucional (sociocultural) como pessoal (psicológica) e adotando a resolução de problemas como núcleo central na construção de conhecimento matemático; (ii) *configuração de objetos e processos matemáticos*, emergentes e intervenientes nas práticas matemáticas, e em que as várias formas de expressão tanto constituem instrumentos para a atividade matemática como representações dos restantes objetos matemáticos; (iii) *configuração didática*, entendida com um sistema de análise de instrução matemática, caracterizando qualquer processo de ensino nas facetas epistémica, cognitiva, emocional, mediacional, interacional e ecológica; (iv) *dimensão normativa*, generalizando a noção de contrato didáctico e normas sociomatemáticas, relativa a normas, regras e hábitos que condicionam e suportam as práticas matemáticas, e (v) *idoneidade didática*, como critério de avaliação da adequação e pertinência das ações, dos conhecimentos e dos recursos implicados e mobilizados em processos de ensino matemático. (Font, Planas e Godino, 2010; Godino, 2012)

2.1 Noção de idoneidade didática

O EOS define *idoneidade didática* como o critério sistémico que avalia a pertinência ou adequabilidade de um processo de ensino relativamente no âmbito da proposta educativa de que é parte integrante, valorando a concordância entre os significados pessoais construídos pelos estudantes e os significados institucionais pretendidos e/ou implementados (Godino, Bencomo, Font e Wilhelmi, 2006; Godino, 2013).

Com a sistematização de princípios e indicadores que orientem e suportem qualquer atividade matemática, em Godino (2011) são estabelecidos critérios gerais de idoneidade didática para seis dimensões, que podem ser aplicados a qualquer conteúdo matemático explorado em qualquer nível educativo: a partir desses critérios gerais, que de seguida explicitamos, é possível particularizar, para cada conteúdo específico, um conjunto de orientações que apoiem a atividade do professor na planificação das suas aulas, na sua implementação e na avaliação do trabalho realizado.

2.2 Critérios de idoneidade didática

A valoração da idoneidade didática constitui uma síntese que visa a identificação tanto de aspetos reveladores de práticas adequadas como de situações que poderão/deverão ser alvo de ajustes em novas implementações de processos de ensino análogos. A sua operacionalização é obtida mediante a introdução de seis critérios parciais, relacionados com as dimensões simultaneamente caraterísticas e condicionadoras de qualquer processo de aprendizagem/ensino, que possibilitam julgar a adequação didática desse processo relativamente às dimensões epistémica, cognitiva, interacional, mediacional, emocional e ecológica.

A *idoneidade epistémica* de um processo de ensino traduz o grau de representatividade dos significados institucionais implementados (ou pretendidos) relativamente a um significado de referência. No que respeita às situações-problema, deverão ser alvo de análise as situações de problematização propostas e verificada a existência de uma amostra coerente e representativa de situações de contextualização, exercitação e aplicação; as situações de expressão e interpretação – recorrendo a várias formas de expressão (verbal, gráfica, simbólica, por exemplo) e às suas traduções e conversões – e o uso de linguagem adequada ao público-alvo são indicadores que permitirão julgar a adequação dos objetos linguísticos; os elementos proposicionais deverão ser observados atendendo às situações propostas para geração e negociação das regras, à enunciação clara e correta das definições, enunciados e procedimentos fundamentais do tema em estudo, de acordo com o seu significado de referência e respeitando o nível educativo a que se dirigem; deverão considerar-se ainda momentos de validação e avaliar o grau de adequação das explicações e demonstrações formuladas, assim como a articulação dos objetos matemáticos presentes e das várias configurações em que estes se organizam.

A proximidade entre significados pessoais e significados pretendidos/implementados e o grau de adequação destes últimos à zona de desenvolvimento potencial dos estudantes configuram o grau de *idoneidade cognitiva* de um processo de aprendizagem/ensino. Nesta dimensão, deverá apreciar-se se os estudantes apresentam os conhecimentos prévios necessários ao tema em estudo, se os significados pretendidos são alcançáveis, se estão previstas/foram realizadas atividades de reforço que reflitam adaptações curriculares individualizadas e, ainda, se as várias formas de avaliação permitem revelar a apropriação dos conhecimentos/competências pretendidos ou implementados.

A *idoneidade interacional* incide sobre como os modos de interação ocorridos no processo permitem identificar e resolver conflitos de significados, assim como promover a autonomia na aprendizagem. Será assim importante considerar as interações professor-aluno e entre alunos, a promoção de autonomia e a avaliação formativa. No que respeita ao dueto professor-aluno, importa averiguar se o docente realiza uma apresentação clara e organizada, enfatizando os conceitos-chave do tema, se os “sinais” revelados pelos alunos são corretamente interpretados (silêncios e expressões faciais, por exemplo) e se o docente tenta motivar e implicar os estudantes na dinâmica da própria aula, nomeadamente pela utilização de diversos recursos retóricos e de natureza argumentativa; no que concerne a interação entre alunos, interessará verificar se o diálogo e comunicação entre todos foram promovidos. Assume particular relevância analisar o grau de autonomia concedido aos alunos, verificando se durante o processo de ensino ocorrem momentos de exploração, formulação e validação da responsabilidade dos estudantes.

O grau de afetação e adequação dos recursos materiais e temporais necessários ao desenvolvimento do processo de ensino reflete a *idoneidade mediacional* desse processo. Nesta dimensão, importa analisar se são usados materiais que potenciem a introdução e apropriação dos distintos objetos e processos matemáticos ou utilizados modelos representativos para o tema em estudo. Será igualmente relevante analisar se a forma de organização dos alunos na própria sala possibilita atingir os resultados pretendidos, se o tempo dedicado ao processo de ensino é adequado aos significados pretendidos/implementados e se a distribuição temporal para cada atividade está em consonância com a importância e o grau de dificuldade que lhe estão inerentes.

Os interesses e as necessidades dos alunos, as atitudes e as manifestações de natureza emocional dos estudantes constituem as componentes da *idoneidade emocional* de um processo de ensino. Nesta dimensão, será de considerar o interesse das tarefas propostas aos alunos, assim como averiguar se as situações apresentadas contribuem para o reconhecimento da utilidade quotidiana e profissional da matemática; deverá também ser apreciada a existência de situações que evidenciem a promoção da responsabilidade, da perseverança e da participação, assim como da auto-estima.

A adaptação curricular, socioprofissional e cultural, a abertura à inovação didáctica e o estabelecimento de conexões intra e interdisciplinar são as componentes da *idoneidade ecológica* do processo de ensino e, por tal, importa analisar se os significados implementados não só vão de encontro às orientações curriculares intra e intermatemáticas, como também contribuem para a formação social, profissional e cultural dos estudantes. Nesta dimensão, deverá ainda ser tida em consideração a inclusão de contributos resultantes da investigação, da prática reflexiva e mesmo da inovação tecnológica.

Apesar desta distinção, os seis critérios parciais estão inter-relacionados: para a realização de uma tarefa matemática, o professor deverá mobilizar os diversos significados postos em jogo (faceta epistémica) assim como deverão ser utilizados distintos procedimentos e apresentadas diversas justificações, adaptando-os aos conhecimentos dos alunos (facetas instrucional e cognitiva).

2.3 A idoneidade didática na formação inicial de professores de Matemática

A articulação entre conhecimentos e competências do professor de matemática está patente em diferentes modelos teóricos, no âmbito da formação de professores. Godino, Batanero, Font e Giacomone (2016) descrevem um modelo teórico que articula as noções de competência de análise didática e conhecimento didático - matemático do professor (CCDM). Este modelo, tal como os autores referem, apoia a investigação do desenho, implementação e avaliação de intervenções formativas.

Concebida como uma ferramenta de apoio à reflexão sobre a prática didática, a sua valoração e melhoria contínua (Godino et al, 2016), a aplicação da idoneidade didática permite desenvolver no professor de Matemática competências de análise ontossemiótica da sua própria intervenção educativa, revelando-se assim como um meio promotor do seu desenvolvimento profissional, já no âmbito da sua formação inicial, de que são exemplo os trabalhos de Seckel e Font (2015) e de Godino, Giacomone, Wilhelmi, Blanco e Contreras (2015). Para este texto e de forma mais concreta, recupera-se Pochulu, Font e Rodrigues (2015), que referem que os critérios de idoneidade didática do EOS são úteis na avaliação de ações realizadas nos processos de ensino e aprendizagem, dado que constituem princípios que orientam como se deve proceder na abordagem didático-matemático de conceitos (*à priori*) e servem para avaliar processos de ensino e aprendizagem implementados (*à posteriori*): os dados que apresentaremos adotam precisamente esta perspetiva diacrónica.

3. Opções metodológicas

Esta comunicação insere-se numa investigação mais ampla de natureza qualitativa (Stake, 2007) que pretende descrever a forma como futuros professores de matemática se apropriam e utilizam os critérios de idoneidade didática na preparação e implementação do ensino de conceitos matemáticos. Adotando uma perspetiva interpretativa (Bogdan e Biklen, 1994) e uma vez que se pretende compreender o ponto de vista dos participantes – futuros professores de Matemática em frequência de 2.º ciclo de estudos na formação de professores –, assumiu-se para esta investigação o *design* de estudo de caso (Merriam,1988) agregado: será analisado um conjunto de casos semelhantes na temática – aplicação de critérios de idoneidade didática na formação inicial de professores – mas provenientes de vários contextos.

Neste texto, iremos dar particular relevo aos resultados de um dos casos em estudo, Ana (nome fictício), a frequentar o Curso de Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Secundário, implementado entre 2012 e 2016 em uma Universidade Portuguesa. O conceito de idoneidade didática foi um dos conteúdos tratados na unidade curricular de Seminário em Didática e Desenvolvimento Curricular, unidade que ocorre em simultâneo com a Prática de Ensino Supervisionada. Os dados apresentados resultam de análise documental das experiências de ensino e aprendizagem realizadas ao longo do estágio e vertidas no relatório construído pela Ana no âmbito da sua Prática de Ensino Supervisionada em Matemática.

4. Apresentação de resultados

A apresentação de resultados inclui as seguintes fases, já anteriormente referidas: fase *à priori*, envolvendo a preparação da abordagem didático-matemático de conceitos e uma fase, dita *à posteriori*, que serve para avaliar processos de ensino e aprendizagem implementados.

4.1 Aplicação dos critérios de idoneidade didática à priori

Nesta fase, é apresentada a forma como foram utilizados os critérios de idoneidade didática como orientadores para planificação da subunidade "A definição de limite de uma função, segundo Heine", da unidade Teoria de limites. Esta subunidade envolveu uma sequência de três aulas apresentada, de forma sintetizada, na tabela 1.

Tabela 1. Sequência didática "Definição de limite de uma função, segundo Heine"

Aulas	Conteúdos Programáticos	Objetivos
1	- Noção intuitiva do conceito de limite. - Relação entre a noção intuitiva de limite e a definição de limite de uma função, segundo Heine.	- Explorar o conceito de limite graficamente. - Estabelecer relação entre a noção intuitiva de limite, a partir da representação gráfica e numérica de funções, e a definição de limite de uma função segundo Heine, a partir da representação gráfica e numérica.
2	Noções topológicas. Vizinhança de um ponto; Ponto de acumulação; Ponto isolado.	- Distinguir ponto de acumulação de ponto isolado. - Calcular limites de funções em pontos de acumulação do seu domínio, utilizando a definição de limite de uma função num ponto, segundo Heine.
3	Definição de Limite de uma função, segundo Heine.	- Calcular limites de funções, utilizando a definição de limite de uma função, segundo Heine, para os casos em que tende para $-\infty$ ou $+\infty$. - Calcular limites infinitos, utilizando a definição de limite de uma função, segundo Heine.

De seguida apresentam-se algumas evidências das orientações seguidas, dentro do critério de idoneidade epistémica. Os indicadores que constam na tabela 2 foram elaborados pela mestranda, futura professora, e revelam a forma como se apropriou do conceito de idoneidade epistémica na fase de preparação da sua intervenção.

Tabela 2. Componentes e indicadores de idoneidade epistémica

Componentes	Indicadores
Situações-problema	Utilizou-se a tarefa "Limite de uma função segundo Heine", partindo-se da noção intuitiva de limite, que os alunos têm desde os 10.º e 11.º anos, apresentando quatro funções reais de variável real. Para cada uma delas, pediu-se que os alunos indicassem o domínio, no sentido de se aperceberem que o limite pode ser calculado em pontos que não fazem parte do domínio da função, uma vez que, no 11.º ano, é abordado o conceito de limite associado ao conceito de derivada, que só pode ser calculada em pontos do domínio da função.
Linguagem	- Recorreu-se a diferentes modos de expressão matemática (verbal, simbólica e gráfica). Pediu-se uma representação gráfica de cada uma das funções (anteriores), atendendo a que nos anos anteriores, a noção intuitiva de limite se baseou, essencialmente, na análise de representações gráficas das funções. A representação gráfica das funções deveria ser obtida a partir da calculadora gráfica, onde os alunos poderiam ter acesso, para além da representação gráfica, a tabelas de valores; - Numa 2.ª fase os alunos analisaram uma animação em *GeoGebra*, que recriava a ideia da definição de limite de uma função, segundo Heine, utilizando as funções anteriores e sucessões particulares.
Regras (Definição, procedimentos, …)	Após uma abordagem intuitiva da noção de limite foi introduzida formalmente a definição de limite de uma função, segundo Heine.
Argumentos	Pediu-se aos alunos que determinassem, se possível, alguns limites, solicitando também a justificação das suas respostas, para que pudéssemos ter acesso às suas representações sobre a conceção de limite.
Relações	A conceção de tarefas teve em conta os conhecimentos prévios dos alunos com a preocupação que houvesse, da parte deles, uma associação entre a noção intuitiva de limite, que já possuíam, e a definição de limite de uma função, segundo Heine.

Quanto ao critério de idoneidade cognitiva, e tendo por base uma revisão de literatura focada na aprendizagem do conceito de limite e nos fatores que podem dificultar seriamente a aprendizagem de uma teoria formal sobre este tema (e.g. Tall & Vinner, 1981), a Ana procedeu a uma abordagem do conceito de limite de uma função, segundo Heine, promovendo a interação entre imagens concetuais, baseadas em experiências prévias dos alunos através de uma abordagem intuitiva e formal (note-se que, na tabela 2, partiu-se da noção intuitiva de limite, que os alunos têm desde os 10.º e 11.º anos, apresentando exemplos de funções reais de variável real).

4.2 Aplicação dos critérios de idoneidade didática à posteriori

Nesta fase, a mestranda revelou ter mobilizado critérios de idoneidade didática na reflexão que produziu sobre a prática pedagógica desenvolvida:

> - <u>Idoneidade epistémica</u> - […] foi introduzida a definição de limite de uma função, segundo Heine…. Para além deste conteúdo expresso no Programa, foram também abordadas as noções topológicas associadas ao conceito de limite: ponto de acumulação e ponto isolado, uma vez que, apesar de não fazer parte do Programa de Matemática A, nos manuais escolares, estão presentes estas noções. Para trabalhar estes conteúdos, recorremos a tarefas de índole exploratória, nas quais os alunos tinham de analisar situações, retirar conclusões, elaborar conjeturas e justificar as suas respostas, sendo, posteriormente, introduzidos os conteúdos e realizadas tarefas de aplicação dos mesmos. Perante tudo isto, consideramos que, em termos epistémicos, houve adequação;
>
> - <u>Idoneidade cognitiva</u> - A resolução das tarefas propostas aos alunos proporcionou experiências em que estes tiveram de elaborar conjeturas, justificar as suas respostas. Por outro lado, foram também realizadas algumas demonstrações. No início da implementação da unidade de ensino, em relação à conceção de limite de uma função real de variável real, chegou-se à conclusão que os alunos tinham uma conceção distante da definição e, portanto, podemos dizer que a sua imagem concetual de limite não estava de acordo com a definição formal do conceito de limite. Notou-se também que as justificações dos alunos foram sendo cada vez mais formais e recorrendo à definição de limite de uma função, segundo Heine. No entanto, quando não é expressamente pedida a justificação com base na definição, os alunos não a utilizam […]. Ao planificarmos a unidade de ensino, previmos também alguns conflitos que pudessem surgir aos alunos, que foram esclarecidos, quer pela professora, quer por colegas, durante a implementação da unidade de ensino […] recorremos a conteúdos prévios para introduzir os emergentes e foram sendo esclarecidas as dúvidas que surgiam aos alunos. Deste modo, pensamos que houve adequação cognitiva;
>
> - <u>Idoneidade interacional</u> – […] apesar de as tarefas serem recolhidas individualmente, permitiu-se a interação entre os alunos durante a resolução

das mesmas. Por outro lado, houve também alguma interação entre os alunos nas discussões existentes na turma. Assim, as dúvidas que surgiram aos alunos foram sendo esclarecidas quer pela professora, quer por outros alunos. Esta interação entre os alunos revelou-se, por vezes bastante positiva, na discussão sobre os conteúdos abordados;

- Idoneidade mediacional - Em termos de recursos, os alunos tiveram disponíveis as tarefas de apoio às aulas (exploratórias ou de aplicação), uma animação em *GeoGebra* e também a calculadora gráfica. Estes meios proporcionaram uma abordagem centrada na exploração dos conteúdos por parte dos alunos, a partir das tarefas de natureza exploratória, nas quais os alunos recorriam com frequência, sendo também incentivados pelos enunciados das próprias tarefas, à representação gráfica das funções, uma vez que a noção intuitiva de limite que os alunos tinham se baseava essencialmente na representação gráfica das funções […] a utilização de tarefas de natureza exploratória associada à utilização dos referidos recursos mostrou-se adequada, permitindo uma ligação permanente entre a representação gráfica das situações e os aspetos concetuais envolvidos.

A concluir, e de forma sintética, esta mestranda refere, "*a análise das componentes epistémica, cognitiva, interacional e mediacional, permite-me reconhecer que a planificação e implementação da unidade de ensino referida revelam adequação didática*", não se referindo de forma explícita aos critérios de idoneidade emocional e ecológica.

Apesar de não ter focado todos os critérios do conceito de idoneidade didática, não deixa de apresentar uma reflexão profunda e completa sobre o processo de ensino e aprendizagem do conceito em causa. Sobre a idoneidade epistémica, a mestranda profere informações fundamentadas em resultados de estudos de reconhecida importância, nomeadamente ao nível do estudo do conceito de limite de uma função. Sobre a idoneidade cognitiva, também se verifica que houve o cuidado da identificação de possíveis dificuldades por parte dos alunos, nomeadamente, além da revisão de estudos teóricos, houve o cuidado de entrevistar professores de Matemática experientes sobre aspetos a ter em atenção nos processos de ensino do conceito referido.

5. Conclusões

Neste trabalho, apresentamos a forma como uma futura professora de matemática, num contexto de Prática de Ensino Supervisionada, utiliza o conceito de idoneidade didática na preparação e após a abordagem didático-matemático de um conceito matemático. Segundo Godino *et al.* (2016), a noção de idoneidade didática constitui-se como um apoio para a reflexão sobre a prática didática, a sua valoração e melhoramento progressivo, pelo que com a sua aplicação se poderá promover a competência de análise didática de processos de ensino de conceitos matemáticos. As narrativas produzidas por esta mestranda – tanto sobre a sua atividade de planificação como sobre a sua implementação – revelam conhecer, compreender e valorizar esta noção, evidenciadas na sua aplicação coerente e sustentada, corroborando a utilidade apontada por Pochulu *et al.* (2015) no âmbito na avaliação de processos de ensino e aprendizagem do "conceito de limite de uma função, segundo Heine".

No que diz respeito à idoneidade epistémica, verificou-se que a mestranda recorreu: a uma amostra coerente e representativa de situações de contextualização, exercitação e aplicação do conceito matemático em causa; a várias formas de expressão (verbal, gráfica e simbólica) adequada ao público-alvo; a definições, enunciados e procedimentos fundamentais do tema em estudo, de acordo com o seu significado de referência e respeitando o nível educativo a que se dirigiu; considerou ainda momentos em que pediu a justificação de respostas, para que se pudesse ter acesso às representações dos alunos sobre a conceção de limite. Assim a mestranda revelou domínio do conceito de limite de uma função, segundo Heine, e das várias configurações em que este se organiza.

Apesar de sustentada num número reduzido de aulas focadas apenas na subunidade relativa ao ensino e aprendizagem do "conceito de limite de uma função, segundo Heine", o caso aqui apresentado sugere que a aplicação da idoneidade didática poderá promover a competência de análise de processos de ensino de conceitos matemáticos, configurando a idoneidade didática como um contributo para a formação inicial de professores de matemática.

Referências bibliográficas

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação. Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Font, V., Planas, N. & Godino, J.D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, *33*(1), 89-105.

Godino, J.D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática. In A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M.C. Penalva, F.J. García & L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 49-68). Jaén: SEIEM.

Godino J.D. (2013). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática,* 11, 111-132.

Godino, J.D., Bencomo, D., Font, V. & Wilhelmi, M.R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma,* XXVII, 2, 221-252.

Godino, J.D., Giacomone, B., Wilhelmi, M. R., Blanco, T. F. & Contreras, A. (2015). Diseño formativo para desarrollar la competencia de análisis epistémico y cognitivo de profesores de matemáticas. In C. Vásquez, H. Rivas, N. Pincheira, F. Rojas, H. Solar, E. Chandía y M. Parraguez (Eds.), *XIX Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (pp. 138-145). Villarrica: SOCHIEM.

Godino, J.D., Batanero, C., Font, V. & Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 285-294). Málaga: SEIEM.

Merriam, S. B. (1988). *Case study research in education: A qualitative approach*. San Francisco, CA: Jossey Bass.

Perrenoud, P. (2000). *Dez novas competências para ensinar*. Porto Alegre: ARTMED.

Pochulu, M., Font, V. & Rodríguez, M. (2015). Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas. *RELIME,* 19 (1), 71-98. (disponível em http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33544735004).

Schön, D. (2000). *Educando o profissional reflexivo. Um novo design para o ensino e a aprendizagem*. Porto Alegre: ARTMED.

Stake, R. (2007). *A arte da investigação com estudos de caso*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Seckel. M. J. & Font, V. (2015). Competencia de reflexión en la formación inicial de profesores de matemática en Chile. *Praxis Educacional*, *11* (19), 55-75.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 151 - 169.

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO METODOLOGIA DE ENSINO-APRENDIZAGEM-AVALIAÇÃO: UM EXEMPLO NUMA TURMA DO 9.° ANO

Célia Barros Nunes[1], *Lurdes Serrazina*[2], *Eurivalda Ribeiro dos Santos Santana*[3]
Universidade do Estado da Bahia (UNEB), Campus X, Teixeira de Freitas, Bahia, Brasil, celiabns@gmail.com
[2] Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa, UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, lurdess@eselx.ipl.pt
[3] Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC), Ilhéus, Bahia, Brasil, eurivalda@hotmail.com

Resumo. *Esta comunicação objetiva descrever e analisar a exploração de um problema matemático envolvendo equação do segundo grau com alunos do 9.º ano do Ensino Fundamental II. O estudo foi desenvolvido no âmbito do projeto de pesquisa intitulado: "A metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas no contexto da sala de aula: uma proposta de pesquisa pedagógica". É uma pesquisa de cunho qualitativo e interpretativo, baseada em estudo de caso. A recolha de dados foi feita por observação participante, gravações de vídeos e registros das atividades produzidas pelos alunos. Os resultados obtidos permitem inferir que o uso da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas pode favorecer a exploração de tarefas com alunos para a compreensão de generalizações envolvidas, uma vez que, foi possível solucionar o problema a partir de caminhos alternativos, adotando abordagens apoiadas nas suas intuições e conhecimentos prévios até se determinar uma generalização para a tarefa dada. Ademais, a professora da turma, conseguiu interagir como mediadora do processo, motivando os alunos nos momentos de suas dificuldades em fazer uma generalização da situação.*

Abstract. *This communication aims to describe and analyze the exploration of a mathematics problem involved 2nd degree equation with grade 9 students. The study was developed within the research project "The methodology of mathematics teaching-learning-evaluation through problem solving in classroom context: a pedagogical research proposal". It is a qualitative and interpretative research, based on case study. The data collection was realized by participant observation, video recording of classroom student activities and students' written documents. The obtained results allow to infer that the use of the methodology of math teaching-learning-evaluation through problem solving can favor the exploration of the task with students for comprehension of the generalizations referent 2nd degree equation. As, it was possible to solve the problem through alternative ways, adopting approaches based on their intuitions and previous knowledge until a generalization for the given task is determined. In addition, the class teacher was able to interact as mediator of the processes, motivating the students in the moments of difficulties to make a generalization of the situation.*

Palavras-Chave: *Resolução de Problemas. Equação do segundo grau. Generalização. Pensamento algébrico.*

Introdução

Atualmente a sociedade exige cada vez mais do cidadão competências de ordem científica e tecnológica, se torna preeminente a necessidade de uso da matemática na vida cotidiana. Nesse sentido, os Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2007), bem como os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (Brasil, 1998) defendem que todos as pessoas necessitam de conhecer e compreender a Matemática e, consequentemente, todos os alunos devem ter apoio e oportunidade necessários para aprender matemática com significado, profundidade e compreensão. É verdade que os alunos demonstram possuir diferentes talentos, capacidades, necessidades e interesse pela matemática, mesmo assim, todos eles deverão ter acesso aos melhores programas de Matemática. Não existe conflito entre equidade e excelência (NCTM, 2007).

Para desenvolver a compreensão matemática é importante que as crianças construam o seu próprio conhecimento, estabeleçam ligações entre suas intuições, a linguagem informal e as operações a partir de um leque alargado de experiências (Hiebert & Carpenter, 1992). No entanto, trabalhar a Matemática com compreensão não é tarefa fácil, mas, é possível, desde que se desenvolva no aluno a capacidade de formular e resolver problemas.

Reconhecendo a Resolução de Problemas como uma capacidade transversal a toda aprendizagem matemática (ME,2007), em 2012 foi desenvolvido um curso de extensão para futuros professores de Matemática (licenciandos em Matemática) e professores em formação continuada da Educação Básica, na Universidade do Estado da Bahia (UNEB), Campus X, Teixeira de Freitas, Bahia, Brasil, em um período de 4 meses, sob a orientação da primeira autora desta comunicação, cujo objetivo era apresentar e propor, a professores de Matemática, a Metodologia de Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (Onuchic, 1999) como um caminho para se ensinar e aprender matemática com compreensão. A partir desse curso, alguns professores em formação continuada, mostraram-se interessados em mudar a sua prática pedagógica e pretendiam trabalhar em sala de aula com a resolução de problemas. Como ainda não se sentiam seguros com essa nova forma de trabalho em sala de aula, pediram à pesquisadora (primeira autora deste artigo) uma intervenção em suas salas de aula guiada pela resolução de problemas.

A partir daí, surge o projeto *"A metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas no contexto da sala de aula: uma* *proposta de pesquisa pedagógica"* (Nunes, 2014), cujo objetivo é promover, por meio de intervenções pedagógicas, em espaços escolares do Ensino Fundamental II), momentos de aprendizagem matemática através da resolução de problemas. Ressaltamos que no Brasil a Educação Básica é composta por: Ensino Fundamental I com 1.º Ciclo (1.º ao 3.º ano) e 2.º Ciclo (4.º e 5.º anos); Ensino Fundamental II com 3.º Ciclo (6.º e 7.º anos) e 4.º Ciclo (8.º e 9.º anos); e, Ensino Médio com 10.º, 11.º e 12.º. O projeto de pesquisa tem sido desenvolvido na UNEB, Campus X, Teixeira de Freitas, Bahia, Brasil, financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa da Bahia (FAPESB). O espaço escolar referenciado é uma escola pública do Ensino Fundamental II que envolveu a pesquisadora, as alunas bolsistas (alunas da graduação em Matemática e orientandas da pesquisadora, que recebem incentivo financeiro pela FAPESB), três professores que lecionam no 5.º, 8.º e 9.º anos e seus respetivos alunos.

A presente comunicação insere-se no projeto descrito acima e tem como objetivo descrever e analisar a exploração de um problema matemático que pretendia introduzir o conteúdo "equação do 2.º grau" a alunos do 9.º ano ao utilizar a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da Resolução de Problemas. Esta metodologia constitui-se num caminho para se trabalhar em sala de aula, onde o problema é o ponto de partida das atividades de sala de aula e é proposto, aos alunos, antes mesmo de lhes ter sido apresentado o conteúdo ou os recursos matemáticos mais apropriados ou pretendidos para a sua resolução (Allevato &Vieira, 2016). O que se pretende é que no percurso de sua resolução, o aluno aprenda Matemática, aprenda o conteúdo que o professor pretende que ele aprenda, bem como outros conteúdos, eventualmente, não previstos pelo professor.

O pensamento algébrico e a equação do segundo grau

Uma das áreas decisivas para a aprendizagem da Matemática no Ensino Fundamental é a Álgebra. Quando trabalhada nos Ensinos Fundamental e Médio têm a ver com a compreensão do significado das letras e das operações com elas, se considerarmos que os alunos estão estudando Álgebra quando encontram variáveis pela primeira vez. As diferentes conceções desse ramo da Matemática relacionam-se com os diferentes usos das variáveis. Assim, em resumo, ela pode ser concebida, para alunos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, segundo Usiskin (1995), como: aritmética generalizada (generalizando modelos); meio de resolver problemas (incógnitas ou constantes para resolver e simplificar o problema); estudo de relações (argumentos e parâmetros para relacionar ou fazer gráficos); e como estrutura (sinais arbitrários no papel para manipular e justificar).

Ribeiro e Cury (2015) acreditam que a Álgebra deveria ser explorada desde os anos iniciais do ensino,

> [...] pois dela faz parte um conjunto de processos e pensamentos que têm origem em experiências com números, padrões, entes geométricos e análise de dados e […] quando trabalhada desde os anos iniciais pode ser o fio condutor do currículo escolar e o desenvolvimento do pensamento algébrico pode permitir que sejam realizadas abstrações e generalizações que estão na base dos processos de modelagem matemática da vida real (p. 11).

Neste nível, a Álgebra não é entendida como um conjunto de técnicas, mas como um modo de pensar (Kieran, 2007). Acrescenta a autora que para a promoção deste modo de pensar e compreender a Matemática é essencial proporcionar experiências que envolvam conjeturar, generalizar e justificar, usando uma variedade de representações e linguagens.

De fato, é difícil encontrar uma área de Matemática que não envolva generalizar e formalizar em algum modo fundamental. Este tipo de pensamento está no centro da Matemática como uma ciência de coisas que obedece a um padrão e uma ordem lógica. Descobrir e explorar esse padrão ou essa ordem e, então, dar sentido a ela é o que significa fazer matemática (Van de Walle, 2001). Problemas que envolvem a descoberta de padrões contribuem para o desenvolvimento do raciocínio e para o estabelecimento de conexões entre diferentes temas matemáticos. Em particular, "é um modo de envolver os alunos nalgumas das componentes fundamentais do pensamento algébrico como sejam o particularizar, o conjeturar, o generalizar e, eventualmente, o simbolizar das relações encontradas" (Vale & Pimentel, 2005, p. 19).

O pensamento algébrico apresenta algumas características como a de ser capaz de perceber padrões e aspetos variantes, saber expressar a estrutura de uma situação-problema; e saber fazer generalizações. Com estas características, o aluno é capaz de estabelecer relações entre objetos, representando-os e raciocinando sobre suas generalizações (Putti, 2011). Assim, os alunos devem primeiro aprender a formular generalizações em tarefas nas quais tem a possibilidade de observar padrões e relações e, em um segundo momento, devem formular generalizações, utilizando a notação algébrica para, posteriormente, numa última fase, poderem obter novas informações ao refletirem sobre as expressões algébricas produzidas pelos próprios ou por outros. (Mata-Pereira & Ponte, 2013). Em Matemática, muitas vezes, a generalização é considerada válida apenas se for demonstrada, no entanto, no âmbito da Educação Matemática, "uma generalização deve ser considerada válida de acordo com as capacidades e conhecimentos dos alunos em cada momento de sua aprendizagem" (Mata-Pereira & Ponte, 2013, p.2).

Segundo Van de Walle (2009) para desenvolver o pensamento algébrico nos alunos, algumas ideias devem ser trabalhadas no contexto da sala de aula. Dentre elas as equações e inequações que devem ser usadas para expressar relações entre duas quantidades. No que se refere às equações, particularmente as do segundo grau, o seu estudo representa para os alunos uma nova oportunidade de aprendizagem algébrica a qual remete para um nível de abstração superior ao exigido nas equações lineares. Além disso, Nabais (2010) diz que o estudo das equações do segundo grau.

> [...] possibilita a utilização e exploração de múltiplas situações que contribuem para o desenvolvimento do conceito de variável; apela ao estabelecimento de conexões e à apropriação de conhecimentos de diversos temas; favorece a transição da linguagem natural para a linguagem matemática; permite o recurso a diferentes formas de representação, possibilitando a utilização de métodos algébricos e geométricos e, constitui uma poderosa ferramenta para a resolução de problemas (p. 13).

Quanto a sua apresentação nos programas curriculares, o anterior Programa de Matemática para o ensino básico de Portugal (ME, 2007) integrava a aprendizagem desse tópico no terceiro ciclo do ensino básico e recomendava começar o ensino de equações do segundo grau pelas equações incompletas. O Programa considerava ainda que o estudo deste tema é uma boa oportunidade para os alunos com melhor desempenho matemático demonstrarem algebricamente a fórmula resolvente. Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (Brasil, 1998) ao tratar das equações recomendam que o estudo das técnicas convencionais para resolver equações seja desenvolvido apenas no quarto ciclo pois, caso contrário, os conteúdos do terceiro ciclo ficarão mais extensos, dificultando o trabalho com os demais blocos. Entretanto, é possível que, no terceiro ciclo, os alunos traduzam algumas situações-problema por equações. Nesses casos, "é desejável que eles desenvolvam estratégias próprias para resolvê-las (Brasil, 1998, p. 121).

A introdução das equações do segundo grau pode ser feita através da resolução de problemas, pois ela favorece, neste caso, "conexões entre as resoluções algébricas, geométricas e gráficas da equação do segundo grau de modo a proporcionar aos alunos uma aprendizagem significativa do estudo deste tópico através do recurso a várias formas de representação" (Nabais, 2010, p. 89).

A resolução de problemas no contexto da sala de aula

Um dos objetivos principais do ensino e da aprendizagem matemática é fazer o aluno pensar produtivamente e, para isso, "nada melhor que lhe apresentar situações problemas que o envolvam, o desafiem e o motivem a querer resolvê-las" (Nunes, 2015, p. 63). Essa é uma das razões pela qual a resolução de problemas tem sido reconhecida no mundo como uma meta fundamental do ensino e da aprendizagem matemática. Bons problemas poderão proporcionar aos alunos a oportunidade de consolidar e ampliar seus conhecimentos e, se forem bem escolhidos, poderão vir a estimular a aprendizagem da Matemática.

A Resolução de Problemas é apresentada nas orientações curriculares (Brasil, 1998; NCTM, 2007; ME, 2007) como um dos temas fundamentais da matemática, tanto na investigação quanto no desenvolvimento curricular. Defende-se nessas orientações curriculares que o problema é o ponto de partida de uma atividade matemática e um caminho para se fazer matemática.

No anterior Programa de Matemática de Portugal (ME, 2007), a resolução de problemas era reconhecida como uma atividade privilegiada para a consolidação, ampliação e aprofundamento do conhecimento matemático dos alunos e referia a importância de desenvolver as capacidades de: (i) compreender problemas em contextos matemáticos e não matemáticos e de os resolver utilizando estratégias apropriadas; (ii) apreciar a plausibilidade dos resultados obtidos e a adequação ao contexto das soluções a que chegam; (iii) monitorizar o seu trabalho e refletir sobre a adequação das suas estratégias, reconhecendo situações em que podem ser utilizadas estratégias diferentes e; (iv) formular problemas.

Diante dessas orientações curriculares, uma metodologia de ensino, a Metodologia de Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, é apresentada por Onuchic (1999) e, mais recentemente por Allevato e Onuchic (2014) para ajudar os professores a empregá-la em suas aulas. Elas sugerem que tais atividades sejam organizadas em dez etapas, descritas na Figura 1.

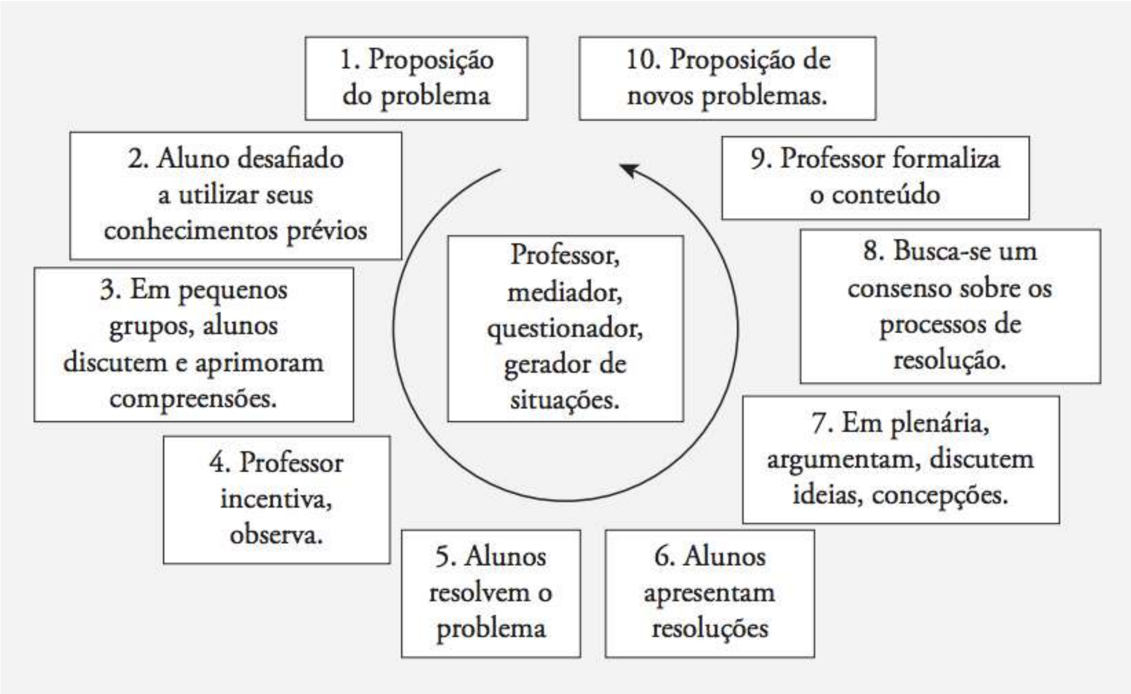


Figura 1: Ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da Resolução de Problemas (Allevato & Vieira, 2016).

Reitera-se que com a Metodologia de Ensino- aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, o ensino e a aprendizagem devem ocorrer simultaneamente durante a construção do conhecimento, tendo o professor como guia e os alunos como co-construtores desse conhecimento. Além disso, essa metodologia integra uma conceção mais atual de avaliação. “Ela é construída durante a resolução do problema, integrando-se ao ensino com vistas a acompanhar o crescimento dos alunos, aumentando sua aprendizagem e reorientando as práticas em salas de aula quando for necessário” (Onuchic, 2013, p. 101). Assim, organizar o ensino e a aprendizagem da Álgebra enquadrando o pensamento algébrico, padrões e generalizações e a resolução de problemas constitui uma condição essencial para a aprendizagem da Matemática com compreensão.

Pressupostos Metodológicos

Os dados apresentados nesta comunicação fazem parte de uma investigação mais ampla e tem como objetivo descrever e analisar a exploração de um problema matemático que pretendia introduzir o conteúdo “equação do segundo grau” a alunos do 9.º ano ao utilizar a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas. Para a coleta dos dados foram utilizadas algumas técnicas: observação participante, gravações de vídeos e registros das atividades produzidas pelos alunos. A descrição e análise dos dados foi guiada pelo roteiro da Metodologia de Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Como a pesquisa pretende promover em espaços escolares momentos de aprendizagem matemática através da Resolução de Problemas, por meio de intervenções pedagógicas, a mesma tem sido desenvolvida numa escola pública do Ensino Fundamental II, no município de Teixeira de Freitas – BA (Brasil), com a participação da pesquisadora e duas alunas bolsistas da Universidade do Estado da Bahia, UNEB – Campus X e três professores de matemática do 5.º, 7.º e 9.º ano.

O trabalho de intervenção apresentado nesta comunicação foi realizado pela pesquisadora e as alunas bolsistas com a participação da professora e uma turma do 9.º ano do Ensino Fundamental II, constituída por 35 alunos. Em conversa com a professora da turma e em reuniões de planejamento da execução da pesquisa, fomos desenhando a intervenção em comum acordo com a professora que propôs trabalharmos com equação do 2.º grau, assunto que ainda não era do conhecimento dos alunos. O ponto a destacar nesse trabalho de intervenção com os alunos é que os mesmos não mostravam familiaridade com problemas abertos, mas demonstravam disposição para realizar as atividades propostas. Consideramos como problema aberto, aquele que parte de enunciado que permite a formulação de diversos tipos de questões e possibilita a realização de explorações em diferentes direções (Vieira e Allevato, 2016).

Trazemos aqui como foi feito o planejamento para a intervenção na turma do 9.º ano, por considerar este um aspeto fundamental no processo de ensino e aprendizagem, embora, muitas vezes, não seja apreciado na prática de ensino. O planejamento de uma aula é discutido por Onuchic, et al (2014) ao se trabalhar com a Metodologia de Ensino-aprendizagem-avaliação da Matemática através da Resolução de Problemas e se constitui das seguintes fases: o problema gerador, ano escolar recomendado, objetivos, conteúdos abordados, possíveis estratégias para a resolução do problema, formalização, comentários e extensão do problema. Consideramos o problema gerador como aquele que visa a construção de um novo conceito, conteúdo, princípio ou procedimento matemático (Onuchic, 2013).

Assim, o problema com que se pretendia explorar a equação do segundo grau, apresentado aos alunos do 9.º ano foi planejado da seguinte forma:

Os participantes de um festival de música decidiram que, ao final do evento, fariam uma festa de encerramento. Nessa festa, cada um dos participantes daria uma flor de presente a cada colega que participou do evento. a) Quantas flores serão distribuídas se o total de participantes for igual a 5? b) E se for igual a 6? E igual a 7? c) Quantas flores serão distribuídas se o número total de participantes for igual a *n*? d) Se o total de flores distribuídas na festa for igual a 930, então qual será o número de participantes?

Quadro 1: Problema gerador do conteúdo equação de segundo grau adaptado de Putti (2011)

Objetivos do problema: (i) expressar algebricamente situações envolvendo equações polinomiais do 2.º grau; (ii) utilizar a linguagem algébrica para exprimir a área de uma figura plana; (iii) interpretar o enunciado do problema.

Conteúdo matemático a ser desenvolvido: Métodos para resolver equações polinomiais do 2.º grau; Solução geral de uma equação polinomial do 2.º grau; Desenvolvimento da fórmula resolvente da equação do 2.º grau.

Estratégias de resolução:

a) Considerando A, B, C, D e E os cinco participantes, vemos que cada participante distribuirá quatro flores. Portanto, o número total de flores distribuídas será 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 5x4 = 20.

b) Analogamente, para seis e sete participantes, ter-se-ia:

i) O número total de flores distribuídas será 5+5+5+5+5+5 = 6x5 = 30.

ii) O número total de flores distribuídas será 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 7x6 = 42

O aluno, com os exemplos dos itens acima, poderá observar, no item c, que sendo *n* o número de participantes, cada um de seus membros dará *(n-1)* flores, pois cada participante não dará uma flor para si mesmo. Dessa forma, o número total de flores a serem distribuídas será *n x (n-1).*

Então, que número vezes o seu antecessor dará 930? Assim, no item *d*, eles poderão representar o problema pela seguinte equação: $n(n-1) = 930$.

Para resolvê-la, os alunos poderão construir uma tabela.

Tabela 1: Respostas possíveis ao item (d) do problema

Número de participantes (*n*)	**Total de participantes (*n*x.(*n-1*))**
2	2x1 = 2
…	…
10	10x9 = 90
…	…
20	20x19 = 380
…	…
30	30x29 = 870
…	…
40	40x39 = 1560

Os alunos poderão perceber que o valor a ser encontrado está entre 30 e 40 e, pelo método de tentativa e erro, chegarão à resposta de 31 participantes.

Plenária (Discussão com toda a classe)

Espera-se no item d do problema, nesse momento da aula, que os alunos cheguem à equação n x $(n\text{-}1) = 930$, ou melhor, $n^2 - n = 930$, chegando assim a uma equação polinomial do 2.º grau.

Descrição e análise da resolução da tarefa

A princípio, esclarecemos que o problema foi apresentado aos alunos no intuito de introduzir o conteúdo “equação do segundo grau”, uma vez que, no item (c) do problema, chega-se a uma generalização para o número de flores quando o número de participantes é (n), $n^2 – n$, cuja representação recai sobre uma equação do segundo grau.

A realização da tarefa pelos alunos seguiu as orientações sugeridas por Onuchic (2013), conforme figura 1. A turma foi dividida em sete grupos de cinco alunos, dos quais, para essa análise faremos referência a três grupos que chamamos grupo da Maria, grupo do João e o grupo do Pedro.

No início foi entregue a cada aluno uma cópia do problema (quadro 1) que foi seguida de uma leitura pela pesquisadora a fim de que os alunos pudessem tirar suas dúvidas e terem uma melhor compreensão do problema. Como os alunos, naquele momento, não manifestaram dúvidas, seguiu-se para a resolução do problema e, a professora, a pesquisadora e as alunas bolsistas observavam, intervinham e mediavam, buscando responder a problemas secundários (dúvidas apresentadas pelos alunos em notações, simbologias, conceitos ou conteúdos matemáticos no decorrer da resolução do problema) que por ora surgiam em alguns grupos. Observavam que os alunos interagiam e discutiam entre si o problema, buscando chegar a uma solução para os itens (a) e (b), conforme o diálogo abaixo que surgiu no grupo do João. *Grupo do João:*

> *João*: Vamos supor que tem ela…ela é a sexta pessoa, ela dá uma flor para cada um…cada um com uma flor… e aí, pega você… você dá uma flor para cada um …
> *Aluno 2*: Cinco …
> *João*: Cada um vai ficar com duas flores…depois é este…depois é este (apontando para os colegas) … cada um vai ficar com cinco, porque você não dá flor para você mesmo…
> *Pesquisadora*: cada um vai ficar com cinco…são quantas pessoas?
> *Todos*: Seis…
> *Pesquisadora*: então são quantas flores no total?
> *João*: Trinta, trinta flores
> *Pesquisadora*: Agora é escrever o que pensaram.

Os itens (a) e (b) do problema foram resolvidos sem muitas dificuldades. A dificuldade maior se deu na resolução dos itens (c) e (d), sobretudo o item (c). Foi preciso a intervenção constante da pesquisadora, da professora e das alunas bolsista a fim de que os alunos não perdessem o interesse pela continuação da resolução do problema. Vejamos os diálogos que acontecerem entre os grupos da Maria e do João para o item (d) do problema. *Grupo da Maria:*

> *Maria*: A gente pegou 930 e dividiu por 30, aí deu 31. Depois a gente somou 930 mais 31 que deu 961 … não é mesmo?
> *Todos*: Sim
> *Maria:* depois a gente diminuiu, porque 31 vezes 31 dá 961 menos 31 é 930 …que é o resultado aqui (apontando para o item *d* do problema)
> *Professora*: Ok … então a quantidade de flores vai ser?
> *Todos*: 31 …

Há de se observar na resolução do grupo que a estratégia desenvolvida através de manipulações aritméticas corresponde, de uma forma generalizada, a expressão matemática *(n*x*n - n)* que é equivalente a *n* x *(n - 1). No entanto,* essa relação de equivalência não foi percebida pelo grupo. *Grupo do João:*

> *João*: 30 vezes 31 é igual a 930 … são 930 flores, porque você não dá flores para você mesmo.
> Professora se aproximando do grupo, diz a João
> - João, explique novamente a seus colegas como pensou.
> *João:* Porque 30 vezes 31? … porque é o número de participantes menos um … o número de participantes é 31 menos 1 é 30 … então, 30 vezes 31 é o número de participantes … cada um receberá 30 flores e são 31 participantes, entenderam?
> *Todos*: Sim …

Nas discussões acima, para encontrar a solução dos itens (a), (b) e (d), os alunos se apossaram de fatos numéricos e de técnicas de contagem, método de tentativa e erro, em um trabalho puramente técnico. O pensamento algébrico foi aflorado quando perceberam, na resolução do problema, um padrão e uma ordem, estabelecendo relações entre a quantidade de flores e o número de participantes.

O "não saber fazer generalizações" foi perceptível no idem (c) do problema, necessitando a intervenção da professora e pesquisadora várias vezes para que se chegasse a generalização, conforme discussão do grupo do Pedro abaixo.

A professora apontando para a resolução do Pedro, diz: -Esse aqui não está faltando o restante?

Pesquisadora se aproximando diz:

> -Ah, é! Não é só *n - 1*…Pensa lá, quando você, no item (a), achou 20, como fez? … 5 vezes 4 … o 5 representa o quê?
> *Pedro*: número de participantes
> *Pesquisadora:* e o 4?
> *Pedro:* as flores que recebi
> *Professora*: Então, olhe você quase chegou à resposta (apontando para a solução do aluno). Então o número de participantes agora é o *n*. Como fica a expressão agora para finalizar?

O grupo não conseguia chegar a solução. E a professora continuava insistindo para que chegassem a uma generalização.

> *Professora*: só tem o *n - 1*, tá faltando uma coisinha aí…vamos gente, vamos ver quem ajuda?
> *Aluno 1*: é o *n*
> *Pedro*: Ah, abre parêntese *n - 1* é igual a *n-1* vezes *n*
> *Aluna 2*: *n - 1* abre parênteses 2 - 1 fecha parêntese
> *Pedro*: *n*
> *Professora*: Vai explica aí … *n - 1* vezes … isso é um 2 ou é um *n*?
> *Aluna 2*: *n - 1* abre parêntese *n - 1* fecha parênteses vezes *n*
> *Todos*: tá certo agora …

Reforçamos aqui que o trabalho de intervenção e mediação da professora foi extremamente importante, pois ela atendeu aos alunos em suas dificuldades, incentivando-os a continuar em busca da resposta ao problema, acompanhando suas explorações e ajudando-os, quando necessário a resolver problemas secundários (Onuchic, 2013).

Diante das dificuldades apresentadas pelos alunos e da escassez do tempo, as demais etapas dinamizadas pelo roteiro da metodologia de resolução de problemas, sugerida por Onuchic (2013) não foram seguidas, terminando a intervenção com a formalização do problema pela pesquisadora, conforme estratégia de resolução da página 9. A continuidade desse trabalho se deu em mais três outras intervenções, cujos objetivos foram: (1) apresentação do método geométrico para resolução de equação do 2.º grau utilizando o método da completude de quadrado com recurso a material manipulativo; (2) resolução de equações do 2.º grau pelo método do cálculo mental e da factoração: (3) desenvolvimento da fórmula resolvente da equação do 2.º grau.

Considerações finais

Dadas as dificuldades que os alunos mostraram no seu pensamento algébrico, sobretudo na formulação de conjeturas e generalizações, não foi possível chegar a uma expressão algébrica que simbolizasse a equação do segundo grau, completa ou incompleta. Entretanto, o problema proposto serviu de alerta para a professora e pesquisadora perceberem que uma introdução a equação do segundo grau através da resolução de problemas pode representar uma oportunidade de aprendizagem algébrica a qual remete para um nível de abstração e generalização, começando pelo pensamento algébrico que se caracteriza por: particularizar, perceber padrões e regularidades.

A utilização da resolução de problemas como metodologia de ensino, segundo Onuchic (2013), favoreceu uma boa interação, socialização e discussão das estratégias utilizadas, pelos alunos, a partir de caminhos alternativos apoiados em suas intuições e conhecimentos prévios até se chegar a uma generalização. Deste modo, foi possível destacar os passos iniciais propostos por Allevato e Onuchic (2014), pois o problema foi posto para os alunos que se mostraram desafiados e buscaram em seus conhecimentos prévios, na discussão com os colegas e na mediação da professora, resolverem os itens do problema e apresentarem as suas soluções. Esses movimentos destacam as possibilidades que a resolução de problemas com essa perspetiva pode gerar na sala de aula e consequente na introdução de um conceito matemático. Se observa que para o professor a aplicabilidade dessa metodologia evidencia com mais facilidade as dificuldades do aluno, pois o mesmo se encontra num ambiente propício para o diálogo. Ademais, a professora da turma, conseguiu interagir como mediadora do processo, motivando os alunos nos momentos de suas dificuldades para a generalização de uma expressão que traduzisse uma equação do 2.º grau.

Referências bibliográficas

Allevato, N. S., & Onuchic, L. R. (2014). Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática: por que através da resolução de problemas? In L. R. Onuchic, N. S. Allevato, F. C. Noguti & A. M. Justulin (Org.), *Resolução de Problemas: teoria e prática* (pp. 35-52). Jundiaí: Paco Editorial.

Allevato, N. S., & Vieira, G. (2016). Do ensino de resolução de problemas abertos às investigações matemáticas: possibilidades para a aprendizagem. *Quadrante*, *25*(1), 113-131.

Brasil MEC (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática* — 3.º e 4.º ciclos. Brasília, DF: Secretaria de Educação Fundamental.

Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and Teaching with Understanding. In: *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, editado por Douglas A. Grouws, (pp. 65-97). New York: Maccmillan Publishing Co.,

Kieran, C. (2007). Developing algebraic reasoning: The role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels. *Quadrante*, *16*(1), 5–26.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2011). Raciocínio matemático em contexto algébrico: Uma análise com alunos do 9.º ano*. Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática, EIEM 2011*, (pp. 347-364). Lisboa: SPIEM.

ME (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC.

Nabais, M. M. S. (2010). *Equações do 2º grau: um estudo sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 9º ano.* (Dissertação de Mestrado). Instituto de Educação. Universidade de Lisboa.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM.

Nunes, C. B. (2015). A metodologia de ensino-aprendizagem da matemática através da resolução de problemas: perspectivas à formação docente no contexto da sala de aula. In M. J. E. Reis, C. Ferreguett, L. C. C. Audi, & J. O. Molar (Orgs.) E*ducação e Desenvolvimento: diferentes olhares* (pp. 61-79). Coleção Formação e Práxis Docente, vol.2. Pontes Editores.

Onuchic, L. R. (1999). Ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In M. A. Bicudo (Org.), *Pesquisa em Educação Matemática* (pp. 199–218). São Paulo: Editora UNESP.

Onuchic, L. R. et al (2014). *Resolução de Problemas: teoria e prática*. Jundiaí: Paco Editorial.

Onuchic, L. R. (2013). A resolução de problemas na Educação Matemática: onde estamos? E para onde iremos? *Espaço Pedagógico*. 20(1), 88-104. Acedido em fevereiro 23, 2017, em http://www.upf.br/seer/index.php/rep.

Ponte, J. P: (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Org.). *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Putti, T. (2011). *A produção de significados durante o processo de ensino-aprendizagem-avaliação de equações polinomiais* (dissertação de mestrado). Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, Brasil.

Ribeiro, A., & Cury, H. N. (2015). *Álgebra para a formação do professor: explorando os conceitos de equação e de função.* Belo Horizonte: Autêntica

Usiskin, Z. (1995). Concepções sobre a álgebra da Escola Média e utilização das Variáveis. In: Coxford, A. P Shulte (Eds). *As idéias da Álgebra*. Tradução.H. H. Domingues (pp.9-22). São Paulo: Atual.

Vale, I., & Pimentel, T. (2005). Padrões: um tema transversal do currículo. *Educação e Matemática, 85*, 14-20.

Van de Walle, J. A. (2009). *Matemática no Ensino Fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula.* Tradução de Paulo Henrique Colonese. Porto Alegre: Artmed.

ENVOLVER OS ALUNOS ATRAVÉS DE PRÁTICAS AVALIATIVAS REGULADORAS E TECNOLOGIA COMO ESTRATÉGIA PARA REGULAR O ENSINO

Elvira Lázaro dos Santos[1]*, Leonor Santos*[2]
[1]Agrupamento de Escolas Álvaro Velho, elviralazarosantos@gmail.com
[2]Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, mlsantos@ie.ulisboa.pt

Resumo. Com *este texto pretende-se dar a conhecer a prática do professor João quando envolve os alunos em estratégias para a aprendizagem com utilização de avaliação reguladora e tecnologia digital interativa enquanto etapa contributiva para a regulação do seu ensino. O estudo é de natureza interpretativa e a modalidade é de estudo de caso. Os dados apresentados foram recolhidos por áudio nas reuniões de trabalho, áudio e vídeo na sala de aula e das produções escritas dos alunos. Os resultados apontam para que os gestos profissionais do professor, nas aulas com TDI, são primordialmente dirigidos para Regular regras/normas. Na aula de coavaliação, os gestos profissionais do professor revelam primeiro Orientar a atividade de manipulação de conceitos e/ou objetos do saber.*

Abstract. *This text intends to show how teacher João engages his students in new strategies for learning using formative assessment and interactive digital technology, as a way to contribute for the regulation of her teaching process. The study is interpretive and the modality is case study. The data presented gathered by audio in meetings, audio and video in classrooms and students productions. The results point out that the teacher in classes using technology is primarily aimed at Regulating rules/norms. In the co-evaluation class the teacher reveals first to Guide the activity of manipulating concepts and/or objects of knowledge.*

Palavras-chave: *Avaliação reguladora; Tecnologias digitais interativas; Coavaliação.*

Introdução

A avaliação formativa tem vindo a mudar de paradigma e passa a contribuir para conhecer melhor o aluno através das suas produções para ajudar a compreender o seu funcionamento cognitivo tornando-se um instrumento de regulação das aprendizagens e do ensino (Black & Wiliam, 1998; Santos, 2002).

Os estudos realizados em Portugal no domínio da avaliação são consensuais na necessidade da existência de uma agenda de avaliação, tanto nos educadores, como nos investigadores matemáticos (Santos, 2004; Fernandes, 2009). Após 2009, nomeadamente no âmbito do projeto AREA (Avaliação Reguladora no Ensino e Aprendizagem) é possível constatar que ainda não foram realizados estudos sobre a autorregulação do professor antevendo-se a necessidade de contribuir para um melhor conhecimento sobre como o professor utiliza a avaliação reguladora para melhorar o seu ensino.

No presente estudo pretende-se conhecer como o professor João envolve os seus alunos em estratégias para a aprendizagem quando desenvolve novas estratégias avaliativas envolvendo tecnologia, enquanto etapa contributiva para a regulação do seu ensino.

A regulação do ensino

Considerando que uma prática efetiva de avaliação reguladora depende do envolvimento do professor num ciclo de questionamento e de construção do conhecimento (Butler, 2005; Timperley, 2014) desenvolvemos um modelo de aprendizagem e autorregulação da ação do professor (figura 1) no sentido de contribuir para um melhor conhecimento do papel da utilização da avaliação reguladora na regulação do ensino.

Partindo das necessidades do contexto e dos conhecimentos prévios, crenças e conceções, do conhecimento de si próprio, das estratégias experienciadas anteriormente e da interpretação da tarefa a realizar, os professores selecionam, adaptam ou criam estratégias para atingir os seus objetivos.

Ao elaborar as estratégias avaliativas o professor *aprofunda o conhecimento profissional e melhora as suas competências* através da *identificação do conhecimento e das capacidades dos alunos*, ou seja, o conhecimento e as capacidades que são necessárias aos alunos para estabelecerem relações entre o que sabem e podem fazer. E, ainda, da *identificação de aprendizagens necessárias do professor*, ou seja, os conhecimentos e capacidades que os professores necessitam, enquanto profissionais, para identificar as necessidades dos alunos (Timperley, 2014).

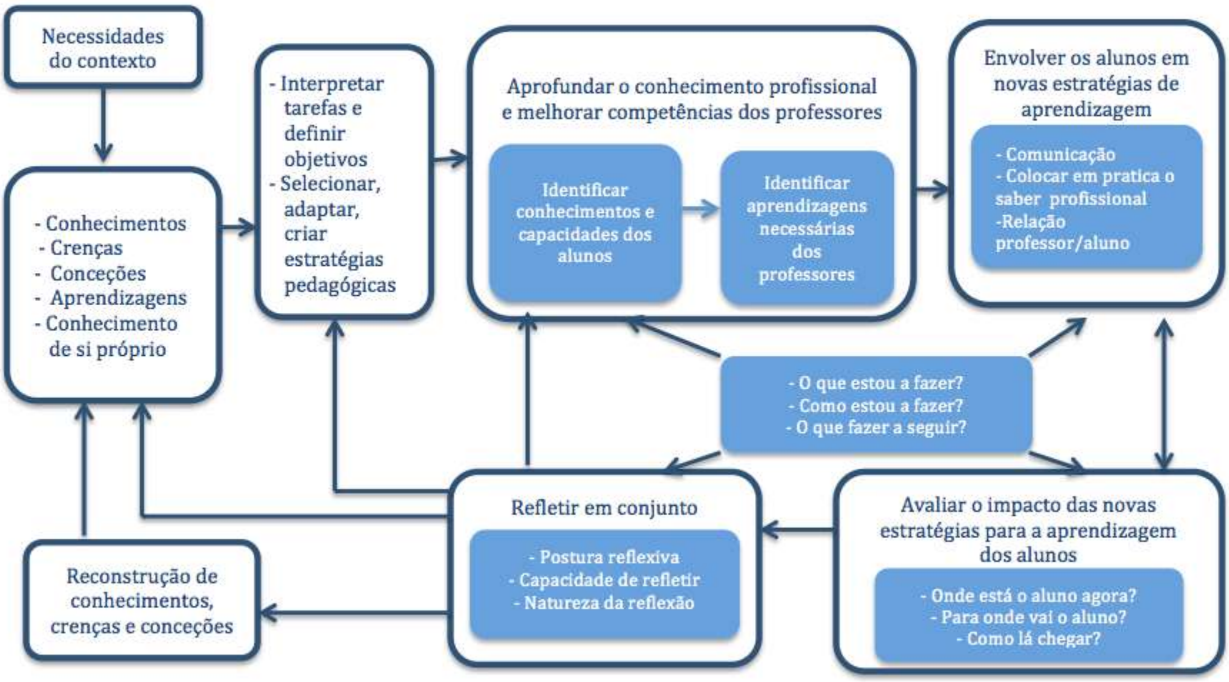


Figura 1. Ciclo de aprendizagem e autorregulação do professor (Butler, 2005; Black & Wiliam, 2009; Timperley, 2014; Jorro, 2005; 2006)

Os professores levam à prática as estratégias concebidas e *envolvem os alunos em novas estratégias de aprendizagem* em que os gestos profissionais destes docentes contribuem para esse envolvimento. Os gestos linguísticos permitem ao professor estabelecer *comunicação* com os alunos/grupos. O *colocar em prática o saber profissional* que revela a forma como trata o saber em situação de ensino para orientar a atividade intelectual dos alunos. E o tipo de *relações existentes entre professor/aluno,* devem estar de acordo com o formato de avaliação escolar que coloca em prática (Jorro, 2006).

A*valiar o impacto das estratégias para a aprendizagem dos alunos* permite ao professor questionar-se sobre onde está nesse momento o aprendente, para onde vai, e como deve lá chegar. Essa avaliação garante entender se a identificação dos progressos realizados pelos alunos são adequados aos parâmetros discutidos e nas áreas em que os alunos precisavam melhorar (Timperley, 2014; Black & Wiliam, 2009).

Com a dimensão *refletir em conjunto* o professor reflete com os colegas e com especialistas, revelando evidências do processo através da postura reflexiva, da capacidade de refletir e da natureza da reflexão (Jorro, 2005; 2006).

No final do ciclo o professor volta ao ponto de partida se verificar que são necessárias novas abordagens para as aprendizagens profissionais dos professores ou se se identificarem novos desafios, ou novos ciclos de reflexão, reconstruindo conhecimentos, crenças e conceções (Butler, 2005; Timperley, 2014).

Contexto de aprendizagem

A tarefa sobre o estudo da área do paralelogramo foi elaborada pelo professor utilizando Geogebra, TDI, e foi desenvolvida em duas aulas de 90 minutos cada, trabalhando os alunos em pequenos grupos (ver anexo). Os alunos na aula 1 têm acesso a um ficheiro incompleto em que, na área de trabalho, existem pontos e dois segmentos de reta iguais (bases) para iniciar a construção de um retângulo e de um paralelogramo. Esta atividade proporciona ao professor obter informações acerca das conceções e práticas dos alunos através da forma como lidam com a sintaxe e semântica do *software* (Hoyles & Noss, 2003). Permite, também, conhecer a ação sistemática do professor para organizar e orientar o uso do artefacto disponível para a tarefa matemática, ou seja, o processo de génese instrumental dos alunos (Drijvers, Doorman, Boon, Reed, & Gravemeijer, 2010).

Após a construção dos polígonos, e com a ajuda de dois seletores e do rato, os alunos fazem variar as dimensões da altura e da largura e observam a invariância da área dos polígonos, mantendo preservadas as relações geométricas (Laborde, Kynigos, Hollebrands, & Strässer, 2006). Esta tarefa revela, assim, oportunidades funcionais para *explorar variabilidades e regularidades* (Pierce & Stacey, 2013).

Com a intenção de favorecer momentos de discussão e reflexão, a tarefa apela à descrição, à explicação das experiências realizadas e às conclusões, proporcionando a formulação de conjeturas relativamente à área do paralelogramo relacionando-a com a área do retângulo equivalente. Pretende-se desenvolver uma postura reflexiva de modo a que todos compreendam não só o que estão a fazer, mas também o que alterar em direção ao sucesso (Nunziatti, 1990; Black & Wiliam, 1998; Wiliam, 2007), em que os erros e/ou as dificuldades ao longo do processo são encarados como sinais e são geridos no sentido de assegurar uma boa gestão de ensino e aprendizagem (Pinto & Santos, 2006).

À planificação desta tarefa, de natureza exploratória, esteve associada a conceção de estratégias avaliativas no sentido de operacionalizar uma prática avaliativa reguladora, nomeadamente a utilização dos critérios de avaliação e da avaliação entre pares. A utilização de critérios de avaliação permite enunciar o que é importante em cada momento e são uma ferramenta de diálogo entre avaliadores e avaliados (Vial, 2001), colocando a aprendizagem em termos da lógica do aprendente e do acesso à autonomia (Nunziatti, 1990). A coavaliação, sendo um processo de envolver os alunos na avaliação do trabalho dos seus colegas, provoca um efeito positivo no envolvimento na aprendizagem e é, também, "um processo eficaz para perceber mais profundamente o que os alunos aprenderam" (Tillema, 2014, p. 41).

Na aula 2, destinada a um momento de coavaliação, o professor providenciou a troca dos trabalhos entre pares de grupos. Cada grupo analisou o trabalho de outro grupo tendo por base os critérios de avaliação. Através do preenchimento de uma grelha própria elaboraram pistas para ajudar os seus colegas a melhorar as suas produções. No final as produções dos alunos e a ficha onde foram registadas as pistas, voltaram aos grupos iniciais para que estes pudessem aperfeiçoar as suas produções.

Opções metodológicas

Este texto reporta uma parte de uma investigação que tem como tema compreender como professores do 2.º ciclo desenvolvem práticas avaliativas reguladoras e as usam no aperfeiçoamento do processo de ensino. O estudo é de natureza interpretativa e a modalidade é de estudo de caso. Ao longo do ano letivo de 2014/15, num contexto de trabalho colaborativo entre a investigadora e dois professores de Matemática, foram selecionados conteúdos programáticos do 5.º ano de escolaridade, construíram-se tarefas e conceberam-se estratégias avaliativas concretizadas em sala de aula, procurando integrar as informações recolhidas na planificação seguinte.

Neste texto é apresentado um dos casos desta investigação, João, professor do 2.º ciclo do ensino básico, com 15 anos de serviço e uma licenciatura, variante Matemática-Ciências, de uma Escola Superior de Educação Portuguesa. A turma envolvida neste projeto conta com 20 alunos e é considerada pelo professor como uma turma com dificuldades na aprendizagem e em trabalhar em conjunto.

A recolha de dados foi feita através da observação das sessões de trabalho e de aulas, ambos acompanhados de registo áudio e de recolha documental como seja, produções de alunos, em fase inicial e após a intervenção da coavaliação, e materiais realizados no âmbito da prática de ensino.

A análise de dados seguiu a análise de conteúdo (Bardin, 2011). As categorias de análise estão de acordo com as questões em estudo não deixando de ter em consideração aquelas que emergiram das questões que se revelaram pertinentes para os professores participantes. Neste texto as categorias de análise foram constituídas tomando por foco de atenção a fase do quadro teórico "*Envolver os alunos em novas experiências de aprendizagem"* (ver figura 1). Foram consideradas as seguintes categorias:

Tabela 1: Categorias e subcategorias de análise

Categorias de análise	Subcategorias de análise
Comunicação	Introduzir saberes Atribuir sentido escolar aos conhecimentos Regular regras/normas
Colocar em prática o saber profissional	Orientar a atividade de manipulação de conceitos e/ou objetos do saber Orientar a atividade do raciocínio matemático
Relação professor/aluno	Incentivar o aluno/grupo Criar relações de domínio

Com estas categorias pretende-se desenvolver uma forma de analisar a ação do professor em sala de aula e proporcionar uma forma de reconhecer o profissionalismo do docente. Através da categoria *Comunicação* pretende-se analisar a comunicação do professor perante a turma que é visível na introdução de saberes, ao atribuir sentido escolar quando revisita um conceito ou clarificar uma noção e, ainda, ao regular regras/normas inerentes ao avanço das atividades propostas. Através da categoria *Colocar em prática o saber profissional* pretende-se analisar a forma como o professor está em contacto com a atividade intelectual dos alunos desenvolvendo a manipulação de conceitos e a atividade de raciocínio matemático. Na categoria *Relação professor/aluno* como incentiva o aluno na procura do seu caminho ou cria relações de domínio.

Envolver os alunos na aprendizagem com recurso a tecnologia digital e avaliação reguladora

Comunicação. Existem regras e normas que estão patentes na estrutura da tarefa nomeadamente nas questões destinadas às construções geométricas de polígonos e às indicações relativas aos comandos do Geogebra. O grupo, como se pode ver pelo extrato seguinte, constrói um polígono diferente do que está mencionado e tenta, mesmo assim, avançar no trabalho. O professor percebendo a situação opta por questionar os alunos, dando oportunidade de serem eles próprios a detetar o erro:

1. João: Vamos olhar para ali. Eu queria saber o nome daqueles polígonos.
2. Alunos: Triângulo.
3. João: E então o que diz lá em cima?
4. Alunos: Retângulo.
5. João: Então e está certo?
6. Aluno: Não. (Aula 1)

Esta subcategoria também surge na aula 2 embora se revele a menos expressiva nestas aulas. Uma das situações verifica-se com a utilização dos critérios de avaliação, quando os grupos estão a realizar o *feedback* em relação ao trabalho dos seus colegas. O professor identifica alguma dificuldade na utilização da ficha de registos, que consiste na utilização dos seus registos no espaço errado, e ajuda os alunos a continuar o trabalho seguindo as regras estabelecidas *a priori*:

> João: Vocês dizem que estes dois critérios que estão nesta [questão]. Sim? Mas olha não escreveste isso. Pois não? Se calhar o que escreveste que está aqui pode estar aqui nas pistas, não é? O que tu puseste foi, o que diz neste nível, tu dizes que é nível 1 no lugar das pistas, mas o que diz no nível 1 escreveste aqui no lugar dos critérios. Então ele escreveu aqui e diz que está no nível 1. Como pode ser isso?
> Aluna: Tem que escrever o que está aqui. (Aula 2)

A comunicação do professor revela, também, *introduzir saberes* na aula com TDI relativos à utilização de alguns procedimentos do *software,* assim como à introdução de algumas instruções de comando e/ou procedimentos necessários à conclusão da tarefa com sucesso. Uma das situações evidenciadas diz respeito a momentos em que o professor percebe que os alunos não conseguem obter o quadrilátero que pretendem por não usarem corretamente o procedimento. Os alunos são informados da necessidade de percorrer todos os vértices, assinalando-os com a utilização do rato de modo a fechar a figura, pois, só assim, é considerado como um polígono pelo *software*:

> João: Vocês têm mesmo que começar nos pontinhos azuis porque senão não dá. (...) Faz lá, vês? Já fechou ... têm que ir aos quatro vértices, senão não fecha, está bom? (Aula 1)

As dificuldades com a construção dos quadriláteros proporcionaram, ainda, a marcação de pontos sobrepostos pelos alunos. Este novo saber é introduzido pelo professor, a propósito das potencialidades do *software*, permitindo aos alunos a visualização de pontos sobrepostos que noutro contexto seria difícil, se não impossível:

> João: Aconteceu aqui um erro e foi qual? Quando vocês marcaram os polígonos não estavam com o rato em cima dos vértices e então ele em vez de marcar este vértice como sendo o vosso vértice do retângulo ele marcou em cima um vértice diferente. Os vértices não ficaram no sítio certo, está bem? Certo? Estão a ver o que acontece quando eu ponho o rato em cima do vértice? Quando pomos o rato em cima parece que fica uma bolinha à volta. Está bem? (Aula 1)

Também durante a aula com TDI a comunicação do professor revela *atribuir sentido escolar aos conhecimentos* dos alunos. Encontram-se evidências relativas a revisitar a noção de elaborar uma conjetura. Devido à dificuldade manifestada pelos alunos, o professor tenta associar essa noção ao trabalho realizado anteriormente com a classificação de triângulos. O grupo não corresponde e, por isso, considera oportuno revisitar a noção de conjetura de uma forma clara para que a continuidade do trabalho não seja prejudicada, como se pode ver no seguinte extrato (falas 2 e 4):

1. Aluno: O que é uma conjetura?
2. João: Conjetura? Já houve um trabalho anterior que fizeram uma conjetura, não foi? ... No trabalho anterior quando nós fizemos os triângulos também houve a necessidade de fazer uma conjetura no trabalho da turma.

   [Alunos pensam]
3. João: Em relação aos triângulos, e a conjetura era sobre o quê?

   [Alunos pensam]
4. João: Uma conjetura é como se fosse uma regra, está bem, que vocês têm que descobrir. Qual é a regra, ok? Se calhar desta maneira percebes mais facilmente. Mas repara a conjetura é sobre o quê?
5. Alunos: Sobre os paralelogramos.
6. João: Está bem. (Aula 1)

Em síntese, considerando a frequência das evidências encontradas nas duas aulas relativas à comunicação (Tabela 1) pode verifica-se a existência de um maior número na aula com TDI (Aula 1). Destaca-se, ainda, que *Regular normas/regras* é o objetivo mais frequentemente encontrado na comunicação do professor.

Tabela 2. Evidências da ação do professor na categoria Comunicação

Categoria	Subcategorias	Aula 1		Aula 2	
		N.º	Total	N.º	Total
Comunicação	Introduzir saberes	7	23	0	13
	Atribuir sentido escolar aos conhecimentos	4		0	
	Regular normas/regras	12		13	

Colocar em prática o saber profissional. Durante a aula em que ocorre a atividade de coavaliação esta categoria revela-se de forma mais marcante especialmente ao *Orientar a atividade de manipulação de conceitos e/ou objetos do saber*. O trabalho de fornecer pistas às produções dos colegas está decorrente da utilização dos critérios de avaliação e é outro dos momentos em sala de aula em que continua a ser necessária a intervenção do professor. Os alunos estão a ler e a tentar compreender o que os colegas registaram nas suas produções e, simultaneamente, a utilizar os critérios de avaliação para redigir uma pista, caso considerem que o trabalho realizado necessita de ser melhorado. Neste caso, os alunos indicam o critério e o respetivo nível que entendem caracterizar o trabalho ali registado, mas estão com dificuldades em registar a pista. O professor percebe que os alunos estão a relacionar o nível que caracteriza o trabalho com o tipo de comentário que devem registar e intervém no sentido de incentivar a refletir acerca dos critérios:

> Alunos: Stor eu aqui escrevi o mesmo que escrevi ali [nível do critério mas para critérios diferentes] só que não sei se devo escrever o mesmo que escrevi ali [pista]!
> João: Vocês acham que os critérios são iguais?
> Alunos: Ali pedíamos para explicar melhor e também "utiliza linguagem matemática com imprecisões".
> João: Mas isso é um critério? Quais são os critérios que a gente tem aqui nesta ficha. Os critérios são, o quê? ... lê lá quais são os critérios! (Aula 2)

Após a intervenção do professor os alunos fazem a leitura dos critérios e começam a comparar o que encontram na produção que analisam com os descritores que usam, para regular o trabalho dos colegas.

De igual forma nas duas aulas o professor revela colocar em prática o saber profissional *orientando a atividade do raciocínio matemático*, mas de forma pouco expressiva. Os alunos na aula 1 tinham realizado experiências com TDI e registaram as suas conclusões e a forma como pensaram, usando esquemas. O professor, através do questionamento oral, tenta que os alunos pensem sobre o seu próprio raciocínio, trazendo para o momento de produção dos alunos as experiências e as observações que realizaram com o Geogebra. Coloca, assim, questões que podem ser usadas pelos alunos como referências que proporcionam momentos de autoavaliação (falas 5, 7 e 9):

1. João: O que é que isto quer dizer?
2. Aluno: Escolher pela parte destacada.
3. João: É?
4. Aluno: É para ...
5. João: Isto é o quê?
6. Aluno Um paralelogramo. Antes isto estava assim, depois pusemos isto, este ponto aqui e puxamos este ponto para aqui e este para aqui.
7. João: Para transformar este paralelogramo no retângulo, o que é que vocês viam no Geogebra para isso?
8. Aluno: O paralelogramo tinha a mesma área que o retângulo.
9. João: Repara que nós vamos transformar um no outro. E vocês que conclusão é que chegaram antes? (Aula 1)

Na aula 2 os alunos recebem o *feedback* realizado pelos colegas. Um dos grupos percebe que, segundo a pista fornecida, precisa de reescrever as conclusões das experiências realizadas, mas revela dificuldades em melhorar o seu trabalho. O professor questiona o grupo sobre qual o objetivo da questão que era preciso melhorar. O aluno porta-voz do grupo tenta descrever a ação de movimentar uma parte do paralelogramo, explicando na figura (fala 2). O professor envolve os restantes colegas tentando que estes validem, ou não, a transformação que o colega está a sugerir (fala 11). Um dos alunos do grupo reconhece que o processo indicado não é uma forma de manter a mesma área nas duas figuras, tornando-a ainda maior e não servindo o propósito, pois eles recordam-se que a área tinha de ser igual (fala 12):

1. João: O que é que vocês pensaram quando fizeram este esquema aqui?
2. Aluno: Fazíamos assim depois transformávamos ... depois fazíamos o tracejado outra vez dava o paralelogramo e o tracejado outra vez.
3. João: Qual era a pergunta? Na 9 [questão] qual era a pergunta?
4. Aluno: Transformar um retângulo num paralelogramo.
5. João: Podemos ou não?
6. Aluno: Sim.
7. João: Como é que eu posso transformar este paralelogramo num retângulo?
8. Aluno: Posso mexer este.
9. João: Pronto e mexias como?
   [O aluno assinala na folha]
10. João: Podes fazer isto, não há problema.
11. João: A ideia do Luís, vejam lá se está quase. E ficava igual a isto?
12. Aluno: Ficava maior.
13. João: Vocês quando tinham um retângulo e um paralelogramo, na primeira parte, o que é que vocês viram em relação à área?
14. Aluno: Tinham sempre a mesma área. (Aula 2)

Em síntese, pode afirmar-se que o colocar em prática o saber profissional do professor surge um maior número de vezes na aula 2 e é o segundo maior número de evidências na aula 1. Considerando a frequência das evidências encontradas nas duas aulas (Tabela 2) pode afirmar-se que esta subcategoria revela o maior número de evidências da atuação do professor na categoria em que se insere, em qualquer das aulas.

Tabela 3. Evidências da ação do professor na categoria Colocar em prática o saber profissional

Categoria	Subcategorias	Aula 1		Aula 2	
		N.º	Total	N.º	Total
Colocar em prática o saber profissional	Orientar a atividade de manipulação de conceitos e/ou objetos do saber	6	10	21	25
	Orientar a atividade do raciocínio matemático	4		4	

Relação professor/aluno. *Incentivar o aluno/grupo* revela-se nas duas aulas, mas de forma mais acentuada durante a atividade da aula 2. Os registos das experiências marcam grande parte do trabalho e é nesta fase que o professor é várias vezes solicitado pelos alunos, procurando a sua aprovação. O professor mantém uma postura de incentivo à participação de todos os alunos no trabalho de grupo, criando um produto de todos:

João: Devem perguntar uns aos outros o que é que vocês acham. (Aula 2)

Ao longo da atividade matemática de construção de polígonos surge a dúvida relativa à unidade de medida a utilizar. O professor é questionado sobre o assunto mas a resposta ocorre prontamente, vinda de um outro aluno. É possível verificar que o professor respeita as intervenções de todos alunos e espera que sejam aceites, ou não, pelos seus pares, contribuindo para o incentivo à colaboração de todos no trabalho de grupo. No entanto, intervém discretamente para que o assunto não continue sem regulação, como se pode ver pela intervenção seguinte (fala 5):

1. Aluno: Stor cada quadradinho mede quanto?
2. Aluno: 1 centímetro
3. Aluno: Muito obrigada
4. Aluno: E depois fazes vezes 4.
5. João: Mas olhem isso não é importante. Ok?
6. Aluno: Então contamos com os quadradinhos?
7. Aluno: Ok. Estavas-me a baralhar.
8. Aluno: 1, 2, 3, 4.
9. Aluno: Então o comprimento é 4. (Aula 1)

Em síntese, pode afirmar-se que a categoria de *Relação professor/aluno* revela um maior número de evidências da ação do professor durante a atividade da aula 2. Considerando a frequência das evidências encontradas nas duas aulas (Tabela 3) pode afirmar-se que a subcategoria *Incentivar o aluno* revela o maior número de evidências da atuação do professor na categoria em que se insere, em qualquer das aulas.

Tabela 4. Evidências da ação do professor na categoria Relação professor/aluno

Categoria	**Subcategorias**	**Aula 1**		**Aula 2**	
		N.º	Total	N.º	Total
Relação professor/aluno	Incentivar o aluno/grupo	7	8	14	16
	Criar relações de domínio	1		2	

Conclusão

Discutindo como as categorias de análise se revelam nos gestos do professor verifica-se que a categoria *Comunicação* surge mais frequentemente na aula com TDI, revelando sobretudo *Regular normas e regras*. A existência de evidências em todas as subcategorias revela a diversidade de decisões que o professor toma no sentido de orientar o processo de génese instrumental do aluno (Drijvers *et al*., 2010). O professor acompanha o trabalho do aluno contribuindo para reduzir obstáculos e ajudando a lidar com a sintaxe e a semântica do *software* (Hoyles & Noss, 2003).

A categoria *Colocar em prática o saber profissional* surge mais frequentemente na aula com estratégia avaliativa de coavaliação, revelando sobretudo *Orientar a atividade de manipulação de conceitos e/ou objetos do saber*. O professor ajuda a orientar a atividade dos alunos na utilização dos critérios de avaliação, a compreender as produções realizadas pelos seus pares, assim como, a relacionar, de forma adequada, pistas com os critérios de avaliação. Deste modo, o professor orienta a atividade intelectual dos alunos, incentivando a uma postura reflexiva de modo a que todos compreendam não só o que estão a fazer, mas também o que alterar em direção ao sucesso (Nunziatti, 1990; Black & Wiliam, 1998; Wiliam, 2007). Uma ação complexa para o professor no sentido de encontrar o equilíbrio em apoiar os alunos, sem fornecer informação excessiva, a encontrar o seu próprio caminho (Vial, 2001) requerendo, assim, um elevado saber profissional.

A categoria *Relação professor/aluno* revela-se principalmente na subcategoria *incentivo ao aluno,* constitui-se como uma característica forte que se encontra em sintonia com o formato de avaliação colocado em prática (Jorro, 2006).

Deste modo, os gestos do professor numa prática de avaliação reguladora, envolvendo TDI, revelam inverter as intencionalidades na aula 2. Enquanto que na aula 1 o professor está em contacto com a atividade instrumental dos alunos reduzindo as dificuldades que surjam, na aula 2 o professor apoia a atividade intelectual dos alunos sem desvendar o caminho a seguir. Assim, o professor constitui-se, como uma estrutura de apoio, nas duas aulas, mas ajusta a sua ação às necessidades intelectuais dos alunos ditadas pela natureza diferente de cada uma das aulas (Nunziatti, 1990; Black & Wiliam, 2009).

Concluímos que num ciclo de aprendizagem e autorregulação do professor o conhecimento dos seus gestos profissionais mais marcantes constitui uma mais valia para o processo de regulação do ensino relativamente ao que faz, como faz e o que fazer a seguir (Butler, 2005; Timperley, 2014).

Referências bibliográficas

Bardin, L. (2011). *Análise de conteúdo*. Coimbra: Edições 70, Grupo Almedina. (obra original em francês, publicada em 1977)

Black, P. & Wiliam, D. (1998). Assessment and classroom learning. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice*. *98*(5), 7-68.

Black, P., & Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. *Educational Assessment, Evaluation and Accountability (formerly: Journal of Personnel Evaluation in Education)*, *21*(1), 5-31.

Butler, D. L. (2005). L'autorégulation de l'apprentissage et la collaboration dans le développement professionnel des enseignants. *Revue des sciences de l'éducation*, *31*(1), 55-78.

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H., & Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: Instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *75*(2), 213-234.

Fernandes, D. (2009). Avaliação das aprendizagens em Portugal: investigação e teoria da actividade. Investigação e teoria da atividade. Sísifo. *Revista de Ciências da Educação* 9, 87-100.

Hoyles, C., & Noss, R. (2003). What can digital technologies take from and bring to research in mathematics education?. In *Second international handbook of mathematics education* (pp. 323-349). Springer Netherlands.

Jorro, A. (2005). Réflexivité et auto-évaluation dans les pratiques enseignantes. *Revue Mesure et évaluation en éducation*, vol 27, n°2, p33-47, 2005.

Jorro, A. (2006). L'agir professionnel de l'enseignant. In *Séminaire de recherche du Centre de Recherche sur la formation*-CNAM, Feb 2006, Paris, France.

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K. & Strässer, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. In A. Guitiérrez & P. Boero (Ed.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 275-304). Rotterdam. SensePublishers.

National Council of Teachers of Mathematics (2014). *Principles to Actions. Ensuring Mathematical Sucess For All*. NCTM.

Nunziatti, G. (1990). Pour construire un dispositif d´évaluation formatrice. *Cahiers Pedagogiques, 280*, 47-64.

Pierce, R., & Stacey, K. (2013). Teaching with new technology: four 'early majority' teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16(5), 323-347.

Pinto, J., & Santos, L. (2006). É mesmo possível uma regulação no quotidiano do trabalho do professor e do aluno. *Actas do Profmat 2006*.

Santos, L. (2004). O ensino e a aprendizagem da matemática em Portugal: Um olhar através da avaliação. *Actas del octavo simposio de la sociedad española de investigación en educación matemática* (S.E.I.E.M.) (pp. 127-151). Coruña: Universidade da Coruña.

Santos, L. (2002). Auto-avaliação regulada: porquê, o quê e como? In P. Abrantes & F. Araújo (Coord.), Avaliação das aprendizagens (pp. 75-84). Lisboa: DEB, ME.

Timperley, H. (2014). Using Assessment Information for Professional Learning. In *Designing Assessment for Quality Learning*, pp. 37-149. Springer Netherlands.

Tillema, H. (2014). Student Involvement in Assessment of their Learning. In *Designing Assessment for Quality Learning*, pp. 9-53. Springer Netherlands.

Vial, M. (2001). *Se former pour évaluer. Pédagogies en Développement*. Bruxelles. De boeck Université.

Wiliam, D. (2007). Keeping learning on track. In F. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 1053-1098). Charlotte: Information Age Publishing.

Anexo

Escola Básica do 2º e 3º Ciclos

Ficha de Trabalho 2 - Matemática – 5º Ano

NOMES: ____ TURMA: ___ DATA: ___/___/___

Tarefa: Área do paralelogramo

Para descobrir a área do paralelogramo vamos utilizar o *software* do Geogebra.

1.Abram *o software* Geogebra.

2. No menu Ficheiro cliquem em Abrir → Ambiente de trabalho → área de polígonos 1

3.Na barra de ferramentas cliquem (Polígono)

4. Construam um retângulo cuja base é o segmento de reta vermelho, para isso cliquem nos vértices (pontos azuis) e novamente no vértice inicial.

5. Construam o paralelogramo cuja base é segmento de reta vermelho, para isso cliquem nos vértices (pontos azuis) e novamente no vértice inicial.

6. Cliquem no botão e selecionem (esta ferramenta fornece o valor numérico da área de um polígono).

7. Cliquem em cima do retângulo e em cima do paralelogramo, e registem na tabela abaixo o que observam.

Área do retângulo	**Área do paralelogramo**

8. Cliquem no botão (Ponteiro – para selecionar um objeto clicamos sobre ele com o rato, após ter selecionado a ferramenta Mover).

Movam os pontos vermelhos do **Painel de controlo** e observem o que acontece com cada um dos polígonos. Façam os vossos registos nas tabelas seguintes.

Tabela 1

	Retângulo	**Paralelogramo**
Comprimento (C)		
Largura (L)		
Área		

Tabela 2

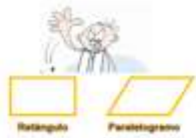
	Retângulo	**Paralelogramo**
Comprimento (C)		
Largura (L)		
Área		

Tabela 3

	Retângulo	**Paralelogramo**
Comprimento (C)		
Largura (L)		
Área		

Descrevam e expliquem todas as experiências que fizeram e a que conclusões chegaram.

9. Será que podemos "transformar" o paralelogramo num retângulo?
Podem usar palavras e desenhos para explicarem a vossa estratégia.



10. Formulem uma conjetura que vos permita calcular a área de qualquer paralelogramo.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E EDUCAÇÃO FINANCEIRA: QUE RELAÇÕES?

Dárida Maria Fernandes[1], Maria Santos[2]
[1]Escola Superior de Educação do Politécnico do Porto, daridafernandes@gmail.com
[2] mariajbeirasantos@gmail.com

Resumo. *Num projeto de investigação desenvolvido no âmbito do Mestrado em Ensino do 1.º e do 2.º Ciclo do Ensino Básico da Escola Superior de Educação do Politécnico do Porto foi colocada uma questão-problema que relacionava a resolução de problemas do quotidiano das crianças com o desenvolvimento da Educação Financeira em estudantes do 2.º ciclo do Ensino Básico. Traçou-se uma metodologia adequada ao estudo, tendo sido desafiados os estudantes do 5.º ano a construir, através da resolução de problemas, conhecimentos matemáticos sobre a multiplicação de números racionais não negativos e a mobilizar conceitos relacionados com a Educação Financeira. Neste sentido, foi realizado um percurso de aprendizagem em que os problemas criados, os materiais didático-pedagógicos diferenciados utilizados, como os origamis, o jogo de tabuleiro, o jogo interativo e os vídeos foram fundamentais não só para o envolvimento das crianças neste projeto, como também para os estimular para a aprendizagem e para o desenvolvimento do gosto pela Matemática. Assim, esta comunicação pretende partilhar alguns dos resultados obtidos e refletir sobre as potencialidades do projeto relativamente ao aprofundamento de conteúdos relacionados com a Educação Financeira e à aprendizagem da Matemática numa perspetiva de educação para(com) a cidadania.*

Abstract. *In a research project developed under the Masters in Teaching of the 1st and 2nd Cycle of Basic Education of the School of Education of the Polytechnic of Porto an issue problem was placed which related problem solving of the daily life of the children with the development of Financial Education of the students of the 2nd cycle of Basic Education. An adequate methodology was developed for the study, and 5th year students were challenged to construct, through problem solving, mathematical knowledge about multiplication of non-negative rational numbers and a mobilization of concepts related to Financial Education. In this sense, a learning plan was developed, problems were created, and differentiated didactic and pedagogical materials were used, such as origami, board game, interactive game and non-fundamental videos were fundamental not only to promote children's involvement in this project, as also to stimulate the learning develop the taste for Mathematics. Thus, this communication attempts to show some positive results and reflect on the potential of the project regarding the further content related to Financial Education and Mathematics learning from a perspective of education towards citizenship.*

Palavras-chave: *Matemática em contexto; resolução de problemas; Educação Financeira; Educação para(com) a Cidadania.*

Introdução

Neste trabalho considerou-se fundamental criar oportunidades para que os estudantes construíssem o seu conhecimento matemático através de uma “relação saudável com o dinheiro”. Neste sentido, este percurso teve como base desafios matemáticos significativos, adequados e contextualizados (Pereira, Feitosa, Silvério, & Sousa, 2009) que exploravam diretamente assuntos no âmbito da Educação Financeira. De facto, a Escola está inserida numa sociedade consumista em que o “ter” tem mais valor do que o “ser”, sendo crucial desenvolver conhecimentos matemáticos numa perspetiva de educação para e pela Cidadania. Assim, procurou-se dar resposta à necessidade da Educação Financeira nas escolas e tentou-se colmatar algumas dificuldades de aprendizagem das crianças, mencionadas no Projeto Educativo de um Agrupamento de Escolas do distrito do Porto, num contexto de Território Educativo de Intervenção Prioritária (TEIP). Deste modo, partiu-se da questão-problema “De que forma a resolução de problemas com aproximação ao quotidiano no ensino da Matemática contribui para o desenvolvimento da Educação Financeira com estudantes do 2.º ciclo do Ensino Básico?”.

Após o enquadramento teórico sobre Educação Financeira e a resolução de problemas matemáticos traça-se a metodologia de investigação, incluindo as condições de intervenção e a descrição das sessões realizadas. No ponto subsequente, apresenta-se a análise dos dados bem como a discussão dos resultados obtidos e, por último, são tecidas considerações finais que procuram responder à questão problema mencionada anteriormente.

Problemática em estudo e objetivos

A motivação para a escolha desta temática prende-se com o facto de a Educação Financeira ter sido recentemente integrada como linha orientadora das áreas temáticas da Educação para a Cidadania. Esta nova incorporação presente no Dec. Lei n.º 139/2012 de 5 de julho visa a formação pessoal e social dos estudantes sendo, por isso, um tema inovador e desafiante tanto na perspetiva de investigador como de professor. Por esta razão, sentiu-se a necessidade de realizar este projeto num contexto de escola TEIP dado que existem nesta população escolar carências a este nível de convivência social e é uma temática inscrita no projeto educativo de escola. De modo particular, sente-se que este tema é também de extrema relevância neste meio, pelo reconhecimento e pela compreensão por parte dos estudantes, da necessidade de na disciplina de Matemática se aprender a gerir o dinheiro no presente e no futuro, indo ao encontro do que é referido pelo *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM): "a necessidade de compreender matemática e de ser capaz de usar matemática na vida quotidiana, e no local de trabalho, nunca foi tão premente."(2008, p.4). Neste sentido, também Caraça (2000) reforça esta ideia ao afirmar que a Matemática apesar de contemplar problemas próprios, também se relaciona com a vida real, defendendo mais uma vez a ideia do ensino funcional desta disciplina com ligação e aplicabilidade no quotidiano. Nesta perspetiva, as aulas de Matemática poderão proporcionar momentos de inclusão e formação financeira. É importante sensibilizar os estudantes para a importância da formação financeira, fazendo com que estes construam conceitos financeiros básicos para permitir mais conhecimento, melhor compreensão da informação e, consequentemente, uma escolha mais adequada de produtos financeiros.

Neste caso, foi fundamental a contextualização de todas as tarefas com situações do quotidiano ou próximas da realidade dos estudantes que envolvessem a gestão financeira e propiciassem a construção e o desenvolvimento do conhecimento financeiro. De facto, a compreensão da Matemática é essencial, sendo considerada um veículo facilitador de aprendizagem subsequente, do desenvolvimento da autonomia dos estudantes e da sua capacidade para enfrentar novas situações e problemas (NTCM, 2008).

Neste contexto de investigação, as necessidades reais dos estudantes e a democratização da própria ciência matemática orientam-nos para a definição dos seguintes objetivos: i) desenvolver um projeto de intervenção no âmbito da Educação Financeira relacionado com a aprendizagem Matemática e ii) compreender a importância da Educação Financeira, quando abordada em contexto formal (aulas de Matemática). Em relação à componente concetual e didática da Matemática, desenharam-se os seguintes objetivos: i) construir conhecimentos matemáticos relativos à multiplicação de números racionais não negativos através da resolução de problemas próximos do quotidiano da criança e relacionados com a poupança e a gestão do dinheiro e ii) desenvolver conhecimentos sobre a Educação Financeira de um modo didático e articulado com a Matemática.

Em síntese, ao longo desta investigação tentou-se compreender se é possível, perante este contexto educativo, relacionar a área temática da Educação Financeira com o domínio da Matemática de maneira a que os estudantes construam conhecimentos que lhes forneçam ferramentas para que possam desenvolver comportamentos e atitudes racionais face a questões de natureza económica, financeira e matemática.

Enquadramento teórico

Educação Financeira: um valor social

A Educação Financeira é uma área temática contemplada na Educação para a Cidadania que, segundo a OCDE (2006), referido por Dias, et al. (2013), é o processo pelo qual os consumidores financeiros melhoram a sua compreensão dos produtos e conceitos financeiros e desenvolvem capacidades e confiança para se tornarem mais atentos aos riscos e às oportunidades financeiras. Numa perspetiva mais simplista e segundo Gitman (2004, referido por Pereira, Feitosa, Silvério, & Sousa, 2009) a educação financeira é "a arte e a ciência da gestão do dinheiro" (p.4) que pode beneficiar todos os indivíduos independentemente do seu nível de rendimento (Tavares, 2012).

Conscientes da necessidade de "educar financeiramente" as crianças de modo a que possam tomar decisões refletidas e construírem e desenvolverem comportamentos que melhorem o seu bem-estar financeiro, o Conselho Nacional de Supervisores Financeiros propõe a exploração de conceitos relacionados com a Educação Financeira desde o ínicio da escolaridade das crianças. Com esse propósito, neste projeto, atentou-se ao desenvolvimento da Educação Financeira, ou seja, "a capacidade de fazer julgamentos informados e tomar decisões efectivas tendo em vista a gestão do dinheiro" (Conselho Nacional de Supervisores Financeiros, 2011, p. 5). Para além da gestão do dinheiro implícita na resolução dos problemas construídos, as crianças devem ter oportunidade de explorar assuntos monetários, económicos e financeiros, próprios desta temática (Orton, 2007, citado por Dias, et al., 2013) pois, na maioria das vezes, a sua escassa exploração leva a situações de endividamento e sobre-endividamento das famílias. Em Portugal, esta situação tem-se verificado tendo sido criado pela união da Confederação Nacional das Associações de Família (CNAF) e o Centro de Apoio ao Endividado (CAE), o SOS Famílias Endividadas. Na verdade, e de acordo com a DECO, quase 30 mil famílias sobre-endividadas pediram no ano de 2016 ajuda ao Gabinete de Apoio ao Sobre-endividado da DECO, mais 474 famílias do que em 2015. Contudo, apenas cerca de 3000 delas reestruturam dívidas (Cruz, 2017). Este facto talvez possa ser um indicador de que é fundamental a construção de conhecimentos no âmbito da Educação Financeira por parte dos portugueses de maneira a que possam dar uma resposta célere e eficaz na resolução de problemas deste tipo.

Resolução de problemas com números racionais: dinâmica de conhecimentos

Na verdade, é com a "leitura" da realidade (Santos, 2012) e através das situações e dos problemas a resolver que um conceito [sendo ele matemático ou financeiro] adquire significado para a criança (Claudino, Nunes, & Silva, 2003). Na perspetiva de resolução de problemas, parte integrante de toda a aprendizagem matemática (NCTM, 2008), é ainda essencial que as crianças relacionem os conhecimentos e conceitos já construídos, as regras, as técnicas e as destrezas intelectuais para encontrarem uma resposta adequada e com sentido na resolução de problemas (Fernandes, 1994).

Recorrendo à Matemática Realista, ou seja, dando enfoque aos problemas do contexto na forma de jogos, histórias e tabelas, é possível que os estudantes possam atribuir significados e usar os seus conhecimentos e a sua experiência pessoal (Pinto, 2004; Polya, 2003). Considerando o modelo adaptado de Fernandes, Vale, Silva, Fonseca e Pimentel (1998 referidos em Vale & Pimentel, 2004), deve atender-se a quatro grandes momentos aquando da resolução de problemas: a leitura e compreensão do problema, a realização e a execução de um plano, a verificação da resposta e a avaliação. Estes problemas devem ser desafiantes, adequados e devem fomentar a relação com os conhecimentos prévios dos estudantes (Smole, 2013) para que as crianças construam novos conhecimentos, numa perspetiva construtivista, e sejam capazes de resolver problemas em outros contextos (NCTM, 2008; Polya, 2003), apelando sempre que possível ao trabalho em equipa (estudante-estudante).

Por esta razão é fulcral fomentar nas crianças o gosto e o interesse pela resolução de problemas pois assim conseguirão construir melhor a autonomia e a capacidade de enfrentar novos problemas sem medo e receios (Palhares, 2004).

Ainda numa outra perspetiva, considera-se importante relacionar a resolução de problemas à aprendizagem de números racionais. De facto, a aprendizagem dos números racionais é considerada por vários autores como um dos tópicos mais complexos do currículo do Ensino Básico (Pinto & Ribeiro, 2017) sendo, por isso, fulcral a utilização de diferentes estratégias que proporcionem o envolvimento da criança na construção da sua aprendizagem. Ainda nesta perspetiva, é imperioso estimular os estudantes a pensar sobre este tipo de números de maneira a que possam construir o sentido de número racional para que consigam percorrer as três etapas do modelo de caracterização de sentido de número de McIntosh et al. (1992, citado por Pinto, 2011) que envolve: i) o conhecimento e a destreza com os números; ii) o conhecimento e a destreza com as operações e iii) a aplicação do conhecimento e da destreza com os números e operações a situações de cálculo.

Deste modo, a relação entre os números racionais e a Educação Financeira vai ao encontro das componentes mencionadas por Pinto & Ribeiro (2017) no que respeita: à familiaridade com diferentes significados de frações no contexto pois os estudantes reconhecem os diferentes significados de frações como, por exemplo, parte-todo; à identificação da unidade de referência das frações em contexto; às diferentes representações de números racionais sendo importante trabalhar as frações familiares, os numerais decimais e as percentagens que, relacionados com a Educação Financeira, torna mais simples a compreensão do seu significado como, por exemplo, um desconto de 25 % poderá também ser representado por $\frac{1}{4}$ ou $\frac{25}{100}$ (ou vice-versa); à comparação, ordenação e densidade de números racionais em que os estudantes devem ser expostos a situações em que têm de escolher a fração de dinheiro mais adequada de maneira a poupar e, por fim, relacionar símbolos e linguagem matemática formal. Assim, como defendem Ponte & Quaresma (2014) a aprendizagem dos números racionais de forma contextualizada orienta os estudantes a desenvolver o seu raciocínio, mas também a capacidade de compreender a Matemática e saber usá-la em diferentes situações do cotidiano.

Metodologia de investigação

Uma investigação envolve sempre um problema portanto é necessário, numa fase prévia, a definição de uma questão-problemática. Este projeto com características de investigação-ação (IA) orientou-se pela metodologia de projeto relacionado com o procedimento *in loco* cujo objetivo foi constatar um problema concreto (Bell, 2002) e delinear estratégias para o resolver, tendo consciência de que será sempre uma resolução inacabada devido à característica cíclica da IA. Neste caso, havia necessidade de educar as crianças de maneira a fossem capazes de gerir corretamente o dinheiro num contexto economicamente frágil. Vilar (1993) menciona que qualquer projeto parte da vontade de solucionar uma determinada situação problema que a realidade nos coloca, sendo fundamental a sua concretização na formação para a docência pois esta encontra-se associada à inovação e à melhoria das práticas (Barros, 2012).

A IA promove um posicionamento de elevada criticidade face ao próprio pensamento e ação, apelando à melhoria da qualidade das aprendizagens de alunos e professores, com reflexos na transformação dos contextos educativos (Barros, 2012). Ainda nesta perspetiva, o caracter cíclico da IA implica que o investigador planifique, atue, avalie e reflita. Caso considere que o problema em causa não foi totalmente solucionado, deverá diversificar a sua planificação e repetir novamente o processo. Nesta investigação procurou-se sempre ter em atenção estas orientações e recorrer à reflexão contínua como exercício pleno de aprendizagem e de reformulação de conceções e procedimentos.

Relativamente aos participantes deste projeto registe-se que se tratavam de estudantes do 5.º ano de uma escola TEIP da cidade do Porto e dos seus Encarregados de Educação (EE). No processo de amostragem dos elementos relativos aos estudantes, foi utilizado o método de amostragem casual, tendo sido selecionados 13 estudantes (através de uma seleção natural relacionada com os que tinham assistido à maioria das sessões) e, em relação aos seus encarregados de educação, a amostra foi de 12 elementos. É importante referir que a amostra dos EE resultou naturalmente, especificamente da aplicação de um questionário em que apenas 12 encarregados de educação responderam. Deste modo, optou-se por analisar todos eles uma vez que poderia enriquecer o estudo, designadamente, a compreensão do impacto da temática na perspetiva dos encarregados de educação uma vez que, tal como é mencionado no Projeto Educativo do Agrupamento de escolas em questão "um número significativo de encarregados de educação tem baixas expectativa em relação ao sucesso escolar dos seus educandos, manifestando falta de interesse pelo processo de ensino/aprendizagem" (2013, p. 13).

Os instrumentos de recolha de dados utilizados foram as gravações áudio das sessões, as grelhas de observação e os inquéritos por questionário, tendo sido aplicados aos estudantes no início do projeto e no final de cada uma das sessões e aos EE. As grelhas de observação utilizadas permitiram que a professora, enquanto investigadora, tivesse consciência das aprendizagens construídas e desenvolvidas pelos estudantes tanto no âmbito na Educação Financeira como da Matemática. Por outro lado, o inquérito por questionário possibilitou uma análise adequada da informação obtida acerca das conceções dos estudantes e dos encarregados de educação (Mozzato & Grzybovski, 2011).

Projeto de intervenção: Multiplicar, Poupar, Gerir, Refletir para Ganhar!

Este projeto de intervenção foi desenvolvido em 6 sessões (Tabela 1) em que se explorou problemas reais com *sentido financeiro* (Santos, 2012). A tipologia das tarefas teve como base os objetivos traçados pelo Programa e Metas Curriculares de Matemática para o 2.º ciclo do Ensino Básico e, algumas delas foram criadas pela investigadora após uma formação especifica em Educação Financeira numa instituição idónea.

Tabela 1 - Enfoques e objetivos das sessões do projeto

Sessão	Enfoque	Objetivos
1.ª	Matemática	Ativação de conhecimentos e introdução à multiplicação de números fracionários por números inteiros.
2.ª	Matemática	Resolução de problemas envolvendo a multiplicação com números racionais representados por frações, dízimas e percentagens.
3.ª	Matemática	Consolidação da exploração anterior através do jogo
4.ª	Educação Financeira	Participação numa visita de estudo ao Museu Papel Moeda;
5.ª	Educação Financeira	Realização, pelas crianças, de um vídeo sobre Educação Financeira
6.ª	Educação Financeira	Consolidação de conceitos financeiros através do jogo

A 1.ª sessão deste projeto teve como enfoque a introdução de um novo conteúdo através de um percurso de resolução de problemas que tinha como objetivo a poupança. Foi entregue um quadrado com frações e verbos que relacionavam as temáticas em causa de acordo com as conceções dos estudantes. As crianças depois de dobrar o quadrado, estiveram a jogar com o "Quantos-queres" e a ativar conhecimentos prévios através do cálculo com números fracionários. Também resolveram 2 folhas de desafios de maneira a que refletissem sobre estratégias de poupança e as aplicassem na resolução dos problemas. No final da aula foi entregue um retângulo em que os estudantes tinham de preencher de maneira a sistematizar o conhecimento construído (este material foi adaptado e utilizado nas 3 sessões iniciais). Para além deste material também foi entregue o questionário.

A sessão seguinte tinha como objetivo a resolução de problemas envolvendo a multiplicação de números racionais não negativos, alargada às transformações de frações em frações decimais, numerais decimais e percentagens, tendo em consideração a construção de um conhecimento intuitivo profundo dos números fracionários em contextos significativos tanto para o conceito como para as aplicações, fazendo-se conexões com decimais, percentagens e razões (Pinto, 2004). Utilizou-se um material passível de ser manipulado (Figura 1) e que respondesse adequadamente aos objetivos na construção do conhecimento, uma vez que, segundo Reys (1971, citado por Matos & Serrazina, 1996, p. 193), os materiais manipuláveis correspondem a "objectos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar" e que, através do envolvimento físico dos estudantes, recorrem a múltiplos sentidos que originam uma aprendizagem ativa e significativa.

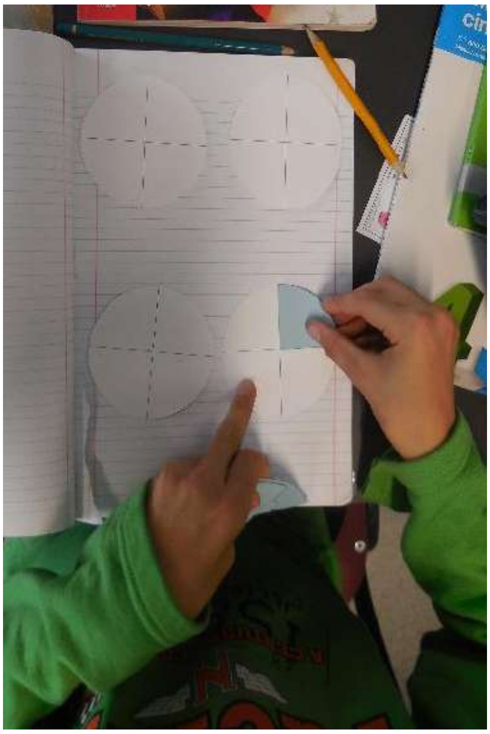


Figura 1 - Criança a manipular material relacionando a parte-todo

Ainda nesta perspetiva e citando Lima (2009, p.6), “os materiais didáticos contextualizados (…) facilitam os procedimentos didáticos e pedagógicos que serão desenvolvidos com os estudantes [porém os professores] precisam de construir uma metodologia adequada que favoreça a utilização eficiente desses recursos pedagógicos”.

No segundo momento de ativação de conhecimentos prévios, através do uso das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) desenvolveu-se uma nova fase de motivação pois os estudantes viram um vídeo construído pela professora estagiária (https://youtu.be/e2614y_g2y8) que envolvia um problema relacionado com o quotidiano das crianças de maneira a que pudessem pensar “sobre as operações, seus significados e suas formas de representação” (Smole, 2013, p. 60) e sobretudo houvesse oportunidade de “parar para pensar” (Fernandes, 1994). Nesta fase da aula explorou-se com os estudantes uma palavra nova – *consumerista* (consumo racional, responsável, equilibrado e informado) - uma vez que as aulas de Matemática requerem a partilha de novos vocábulos para aumentar o léxico dos estudantes e desenvolver a comunicação matemática.

Depois de realizar uma reflexão sobre estes dois termos: consumista e consumerista, foi entregue uma folha com um conjunto de desafios contextualizados com o vídeo mencionado anteriormente de modo a envolver e a desafiar os estudantes a resolverem situações problemáticas relacionadas com o saber poupar. No momento de sistematização, foram selecionadas e partilhadas as estratégias pessoais dos estudantes mais adequadas pois um "resolvedor" de problemas necessita de se responsabilizar pelas soluções que descobre mas para isso é imprescindível que tenha o direito de apresentá-las, argumentá-las e debater com os seus colegas. É essencial que os estudantes tenham a perceção que há várias formas de resolver um problema e que tal como afirma Smole (2013, p. 59), "os estudantes entendem que são capazes de "fazer matemática", isto é, a matemática tem vários caminhos, mas tem sempre um fim. Ainda nesta perspetiva, ao contemplar e analisar diferentes estratégias (Mariz & Fernandes, 2010) e as suas representações, os estudantes ampliam o seu repertório de processos para resolver problemas, percebendo as vantagens e as desvantagens das representações e criando autonomia na busca de soluções.

Na 3.ª sessão do projeto, após reflexão, decidiu-se criar e desenvolver um jogo de tabuleiro (Figura 2) com desafios matemáticos envolvendo os números racionais não negativos e situações de gestão do dinheiro, tendo como suporte uma folha de jogo onde os estudantes tinham de registar as estratégias utilizadas e a resolução dos problemas.

Figura 2 - Crianças jogando "Multiplicar, Poupar e Ganhar!"

Neste jogo definiram-se dois níveis de dificuldade distintos de modo a promover a diferenciação pedagógica e a procurar ajustar as práticas de ensino às crianças bem como às suas características pessoais e coletivas.

Esta última sessão foi direcionada para a sistematização de conteúdos matemáticos uma vez que tal como defende NCTM (2008), "à medida que os alunos adquirem as bases conceptuais dos números racionais, deverão começar a resolver problemas, utilizando estratégias por eles desenvolvidas ou adaptadas à sua experiência com números inteiros" (p.180), sendo utilizados materais didáticos que, na perspetiva de Reys (1971, citado por Matos & Serrazina 1996), permitem ao estudante "sentir, tocar, manipular e movimentar" (p.193) e devidamente contextualizados facilitam os procedimentos didáticos e pedagógicos (Lima, 2009). Para além disso, neste projeto considerou-se fundamental a comunicação matemática. Desta forma os estudantes foram desafiados a justificar as suas escolhas mobilizando conhecimentos adquiridos sobre números racionais não negativos na resolução de problemas, bem como o vocabulário apropriado da Educação Financeira (Figura 3).

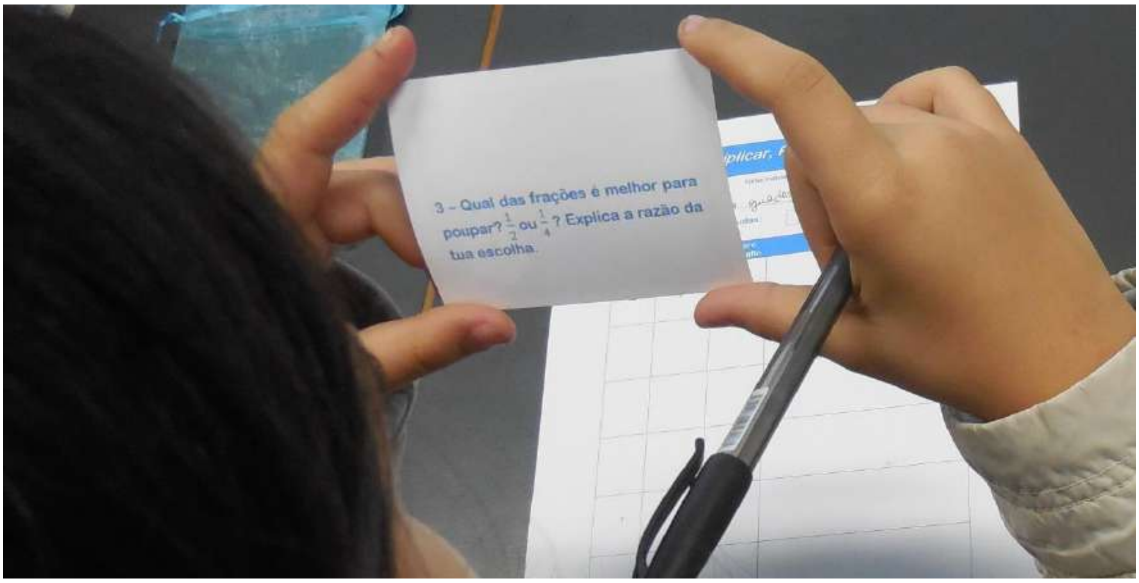


Figura 3 – Um dos desafios do jogo "Multiplicar, Poupar e Ganhar!"

Relativamente à 4.ª e 5.ª sessão do projeto de implementação houve o apoio de uma Fundação de referência no âmbito da Educação Financeira, tendo sido realizada uma visita de estudo e a gravação de um vídeo pelos estudantes onde eles próprios foram atores e criadores de uma história de duas famílias: uma consumista e outra consumerista, tal como tinha sido referido anteriormente.

Na última sessão, os estudantes, realizaram um jogo interativo (Figura 4) em que tinham de gerir o dinheiro disponível consoante as situações problemáticas que apareciam no jogo.

Figura 4 - Jogo interativo "Gerir um rendimento familiar!"

É importante referir que no final de cada sessão, foi entregue a cada estudante um material de consolidação de conhecimentos de maneira a que estes o preenchessem e o colassem no caderno diário para que em casa pudessem ativar os conhecimentos construídos em cada uma das sessões, desenvolvendo, assim, a sua autonomia no seu próprio processo de aprendizagem (Figura 5).

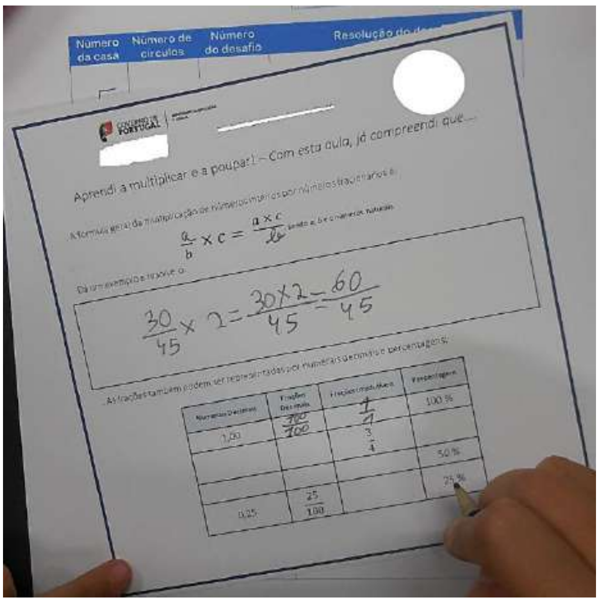


Figura 5 – Preenchimento de um dos materiais de consolidação

Procurou-se ainda atender às necessidades, aos estímulos e à motivação dos estudantes de modo a contribuir positivamente para o seu desenvolvimento pessoal e social, ajudando a construir, de forma transversal, aprendizagens cada vez ainda mais significativas.

Análise e discussão de resultados

No processo de análise escolheu-se o sistema de categorias que a seguir se apresentam (Figura 6).

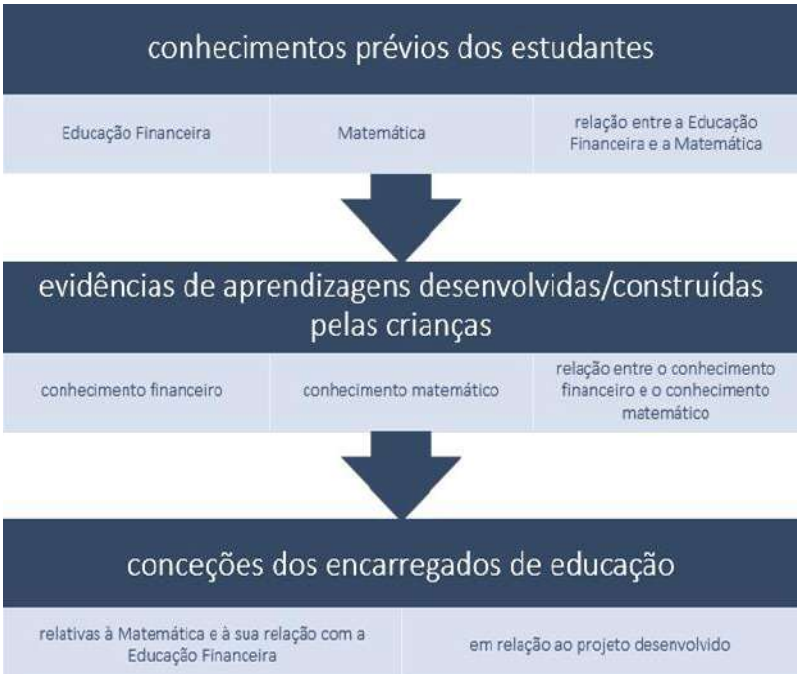


Figura 6 - Sistema de Categorias aplicadas

Na análise da 1.ª categoria – conhecimentos prévios dos estudantes – o objetivo primordial foi a análise dos conteúdos relativos às conceções prévias da amostra dos estudantes acerca da Educação Financeira, da Matemática e da relação entre a Educação Financeira e a Matemática, de modo a compreender através dos indícios concetuais dos discursos o que a amostra compreendia acerca destas três subcategorias. Relativamente à Educação Financeira existem indícios que a maioria da amostra (77%) considera que esta promove a aprendizagem da gestão adequada do dinheiro, sendo os três objetivos mais referidos a consciencialização para uma má gestão financeira, a promoção da reflexão acerca dos bens necessários e dos bens supérfluos e o desenvolvimento de competências no âmbito da poupança do dinheiro.

Em relação à 2.ª subcategoria relativa às conceções prévias dos estudantes acerca da Matemática realizou-se uma análise da resolução do primeiro problema com que as crianças se depararam. Porém, concluiu-se que apenas duas crianças resolveram e interpretaram o problema como era pressuposto na medida em que realizaram corretamente os cálculos e responderam de acordo com o que era solicitado.

Relativamente à 3.ª subcategoria existem evidências nos discursos que apontam para a compreensão da relação entre a Matemática e a Educação Financeira uma vez que as crianças relacionaram alguns verbos (como aprender, poupar, gerir, educar) e 77% da amostra evidenciou que a utilização do dinheiro envolve cálculos.

Na 2.ª categoria foram criadas três subcategorias: conhecimento financeiro, conhecimento matemático e, por último, a subcategoria que relaciona estes dois tipos de conhecimento. Na 1.ª subcategoria, a amostra apresenta evidências de aprendizagens construídas no âmbito da Literacia Financeira, sendo que alguns estudantes referiram que: i) *fiquei consciente de que devemos poupar para termos dinheiro no futuro*; ii) *comecei a gerir melhor o meu dinheiro*; iii) *aprendi mais sobre poupar e ensinei toda a minha família*. É notória a compreensão da amostra acerca da necessidade da poupança pois nos registos 10 das 13 crianças utilizam o termos "devemos poupar" e "aprendemos a poupar".

Consegue-se ainda compreender que aconteceu algo diferente na aquisição e na mobilização dos conhecimentos (Figura 7) pois inicialmente (na categoria 1); as crianças apenas referiam o facto de a Educação Financeira ser uma forma de poupar e, já no final do projeto estas alargaram a sua conceção de educação financeira, colocando de parte a ideia de que a educação financeira apenas "ensina a poupar", mas aprender a "poupar de forma adequada".

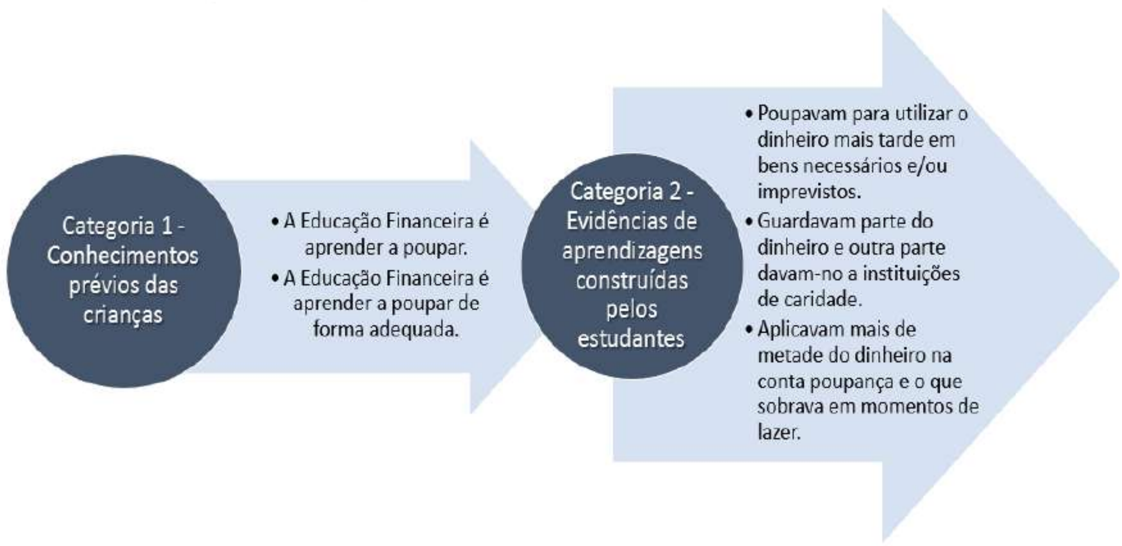


Figura 7 – Evolução prática do conhecimento financeiro

Paralelamente à utilização da palavra “poupar” na análise anterior, os estudantes aquando do registo de consolidação dos conhecimentos matemáticos, utilizaram a palavra “aprendi”, sendo um indicador evolutivo na construção de conhecimentos matemáticos pois as crianças admitem “ter aprendido a resolver problemas”.

Na 3.ª subcategoria – relação entre o conhecimento financeiro e o conhecimento matemático – 62% dos estudantes evidenciaram a capacidade de relacionar estes dois domínios: i) *no futuro já sabemos tomar as decisões corretas relativamente ao dinheiro (…) aprendemos formas corretas de pagar o que necessitamos (…) e já sabemos resolver problemas sobre o dinheiro*; ii) *fiz contas com as despesas e fiz com que a minha família soubesse poupa*r e iii) *estou a divertir-me ao mesmo tempo que estudo*.

A 3.ª categoria – conceções dos Encarregados de Educação (EE) – contempla duas subcategorias: relativa à Matemática e à sua relação com a Educação Financeira e, também, em relação ao projeto. Na 1.ª apenas um dos elementos da amostra não estabeleceu relação entre as duas dimensões, referindo que Matemática não é dinheiro. Santos (2012) defende que a escola tem a responsabilidade de desenvolver o conhecimento matemático, todavia esta progressão deveria ser iniciada no contexto familiar. Por outro lado, na 2.ª subcategoria tentou-se compreender as conceções dos EE acerca do projeto desenvolvido sendo que metade da amostra referiu que o seu educando tinha conversado sobre este projeto e tinham reparado em algumas alterações comportamentais dos seus educandos como, por exemplo, “não faz tantas birras nos supermercados”. Assim, é fulcral que os EE estejam sensíveis para a questão da Educação Financeira pois é no âmbito familiar que aprendem a lidar com o dinheiro (Pereira, Feitosa, Silvério, & Sousa, 2009).

Considerações finais

Apesar de existirem dificuldades relativas ao tempo de intervenção há alguns indícios de que foi possível motivar e proporcionar às crianças momentos de aprendizagem significativa da Matemática em conexão com saberes da Educação Financeira, respondendo positivamente à questão inicial de investigação que relacionava a resolução de problemas do quotidiano com a Educação Financeira. Através da resolução de problemas, dos jogos, da realização do vídeo, do trabalho de pesquisa em grupo foi possível proporcionar às crianças desta turma do 2.º Ciclo do Ensino Básico momentos de partilha, de colaboração, de debate de ideias, possibilitando a construção de competências nos domínios pessoal e social, numa perspetiva de Educação para (com) a Cidadania.

Relativamente aos objetivos traçados, o projeto de intervenção no âmbito da Educação Financeira enriqueceu o vocabulário das crianças, ao proporcionar a inclusão e a discussão do significado de termos pouco comuns como *consumista e consumerista*, aprofundando aspetos concetuais e o rigor da linguagem na Educação Financeira, mas também na Matemática. Em relação à componente concetual e didática da Matemática refira-se ainda que seria necessário resolver mais situações problemáticas para ser possível recolher mais evidências sobre os conhecimentos matemáticos adquiridos sobre a multiplicação de números racionais não negativos através da resolução de problemas próximos do quotidiano da criança e relacionados com a poupança e a gestão do dinheiro.

Pelo entusiamo e motivação demonstrados e pelos resultados obtidos tudo indica que os estudantes adquiriram comportamentos e atitudes racionais face a questões de natureza económica, financeira e matemática, articulando saberes entre os dois domínios. De referir ainda que não só as crianças ficaram sensibilizadas para esta temática, mas também os professores do agrupamento de escolas, os pais, o professor responsável pela disciplina de Matemática e até os membros da Direção da escola envolveram-se neste projeto, participando direta ou indiretamente na sua construção e implementação do mesmo.

Nas reflexões finais com os diferentes protagonistas da comunidade escolar concluiu-se ainda da necessidade da abordagem da Educação Financeira desde os primeiros anos de escolarização, especialmente numa exploração em contexto e com sentido para a criança. Neste âmbito, refira-se que a integração desta temática na formação inicial e contínua de professores seria relevante uma vez que estes são agentes de mudança de hábitos, tal como os Encarregados de Educação. A escola tem como papel na Educação Financeira a construção de conhecimentos financeiros, o desenvolvimento de competências fundamentais para uma gestão adequada do dinheiro, sendo que o conhecimento matemático é um veiculo facilitador para que tal se verifique. Ainda nesta perspetiva, a Escola deve incentivar à mudança de atitudes e a comportamentos mais ajustados às necessidades da realidade, para criar uma disciplina no âmbito da educação financeira, envolvendo sempre que possível a família. Sendo assim é fundamental que se desenvolvam atividades e projetos consistentes e criativos ajustados às necessidades da sociedade atual.

Referências bibliográficas

Barros, P. T. (2012). *A investigação-ação como estratégia de supervisão/ formação e inovação educativa: um estudo de contextos de mudança e de produção de saberes.* Braga: Universidade do Minho - Instituto de Educação.

Bell, J. (2002). *Como realizar um projeto de investigação: um guia para a pesquisa em Ciências Sociais e da Educação.* Lisboa: Gradiva.

Caraça, B. J. (2000). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Gradiva

Claudino, L. P., Nunes, M. B., & Silva, F. C. (2003). *Finanças Pessoais: Um Estudo de Caso Com Servidores Públicos.* Obtido de XXI SemeAd: empreendorismo e inovação: http://www.ead.fea.usp.br/semead/12semead/resultado/an_resumo.asp?cod_trabalho=724 Consultado a 12 de janeiro de 2015.

Conselho Nacional de Supervisores Financeiros, Plano Nacional de Formação Financeira 2011-2015 (2011). CNSF. Lisboa.

Cruz, Mário (2017, janeiro 24). Deco. Número de famílias sobre endividadas a pedir ajuda subiu em 2016. Observador. Obtido de: http://observador.pt/ Consultado a 20 de março de 2017

Decreto-lei n.º139/2012 de 5 de julho. *Diário da República, 1.ª série*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

Dias, A., Oliveira, A., Pereira, C., Abreu, M. T., Alves, P., Basto, R., Narciso, S. (2013). *Referencial de Educação Financeira.* Lisboa: Ministério da Educação e da Ciência.

Fernandes, Dárida M. ed. 1994. *Educação Matemática no 1º Ciclo do Ensino Básico – aspetos inovadores* ed. 1. Porto: Porto Editora.

Fernandes, Dárida M; Mariz, B.; Duque, A.. (2010). *Nova matemática 3: Roteiros para inovar práticas*. ed. 1. Porto: Porto Editora

Lima, E. de Souza (2009). Formação docente e a produção de materiais didáticos: as experiências desenvolvidas no contexto do semi-árido. 19º Encontro de Pesquisa Educacional Norte e Nordeste - EPENN, 2009, Campus da UFPB, João Pessoa.

Matos, J. & Serrazina, L. (1996). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

Mozzato, A. R., & Grzybovski, D. (2011). Análise de Conteúdo como Técnica de Análise de Dados Qualitativos no Campo da Administração: Potencial e Desafios. *15*. Rio Grande do Sul, Brasil. Obtido de http://www.anpad.org.br/rac

National Council of Teachers of Mathematics. (NCTM) (2008). Princípios e Normas para a Matemática Escolar (2.ª Edição ed.). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Palhares, P. (2004). Introdução. In P. Palhares (coord.), *Elementos de Matemática para Professores do Ensino Básico* (pp. 1-6). Lousã: Lidel.

Pereira, D. H., Feitosa, F. M., Silvério, M. R., & Sousa, R. C. (2009). *Educação Financeira infantil: seu impacto no consumo consciente.* Faculdade Campos Salles, São Paulo.

Pinto, H. G. (2004). *O número racional no 2.º ciclo do Ensino Básico no contexto da Matemática realista.* Universidade Aberta. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Pinto, H. & Ribeiro, M. (2011). O desenvolvimento do sentido da multiplicação e divisão de números racionais. Tese de doutoramento. Universidade de Lisboa. (Tese de Doutoramento), Universidade de Lisboa, Lisboa: Instituto de Educação.

Pinto, H. & Ribeiro, M. (2013). *Conhecimento e formação de futuros professores dos primeiros anos – o sentido de número racional*. Obtido de: https://www.researchgate.net/directory/publications Consultado a 26 de março de 2017

Polya, G. (2003). *Como resolver problemas - um aspecto novo do método matemático.* Lisboa: Gradiva.

Ponte, João Pedro da & Quaresma, Marisa (2007). *Representações e raciocínio matemático dos alunos na resolução de tarefas envolvendo números racionais numa abordagem exploratória.* Obtido de: https://www.researchgate.net/directory/publications Consultado a 26 de março de 2017

Projeto Educativo de Agrupamento de uma escola do distrito do Porto. 2013-2017. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

Santos, M. A. (2012). *Educação Financeira e resolução de problemas: contribuições para o ensino de matemática na Educação de Jovens e Adultos.* Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

Smole, K. S. (2013). Entre o pessoal e o formal: as crianças e as suas muitas formas de resolver problemas. Em K. S. Smole, & C. A. Muniz (orgs.), *A Matemática em sala de aula: reflexões e propostas para os anos iniciais do ensino fundamental* (pp. 49-114). Porto Alegre: Penso.

Tavares, C. (2012). *Percepção dos estudantes sobre a Educação Financeira - Estudo de Caso: Escola Secundária Manuel Lopes.* Universidade Jean Piaget de Cabo Verde, Cabo Verde.

Vale, I., & Pimentel, T. (2004). *Resolução de Problemas*. In P. Palhares, Elementos da Matemática para professores do Ensino Básico (pp. 7 - 52). Lisboa: Lidel.

Vilar, A. M. (1993). *Inovação e mudança na Reforma Educativa*. Porto: ASA.

A RESOLUÇÃO DE TAREFAS MATEMÁTICAS EM CONTEXTOS NÃO FORMAIS POR ALUNOS DO 1º CEB

Fátima Fernandes[1], *Isabel Vale*[2], *Pedro Palhares*[3]
[1]Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo, fatimafernandes@ese.ipvc.pt
[2]Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo, isabel.vale@ese.ipvc.pt
[3]Instituto de Educação (CIEC), Universidade do Minho, palhares@ie.uminho.pt

Resumo. *Os contextos não formais podem proporcionar excelentes experiências de aprendizagem, mas os alunos estão expostos a fatores externos que podem interferir no seu desempenho aquando da realização das tarefas. Este artigo faz parte de um estudo, de natureza qualitativa interpretativa, mais abrangente realizado em três contextos não formais. Para cada contexto construíram-se e implementaram-se trilhos matemáticos com alunos do 3º ano de escolaridade, com o objetivo de analisar as reações, o envolvimento, o desempenho e a criatividade dos participantes nas resoluções das tarefas propostas. Neste documento discute-se o desempenho dos alunos nas resoluções de três tarefas de matemática de um desses trilhos e a influência de alguns fatores externos que pareceram interferir nesse desempenho. Os dados provêm das produções escritas dos alunos, observações, entrevistas e registos fotográficos e áudio. Os resultados mostram que os alunos, embora estejam em ambientes com diversos elementos que possam interferir na sua concentração e resolução das tarefas, surgem espontaneamente discussões pertinentes e se a tarefa permitir, apresentam resoluções diversificadas. A ansiedade pela experimentação parece ter efeito negativo na compreensão do enunciado e a vontade por avançar para as tarefas seguintes contribuem para a não elaboração da resposta.*

Abstract. *Non-formal contexts can provide excellent learning experiences, but students are exposed to external factors that may interfere with their performance when performing tasks. This article is part of a more comprehensive qualitative interpretative study carried out in three non-formal contexts. For each context, mathematical rails were constructed and implemented with students of the 3rd year of schooling, with the objective of analyzing the reactions, the involvement, the performance and the creativity of the participants in the resolutions of the proposed tasks. This article discusses the students' performance in the mathematical tasks of three tasks of one of these rails and the influence of some external factors that seemed to interfere with this performance. The data comes from written student productions, observations, interviews and photo and audio recordings. The results show that the students, although they are in environments with diverse elements that can interfere in their concentration and resolution of the tasks, spontaneously arise pertinent discussions and if the task allows, they present diverse resolutions. The anxiety of experimentation seems to have a negative effect on the comprehension of the statement and the willingness to move to the following tasks contributes to the failure to elaborate the answer.*

Palavras-chave: *Tarefas matemáticas; Contextos não formais de aprendizagem; trilhos matemáticos.*

Introdução

É indiscutível que a riqueza e a diversidade de muitos contextos não formais de aprendizagem oferecem oportunidades ímpares para a construção e aplicação de conhecimentos. Porém, há múltiplos fatores externos que podem interferir no desempenho dos alunos quando resolvem as tarefas nesses contextos. Estes fatores são muitas vezes difíceis de controlar, porque as paredes da "sala de aula" não existem ou são fáceis de transpor e as comodidades para a resolução das tarefas podem não ser as ideais. Para além disso, os alunos estão sujeitos a mudanças, decorrentes da necessidade de se deslocar, que os coloca perante uma grande probabilidade de enfrentarem situações novas ou inesperadas que podem interferir no seu equilíbrio emocional.

Conscientes destes problemas, deparámo-nos com duas questões: como é que os alunos resolvem tarefas matemáticas em contextos ao ar livre? Que fatores externos podem interferir no desempenho dos alunos?

Neste trabalho analisam-se as resoluções de três tarefas realizadas por alunos do 3º ano de escolaridade, ao longo de um trilho matemático. Uma das tarefas incide sobre um dos processos matemáticos e não envolve conteúdos específicos do ano de escolaridade em causa. As outras duas envolvem conteúdos do domínio da geometria e medida. Pretende-se perceber que estratégias utilizam os alunos na resolução do problema, como mobilizam os conteúdos trabalhados na sala de aula e que fatores externos poderão interferir no desempenho.

A importância dos contextos não formais na aprendizagem da Matemática

A aprendizagem fora da sala de aula tem sido associada a um conjunto de benefícios para a formação dos indivíduos desde os primeiros anos de vida. Por isso, alguns países do Norte da Europa e de outros continentes têm incentivado o ensino e aprendizagem de conteúdos escolares em contexto não formais.

As conclusões apresentadas no relatório publicado pelo OFSTED (2008) sobre a avaliação de atividades realizadas fora da sala de aula por jovens em idade escolar, mostram que estas experiências contribuem para melhorar a motivação, as normas, os resultados académicos, bem como outros aspetos importantes do desenvolvimento pessoal, social e emocional. Estes resultados encontram eco noutros estudos (e.g. Eshach, 2007; Fägerstam & Samuelsson, 2014) que se debruçaram sobre a influência de experiências fora da sala de aula na aprendizagem de conteúdos de Ciências e Matemática.

Os princípios da educação matemática previstos pelo NCTM (2014) pressupõem que os alunos tenham acesso a recursos e a experiências de aprendizagem individuais e coletivas que lhes permita encontrar sentido para os assuntos abordados em sala de aula, fazer ligações entre estes e outras áreas de estudo e entre a matemática e a realidade, por forma a maximizar o seu potencial de aprendizagens eficazes. Ora, o contributo das experiências fora da sala de aula pode ser significativo para a aprendizagem dos conteúdos matemáticos e para o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas, sobretudo se houver articulação entre as abordagens realizadas dentro e fora da sala de aula. Esta articulação pode ajudar os alunos a compreender o mundo que os rodeia, a sentir a aprendizagem mais interessante e relevante. Pode ajudar também a construir uma visão mais ampla dos conteúdos curriculares e a compreendê-los de forma consistente e duradoura, como defende o manifesto *Learning Outside de Classroom (*DfES, 2006).

O trilho matemático é um dos tipos de experiências de aprendizagem que podem decorrer em contextos não formais. Um trilho constitui uma série de paragens realizadas durante um percurso pré-definido, nas quais os participantes resolvem tarefas matemáticas que emergem do meio envolvente (Cross, 1997). São oportunidades para os alunos aplicarem em contexto real, o que aprenderam na sala de aula, podendo mobilizar também conhecimentos informais do dia-a-dia e tomar consciência da aplicabilidade dos mesmos em situações concretas (e.g. Barbosa, Vale & Ferreira, 2015, Richardson, 2004). Estas experiências contribuem para a construção ou consolidação do significado de conceitos ou processos matemáticos de forma consistente (Wager, 2012), para o conhecimento e interpretação da realidade de forma mais crítica (Bonotto & Bassa, 2001) e para motivarem e favorecerem o envolvimento dos alunos incluindo os mais relutantes (Patterson, 2009).

As tarefas matemáticas no ensino e aprendizagem da Matemática

As tarefas matemáticas são instrumentos mediadores no ensino e aprendizagem desta área curricular, pois proporcionam o envolvimento dos alunos e interação entre estes e os recursos, o ambiente, os colegas ou o professor (Margolina, 2013).

A interação que as tarefas proporcionam, em conjunto com as respetivas características e a forma como elas são apresentadas vão determinar a aprendizagem matemática (Mason & Johnston-Wilder, 2006; Stein & Smith, 1998).

As caraterísticas de cada tarefa determinam as potencialidades para os alunos se envolverem cognitivamente na sua resolução. Com base neste princípio, Stein e Smith (1998), categoriza as tarefas, partindo das potencialidades de envolvimento menos complexo para o mais complexo, da seguinte forma: memorização, procedimentos sem conexões entre conceitos ou significados, procedimentos com conexões entre conceitos ou significados e tarefas para fazer matemática.

Para compreender uma ideia ou um conceito é fundamental estabelecer conexões entre múltiplas representações, ou seja, configurações que revelam algo (Goldin, 2010). As representações visuais, simbólicas, verbais, contextuais ou físicas surgem, assim, como ferramentas para a resolução de problemas e para desenvolver a capacidade dos alunos para fundamentar e explicar o seu raciocínio (NCTM, 2014).

Na teoria de Bruner (1999), há três tipos de representação das ideias sobre a realidade: ativa, icónica e simbólica. A representação ativa é feita pela ação de tocar e manipular objetos. A representação icónica refere-se à capacidade de sistematizar as ideias sobre a realidade através de imagens, diagramas ou esquemas. A representação simbólica refere-se à utilização de expressões com símbolos aos quais lhes foi atribuído um determinado significado. As representações que envolvem símbolos universalmente aceites e generalizáveis são consideradas por Goldin (2010) por complexas, abertas e modificáveis, porque as regras e símbolos convencionados permitem transformar determinadas expressões noutras.

Na perspetiva de Goldin (2010) há representações externas e representações internas. As primeiras são observáveis em suporte físico (papel, ecrã de computador ou outros). As representações internas não se conseguem observar, pelo que é difícil caracterizá-las e compreender o modo como elas se formam.

Um ensino eficaz, requer práticas eficazes, pelo que é necessário práticas no ensino e aprendizagem da matemática: estabelecer objetivos focados na aprendizagem, implementar tarefas promotoras do raciocínio e a resolução de problemas, usar e relacionar representações, facilitar um discurso com sentido, colocar questões intencionais, construir fluência procedimental com base na compreensão de conceitos, apoiar o esforço produtivo na aprendizagem e usar evidências do pensamento dos alunos (NCTM, 2014).

Metodologia

Este trabalho decorre de uma investigação mais ampla, de natureza qualitativa interpretativa, com design de estudo de caso, que envolveu a conceção, implementação de três trilhos matemáticos em contextos não formais de aprendizagem com alunos do 3º ano de escolaridade.

Antes de conceber e implementar os trilhos, a investigadora, não docente da turma participante no estudo, acompanhou os alunos em sala de aula. Numa primeira fase observou-os a realizar tarefas matemáticas propostas e orientadas pela docente, com o objetivo de conhecer comportamentos e práticas instituídas na sala de aula. Numa segunda fase, na semana imediatamente antes de cada trilho, implementou um conjunto de tarefas sobre os conteúdos programáticos envolvidos no respetivo trilho. Pretendia-se perceber que dificuldades eram manifestadas na mobilização de conhecimentos. Nesta fase houve necessidade de retirar alguns tópicos programáticos porque, ao contrário do que estava planificado, ainda não tinham sido abordados.

As tarefas dos trilhos foram construídas em torno de elementos do património existente no contexto. Privilegiou-se a diversidade a nível do grau de abertura e de desafio e procuraram-se abarcar todos os tópicos programáticos do 3º ano de escolaridade.

Os alunos realizaram os trilhos em grupos de três elementos. Cada grupo foi acompanhado por um estagiário do 2º ano da Licenciatura em Educação Básica, que transportou material suplente, registou dados, leu as orientações do guião e esclareceu dúvidas relacionadas com a interpretação da informação. A investigadora acompanhou os grupos que tinha previsto estudar de forma mais profunda.

Cada participante recebeu material de escrita e um guião constituído, em média, por 15 tarefas e 30 questões. Cada tarefa era precedida por uma nota informativa sobre os elementos do património que serviram para sua contextualização e era seguida por uma pista que orientava para o local onde teriam que realizar a próxima tarefa.

O trilho que serve de base a este trabalho, realizou-se num contexto urbano e numa zona de lazer semiurbana. As primeiras tarefas foram resolvidas em espaços amplos, o que possibilitou que os grupos se afastassem para trabalhar. Como terminaram as tarefas em momentos diferentes, os grupos não prosseguiram o trilho em simultâneo.

Os dados usados para este trabalho foram registados em guiões (resoluções das tarefas), fotografia, áudio, notas de campo e entrevista.

Do trilho acima referido selecionaram-se as três tarefas abaixo apresentadas: a primeira por terem sido usadas representações muito diversificadas na resolução e as restantes por ilustrar a mobilização de conteúdos quase todos introduzidos no último período do 3º ano de escolaridade.

Para cada tarefa selecionada, analisa-se o desempenho dos alunos aquando da respetiva resolução, incluindo alguns fatores externos que interferiram.

Alguns resultados das tarefas selecionadas

A tarefa do acesso ao chafariz

Para chegares ao chafariz tens que subir degraus. Descobre todos os modos de subir se fizeres degrau a degrau ou saltares um degrau. Podes combinar estas duas modalidades. Usa um esquema para te ajudar a explicar.

Esta tarefa implica a realização de processos matemáticos, mas não envolve conteúdos programáticos do 3º ano.

Os alunos devem descobrir o número de formas para subir os quatro degraus de acesso ao chafariz, sem saltar mais do que um degrau de cada vez. Estamos conscientes de que teriam que ser aceites resoluções que considerassem retrocessos, porque nada foi mencionado sobre essa possibilidade. No entanto, não foi considerada essa hipótese pelos grupos. Antes de registar, todos os alunos foram ao local experimentar espontaneamente (representação ativa de Bruner, 1999) (figura 1), à exceção do aluno que apresenta a resolução da figura 5.

Figura 1. Alunos de dois grupos (1 e 4) a simularem as possibilidades de subir ao chafariz.

Algumas resoluções:

Nas resoluções da figura 2, os alunos usaram como estratégia a elaboração de uma lista com as possibilidades de decompor o número de degraus, na soma de todas as

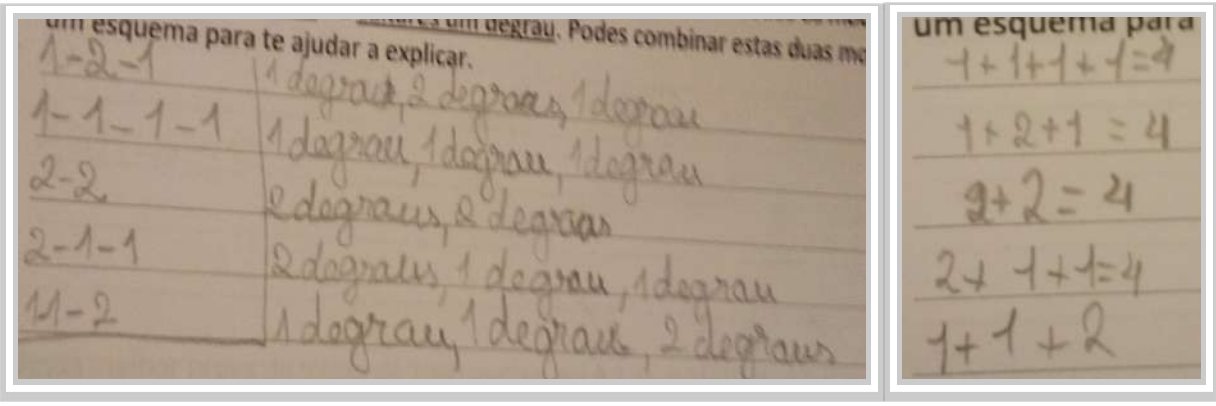


Figura 2. Representação da aluna MC, grupo 1, (à esquerda) e da aluna LG (à direita), grupo 2.

parcelas possíveis no universo dos números naturais: 1+1+1+1, 1+2+1 e 2+2. Na situação que envolve números 1 e 2 consideraram ainda a ordem pela qual as parcelas podem aparecer: 2+1+1, 1+2+1, 1+1+2. Segundo a tipologia de Bruner (1999), estamos perante a representação simbólica, uma vez que os alunos usam linguagem numérica e ou corrente para representar as ideias.

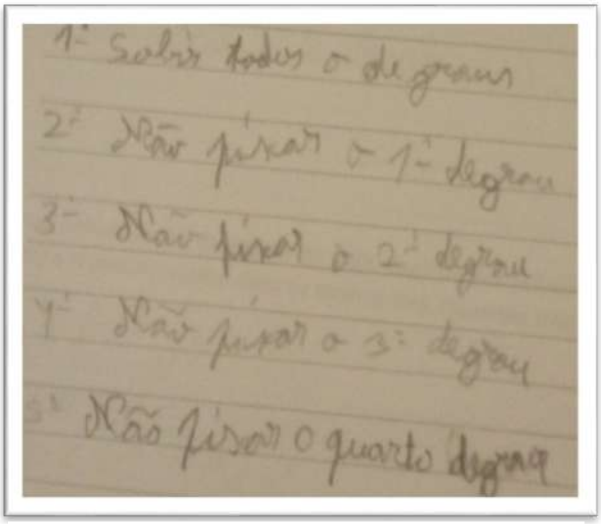


Figura 3. Resolução do aluno DV (grupo 4)

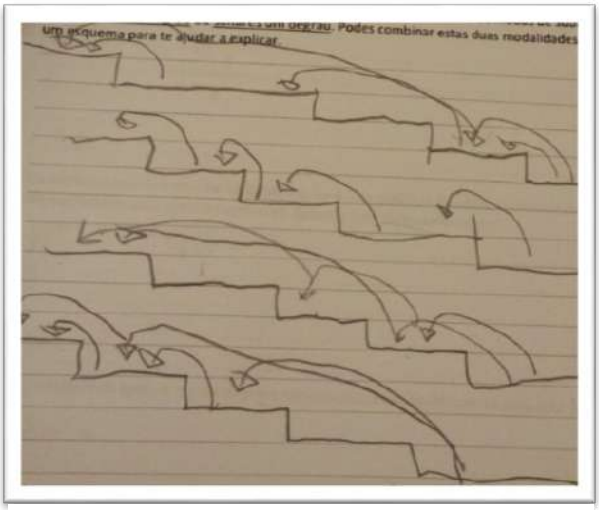


Figura 4. Resolução do aluno SC (grupo 5)

O grupo mencionado na figura 3 fez uma lista com as cinco hipóteses para aceder ao chafariz, porém, apesar do número de formas estar correto, a resolução não está. É possível não pisar um degrau de cada vez, mas também é possível saltar dois degraus não consecutivos. Para além disso, não é possível saltar o 4º degrau, como foi considerado, porque ele corresponde ao topo. Este aluno não considerou que era possível saltar o 1º degrau e continuar o percurso de duas formas diferentes: subir os restantes ou degrau a degrau ou saltar o 3º degrau.

Na figura 4 encontra-se a representação de um grupo que optou pelo desenho, no qual o primeiro segmento parece representar a base e, os restantes, os degraus. As setas mostram se a ascensão é feita degrau a degrau ou se há salto. Apesar de este desenho ter sido elaborado depois de experimentarem, falta a possibilidade de subir da base para o 2º degrau e deste para o 4. Para além disso, na 1ª, 2ª e 4ª situação, a contar de baixo, observa-se uma seta desenhada sobre dois degraus consecutivos o que deixa transparecer que este grupo considerou a possibilidade de saltar dois degraus de uma só vez, condição não permitida pelo enunciado, embora tenha sido experimentada.

Na figura 5 observa-se a resolução de um aluno que não experimentou. Ele considerou possível saltar o 4º degrau o qual corresponde ao patamar de acesso ao chafariz. Esta ideia foi deduzida pelas respostas do aluno às questões da investigadora gravadas e apresentadas abaixo:

> *Inv.:* Podes explicar como pensaste para fazer este desenho?
> *BP:* Eu pensei que se fizesse um desenho [pausa] era uma forma simples [pausa] e representei com as linhas curvas os degraus e [com] os traços os degraus que pisei. Eu podia pisar todos, podia não pisar um ou podia não pisar dois, mas não podiam estar sempre…mas não podiam estar juntos.
> *Inv.:* Na 5ª e 6ª forma de chegar ao chafariz que apresentas neste desenho não tens traço no último degrau, porquê? Se saltares este degrau onde vais parar?
> *BP:* [O aluno fica em silêncio, olha para os colegas, depois para o chafariz e por fim para a entrevistadora e diz em voz muito baixa: pois… fiz mal] Foi porque eu pensei que era para chegar ao bordo do chafariz.

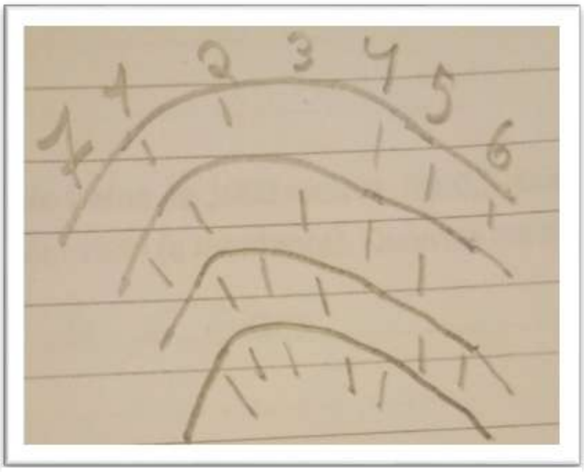


Figura 5. Resolução do aluno BP (Grupo 2)

Esta última frase do aluno deixa transparecer que houve uma representação interna (Goldin, 2010) que condicionou a resolução por parte do aluno.

Depois de ter sido confrontado com esta questão, o aluno queria apagar o registo, mas a investigadora sugeriu que o mantivesse por ter sido o seu primeiro raciocínio. De seguida, o aluno foi experimentar as diferentes formas de subir os degraus, focando-se no último degrau (aluno à direita na imagem da Figura 6). No final parecia não haver dúvidas e registaram simbolicamente, de forma idêntica às primeiras representações simbólicas aqui discutidas. Neste caso, a estratégia experimentação parece ter facilitado a compreensão do aluno e interferiu na resolução do grupo.

Figura 6. Grupo 2 a simular a subida ao chafariz

Percebeu-se que as situações experimentadas foram as que os alunos registaram, embora nem sempre estivessem corretas. Esta situação parece ser provocada pela precipitação em experimentar logo após a primeira leitura do problema, o que leva a que os alunos não tenham bem presentes as condições impostas.

Independentemente da correção das resoluções, verifica-se uma diversidade nas representações das ideias dos alunos. Depois de representarem de forma ativa, mais de metade dos grupos optou pela representação simbólica, usando apenas números ou descrevendo em linguagem corrente.

A tarefa do Jardim Romano

O pavimento em calçada à portuguesa mostra alguns padrões de formas utilizadas pelos romanos que ainda são frequentes na cultura atual. Num dos padrões podes observar um quadrado dividido em dois triângulos: um branco e um preto.

1. Qual é a área de cada quadrado?
2. Se pudéssemos juntar 4 quadrados destes, conseguiríamos formar um quadrado maior com 1m^2 de área. Justifica a tua resposta.

Estas questões envolvem as medidas de comprimento e as medidas de área, previstas no 3º ano de escolaridade.

Em construções com calçada à portuguesa é difícil encontrar rigor tanto nas medidas, como na construção de segmentos de reta, pelo que temos consciência de que a figura referida no enunciado não é exatamente um quadrado. Contudo, o objetivo é saber como é que os alunos mobilibilizam conhecimento relativos a esse conteúdo programático, pelo que desvalorizamos o aspeto referido.

Depois da investigadora ler o enunciado ao grupo 5, com os elementos B,S e ST, registou-se o seguinte diálogo:

> *S:* Precisamos de um metro.
> *B:* Não precisamos nada.
> *Inv.*: Por que não precisamos B?
> *B*: Podemos contar [baixa-se e começa a contar as peças da calçada, habitualmente conhecidas por cubos]
> *ST*: Vocês estão a contar todos os quadrados? [referindo-se aos “cubos”] É comprimento vezes largura!
> *B*: 24,5 [referindo-se ao número de cubos de um triângulo].
> *Inv.*: B, a pergunta é em relação ao quadrado e não ao triângulo. Já agora, que parte do quadrado é o triângulo?
> *B*: Metade.
> *Inv.*: Então qual é a área do quadrado se um cubo for uma unidade de área?
> *B*: 48,5.
> *Inv.*: Será?
> *ST*:49!
> *Inv.*: E se medissem com a fita?
> *S:* [Depois de medir um lado, respondeu] É 35 vezes 4.
> *ST*: Não!
> Os alunos continuaram a medir os restantes lados.
> *Inv.*: Se é um quadrado, quantos lados precisam de medir?
> *ST*: Um!
> *B e S*: Pois porque os quatro lados são iguais. Então é 35 vezes 4!
> *S*: Isso foi como eu pus.
> *ST*: Mas a área é lado vezes lado!
> *B e S*: Ah, pois é.

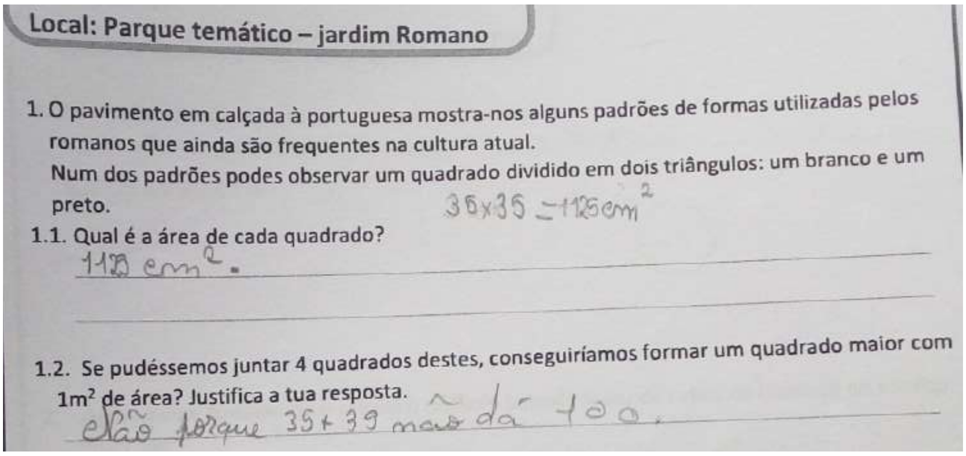
Na segunda questão, os alunos perceberam que tinham que pensar num quadrado com dois quadrados pequenos em cada lado, mas manifestaram alguma dificuldade em chegar à resposta. Enquanto não avançavam, distraiam-se a fazer medições, pelo que a investigadora iniciou a seguinte conversa:

> *Inv.:* Se dizem que há dois quadrados pequenos em cada lado, quanto mede o lado do quadrado grande?
> S: 35 mais 35.
> *Inv.*: E quanto dá?
> S: Setenta
> *Inv.:* Então são suficientes ou não os quatro quadrados pequenos para formar um quadrado com um metro de área?
> *B,S e ST*: Não, porque não dá 100.

A primeira parte do diálogo revela que o aluno *ST* conseguiu mobilizar melhor o conhecimento concetual e procedimental do que os colegas, que confundiram área com perímetro. É evidente a importância do papel do professor na estruturação e explicitação do pensamento dos alunos, e no desencadeamento da partilha de ideias e esclarecimento de dúvidas. Esta situação sublinha a importância do professor facilitar um discurso matemático com sentido e colocar questões intencionais.

Figura 7. Grupo 5 a fazer medições para responder à tarefa do Jardim Romano

Relativamente à mobilização de conhecimentos previstos no atual Programa e Metas (ME, 2013), nesta situação concreta os alunos mediram comprimentos utilizando as unidades do sistema métrico (figura 7), relacionaram diferentes unidades de medida de comprimento do sistema métrico nomeadamente 100cm com 1m. Reconheceram que a área de um retângulo é dada pelo produto das medidas de dois lados concorrentes e reconheceram que um metro quadrado corresponde à área de um quadrado com um metro de lado (figura 8).



Local: Parque temático – jardim Romano

1. O pavimento em calçada à portuguesa mostra-nos alguns padrões de formas utilizadas pelos romanos que ainda são frequentes na cultura atual.
Num dos padrões podes observar um quadrado dividido em dois triângulos: um branco e um preto. 35x35 = 1125 cm²

1.1. Qual é a área de cada quadrado?
1125 cm².

1.2. Se pudéssemos juntar 4 quadrados destes, conseguiríamos formar um quadrado maior com 1m² de área? Justifica a tua resposta.
Não porque 35+39 não dá 100.

Figura 8. Resolução da tarefa do Jardim Romano pelo aluno LG (Grupo 2)

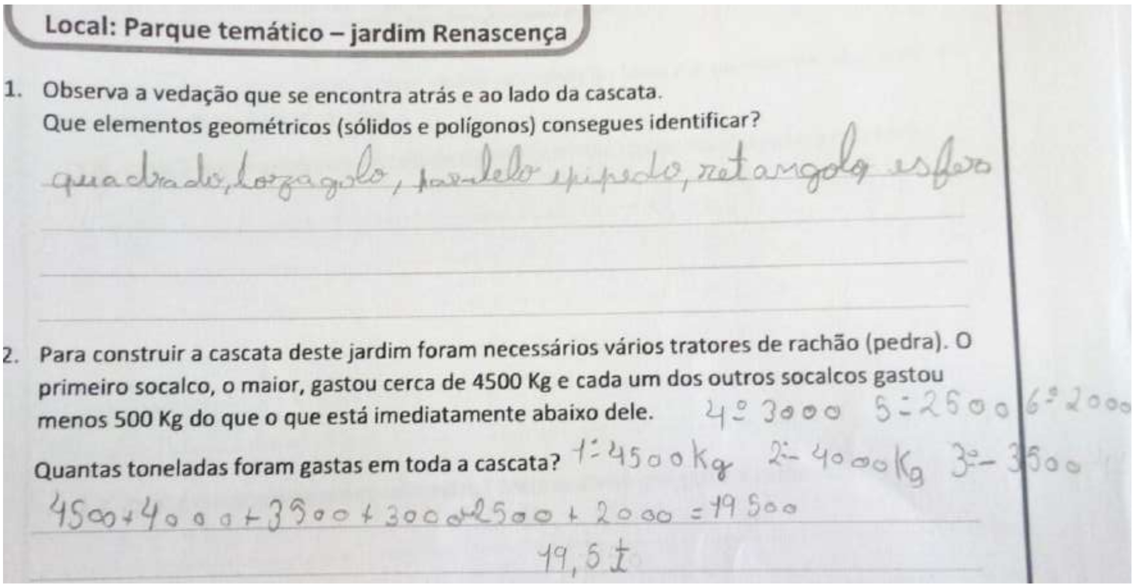
A tarefa do Jardim Renascença

> Observa a vedação que se encontra atrás e ao lado da cascata.
> 1. Que elementos geométricos (sólidos e polígonos) consegues identificar?
> 2. Para construir a cascata deste jardim foram necessários vários tratores de rachão (pedra). O maior socalco gastou cerca de 4500 kg e cada um dos outros gastou menos 500kg do que o que está imediatamente abaixo dele. Quantas toneladas de pedra foram gastas em toda a cascata?

Figura 9. Contexto da tarefa do Jardim Renascença

A resolução da primeira questão envolve a aplicação de conhecimentos do domínio da geometria do 3º ano e de anos anteriores. Na vedação referida é possível observar-se figuras simples como triângulos, retângulos, incluindo quadrados, losangos e pentágonos não regulares. Observam-se, ainda, figuras compostas por outras, nomeadamente paralelogramos, trapézios e diversas figuras não regulares. Encontram-se, ainda, paralelepípedos retângulos e esferas, sendo esta última a única que integra o programa do 3º ano. Os sólidos geométricos, o retângulo e o losango foram identificados facilmente, mas apenas alguns identificaram quadrados. Verificou-se uma enorme dificuldade em visualizar quadrados que não estão na posição com dois lados completamente na horizontal.

A resolução da segunda questão requer o cálculo da massa da pedra e a conversão da soma das massas de quilogramas para toneladas.



Local: Parque temático – jardim Renascença

1. Observa a vedação que se encontra atrás e ao lado da cascata.
Que elementos geométricos (sólidos e polígonos) consegues identificar?
quadrado, lozangolo, paralelo epipedo, retangolo esfera

2. Para construir a cascata deste jardim foram necessários vários tratores de rachão (pedra). O primeiro socalco, o maior, gastou cerca de 4500 Kg e cada um dos outros socalcos gastou menos 500 Kg do que o que está imediatamente abaixo dele. 4º 3000 5º 2500 6º 2000
Quantas toneladas foram gastas em toda a cascata? 1º 4500 kg 2º 4000 kg 3º 3500
4500+4000+3500+3000+2500+2000=19500
19,5 t

Figura 10. Resolução da tarefa do Jardim Renascença pelo aluno LG

Esta tarefa surgiu quase na fase final, quando os alunos já acusavam algum cansaço e desconforto com o calor, pelo que foi necessário colocar questões para desencadear o início da resolução. De qualquer modo, apesar de ser um conteúdo abordado muito recentemente, os alunos não manifestaram dificuldade na compreensão da questão nem na mobilização de conhecimentos. Quase todos fizeram cálculo mental para descobrir os valores parcelares e a soma da massa da pedra. No final, alguns esqueceram-se de fazer a conversão, mas os que converteram fizeram-no diretamente.

A resolução da figura 10 evidencia um aspeto verificado nas resoluções da maioria dos alunos, nesta e noutras tarefas: os cálculos, conversões ou outros dados são registados em espaços sem linhas. Por vezes ocuparam as margens e deixam as linhas completamente livres. O aluno referido na figura 10 só por insistência fez parte do registo nas linhas.

Algumas considerações finais

Os dados recolhidos no âmbito da resolução das três tarefas aqui apresentadas mostram que apesar de estarem num contexto com poucas condições para a concentração na resolução das tarefas, os alunos empenharam-se de forma idêntica à que se verifica em sala de aula, mas com mais entusiasmo. As condições físicas, embora não sejam as ideias para fazer os registos, não parecem ser um obstáculo pois os alunos procuram naturalmente soluções alternativas.

Apesar de estarem em contextos que proporcionam mais liberdade de movimento, mais autonomia e não permite um controlo apertado pela docente da turma, trabalharam de forma exemplar, em grupo, discutindo ideias de forma espontânea e mostrando cuidado em rever as resoluções dos colegas e ou confirmar as suas. Evidenciaram menos dependência do professor, provavelmente por sentirem o apoio dos outros elementos do grupo. Contudo, verificou-se que a intervenção do professor é fundamental em alunos desta idade, tanto para ajudar a desencadear a resolução da tarefa como para promover a reflexão sobre o raciocínio ou tornar as discussões entre os alunos mais produtivas, como adverte o NCTM (2014).

Aparentemente os alunos, quando resolvem as tarefas, não se deixaram influenciar por fatores como o movimento de pessoas estranhas ou automóveis. Aliás, aquando das entrevistas, indicaram este trilho como o que mais gostaram pelo facto de ser num ambiente movimentado e com muitos elementos para apreciar.

Um fator que pareceu interferir foi a ansiedade por avançar para a tarefa seguinte. Este aspeto talvez fosse mais evidente neste trilho porque o espaço era menos labiríntico, o que permitia localizar os restantes grupos e perceber em que tarefa se encontravam. Isto provocava alguma inquietação nos alunos, levando-os a terminar os registos de forma apressada. Por isso, a resposta à questão colocada ficou frequentemente por elaborar, sobretudo quando não havia o "*R*:" de *resposta,* como forma de lembrete. Este aspeto, acrescido ao facto de os alunos não usarem as linhas para efetuar cálculos, mesmo depois de serem alertados para isso, permitiram perceber que independentemente do contexto, os alunos estão muito presos às rotinas de sala de aula.

A ansiedade pela experimentação e utilização de material ou não pareceu, por vezes, desviar a atenção dos alunos do enunciado da tarefa. No entanto, em algumas situações, a possibilidade de concretizarem o enunciado ajuda a resolver a tarefa. Estas experiências reais não contribuem apenas para enriquecer a aprendizagem; elas são o cerne da compreensão e, por conseguinte, da aprendizagem de um determinado assunto (DfES,2006).

Referências bibliográficas

Barbosa, A., Vale, I. & Ferreira, R. (2015). Trilhos matemáticos: promovendo a criatividade dos futuros professores. *Educação & Matemática,* 135, 57-64.

Bonotto, C. & Basso, M. (2001). Is it possible to change the classroom activities in which we delegate the process of connecting mathematics with reality? International *Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 32 (3), 385-399.

Bruner (1999) Bruner, J. (1999). *Para uma teoria da educação*. Lisboa: Relógio d'Água.

Cross, R. (1997). Developing Maths Trails. *Mathematics Teaching*, 158, 38–39.

Eshach (2007). Bridging In-school and Out-of-school Learning: Formal, Non-Formal, and Informal Education. *Journal of Science Education and Technology, 16* (2), 171-190.

Fägerstam, E. & Samuelsson, J. (2014). Learning arithmetic outdoors in junior high school – influence on performance and self-regulating skills. *Education 3-13*, *42*(4), 419-431.

Goldin, G. (2010). Perspectives on representations in Mathematical Learning and problema solving. In L. English. & D. Kirshner.(Eds), *Handbook of International Research in Mathematics Education (pp. 176-201). New York. Taylor and Francis,*

Department for Education and Skills (DfES) (2006). *Learning outside the classroom manifesto.* Nottingham, UK: DfES.

Margolinas, C. (Ed.). (2013). Task Design in Mathematics Education*. Proceedings of ICMI Study 22* (Vol. 1). Oxford.

Mason, J. & Johnston-Wilder, S. (2006*). Designing and using mathematical tasks*. York, UK: QED Press

NCTM (2014). *Principles to Actions: Ensuring Mathematical Success for All.* Reston, VA: NCTM.

Ofsted (2008). *Report on learning outside the classroom*, Consultado em 20 de fevereiro de 2017 em http://www.ofsted.gov.uk/resources/learning-outside-classroom

Patterson, A. (2009). *Effectively Incorporating the Outdoor Environment into the Standard Curriculum.* Consultado em 10 de fevereiro de 2017, em http://www.smcm.edu/mat/educational-studies-journal/a-rising-tide-volume-2-summer-2009

Richardson K. M. (2004). Designing Math Trails for the Elementary School. *Teaching Children Mathematics, 11*(1),8-14.

Stein, M., & Smith, M. (1998) Mathematical Tasks as a Framework for Reflection: From Research to Practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3, 268–75.

Stein, M., Engle, R., Smith, M., Hughes, E (2008). Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell. *Mathematical Thinking and Learing, 10*(4), 313.340. doi:10.1080/10986060802229675.

Wager, A. (2012). Incorporating out-of-school mathematics: from cultural context to embedded practice. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 15, 9-23.

COMENTÁRIOS ESCRITOS PRODUZIDOS PELOS ALUNOS NA AULA DE MATEMÁTICA: UM ESTUDO NO ENSINO BÁSICO

Cristiana Leite[1], Manuel Vara Pires[2]
[1]Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Bragança,
cristianapintoleite@gmail.com
[2]Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Bragança,
mvp@ipb.pt

Resumo. *No âmbito do relatório final de estágio do Mestrado em ensino do 1.º e do 2.º ciclo do ensino básico, foi desenvolvido um estudo exploratório centrado na capacidade de comunicação escrita dos alunos em sala de aula, envolvendo todas as áreas disciplinares do estágio profissional. O estudo teve o propósito de identificar e analisar aspetos da capacidade dos alunos comentarem, por escrito, trabalhos produzidos em grupo pelos colegas, sob a forma de galeria ou de diário de bordo. Este texto foca-se apenas na parte do estudo relacionada com a área da matemática. A investigação segue uma abordagem qualitativa e interpretativa, envolvendo os alunos de duas turmas, uma do 1.º ciclo e outra do 2.º ciclo. A recolha de dados foi feita através dos comentários escritos por cada grupo de alunos aos trabalhos apresentados pelos colegas. A análise dos dados baseou-se em quatro dimensões definidas previamente (clareza, fundamentação, lógica, profundidade) e em três níveis de desempenho (baixo, médio, elevado). Globalmente, a análise dos comentários escritos dos alunos aponta para melhores desempenhos em clareza e em lógica e para maiores dificuldades em fundamentação e em profundidade, especialmente na apresentação de justificações e argumentos para suportar as suas ideias e raciocínios e nas referências aos temas matemáticos trabalhados.*

Abstract. *In the context of the master final report in Teaching in the 1st and 2nd basic education cycles, it was developed an exploratory study focused on students' written communication abilities in the classroom, involving all the disciplinary areas of the professional internship. The purpose of the study was to identify and analyze aspects of students' ability to comment, in written form, work produced in groups by their colleagues and elaborated in the form of gallery or logbook. This paper presents the part of the study focused on the area of mathematics. The research follows a qualitative and interpretative approach, involving the students of two classes, one of the 1st cycle and the other of the 2nd cycle. Data collection was done through the comments written by each group of students about the presentations made by colleagues. Data analysis was based on four previously defined dimensions (clarity, reasoning, logic, depth) and three levels of performance (low, medium, high). The analysis of students' written comments points to better performances in both clarity and logic and to greater difficulties in both reasoning and depth, especially in the justifications and arguments to support their ideas and in the references to the mathematical topics worked.*

Palavras-chave: *Alunos do ensino básico; Comentários escritos; Comunicação matemática; Ensino e aprendizagem da matemática; Prática de ensino supervisionada.*

Contexto do estudo

Este estudo resulta do trabalho produzido, pela primeira autora, no estágio profissional integrado na prática de ensino supervisionada [PES] do Mestrado em ensino do 1.º e do 2.º ciclo do ensino básico e registado no respetivo relatório final de estágio [RF] (Leite, 2016), orientado pelo segundo autor. No estágio profissional, desenvolvido ao longo de um ano letivo num agrupamento de escolas do norte do país, foi assumido o trabalho letivo em todas as áreas disciplinares do 1.º ciclo e em português, história e geografia de Portugal, ciências naturais e matemática do 2.º ciclo.

Desde o início da atividade letiva foram bastante visíveis as dificuldades, hesitações ou limitações dos alunos quando convidados a comunicar, oralmente ou por escrito, opiniões ou comentários acerca de trabalhos desenvolvidos pelos colegas ou mesmo a justificar os seus raciocínios seguidos nas tarefas realizadas. Por isso, por reconhecer como é importante para os alunos desenvolverem a sua capacidade crítica e argumentativa e, assim, melhorarem as suas aprendizagens, a comunicação dos alunos em sala de aula foi assumida como o "tema aglutinador" da prática letiva.

Na perspetiva de reforçar a dimensão investigativa do trabalho a realizar, foi delineado um estudo exploratório nas diversas áreas disciplinares do estágio profissional (matemática, no 1.º ciclo; português, história e geografia de Portugal, ciências naturais e matemática, no 2.º ciclo) centrado na capacidade de comunicação escrita dos alunos em sala de aula, com o propósito de identificar e analisar aspetos da capacidade dos alunos comentarem, em grupo e por escrito, trabalhos de grupo produzidos pelos restantes colegas. Para isso, definiram-se dois objetivos principais: (i) identificar aspetos dos trabalhos apresentados pelos colegas que os alunos têm em conta nos comentários escritos que produzem; e (ii) analisar os comentários escritos dos alunos, atendendo a quatro dimensões da comunicação: clareza, fundamentação, lógica e profundidade.

Neste texto, apresenta-se a investigação realizada apenas na área da matemática, em que estiveram envolvidas duas turmas: uma turma do 1.º ciclo (4.º ano de escolaridade) e uma turma do 2.º ciclo (5.º ano de escolaridade). Tal como nas restantes áreas disciplinares, a investigação foi enquadrada pelos pressupostos e orientações comuns, mas tendo em conta as características mais específicas desta área do saber.

Comunicação escrita na sala de aula

O ser humano, enquanto ser social, é por natureza um comunicador e, por isso, comunicar é algo que lhe é essencial na qualidade de indivíduo pertencente a uma comunidade. A comunicação pode ser entendida como um processo de troca de informações ou ideias entre sujeitos, que envolve pensamentos e expressões, com o objetivo de interagir, informar, influenciar ou persuadir (Belo, 2005). A comunicação surge, então, como um processo complexo e ativo de interação entre sujeitos, que trocam informações, supondo um emissor, que codifica ou formula para transmitir uma mensagem, e um recetor, que a descodifica ou compreende (Caldas, 2000; Sim-Sim, 1998). Nas três etapas fundamentais deste processo (codificação, transmissão e descodificação da mensagem), é necessário que os intervenientes partilhem um código comum, ou seja, a língua e o conhecimento dela, e utilizem um canal de comunicação adequado, meio pelo qual a mensagem é transmitida. Para além disso, independentemente do tipo de sistema de comunicação (escrita ou fala), é necessário um suporte para a transmissão da mensagem que "na fala esse suporte é constituído pelo som, na escrita pelos símbolos gráficos" (Barbeiro, 1999, p. 114).

A formação escolar deve permitir dos alunos o desenvolvimento de uma boa competência comunicativa, entendida como a "capacidade que cada um possui para falar, escrever e saber selecionar as formas linguísticas mais adequadas às diferentes situações com que nos deparemos" (Monteiro, Viana, Moreira & Bastos, 2013, pp. 112-113). Para os autores, a ação pedagógica do professor deve centrar-se num trabalho que capacite as crianças para "a interação com os outros, com precisão, clareza, coerência, eficácia e adequação" (p. 112). As várias formas de comunicação usadas no ato comunicativo, em sala de aula, são caracterizadas pelo uso da linguagem oral e da linguagem escrita e a comunicação desenvolve-se, baseando-se na forma como o professor e os alunos estruturam e partilham o seu conhecimento (Guerreiro & Menezes, 2010; Guerreiro, Tomás Ferreira, Menezes & Martinho, 2015; NCTM, 2014; Ponte & Serrazina, 2000). A linguagem oral e a linguagem escrita, influenciando-se mutuamente, são duas realidades diferentes (Baptista, Viana & Barbeiro, 2011). Mas quer o discurso oral quer os registos escritos assumem-se primordiais no desenvolvimento e na capacidade de comunicar dos alunos (Menezes, Tomás Ferreira, Martinho & Guerreiro, 2014).

No Programa de Português do Ensino Básico [PPEB] (ME, 2009), a escrita é entendida como "o resultado, dotado de significado e conforme à gramática da língua, de um processo de fixação linguística que provoca o conhecimento do sistema de representação gráfica adotado" e de "processos cognitivos e translinguísticos complexos (planeamento, textualização, revisão, correção e reformulação do texto)" (p. 16). A linguagem escrita compreende a produção escrita em concreto, englobando a competência gráfica, ortográfica e compositiva, assim como o conhecimento explícito da língua (ME, 2009). O bom domínio de ambas as dimensões é fundamental para os registos escritos dos alunos, demonstrando conhecimento e eficiente utilização do vocabulário, assim como a utilização e articulação dos termos, palavras e frases, de forma a dar coesão e coerência aos registos escritos produzidos.

Por outro lado, a comunicação escrita pode ser analisada tendo em conta diferentes perspetivas dadas as múltiplas dimensões envolvidas. Por exemplo, uma das dimensões importantes da comunicação escrita, a clareza, relaciona-se com o recurso a vocabulário (também matemático) e a representações adequadas (Costa & Pires, 2016). Na resolução das tarefas, os alunos podem utilizar diferentes representações (materiais manipuláveis, tabelas, figuras, desenhos, diagramas, vocabulário, linguagem simbólica, etc.), que têm a sua especificidade. Para Bruner (1999), podemos representar as ideias, recorrendo a diferentes formas: representações ativas, representações icónicas e representações simbólicas.

Ponte e Velez (2011) referem que as representações ativas estão associadas à ação. A importância deste modo de representação decorre do pressuposto de que a criança consegue melhor assimilar dados se estes chegarem por ação. Para Boavida, Paiva, Cebola, Vale e Pimentel (2008), a manipulação adequada de objetos propicia "oportunidades para criar modelos ilustrativos, contribuindo para a construção de conceitos" (p. 71). As representações icónicas "baseiam-se na organização [e memória] visual, no uso de figuras, imagens, esquemas, diagramas ou desenhos para ilustrar conceitos, procedimentos ou relações entre eles" (p. 71), distanciando-se do concreto e do físico. Finalmente, seguindo as mesmas autoras, as representações simbólicas, predominantes no presente estudo, consistem numa forma mais elaborada de captar e representar as ideias por linguagem simbólica ou vocabulário. No caso da matemática, "correspondem, não apenas aos símbolos que representam ideias matemáticas, mas a todas as linguagens que envolvem um conjunto de regras fundamentais quer para o trabalho com a matemática, quer para a sua compreensão" (p. 71). Evidentemente, as diferentes formas de representação não se querem "autónomas, independentes ou alternativas umas às outras” (p. 71), mas antes utilizadas conjuntamente ou combinadas, nos vários momentos de comunicação escrita, ao longo de toda a vida.

Opções metodológicas do estudo

O estudo seguiu uma abordagem qualitativa e interpretativa muito adequada à natureza do problema em análise e aos propósitos assumidos (Bogdan & Biklen, 2012). Esta abordagem, tendo por base a descrição e interpretação de uma dada realidade e o estudo da perspetiva dos participantes, permite verificar, de forma gradual, as intenções e interpretações destes perante as situações ou problemas, assim como captar os sentidos atribuídos, em lugar de fazer generalizações de resultados. É muito apropriada ao ambiente particular da PES, quer para o contexto da prática letiva quer para a realidade concreta investigada (neste caso, a comunicação escrita dos alunos). De facto, concordando com Pires (2005), ao assumir uma orientação interpretativa atentamos na compreensão do que é único e particular para o sujeito e, assim, a prática educativa é analisada a partir da intencionalidade e significado de forma a interpretar o que os participantes fazem no contexto onde acontece a ação.

No desenvolvimento da PES, a teoria e a prática assumiram-se como articuláveis perante as necessidades encontradas e a constante reflexão sobre as práticas. Por isso, o estudo também teve contornos de uma investigação-ação (Máximo-Esteves, 2008), dado ser “uma metodologia caracterizada por uma permanente dinâmica entre teoria e prática em que o professor interfere no próprio terreno de pesquisa, analisando as consequências da sua acção e produzindo efeitos directos sobre a prática” (Amaral, Moreira & Ribeiro, 1996, p. 116), ou seja, uma metodologia direcionada para a mudança, com intenção de transformar ou reformular práticas no sentido de as melhorar (Alonso & Silva, 2006). Neste sentido, também pode ser entendida como uma investigação sobre a própria prática (Ponte, 2002) já que se desenvolve identificando ou reconhecendo um problema, emergente da prática, reinventando a ação de forma a procurar resolvê-lo.

Com este enquadramento, foi desenvolvido um estudo exploratório realizado no âmbito de cinco áreas disciplinares (matemática, no 1.º ciclo; português, história e geografia de Portugal, ciências naturais e matemática, no 2.º ciclo) e centrado em aspetos da comunicação escrita dos alunos. O estudo orientou-se para a questão geral: “Como é que os alunos comunicam por escrito as suas ideias e comentários acerca de trabalhos de grupo apresentados pelos colegas?”, suportando-se em dois objetivos principais: (i) identificar aspetos dos trabalhos apresentados pelos colegas que os alunos têm em conta nos comentários escritos que produzem; e (ii) analisar os comentários escritos dos alunos, atendendo a quatro dimensões da comunicação: clareza, fundamentação, lógica e profundidade.

Esta comunicação foca-se apenas na área disciplinar da matemática e nos comentários escritos produzidos por quatro grupos constituídos pelos vinte e um alunos do 1.º ciclo (4.º ano de escolaridade) e seis grupos formados com os vinte e dois alunos do 2.º ciclo (5.º ano de escolaridade). Conforme referido, o estudo desenrolou-se no âmbito do estágio profissional (1.º ciclo, de outubro a fevereiro, e 2.º ciclo, de fevereiro a junho), seguindo o desenvolvimento curricular normal das duas turmas, em que a comunicação dos alunos foi assumida como um eixo integrador da prática letiva. Nas aulas de matemática, no sentido de desenvolver as capacidades comunicativas individualmente ou em grupo, os alunos foram envolvidos em situações que, oralmente ou por escrito, exigiam a apresentação dos seus pontos de vista ou comentários às opiniões dos outros colegas. Como os alunos demonstravam (mais) dificuldades na comunicação escrita, ao longo das aulas e adaptadas aos tópicos matemáticos em estudo, foram sendo trabalhados aspetos que poderiam ser selecionados para os comentários escritos, como a apresentação do trabalho, a organização da informação, os processos de cálculos seguidos, as diversas representações apresentadas ou a justificação das afirmações, realçando a necessidade das opiniões serem claras, corretas, fundamentadas e compreensíveis para os outros.

A recolha de dados foi feita através dos comentários escritos que os grupos de alunos produziram em relação a trabalhos apresentados por outros grupos. No 1.º ciclo, no início do segundo período letivo, cada grupo escreveu, no final de duas aulas de noventa minutos, comentários ao trabalho desenvolvido pelos restantes grupos na resolução, apresentada em cartaz, de uma tarefa de natureza exploratória, envolvendo a descoberta de um padrão. No 2.º ciclo, no final terceiro período letivo, ao longo de quatro aulas de noventa minutos, cada grupo organizou um diário de bordo registando as resoluções das tarefas desenvolvidas num projeto relacionado com a organização e tratamento de dados. Na última aula, os diários circularam por todos os alunos e cada grupo comentou por escrito as resoluções dos restantes grupos.

A análise dos dados suportou-se num instrumento com quatro categorias, definidas previamente, e três níveis de desempenho em cada uma delas, tendo em conta aspetos já mencionados em outros estudos (Castanheira, 2014; Costa, 2015; Costa & Pires, 2016;

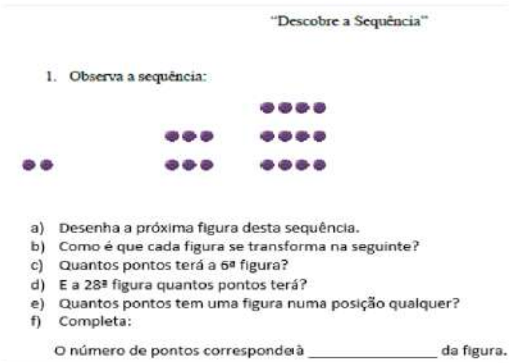
Vieira, 2013). Os comentários escritos produzidos por cada grupo relativamente ao trabalho dos restantes colegas foram analisados em todas as categorias e associados, no seu aspeto global, a um dos níveis de desempenho em cada uma delas. O instrumento de análise, adaptado de Costa e Pires (2016) e validado por três especialistas em didática, adotou quatro dimensões: clareza, fundamentação, lógica e profundidade, consideradas pertinentes para a caracterização da comunicação escrita, que foram apreciadas recorrendo a três níveis de desempenho: baixo, médio e elevado. Assim, na categoria "clareza", analisa-se se o aluno expressa, por escrito, as suas ideias, recorrendo a vocabulário correto e a representações adequadas, considerando-se nível baixo quando o aluno apresenta ideias imprecisas, utiliza vocabulário incorreto ou incompreensível e recorre a representações inadequadas; nível médio quando o aluno apresenta ideias precisas, mas utiliza vocabulário pouco preciso ou compreensível e recorre a representações pouco adequadas; e nível elevado quando o aluno apresenta ideias precisas, utiliza vocabulário preciso e correto e recorre a representações adequadas. Na categoria "fundamentação", o aluno justifica, de forma escrita, os seus processos ou ideias, apresentando argumentos plausíveis, considerando-se nível baixo quando o aluno justifica os seus processos ou ideias de forma imprecisa; nível médio quando o aluno justifica razoavelmente os seus processos ou ideias; e nível elevado quando o aluno justifica adequadamente os seus processos ou ideias. Na categoria "lógica", o aluno manifesta raciocínio e coerência nos registos escritos, apresentando conexões entre as ideias registadas, considerando-se nível baixo quando o aluno revela pouco raciocínio e coerência nos registos escritos, não mostrando conexão entre as ideias; nível médio quando o aluno revela algum raciocínio e coerência nos registos escritos, a par de alguma conexão entre as ideias; e nível elevado quando o aluno revela raciocínio e coerência nos registos escritos, manifestando conexão entre as ideias. Finalmente, na categoria "profundidade", o aluno revela, de forma escrita, o domínio de aspetos importantes e complexos sobre o assunto a trabalhar, considerando-se nível baixo quando o aluno revela, frequentemente, não dominar aspetos importantes sobre o assunto; nível médio quando o aluno revela, algumas vezes, o domínio de aspetos importantes e complexos sobre o assunto; e nível elevado quando o aluno revela, frequentemente, dominar os aspetos mais complexos sobre o assunto.

Comentários escritos produzidos pelos alunos

Apresentam-se os principais resultados do estudo verificados nas duas turmas, adotando a ordem dos objetivos do estudo. Para cada uma delas, após a explicitação da tarefa matemática trabalhada, são referidos os aspetos das apresentações dos grupos focados nos comentários escritos pelos alunos ao trabalho dos outros colegas seguidos da respetiva análise atendendo às quatro categorias previamente definidas.

Turma do 4.º ano do 1.º ciclo

No 1.º ciclo, os alunos do 4.º ano de escolaridade constituíram quatro grupos (Grupos 1, 2, 3 e 4) e comentaram, por escrito, os trabalhos dos colegas associados à resolução da tarefa "Descobre a sequência", adaptada de Vaz (2012, p. 108), que foram apresentados na forma de cartaz e expostos na *galeria* de trabalhos (ver Figuras 1 e 2). Nesta tarefa, os alunos puderam, entre outros aspetos, desenvolver estratégias de resolução de problemas, justificar a escolha da estratégia de resolução, testar a validade dessa estratégia e estabelecer uma generalização para o número de pontos da figura numa posição qualquer.


"Descobre a Sequência"

1. Observa a sequência:

a) Desenha a próxima figura desta sequência.
b) Como é que cada figura se transforma na seguinte?
c) Quantos pontos terá a 6ª figura?
d) E a 28ª figura quantos pontos terá?
e) Quantos pontos tem uma figura numa posição qualquer?
f) Completa:

O número de pontos corresponde à ______________ da figura.

Figura 1. Tarefa trabalhada pelos alunos do 1.º ciclo (Vaz, 2012, p. 108).

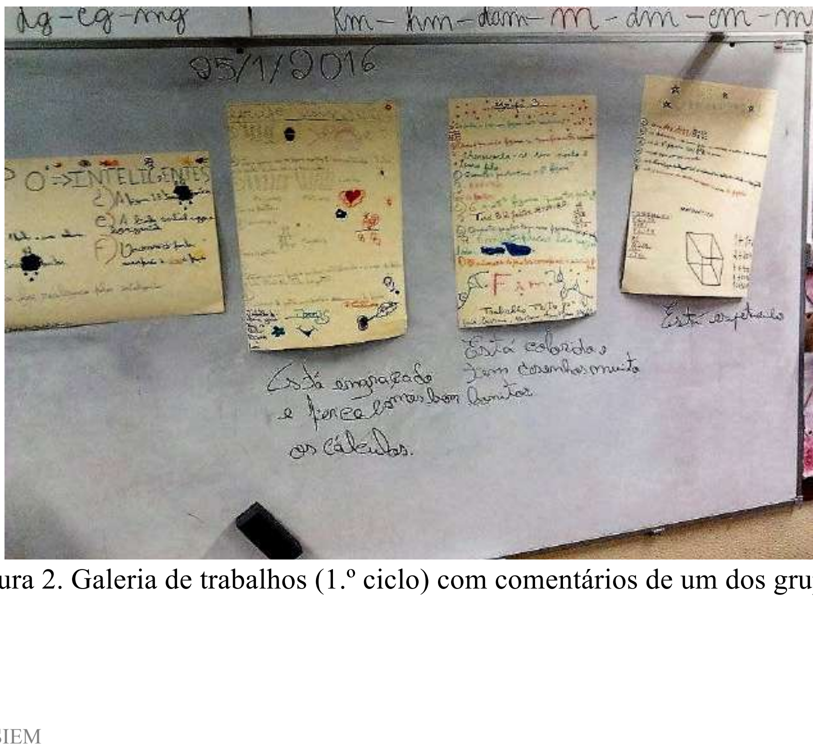


Figura 2. Galeria de trabalhos (1.º ciclo) com comentários de um dos grupos.

Aspetos dos cartazes focados nos comentários escritos. Os comentários registados pelos grupos revelaram-se bastante semelhantes e com formulações muito breves e diretas. Estes comentários debruçaram-se, sobretudo, sobre: (i) aspetos de natureza estética, referindo-se à decoração dos cartazes, aos desenhos e à cor (ver Figura 3); (ii) aspetos de organização das respostas; e (iii) aspetos relacionados com o cálculo, comentando sobre a presença ou ausência de cálculos auxiliares, a sua correção ou a respetiva compreensão (ver Figura 4).

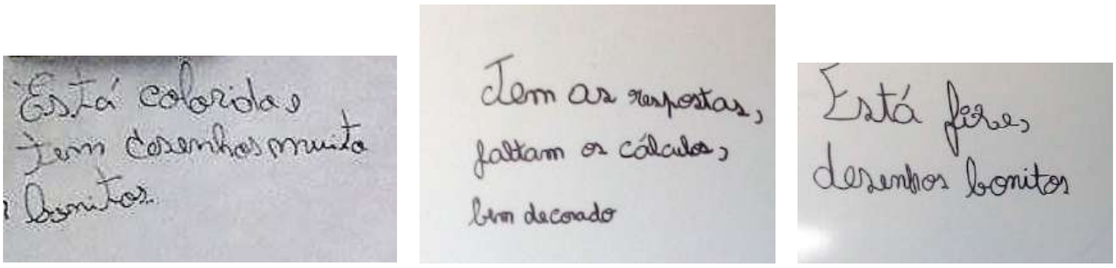


Figura 3. Comentários dos Grupos 1, 3 e 4 (1.º ciclo).

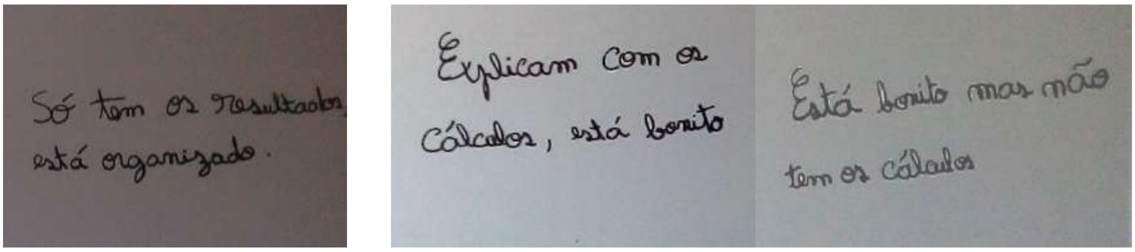


Figura 4: Comentários dos Grupos 2 e 3 (1.º ciclo).

Análise dos comentários escritos atendendo às quatro dimensões da comunicação. A Tabela 1 apresenta uma panorâmica global dos níveis de desempenho atribuídos aos quatro grupos resultantes dos três comentários que cada um deles formulou relativamente ao trabalho apresentado pelos outros grupos.

Tabela 1. Nível atribuído aos grupos do 1.º ciclo nas quatro categorias de análise.

Grupos	Clareza			Fundamentação			Lógica			Profundidade		
	b	m	e	b	m	e	b	m	e	b	m	e
1		x		x			x			x		
2		x		x				x		x		
3		x		x			x			x		
4		x		x				x		x		
(total)	0	4	0	4	0	0	2	2	0	4	0	0

Legenda: b - nível baixo; m - nível médio; e - nível elevado.

Como se pode constatar na tabela, e também nos comentários das figuras anteriores, todos os grupos atingiram um nível médio em "clareza", expressando bem as suas ideias e utilizando vocabulário bastante adequado. Em geral, em "lógica", os níveis oscilaram entre o nível baixo e o nível médio, revelando, apesar da brevidade dos comentários, algum raciocínio e coerência nos registos escritos, em especial na apreciação dos cálculos, como se pode ver no segundo comentário da Figura 4. Já em “fundamentação” e em “profundidade”, embora tivessem comentado sobre diversos aspetos, os grupos não apresentaram quaisquer justificações das suas apreciações nem fizeram qualquer referência envolvendo o assunto trabalhado (ver Figuras 3 e 4), resultando um nível geral baixo nas duas categorias.

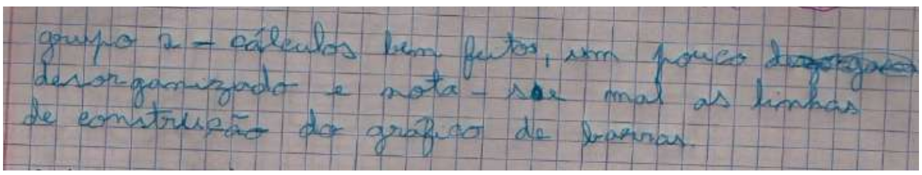
Turma do 5.º ano do 2.º ciclo

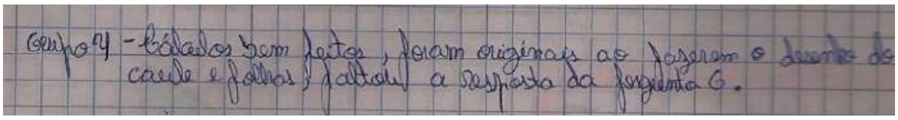
Os alunos do 2.º ciclo distribuíram-se por seis grupos de trabalho (Grupos 1, 2, 3, 4, 5 e 6) para comentarem, por escrito, as resoluções dos colegas registadas no diário de bordo de cada grupo, elaborado ao longo do desenvolvimento do projeto estatístico “Organizar e tratar dados é cá comigo!”. Uma das tarefas trabalhadas, “Analisando lançamentos de um dado”, permitiu o trabalho estatístico relacionado com a recolha, organização, interpretação e apresentação dos resultados, cujo guião se apresenta no quadro seguinte.

Guião de trabalho – “Analisando lançamentos de um dado”

Cada elemento do grupo lança o dado três vezes, registando os acontecimentos no diário de bordo (quantas vezes sai cada número de pintas do dado).
Construir uma tabela de frequências absolutas e de frequências relativas dos dados obtidos. Qual é moda? Justificar a resposta.
Inserir os dados da tabela numa tabela *Excel*. Construir o gráfico de barras, no diário de bordo, que obtiveram no *Excel*. Não esquecer de colocar o título no gráfico.
Discutir, com os colegas, cuidados a ter na construção de um gráfico de barras e registar os resultados e conclusões obtidos.

Aspetos dos diários de bordo focados nos comentários escritos. Os comentários dos grupos, abarcando diversas situações importantes para a abordagem dos tópicos (ver Figura 5), debruçaram-se, sobretudo, sobre: (i) a qualidade da organização e da apresentação e outros aspetos de natureza estética; (ii) o que os grupos não realizaram ou o que faltou nas resoluções registadas; (iii) a correção dos cálculos e dos processos de cálculo ou raciocínios seguidos; e (iv) a diversificação ou o rigor da construção dos gráficos apresentados. De forma mais residual, também foram escritos comentários sobre as justificações das respostas e referidos pontos positivos e pontos negativos dos trabalhos.





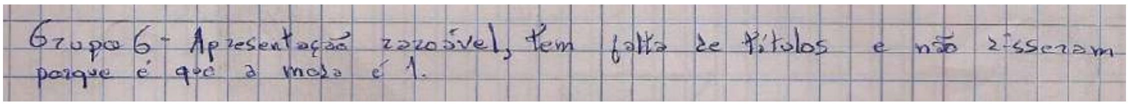


Figura 5: Comentários dos Grupos 2, 4 e 6 (2.º ciclo) aos Grupos 5, 1 e 3, respetivamente.

Análise dos comentários escritos atendendo às quatro dimensões da comunicação. Na Tabela 2 estão sistematizados os níveis de desempenho globais atribuídos aos seis grupos relativos aos cinco comentários formulados por cada um deles sobre o trabalho apresentado pelos restantes grupos.

Tabela 2. Nível atribuído aos grupos do 2.º ciclo nas quatro categorias de análise.

Grupos	Clareza			Fundamentação			Lógica			Profundidade		
	b	m	e	b	m	e	b	m	e	b	m	e
1		x			x			x			x	
2		x		x				x			x	
3		x		x				x		x		
4		x			x			x		x		
5		x		x				x		x		
6			x			x		x			x	
(total)	0	5	1	3	2	1	0	6	0	3	3	0

Legenda: b - nível baixo; m - nível médio; e - nível elevado.

As categorias "fundamentação" e "profundidade" recolheram os níveis mais baixos. Embora alguns grupos tivessem justificado, de forma bem adequada, as suas ideias (como, por exemplo, no segundo comentário da Figura 5) e revelassem, por vezes, um bom domínio dos tópicos estatísticos, houve outros em que as opiniões registadas não foram muito precisas nem justificadas (ver Figura 6), omitindo ou referindo-se pouco aos assuntos em estudo.

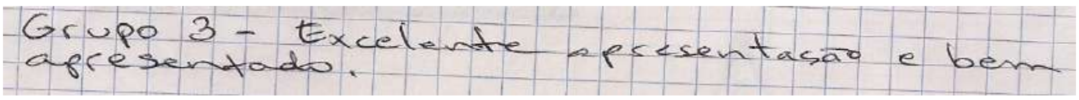


Figura 6. Exemplo de comentário de nível baixo em "fundamentação" e em "profundidade".

Já em "clareza" e "lógica", foi atribuído, globalmente, o nível médio dado que todos os grupos ligaram e expressaram bem, embora alguns com erros ortográficos, as respetivas ideias, manifestando coerência nos registos escritos que produziram, conforme se pode verificar nas Figuras 5 e 6.

Principais conclusões do estudo

Nos comentários escritos feitos pelos grupos dos dois ciclos de ensino é possível identificar uma boa quantidade de aspetos sobre os quais se debruçaram quando apreciaram os trabalhos dos colegas, embora no segundo ciclo sejam mais diversificados e mais aprofundados. Como aspetos comuns, refiram-se os relacionados com a natureza estética das produções apresentadas, a apresentação dos trabalhos de grupo, a organização das respostas e os processos de cálculo seguidos, em especial a respetiva correção. No segundo ciclo, a apreciação sobre os diversos gráficos apresentados foi um aspeto bastante citado e, de forma mais residual, foram ainda referenciados pontos positivos e pontos negativos dos trabalhos e a justificação das respostas.

Globalmente, a análise dos comentários escritos dos alunos aponta para melhores desempenhos em clareza e em lógica e para maiores dificuldades em fundamentação e em profundidade. Em "clareza", os grupos dos dois ciclos utilizam um vocabulário correto e expressam bem as suas ideias, de forma clara, precisa e com poucos erros ortográficos, acompanhando os resultados relatados por Castanheira (2014) e Costa e Pires (2016). No segundo ciclo, há mesmo um grupo que atinge o nível elevado nesta categoria. Igualmente, em "lógica", a generalidade dos grupos apresenta uma razoável coerência nos registos escritos, com conexão entre as ideias apresentadas, tendo os desempenhos rondado o nível médio no segundo ciclo e oscilado entre o nível baixo e o nível médio no primeiro ciclo.

Os resultados nas outras duas categorias não são tão favoráveis, dado que os alunos revelam mais dificuldade em explicitar e justificar os seus pontos de vista e nem sempre referem ou integram os temas matemáticos em estudo, tal como verificado no estudo de Costa e Pires (2016). Em "fundamentação", o nível dos desempenhos no primeiro ciclo é consistentemente baixo, destacando-se a ausência de justificações ou argumentos para as opiniões registadas. No segundo ciclo, metade dos grupos também revela um nível baixo, mas os restantes justificam ou fundamentam, de forma razoável, os comentários que fazem. Em "profundidade", os desempenhos são semelhantes, mantendo-se o nível baixo para o primeiro ciclo e para metade dos grupos do segundo ciclo, pois praticamente não são feitas referências aos temas matemáticos trabalhados. Em contrapartida, os restantes grupos revelam dominar razoavelmente diferentes aspetos dos temas estatísticos em questão, comentando tópicos matemáticos como a média, a moda ou os gráficos de barras.

Face a estes resultados, o estudo aponta para a importância da valorização dos momentos da aula de matemática que possibilitem aos alunos desenvolver a sua capacidade de comunicação escrita (Guerreiro, Tomás Ferreira, Menezes & Martinho, 2015; NCTM, 2014; Ponte & Serrazina, 2000). Escrever sobre as suas ideias ou sobre os diversos temas matemáticos potencia, nos alunos, a possibilidade de expressar e justificar as respetivas ideias e raciocínios, recorrendo a argumentos plausíveis e sabendo integrar, com profundidade, os tópicos matemáticos nessas justificações.

Referências bibliográficas

Alonso, L., & Silva, C. (2005). Questões críticas acerca da construção de um currículo formativo integrado. In L. Alonso & M. Roldão (Coords.), *Ser professor do 1.º ciclo: Construindo a profissão* (pp. 42-63). Coimbra: Edições Almeida.

Amaral, M., Moreira, M., & Ribeiro, D. (1996). O papel do supervisor no desenvolvimento do professor reflexivo: Estratégias de supervisão. In I. Alarcão (Org.), *Formação reflexiva de professores: Estratégias de supervisão* (pp. 89-122). Porto: Porto Editora.

Baptista, A., Viana. F., & Barbeiro, L. (2011). *O ensino da escrita: Dimensões gráfica e ortográfica*. Lisboa: DGIDC, Ministério da Educação.

Barbeiro, L. (1999). *Jogos da escrita*. Lisboa: Ministério da Educação & Instituto de Inovação Educacional.

Belo, J. (2005). Comunicação didática e competência de comunicação: A necessidade de emergência de novos modelos. In *Atas do Congresso da Associação Portuguesa de Ciências da Comunicação, 4.º SOPCOM* (pp. 305-316). Aveiro: Universidade de Aveiro.

Boavida, A., Paiva, A., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, I. (2008). *A experiência matemática no ensino básico*. Lisboa: DGIDC, Ministério da Educação.

Bogdan, R., & Biklen, S. (2012). *Qualitative research for education: An introduction to theories and methods* (6th Ed.). Boston: Pearson Education.

Bruner, J. (1999). *Para uma teoria da educação*. Lisboa: Relógio d'Água.

Caldas, A. (2000). *A herança de Franz Joseph Gall: O cérebro ao serviço do comportamento humano*. Lisboa: Editora McGraw-Hill.

Castanheira, G. (2014). *Um modelo de ensino para o desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática em alunos do 5.º ano do ensino básico*. Dissertação de mestrado, Instituto Politécnico de Viseu, Viseu, Portugal.

Costa, E. (2015). *Prática de ensino supervisionada em ensino do 1.º e do 2.º ciclo do ensino básico*. Relatório final de estágio, Instituto Politécnico de Bragança, Bragança, Portugal.

Costa, E., & Pires, M. V. (2016). Comunicar por escrito em matemática: Um estudo com alunos do 5.º ano. In M. H. Martinho, R. Tomás Ferreira, I. Vale & H. Guimarães (Eds.), *Atas do XXVII Seminário de investigação em educação matemática* (pp. 405-419). Porto: Associação de Professores de Matemática.

Guerreiro, A., & Menezes, L. (2010). Comunicação matemática: Na busca de um entendimento comum. In H. Gomes, L. Menezes & I. Cabrita (Eds.), *Atas do XXI Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 137-143). Aveiro: Associação de Professores de Matemática.

Guerreiro, A., Tomás Ferreira, R., Menezes, L., & Martinho, M. H. (2015). Comunicação na sala de aula: A perspetiva do ensino exploratório da matemática. *Zetetiké, 23*(4), 279-295.

Leite, C. (2016). *Prática de ensino supervisionada em ensino do 1.º e do 2.º ciclo do ensino básico*. Relatório final de estágio, Instituto Politécnico de Bragança, Bragança, Portugal.

Máximo-Esteves, L. (2008). *Visão panorâmica da investigação-ação*. Porto: Porto Editora.

Menezes, L., Tomás Ferreira, R., Martinho, M. H., & Guerreiro, A. (2014). Comunicação nas práticas letivas dos professores de matemática. In J. P. Ponte (Org.), *Práticas profissionais* *dos professores de matemática* (pp. 135-161). Lisboa: Instituto de Educação, Universidade de Lisboa.

Ministério da Educação [ME] (2009). *Programa de português do ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

Monteiro, C., Viana, F., Moreira, E., & Bastos, A. (2013). Avaliação da competência comunicativa oral no ensino básico: Um estudo exploratório. *Revista Portuguesa de Educação*, *26*(2), 111-138.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. Reston: NCTM.

Pires, M. V. (2005). *Os materiais curriculares na construção do conhecimento profissional do professor de matemática. Três estudos de caso.* Tese de doutoramento, Universidade de Santiago de Compostela, Santiago de Compostela, Espanha.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI (Org.), *Refletir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2000). *Didática da matemática do 1.º ciclo.* Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P., & Velez, I. (2011). Representações em tarefas algébricas no 1.º ciclo. *Educação e Matemática*, *113*, 11-16.

Sim-Sim, I. (1998). *Desenvolvimento da linguagem*. Lisboa: Universidade Aberta.

Vaz, C. (2012). *Prática de ensino supervisionada em ensino do 1.º e do 2.º ciclo do ensino básico*. Relatório final de estágio, Instituto Politécnico de Bragança, Bragança, Portugal.

Vieira, F. (2013). As máximas conversacionais e a correção de textos. In *Anais da XXIV Jornada Nacional do Grupo de Estudos Linguísticos do Nordeste*. Natal, Brasil: GELNE.

ESTUDO ETNOMATEMÁTICO SOBRE DANÇAS FOLCLÓRICAS: SIMETRIA DOS TRAJES

Sara Ribeiro[1], Pedro Palhares[2], María Jesús Salinas[3]
[1]CIEC, Instituto de Educação, Universidade do Minho, sarcristina@hotmail.com
[2]CIEC, Instituto de Educação, Universidade do Minho, palhares@ie.uminho.pt
[3]Facultad de Ciencias de la Educación, Universidade de Santiago de Compostela, mjesus.salinas@usc.es

Resumo. *Esta proposta de comunicação oral tem subjacente um projeto de doutoramento na área de Educação Matemática. Parte deste projeto tem como objetivo analisar e compreender a estrutura matemática inerente a vários elementos que constituem danças folclóricas características do Norte de Portugal e da Galiza, comunidade autónoma de Espanha, especificamente a coreografia, os acessórios, e a música. Prevê-se o desenvolvimento de um estudo etnomatemático sobre elementos do folclore, que concretiza um processo de matematização construído em práticas culturais. Relativamente aos acessórios, foram fotografados os trajes de grupos folclóricos, a fim de ser estudada a simetria dos mesmos.*

Abstract. *This proposal for oral presentation is included in a doctoral project in Mathematics Education. Part of this project aims to analyze and understand the mathematical structure inherent in various elements of folk dances characteristic of Northern Portugal and Galicia, an autonomous community of Spain, specifically choreography, accessories, and music. We expect to develop an ethnomathematical study on elements of folklore, within a process of mathematization built on cultural practices. Regarding the accessories, folk groups' garbs were photographed, in order to study the symmetry presented on them.*

Palavras-chave: *Danças folclóricas; Trajes; Etnomatemática; Simetria.*

Introdução

A atividade matemática é uma atividade humana, e, dessa forma, constitui uma atividade cultural (Gerdes, 2007a). Portanto, a matemática deve ser entendida como um conhecimento que todas as culturas produzem, não necessariamente de forma igual (Bishop, 1988). "Ideias e métodos matemáticos variam de cultura para cultura, e a nossa compreensão do que é a matemática cresce na medida em que essas ideias e métodos se fertilizam mutuamente." (Gerdes, 2007a, p. 154).

Bishop (1986, 1998) determinou a existência de seis atividades básicas universais (contar, localizar, medir, criar, jogar, e explicar), através das quais a matemática, enquanto produto cultural, se tem desenvolvido, não apenas na nossa cultura, mas em todas as culturas. Segundo Bishop (1986), a partir do momento em que estas seis atividades constituem atividades universais, então a matemática existe, em alguma forma, até determinado ponto, e com mais ou menos significância para os indivíduos, no seio de todas as culturas.

Ubiratan D'Ambrósio (2002) concebeu o termo etnomatemática para designar a matemática praticada por grupos culturais diversos, que se identificam por objetivos e tradições comuns. Segundo D'Ambrósio (2001), a utilização do prefixo *"etno"* permite reconhecer a dinâmica de diferentes formas de conhecimento. Por esse motivo, o autor afirma a existência de diferentes etnomatemáticas (no plural), cada uma das quais respondendo a um contexto natural, social, cultural distinto. Conforme explica D'Ambrósio (2008), "em todas as culturas e em todos os tempos, o conhecimento, que é gerado pela necessidade de uma resposta a problemas e situações distintas, está subordinado a um contexto natural, social e cultural." (p. 37). Posto isto, o Programa Etnomatemática procura compreender o conhecimento (saber e fazer) matemático das culturas periféricas, bem como "entender o ciclo de geração, organização intelectual, organização social e difusão desse conhecimento." (D'Ambrósio, 2008, p. 36).

Segundo Gerdes (2007a), a etnomatemática é "a área de investigação que estuda as multifacetadas relações e interconexões entre ideias matemáticas e outros elementos e constituintes culturais, como a língua, a arte, o artesanato, a construção, a educação." (p. 156). Para Barton (2008), o estudo que a etnomatemática faz das "práticas matemáticas de comunidades particulares consciencializa-nos para novas ideias, novos conceitos, novos processos que não devem ser encarados como triviais ou simples" (p. 8), podendo mesmo vir a contribuir para nova matemática, capaz de enriquecer o nosso campo matemático.

Neste sentido, concordamos com Bassanezi (2002) quando argumenta que cada grupo cultural tem suas maneiras próprias de matematizar a realidade, não havendo como ignorar isso no campo educacional. Como tal, a perspetiva que se pretende desenvolver para o papel da disciplina de matemática nas sociedades multiculturais da atualidade implica procurar "uma ideia de matemática que a mostre sensível a factores socias, e como um conhecimento construído em processos sociais." (Moreira, 2008, p. 54).

Nesta linha de pensamento, Gerdes (1988, 2007b, 2013) utiliza uma abordagem etnomatemática para matematizar uma antiga tradição da cultura *Cokwe*, do Nordeste de

Angola, designadamente os seus desenhos (compostos somente por pontos formando uma grelha e por linhas envolvendo os pontos), conhecidos no idioma local por sona (no singular, *lusona*). Estes "desenhos são geralmente executados na areia e servem para ilustrar historietas, lendas e adivinhações" (Gerdes, 2013, p. 6). O potencial matemático dos sona foi objeto de investigação vária pelo autor Paulus Gerdes. A este propósito, Gerdes (2007b) analisa uma categoria particular de sona, monolineares, cujos elementos são *mirror-generated curves*, e descreve algumas das suas propriedades básicas, nomeadamente de simetria e equilíbrio. Num processo de várias fases, estas curvas originaram matrizes, que conservavam as propriedades das curvas mencionadas anteriormente.

Num sentido diferente temos Barton (2008), assegurando que a localização de um objeto em duas dimensões, ou seja, numa superfície, é, de acordo com a abordagem matemática dominante, determinada através da utilização do sistema de coordenadas cartesiano ou do sistema de coordenadas polar: no primeiro sistema, a partir de uma só origem, são desenhados dois eixos de referência perpendiculares, sendo que a posição de um ponto é determinada por duas medidas (a primeira medida é a distância ao longo do eixo horizontal e a segunda medida é a distância ao longo do eixo vertical); no segundo sistema, também a partir de uma só origem, é desenhado apenas um eixo de referência, sendo que a posição de um ponto é determinada por duas medidas (a primeira medida é a distância do ponto à origem e a segunda medida é a amplitude do ângulo compreendido entre o eixo de referência e a linha que une o ponto à origem) (Barton, 2008). Contudo, nas linguagens *Tahitian* e *Maori*, a localização de um objeto é realizada tendo por referência, não uma, mas duas origens - o locutor e o interlocutor - e, consequentemente, a amplitude de dois ângulos - um em cada uma das origens consideradas (Barton, 2008).

Outro aspeto que consideramos importante invocar é o do estudo da simetria do ponto de vista cultural, que foi explorado amplamente e sistematizado por Washburn e Crowe (1988). Os autores estudam a simetria de artefactos pertencentes a várias culturas, afigurando-se esta como um elemento presente em artefactos oriundos de todo o mundo. Segundo Crowe (2004), "symmetry is a *distance-preserving* transformation of the plane onto itself." (p. 4). De acordo com o autor, dizer que uma determinada figura ou padrão tem, ou admite, uma certa simetria significa que, quando essa simetria é aplicada ao plano, as formas movem-se sobre si mesmas. Ora, os quatro movimentos de um plano sobre si mesmo são a rotação, a translação, a reflexão e a reflexão deslizante (Crowe, 2004).

Estudo etnomatemático sobre danças folclóricas: simetria dos trajes

Nas investigações anteriormente apresentadas, a etnomatemática surge como uma metodologia para "matematizar" práticas culturais, permitindo reconhecer e apresentar a matemática aí presente. Nesta mesma linha, o projeto de doutoramento que motiva esta proposta de comunicação objetiva, por um lado, analisar e compreender a estrutura matemática inerente a vários elementos que constituem danças folclóricas características do Norte de Portugal e da Galiza, comunidade autónoma de Espanha, e objetiva, por outro lado, construir tarefas matemáticas relacionadas com o estudo etnomatemático realizado. Convém ter presente que as fronteiras antropológicas e etnológicas, logo folclóricas, não correspondem necessariamente às fronteiras políticas e administrativas (Ribas, 1983). Com efeito, entre a Galiza e o Norte de Portugal, são visíveis semelhanças demográficas, étnicas, do relevo, do clima, da gastronomia, da etnografia, entre outras, reveladoras de um território bastante homogéneo (Sottomayor-Pizarro, 2014), cuja matriz histórica comum remonta ao contexto da antiga *Gallaecia* romana (Campos, 2009). Em suma, pretende-se a realização de investigação conducente à produção de conhecimento relevante no âmbito da Educação Matemática, através do desenvolvimento de um estudo etnomatemático sobre um elemento essencial do folclore e do seu aproveitamento para o ensino da matemática.

Metodologia

Atendendo aos objetivos do projeto, a metodologia de investigação a utilizar é de natureza qualitativa. O plano de trabalhos será sequencialmente desenvolvido ao longo de três anos. No primeiro ano, pretende-se efetuar uma recolha bibliográfica sobre o folclore coreográfico do Norte de Portugal e da Galiza e pretende-se estudar duas danças folclóricas típicas de duas cidades do Norte de Portugal, Braga e Vila Real, e de duas cidades da Galiza, Lugo e Ourense. Portanto, a estratégia de investigação a utilizar para o primeiro objetivo do projeto será o estudo com características etnográficas, porque se pretende, na essência, um estudo descritivo da cultura de uma comunidade ou de algum dos seus aspetos fundamentais (Baztán, 1995), que são, neste caso, as danças folclóricas. A recolha de dados será realizada em ambiente natural, através de diversos métodos, e complementada pela informação que se obtém através do contacto direto do investigador com este ambiente (Bogdan & Biklen, 1994). Relativamente à coreografia, será utilizado equipamento de vídeo, para filmar, sob diferentes perspetivas, os movimentos que os dançarinos realizam, no plano, ao longo das danças folclóricas, a fim de estudar as curvas e as transformações geométricas que descrevem estes movimentos. Os dançarinos serão preparados com sinais luminosos, colocados nos ombros e na cabeça, de modo a serem captados os seus movimentos com pormenor. Ainda relativamente à coreografia, será utilizada a entrevista, para recolher dados descritivos na linguagem dos próprios sujeitos (Bogdan & Biklen, 1994), e, no caso particular, na linguagem dos dançarinos mais experientes, acerca do sistema através do qual os dançarinos, de forma mais ou menos consciente e explícita, determinam a sua localização no decorrer das danças folclóricas e assim se organizam. As entrevistas a realizar serão não-estruturadas, por proporcionarem uma maior abertura na evolução das mesmas (Fontana & Frey, 1994). Relativamente aos acessórios, será utilizado equipamento de fotografia, para fotografar os trajes usados pelos dançarinos, a fim de estudar os padrões geométricos presentes nestes trajes. Relativamente à música, os filmes produzidos pelo equipamento de vídeo servirão, igualmente, para registar a estrutura das músicas em que as danças folclóricas se apoiam, a fim de estudar os padrões repetitivos que caracterizam a estrutura destas músicas. Adicionalmente, será utilizada a entrevista, a fim de aferir de que modo a execução musical se relaciona com a coreografia. No segundo e terceiro ano, pretende-se construir tarefas matemáticas relacionadas com o estudo etnomatemático realizado. As tarefas serão examinadas por um crivo constituído por três fases: numa primeira fase, composto por professores universitários para validação científica; numa segunda fase, composto por elementos de grupos folclóricos para validação cultural; e, numa terceira fase, composto por professores do Ensino Básico e do Ensino Secundário (*Educación Primaria* e *Educación Secundaria*, em Espanha) para validação pedagógica. Conforme o conhecimento matemático resultante, e tendo em consideração os programas de matemática dos dois países envolvidos, as tarefas serão aplicadas em sala de aula, nos níveis de escolaridade adequados. A partir daí, pretende-se desenvolver um conjunto de orientações pedagógicas para cada uma das tarefas construídas, tendo em vista a sua futura aplicação generalizada. Para o efeito, será utilizada a observação participante, com registo, em diário de bordo, "daquilo que o investigador ouve, vê, experiencia e pensa” (Bogdan & Biklen, 1994, p. 150) no decurso da observação das dificuldades experimentadas pelos alunos na resolução das tarefas. Portanto, a estratégia de investigação a utilizar para o segundo objetivo do projeto será o *design-based research*, porque se pretende, justamente, explorar possibilidades para a criação, utilização e pesquisa de novos ambientes de ensino-aprendizagem, em contextos reais, através de ciclos contínuos de desenho, análise e redesenho. De salientar que o *design-based research* vai além de simplesmente desenhar e testar intervenções particulares, no sentido em que as intervenções incorporam afirmações teóricas específicas sobre o ensino e a aprendizagem, e refletem um compromisso para compreender as relações entre a teoria, os artefactos desenhados, e a prática (Design-Based Research Collective, 2003). Um produto esperado com este projeto consiste num livro que faça uma resenha das tarefas construídas juntamente com as respetivas orientações pedagógicas, a publicar em português e em galego.

Simetria dos trajes.

Tendo-se iniciado o plano de trabalho pelos acessórios, foram fotografados os trajes usados pelos dançarinos do Grupo Folclórico de Vila Verde, distrito de Braga, e estudada a simetria dos trajes.

Os trajes que os dançarinos usam refletem a realidade sócio-económica da região. O *Traje de Encosta, Festa ou Domingueiro* (figura 1) era usado na Boda, ou em dias de Festa, ou nas Romarias, sendo posteriormente deixado para a Mortalha. O *Traje de Noivos* (figura 2) é a continuação do traje anterior, agora na versão cerimonial. O *Traje de Ribeira, Feira ou Lavradeira* (figura 3) era usado nas feiras. O *Traje de Trabalho Rural ou de Uso Comum* (figura 4) era usado no dia-a-dia para o trabalho agrícola.

Figura 1. *Traje de Encosta, Festa ou Domingueiro.*

Figura 2. *Traje de Noivos.*

Figura 3. *Traje de Ribeira, Feira ou Lavradeira.*

Figura 4. *Traje de Trabalho Rural ou de Uso Comum.*

Numa primeira análise, pode-se constatar que a globalidade dos trajes dos dançarinos do Grupo Folclórico de Vila Verde apresenta simetria de reflexão de eixo vertical (Crowe, 2004). Contudo, existem exceções que de forma deliberada rompem com a simetria. Para corroborar o disposto, apresentam-se, doravante, alguns exemplos. A camisa de linho pertencente ao *Traje masculino de Encosta, Festa ou Domingueiro* (figura 5) apresenta um motivo vermelho bordado na parte central que anula a isometria apontada para esta componente do traje. Também o lenço dos namorados (símbolo cultural por excelência da região) colocado no lado esquerdo do *Traje feminino de*

Encosta, Festa ou Domingueiro (figura 6) impossibilita que a reflexão de eixo vertical deixe a figura do traje invariante.

Figura 5. *Camisa do Traje masculino de Encosta, Festa ou Domingueiro.*

Figura 6. *Lenço dos namorados do Traje feminino de Encosta, Festa ou Domingueiro.*

Um facto que corrobora a reflexão de eixo vertical existente na globalidade dos trajes é a própria disposição das peças de ouro em filigrana abundantes no *Traje feminino de Noivos* (figura 7). Veja-se o modo como as peças são cuidadosamente dispostas em cima do casaco preto do traje e buscam simetria, ainda que por serem todas as filigranas diferentes, tal acabe por não acontecer.

Figura 7. *Disposição das peças de ouro em filigrana no Traje feminino de Noivos.*

Finalmente, uma breve incursão aos frisos abundantemente presentes nos trajes dos dançarinos do Grupo Folclórico de Vila Verde. Partindo da categorização de Crowe (2004), que estabelece a existência de sete tipos diferentes de frisos, verifica-se a presença de alguns destes frisos nos trajes. A título exemplificativo, veja-se o friso presente na parte inferior da saia do *Traje feminino de Ribeira, Feira ou Lavradeira* (figura 8). Este é um friso gerado por translações (*p*111). O mesmo tipo de friso é também visível na saia do *Traje feminino de Noivos* (figura 9), afigurando-se, para já, como o friso mais frequente nos trajes.

Figura 8. *Friso presente* no *Traje feminino de Ribeira, Feira ou Lavradeira.*

Figura 9. *Friso presente* no *Traje feminino de Noivos.*

Considerações Finais

No âmbito do projeto de doutoramento, a recolha bibliográfica sobre o folclore coreográfico, bem como o início do estudo das danças folclóricas, nomeadamente dos acessórios, permitiu estudar a simetria presente nos trajes de um grupo folclórico, designadamente o Grupo Folclórico de Vila Verde, distrito de Braga. Brevemente, este estudo será estendido a outros grupos. Não obstante, a investigação iniciada permitiu já avançar no sentido do estudo das "inter-relações entre ideias matemáticas e outros elementos e constituintes culturais" (Gerdes, 2007a, p. 156). Com efeito, a simetria constitui, até ao momento, a ideia matemática saliente, que é usada tanto no sentido de formação, como no de quebra intencional e episódica. Certo é também que a simetria de eixo vertical é a mais frequente nos trajes do grupo folclórico estudado. É de ressalvar que a exploração de trajes de outros grupos folclóricos pode vir a fornecer dados que não encaixem neste figurino. Igualmente como hipótese de trabalho, pode ser que a simetria seja usada de forma diferente em Portugal e na Galiza. A questão dos frisos, que surgem em partes específicas de alguns trajes, constitui, também, uma ideia matemática proeminente e que amplia a existência de padrões geométricos nos mesmos.

Referências bibliográficas

Barton, B. (2008). *The Language of Mathematics: telling mathematical tales*. Nova Iorque: Springer.

Bassanezi, R. C. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática.* São Paulo: Contexto.

Baztán, A. A. (1995). Etnografía. In A. A. Baztán (Ed.), *Etnografía: metodología cualitativa en la investigación sociocultural* (pp. 3-20). Barcelona: Marcombo.

Bishop, A. J. (1986). Mathematics education as cultural induction. *Nieuwe Wiskrant*, 27-32.

Bishop, A. J. (1988). Mathematics education in its cultural context. *Educational Studies in Mathematics*, *19*(2), 179-191.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Campos, A. (2009). *O relacionamento Portugal-Galiza: das afinidades históricas e linguísticas à cooperação económica* (Dissertação de Mestrado). Porto: Faculdade de Letras da Universidade do Porto.

Crowe, D. W. (2004). *Introduction to the Plane Symmetries.* In D. K. Washburn & D. W. Crowe (Eds.), *Symmetry comes of age: the role of pattern in culture* (pp. 3-18). Seattle: University of Washington Press.

D'Ambrósio, U. (2001). General Remarks on Ethnomathematics. *ZDM, 33*(3), 67-69.

D'Ambrósio, U. (2002). *Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade* (2a ed.). Belo Horizonte: Autêntica.

D'Ambrósio, U. (2008). Globalização, educação multicultural e o programa etnomatemática. In P. Palhares (Coord.), *Etnomatemática: um olhar sobre a diversidade cultural e a aprendizagem matemática* (pp. 23-46). Vila Nova de Famalicão: Edições Húmus.

Design-Based Research Collective (2003). Design-based research: an emerging paradigm for educational inquiry. *Educational Researcher,* 32(1), 5-8.

Fontana, A., & Frey, J. (1994). Interviewing: the art of science. In N. K. Denzin, & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 361-376). Thousand Oaks: Sage publications.

Gerdes, P. (1988). On possible uses of traditional Angolan sand drawings in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 19*(2), 3-22.

Gerdes, P. (2007a). *Etnomatemática: reflexões sobre matemática e diversidade cultural*. Vila Nova de Famalicão: Edições Húmus.

Gerdes, P. (2007b). *Lunda Geometry: mirror curves, designs, knots, polyominoes, patterns, symmetries* (2nd ed.). Maputo: Universidade Pedagógica.

Gerdes, P. (2013). *Viver a Matemática: desenhos de Angola.* Vila Nova de Famalicão: Edições Húmus.

Moreira, D. (2008). Educação matemática para a sociedade multicultural. In P. Palhares (Coord.), *Etnomatemática: um olhar sobre a diversidade cultural e a aprendizagem matemática* (pp. 47-65). Vila Nova de Famalicão: Edições Húmus.

Ribas, T. (1983). *Danças Populares Portuguesas.* Lisboa: Instituto de Cultura e Língua Portuguesa.

Sottomayor-Pizarro, J. A. (2014). Os Contextos da construção da Região. In L. A. Fonseca (Coord.), *Entre Portugal e a Galiza (sécs. XI a XVII): um olhar peninsular sobre uma região histórica* (pp. 23-24). Porto: Fronteira do Caos Editores.

Washburn, D. K., & Crowe, D. W. (1988). *Symmetries of culture: theory and practice of plane pattern analysis.* Seattle: University of Washington Press.

A FLEXIBILIDADE DE CÁLCULO MULTIPLICATIVO: UM ESTUDO NO 3.º ANO

Sónia Santos[1], *Margarida Rodrigues*[2]
[1]Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa, sonyadeus@gmail.com
[2]Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa, UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, margaridar@eselx.ipl.pt

Resumo. *Esta comunicação apresenta um estudo realizado numa turma de 3º ano de escolaridade, cujo objetivo é compreender o modo como os alunos desenvolvem a flexibilidade de cálculo multiplicativo num contexto de ensino exploratório, tendo sido delineadas três questões de investigação: i) Quais as estratégias usadas pelos alunos quando resolvem tarefas de multiplicação?; ii) Como evoluem as estratégias usadas pelos alunos? e iii) Como é que os alunos usam de forma flexível o cálculo multiplicativo?*

O estudo insere-se no paradigma interpretativo de natureza qualitativa, tendo sido realizada uma experiência de ensino cujo foco foram dois pares de alunos. A recolha de dados recorreu às seguintes técnicas: observação direta e participante e recolha documental.

Os resultados deste estudo revelam que: i) em situações de proporcionalidade, os alunos evidenciaram o uso de uma estratégia aditiva em combinação com o uso de estratégias multiplicativas escalares e funcionais; e ii) relativamente à flexibilidade de cálculo multiplicativo, os alunos: a) estabeleceram relações numéricas; b) usaram estratégias que incluem o uso de propriedades da multiplicação; e c) utilizaram factos básicos por si dominados na origem de diferentes estratégias.

Abstract. *This communication presents a study carried out in a third-grade class. This study aims to understand how the students develop the flexibility of multiplicative calculation in a context of exploratory teaching. Based on the purpose of the study, three research questions were outlined: i) What are the strategies used by students when solve tasks of multiplication?; ii) How the strategies used by the students evolve? and iii) How do the students use flexibly the multiplicative calculation?*

The study adopts a qualitative methodology within an interpretive paradigm having been held a teaching experience which had focused on two pairs of students. The data collection took place through the following techniques: direct and participant observation and documentary collection.

The results of this study show that: i) in regard of situations of proportionality, students showed the use of an additive strategy in combination with the use of multiplicative scalar and functional strategies; iii) in what concerns the flexibility of multiplicative calculation, students: a) established numerical relationships; b) used strategies that include the use of properties of multiplication; and c) used basic facts at the origin of different strategies.

Palavras-chave: *multiplicação; estratégias de cálculo; ensino exploratório; flexibilidade de cálculo.*

Introdução

A aprendizagem dos números e das operações constitui um processo complexo para as crianças. Assim, é fundamental que elas conheçam e utilizem relações numéricas nos cálculos que efetuam (NCTM, 2007).

Para Heirdsfield, Cooper, Mulligan e Irons (citados por Brocardo, 2014), a flexibilidade no cálculo mental é vista como o uso de estratégias eficientes que são escolhidas de acordo com as combinações numéricas que inspiram a escolha da estratégia. Threlfall (2009) refere que a estratégia não é escolhida, defendendo que os alunos chegam à solução através de um processo que não é totalmente consciente, envolvendo uma ligação entre o que os alunos reparam nos números apresentados numa dada tarefa e o que eles sabem acerca dos números e das operações.

A flexibilidade de cálculo é o aspeto central da investigação conduzida pela primeira autora (Santos, 2016). O estudo teve como objetivo compreender o modo como os alunos desenvolvem a flexibilidade de cálculo multiplicativo num contexto de ensino exploratório.

Esta comunicação apresenta alguns resultados relativos às estratégias de cálculo multiplicativo usadas e sua evolução ao longo de uma tarefa, assim como a flexibilidade de cálculo evidenciada pelos alunos. Foca-se nas primeira e segunda partes de uma tarefa, *Pãezinhos*, que integra a sequência de tarefas aplicada no estudo.

A multiplicação e as estratégias de cálculo multiplicativo

A aprendizagem da multiplicação deve ser feita numa perspetiva de desenvolvimento de sentido de número (Mendes, Brocardo, & Oliveira, 2013). A multiplicação deve ser ensinada e trabalhada gradualmente para que os alunos apreendam e coloquem em prática estratégias cada vez mais sofisticadas e eficientes na resolução de problemas. Fosnot e Dolk (2001) alegam que as propriedades são "grandes ideias" associadas à multiplicação, sendo importante usar estratégias que as mobilizem. Partilhando desta perspetiva, Mendes et al. (2013) consideram que existem ideias essenciais associadas à multiplicação: o compreender um grupo como uma unidade (*unitizing*); a propriedade distributiva da multiplicação, em relação à adição e à subtração; a propriedade comutativa da multiplicação; os padrões de valor de posição associados à multiplicação por dez e a propriedade associativa da multiplicação. Também a interligação entre a multiplicação e a divisão é um aspeto fundamental que não pode ser ignorado. McIntosh, Reys e Reys

(1992) reiteram que ter consciência da relação entre as operações, especificamente, entre a multiplicação e a divisão, é um dos aspetos contemplados no conhecimento e destreza com as operações, componente do sentido de número.

Os contextos presentes nas tarefas de multiplicação também têm um papel importante na aprendizagem da multiplicação. Foxman e Beishuizen (2002) mencionam a diferença existente na taxa de sucesso dos alunos quando resolvem problemas, distinguindo os problemas com números em contexto daqueles que não estão em contexto. Desta forma, concluem que no segundo caso, a taxa de sucesso é mais reduzida. Além dos contextos, as autoras referem, ainda, as características dos números e a estrutura semântica do problema como fatores que podem influenciar o desempenho dos alunos.

> Usar estratégias de cálculo mental com flexibilidade requer sentido de número e ao usar uma abordagem de estratégias de cálculo, em vez de se focarem em algoritmos processuais, os alunos têm oportunidades para trabalhar com os números de forma flexível, o que por sua vez, oferece oportunidades para melhorar o seu sentido de número. (Hartnett, 2007, p. 345)

As estratégias de cálculo multiplicativo pressupõem, assim, a mobilização das propriedades da multiplicação e o estabelecimento de relações numéricas. Estudos empíricos incidentes neste domínio têm documentado uma extensa categorização de estratégias de cálculo multiplicativo. De acordo com diversos autores (por exemplo, Baek, 2006; Foxman & Beishuizen, 2002; Hartnett, 2007; e Mulligan & Mitchelmore, 1997), os alunos, ao longo da aprendizagem da multiplicação, evidenciam a aplicação de diferentes estratégias de cálculo, como por exemplo: a) adição repetição; b) cálculo da divisão; c) partição de números em produtos/em somas; d) compensação com uso de relações multiplicativas entre os fatores; e) uso complexo de dobros e f) troca da ordem dos fatores. A primeira refere-se à adição constante do mesmo número. A segunda prende-se com o uso da divisão como operação inversa da multiplicação. A terceira consiste na decomposição do multiplicador ou do multiplicando, ou de ambos, estando subjacente o uso da propriedade associativa (no caso da decomposição em produtos) ou da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (no caso da decomposição em somas). A quarta tem por base o estabelecimento de relações multiplicativas (dobro e metade; quádruplo/quarta parte; …) entre os fatores de um mesmo produto, de modo a que a alteração efetuada num fator seja compensada, de forma inversa, no outro fator, garantindo, assim, a invariância do produto. A aplicação deste tipo de relações permite usar factos básicos conhecidos dos alunos, facilitando o cálculo. A quinta remete para a composição do multiplicador a partir de dobros sucessivos do multiplicando usando, implicitamente, as propriedades associativa e distributiva da multiplicação em relação à adição. A última resume-se à troca da ordem dos fatores para obter um produto parcial que facilite o restante cálculo, estando subjacente o uso da propriedade comutativa.

Segundo Vergnaud (2014), o isomorfismo de medidas corresponde a situações de proporcionalidade presentes nas relações multiplicativas. Ao lidarem com este tipo de situações, os alunos podem usar estratégias de natureza aditiva (Fernández, Llinares, Dooren, Bock & Verschaffel, 2010) baseadas na adição ou subtração repetida no interior de cada uma das variáveis, ou de natureza multiplicativa (Cramer & Post, 1993). Neste último caso, é possível distinguir as estratégias escalares, em que os alunos estabelecem relações entre os valores das mesmas grandezas, e as funcionais, em que as relações são estabelecidas entre as duas grandezas distintas (Vergnaud, 2014).

A flexibilidade de cálculo

Segundo Threlfall (2009), o cálculo mental flexível refere-se ao modo como a utilização de uma estratégia na resolução de um problema específico pode ser afetada pelas características específicas da tarefa, ou pelas características individuais dos alunos ou ainda pelas variáveis contextuais.

Para resolver um problema, usando o cálculo mental, os alunos podem: (i) lembrar-se de, ou 'saber', um facto numérico, (ii) usar um procedimento de contagem simples, em que a sequência numérica é recitada enquanto mantêm o controlo da contagem, (iii) fazer uma representação mental de um método em que usam 'papel e lápis' e (iv) construir uma sequência de transformações dos números envolvidos no problema para chegarem a uma solução (Threlfall, citado por Brocardo, 2014). Também em Threlfall (2009), são apresentadas as "estratégias de abordagem" do cálculo mental. Uma estratégia de abordagem em cálculo mental é uma forma geral de cognição matemática utilizada no problema — por exemplo contar, ou recordar ou aplicar um método aprendido, ou a visualização de um processo, ou a exploração de relações conhecidas entre os números.

Threlfall (2009) apresenta um modelo alternativo ao modelo de escolha de estratégia, proposto por outros autores (por exemplo, Torbeyns et al., citados em Threlfall, 2009): o "zeroing-in", processo que envolve reparar nos números e cálculos exploratórios parciais, ocorrendo em simultâneo até emergir a estratégia e a solução do problema. Threlfall (2009) dá o exemplo do cálculo 64-37 para ilustrar estes dois aspetos. Dependendo da sua compreensão conceptual e do seu conhecimento dos números, os alunos podem reparar nos números envolvidos no cálculo, estabelecendo relações com outros: 64 é menos um que 65; 37 é menos três que 40; 60 é o dobro de 30; 7 é metade de 14; 64 é o dobro de 32; 37 é mais dois que 35, o dobro de 37 é 74; 7 é quatro e três. Este processo de reparar nos números pode conduzir a cálculos exploratórios parciais que o autor ilustra com o mesmo exemplo: 65-35; 64-40; 64-14; 37-32; 74-64; 64-34. Estes cálculos parciais não são suficientes para indicar a estratégia a usar mas sugerem o que fazer a seguir. Por exemplo, em 65-35, os alunos poderão compensar o resultado 30 subtraindo 3. Neste caso, terão construído a estratégia de compensação e simultaneamente alcançado a solução do cálculo. Assim, os alunos teriam estabelecido diferentes relações numéricas na solução alcançada, como sejam 64 é menos um que 65 e 37 é mais dois que 35, e usado a compensação como estratégia de cálculo, relacionando a adição e a subtração, na medida em que uma alteração aditiva no aditivo (64+1=65) tem de ser compensada ao contrário, subtraindo, o que implica retirar 1 ao resultado 30; e uma alteração subtrativa no subtrativo (37-2=35) tem de ser compensada também de forma subtrativa, o que implica retirar 2 ao resultado 30; e assim, retirar o total de 3 a 30. Nesta perspetiva, as estratégias para a aritmética mental são construídas e não selecionadas e aplicadas. Os números do problema não são considerados para decidir qual a estratégia, mas para decidir o que fazer em seguida, por exemplo, a partição, aproximar, combinar ou alterar.

Metodologia de investigação

Considerando o objetivo de compreender o modo como os alunos desenvolvem a flexibilidade de cálculo multiplicativo num contexto de ensino exploratório, o estudo insere-se no paradigma interpretativo de natureza qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994). Trata-se de uma abordagem focada na compreensão dos fenómenos e nos significados dos processos vivenciados pelos participantes do estudo. O estudo seguiu a modalidade de experiência de ensino visando o desenvolvimento nos alunos da flexibilidade de cálculo multiplicativo através da exploração de uma sequência de tarefas desenhadas para esse fim.

Contexto

A experiência de ensino realizou-se numa escola de 1º ciclo da cidade de Lisboa, mais precisamente numa turma de 3º ano composta por 24 alunos: 15 rapazes e 9 raparigas. A professora da turma praticava um ensino exploratório, visando a aprendizagem a partir do trabalho que os alunos realizam, o que promove a construção de conhecimento e o surgimento de procedimentos matemáticos com significado, desenvolvendo diferentes competências matemáticas.

O foco do estudo incidiu em quatro alunos que trabalharam sempre a pares, sendo que o presente artigo apenas apresenta resultados relativos ao par Tiago e Anabela.

Para Canavarro (2011), uma aula de tipo exploratório inclui quatro fases distintas: a apresentação da tarefa, a exploração, a discussão e a sistematização. Na primeira fase, procede-se à leitura e interpretação do enunciado da tarefa. Na segunda, os alunos trabalham autonomamente em grupos ou a pares. Na fase da discussão, os alunos apresentam as estratégias aplicadas com a finalidade de comparar e confrontar as mesmas. Na última fase, o professor institucionaliza novas aprendizagens matemáticas que decorreram do trabalho desenvolvido.

Foi implementada uma sequência de sete tarefas entre 25 de novembro de 2015 e 17 de fevereiro de 2016. Relativamente à sua natureza, o grau de desafio é elevado e o grau de estrutura é aberto, permitindo várias possibilidades de resolução (Ponte, 2005).

A tarefa *Pãezinhos* é composta por 4 partes e corresponde à última tarefa da sequência implementada. A subtarefa *Pãezinhos I* foi explorada no dia 1 de fevereiro de 2016 e as restantes subtarefas *Pãezinhos II, III* e *IV* foram exploradas no dia 17 de fevereiro de 2016. No presente artigo, serão apresentados os resultados relativos às subtarefas *Pãezinhos I* e *II.*

Recolha e análise dos dados

Foi usada a técnica de observação participante com gravação vídeo e áudio do trabalho desenvolvido pelos alunos bem como da discussão coletiva. Segundo Yin (2010, p. 92), a observação participante é “um modo especial de observação na qual o investigador não é meramente um observador passivo”, na medida em que participa nas atividades observadas, possibilitando observar e verificar pormenores detetáveis pela sua interação com os participantes do estudo.

Por motivos éticos, os nomes dos alunos são fictícios, de modo a garantir o seu anonimato.

Para proceder à análise de dados, foram usadas categorias analíticas provenientes do quadro teórico de Threlfall (2009) que se apresentam em seguida.

Tabela 1. Categorias analíticas no âmbito da flexibilidade de cálculo

Categoria	Descrição
Processo de reparar	Reparar nos números e nas relações que se pode estabelecer entre eles.
Cálculos exploratórios parciais	Os cálculos exploratórios parciais decorrem do conhecimento pessoal dos alunos acerca dos números e das propriedades das operações quando este é usado para derivar.
Relações numéricas	O modo de relacionar os números para resolver o problema e alcançar a solução das situações de cálculo.
Estratégias de cálculo	O modo de relacionar as operações e usar as suas propriedades para resolver o problema e alcançar a solução das situações de cálculo.

No que respeita às estratégias de cálculo, foram consideradas subcategorias analíticas relacionadas com as estratégias usadas em cálculos multiplicativos (Baek, 2006; Fosnot & Dolk, 2001; Foxman & Beishuizen, 2002; Hartnett, 2007; e Mulligan & Mitchelmore, 1997) e em situações de proporcionalidade (Cramer & Post, 1993; Fernández et al., 2010; Vergnaud, 2014).

Tabela 2. Subcategorias analíticas das estratégias de cálculo

Subcategorias	
Estratégias aditivas para resolver cálculos multiplicativos	Contagem envolvendo saltos dos múltiplos
	Adição repetida
	Contagem unitária
	Unitizing
	Uso de dobros
Estratégias multiplicativas para resolver cálculos multiplicativos	Cálculo da divisão
	Partição de números em produtos
	Partição de números em somas
	Compensação com uso de relações multiplicativas entre os fatores
	Compensação no produto após arredondamento de um fator
	Uso complexo de dobros
	Troca da ordem dos fatores
Estratégias aditivas para lidar com situações de proporcionalidade	
Estratégias multiplicativas para lidar com situações de proporcionalidade	Escalar
	Funcional

A exploração e discussão das tarefas

Subtarefa Pãezinhos I”

Após a construção de uma tabela com duas colunas: a primeira referente aos tabuleiros e a segunda aos pãezinhos, o Tiago sugeriu a primeira hipótese, tendo chegado a esta através da estratégia da divisão como operação inversa da multiplicação, revelando assim um raciocínio funcional: "800 a dividir por 10? Dá 8. Tem de ser 8x100, 800 a dividir por 100".

Na sua abordagem inicial, os alunos pensaram em múltiplas decomposições do 800 em produtos de dois fatores, sem pensar se as mesmas fariam ou não sentido no contexto do problema. Ou seja, pensaram de um modo abstrato.

Após o comentário da professora chamando a atenção para o contexto, os alunos apagaram as possibilidades que já tinham na tabela e decidiram trocar a ordem dos fatores das mesmas, colocando tabuleiros que levassem uma grande quantidade de pãezinhos ("tem de ser os números mais pequeninos em tabuleiros"), atendendo a que numa padaria existiria a preocupação de maximizar a ocupação do forno.

> Tiago: Olha, arranjei outra conta…50x16. 50x4 dá 200; 50x8 dá 400, o que quer dizer 50x16.

A Anabela ficou na dúvida se esta possibilidade estaria correta. O Tiago explicou: "16x50. Se 8x50 dá 400, o dobro de 8 que é 50x16 dá 800, porque 8 é metade de 16 e dá 400. Quer dizer que pode".

O aluno aplicou a estratégia do uso complexo de dobros, chegando à decomposição do 800 em 50x16 ou 16x50, através da duplicação sucessiva de um fator e do produto. Partindo de um facto básico por si dominado, 50x4=200, Tiago estabelece mentalmente uma cadeia com relações numéricas, aplicando sucessivamente o dobro no segundo fator e consequentemente no produto (mantendo o 50 constante), até chegar ao produto pretendido de 800, obtido com 50x16. Assim, o aluno acaba por compor o 16 como uma potência de base dois (16=4x2x2; isto é, $16=2^4$). Tiago revela flexibilidade de cálculo pelo modo como vai estabelecendo a relação numérica de dobro para obter uma nova decomposição do 800, aplicando intuitivamente a propriedade associativa da multiplicação. Durante a explicação, o Tiago usou a troca da ordem dos fatores.

Seguidamente, o aluno descobre uma nova possibilidade de distribuição dos pãezinhos: "Já arranjei outra. 20 tabuleiros vezes 40 pãezinhos. 20x4 dá 80, mais um zero, acrescenta-se um zero".

Verifica-se a implementação da estratégia da compensação com uso de relações multiplicativas, recorrendo a um facto básico, visto que o aluno usou um facto conhecido de multiplicação, o 20x4, para encontrar outra possibilidade de distribuição dos pãezinhos. A regra de acrescentar o zero resulta da necessidade de compensar no produto o facto de se ter multiplicado por 10 o fator 4.

Os alunos decidiram, depois, aplicar a estratégia da troca da ordem dos fatores em todas as possibilidades que tinham descoberto. O objetivo do par foi obter uma tabela maior que contemplasse a exaustão das soluções matemáticas da decomposição do 800 em produtos de 2 fatores. Nesta fase, o par desligou-se do contexto da tarefa e centrou-se no sentido numérico e a Anabela deixou de escrever "cada um com" na coluna dos pãezinhos (cf. Figura 1). Assim, registam 800 tabuleiros com 1 pão cada apesar da chamada de atenção da professora de que tal não fazia sentido.

tabuleiros	pãezinhos
1	Com 800 pãezinhos
4	Cada um com 200
2	Cada um com 400
8	Cada um com 100 pãezinhos
10	Cada um com 80
16	Cada um com 50
20	Cada um com 40
800	1
200	4
400	2
100	8
80	10
50	16
40	20

Figura 1. Tabela da Anabela

Seguiu-se uma intervenção da investigadora.

> Investigadora: Diz-me uma coisa. Tu aqui tens 10 tabuleiros que levam 80. Qual é a metade do número de tabuleiros?
> Tiago: 5x160.

O par escreveu na tabela; porém, a Anabela ficou com dúvidas se estaria correto. De forma a mostrar à colega a correção desta possibilidade, o Tiago fez o cálculo na folha, aplicando a estratégia de partição de números (100x5=500; 60x5=300; 500+300=800). No entanto, inicialmente não foi essa a estratégia usada. Quando a investigadora apela à aplicação da relação de metade do fator 10, Tiago imediatamente aplica a relação de dobro no outro fator, 80, chegando a 5x160.

Tiago observou a tabela e através da estratégia do uso de dobros e metades entre os fatores, chegou ao número 32 como dobro de 16 e ao número 25 como metade de 50. Assim, o aluno usou a estratégia multiplicativa escalar em cada uma das variáveis, usando intuitivamente um raciocínio proporcional inverso. No entanto, Anabela não registou esta possibilidade na sua tabela.

No momento da discussão coletiva, a professora solicitou ao Tiago que fosse ao quadro.

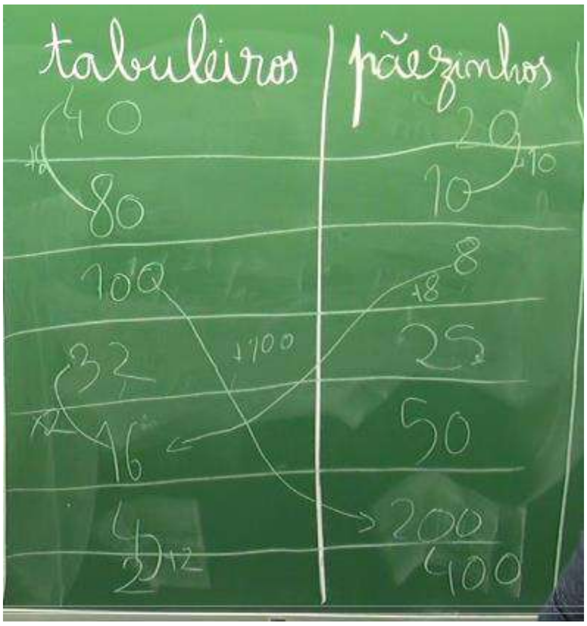


Figura 2. Apresentação do Tiago

De forma a explicitar a tabela (cf. Figura 2), o aluno assinalou relações numéricas de dobro, explicitando-as, por vezes, de forma aditiva, tanto dentro da variável (por exemplo: "+10"), como entre as duas variáveis (por exemplo: "+100"). No entanto, não explicitou as relações inversas aplicadas na exploração da tarefa. Por exemplo, explicitou o 32 como dobro de 16, mas não o 25 como metade de 50. As relações assinaladas são desligadas umas das outras, não evidenciando o raciocínio mobilizado durante a exploração.

O Tiago explicou a resposta 2 tabuleiros com 400 pãezinhos da seguinte forma: "Eu tirei o zero do 20 e pus no 40, deu-me 400x2". Assim, o aluno aplicou a regra da compensação dos zeros, retirando o zero do fator 20 para acrescentar ao fator 40.

Para justificar as possibilidades de 32 tabuleiros com 25 pãezinhos e 16 tabuleiros com 50 pãezinhos, o aluno usou a partição de números, decompondo em somas ambos os fatores, no caso de 32x25, e apenas o 16, no caso de 16x50 (cf. Figuras 3 e 4).

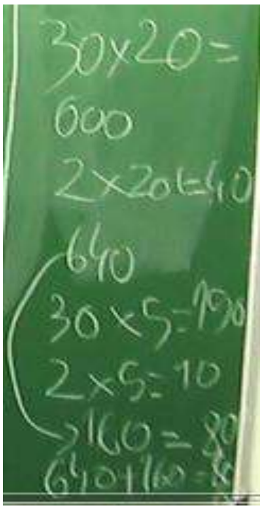


Figura 3. Partição de números para 32x25

Figura 4. Partição de números para 16x50

Embora Tiago tenha revelado flexibilidade estratégica ao aplicar relações escalares de dobro e metade entre os fatores, ao explicar à turma as possibilidades encontradas, não consegue aparentemente explicar o raciocínio desenvolvido, optando por comprovar as possibilidades obtidas com o procedimento mecanizado de partição de números. O mesmo aconteceu quando, na fase da exploração, o aluno explicou à colega como chegou à possibilidade 5x160.

Subtarefa "Pãezinhos II"

Os alunos começaram por adicionar o valor das moedas existentes na tarefa, percebendo que o Bernardo tinha pago 70 cêntimos por 5 pãezinhos. Seguidamente, o par calculou 84-70=14, obtendo o preço de cada pãozinho, 14 cêntimos. Usaram, assim, uma abordagem de natureza aditiva.

Mais tarde, o Tiago e a Anabela optaram por continuar o esquema existente no enunciado da tarefa (cf. Figura 5): 6 pãezinhos custavam 84 cêntimos; 5 pãezinhos custavam 70 cêntimos e assim sucessivamente, mantendo a abordagem anterior de natureza aditiva no interior de cada uma das variáveis, ou seja, subtraindo sempre 14, o valor unitário do preço do pão, ao preço acabado de obter na coluna da direita e subtraindo sempre 1 ao número de pãezinhos, na coluna da esquerda. Contudo, os alunos erraram no cálculo do preço de 4 pãezinhos, o que influenciou os restantes resultados.

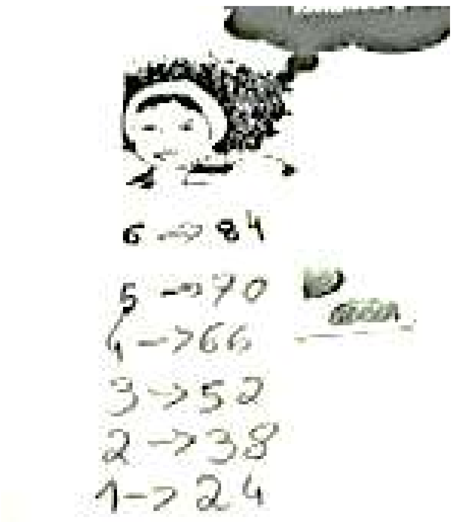


Figura 5. Esquema presente no enunciado a que os alunos deram continuidade

A professora interveio, visto que a Anabela comentou com o Tiago que aquele resultado não fazia sentido.

> Anabela: Mas isto não tem sentido. Se 1 pãozinho custa isto (*apontando para o número 24*), 2 pãezinhos só aumenta 14 cêntimos. Não tem sentido nenhum.
> Professora: Diz lá, Anabela, diz lá o que tens a dizer.
> Anabela: Se este custa 24, porque é que os outros pãezinhos, quando são 2, os pãezinhos custam menos dinheiro cada um?
> Professora: Explica lá o teu raciocínio.
> Anabela: Têm que ter o mesmo número. Têm de ser todos a 24.
> Tiago: Diz mais de 10 cêntimos.
> Anabela: Mas os outros pãezinhos também têm de custar 24 assim.
> Tiago: Não, não pode ser. Têm de custar 14 cêntimos (…) Tá [sic] mal então.

Anabela revela sentido crítico face ao resultado obtido com o esquema, 24 cêntimos por cada pãozinho; porém, não confrontou com a conclusão alcançada anteriormente de 1 pão custar 14 cêntimos e aplicada no completamento do esquema. A aluna questionou a ausência de proporcionalidade que existiria com aqueles preços: "Se 1 pãozinho custa isto (*apontando para o número 24*), 2 pãezinhos só aumenta 14 cêntimos. Não tem sentido nenhum.". Assim, embora não tenham identificado o seu erro, concluíram que o esquema não estava correto mobilizando um raciocínio proporcional subjacente à situação proposta, o que revela compreensão de que o preço de cada pãozinho tem de ser constante: "Têm de ser todos a 24.".

O par decidiu apagar o esquema feito. O Tiago recorreu à multiplicação para esclarecer a dúvida do preço de 1 pãozinho. Nesta multiplicação, o aluno utiliza uma relação funcional como forma de verificar se 1 pão custaria 14 cêntimos, tendo aplicado a estratégia da partição de números (cf. Figura 6) no cálculo 14x6. Assim, Tiago confirma que o seu resultado é igual ao indicado no enunciado como preço de 6 pãezinhos, ficando com a certeza de que o preço unitário é 14 e não 24.

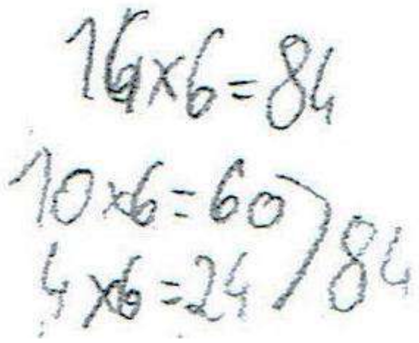


Figura 6. Estratégia de partição de números (Tiago)

A Anabela decidiu refazer o esquema, mas desta vez de baixo para cima. Ao partir do preço de 1 pãozinho, voltou a usar uma abordagem aditiva, adicionando sempre 14 de forma sucessiva. A aluna errou no cálculo do preço de 3 pãezinhos ao obter 32 (cf. Figura 7). O erro foi detetado pelo Tiago.

Figura 7. Erro de cálculo do preço de 3 pãezinhos (Anabela)

Após correção do esquema (cf. Figura 8), a Anabela usou a estratégia do cálculo da divisão como operação inversa da multiplicação (cf. Figura 9) para confirmar que 1 pãozinho custava 14 cêntimos.

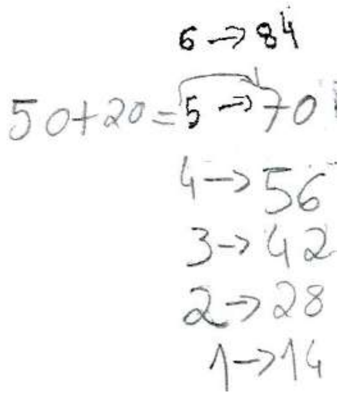


Figura 8. Esquema correto

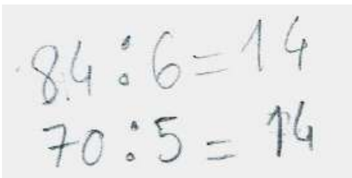


Figura 9. Cálculo da divisão

Ao fazê-lo, Anabela evolui para uma abordagem de natureza multiplicativa estabelecendo uma relação funcional entre as variáveis, o preço e o número de pãezinhos, como forma de verificar a constante da proporcionalidade direta.

A conclusão, escrita pelos alunos -- "um pãozinho custa 14 cêntimos, porque multiplicámos 14 vezes 6 que nos deu 84 e também dividimos" -- apresenta a relação externa funcional entre as variáveis usando ambas as operações, multiplicação (preço =

constante x número de pãezinhos) e divisão (constante = preço ÷ número de pãezinhos). Evidencia também a mobilização da relação inversa entre estas duas operações nesta situação.

Conclusão

No que respeita às estratégias que o par aplicou nas situações de proporcionalidade (Cramer & Post, 1993; Fernández et al., 2010; e Vergnaud, 2014) presentes nas subtarefas, verifica-se a utilização de estratégias de natureza aditiva e multiplicativa. Os alunos usaram a estratégia aditiva no cálculo do preço de 1 pãozinho através da diferença de preços de 6 e de 5 pãezinhos, e na determinação dos restantes preços, em *Pãezinhos II*. Usaram a estratégia multiplicativa escalar (relações numéricas no interior de cada uma das variáveis) através da aplicação do dobro numa variável e da metade na outra variável, em *Pãezinhos I*. A estratégia multiplicativa funcional verifica-se no uso da divisão como operação inversa da multiplicação (i) na compreensão implícita da proporcionalidade inversa presente em *Pãezinhos I*, e (ii) para verificar a correção do preço de cada pãozinho, na compreensão implícita da proporcionalidade direta presente em *Pãezinhos II*. O par usou também a estratégia da troca da ordem dos fatores em *Pãezinhos I* para obter um maior número de decomposições do 800 em produtos de dois fatores.

A evolução evidenciada pelos alunos ao longo da exploração da subtarefa *Pãezinhos II*, marcada pela transição da adoção de estratégias aditivas para as de natureza multiplicativa funcional, parece dever-se ao modo como foi concebida a tarefa e simultaneamente aos erros de cálculo aditivo e subtrativo verificados. O enunciado sugere uma abordagem aditiva, ao apresentar os preços de 6 e de 5 pãezinhos. O facto de os preços calculados através dessa abordagem não respeitarem a constante de proporcionalidade levou os alunos a questionarem criticamente os seus resultados e a evoluírem para uma abordagem multiplicativa funcional, verificando o preço de cada pãozinho. Os alunos revelam, ainda, conhecer e usar a relação existente entre as operações de multiplicação e divisão (McIntosh et al., 1992; Threlfall, 2009).

Para resolver os cálculos multiplicativos que iam propondo, em *Pãezinhos I,* no sentido de verificar se os mesmos compunham o 800, e assim irem preenchendo a tabela, os alunos aplicaram estratégias de natureza multiplicativa: i) partição de números em somas; ii) compensação com uso de relações multiplicativas entre os fatores; e iii) uso complexo de dobros (Baek, 2006; Fosnot & Dolk, 2001; Foxman & Beishuizen, 2002; Hartnett, 2007; e Mulligan & Mitchelmore, 1997).

A partição de números em somas revelou-se um processo mecanizado que os alunos usam não só para resolver um cálculo multiplicativo, através da aplicação da propriedade distributiva (Fosnot & Dolk, 2001), mas sobretudo para verificar se outra estratégia (construída antes de forma flexível) foi usada corretamente, e para mostrar aos colegas a correção do cálculo efetuado. Assim, o uso desta estratégia, em particular, revela pouca flexibilidade de cálculo, parecendo ser um procedimento rotinizado que é aplicado sempre da mesma forma, independentemente dos números envolvidos.

A utilização, pelo Tiago, das estratégias de compensação com uso de relações multiplicativas entre os fatores e do uso complexo de dobros é reveladora da sua flexibilidade de cálculo (Threlfall, 2009), uma vez que o mesmo estabeleceu relações numéricas (metade e dobro entre os números) e os seus cálculos exploratórios parciais decorrem do seu conhecimento de factos básicos da multiplicação, usando-os para alcançar a solução de um dado cálculo desconhecido (como aconteceu, por exemplo, com o cálculo de 50x16). No entanto, Tiago parece não ter a completa consciência das relações numéricas emergentes associadas à flexibilidade de cálculo, pois, embora as use, não as verbaliza após o seu uso, explicitando a partição dos números em somas (como aconteceu durante a discussão coletiva em *Pãezinhos I*).

São várias as evidências da flexibilidade de cálculo multiplicativo. Os alunos evidenciaram reparar nos números (por exemplo, o 16 encarado, por Tiago, como uma potência de base dois, ao ser gerado pela sucessiva duplicação do fator 2). Os alunos mobilizaram relações entre as operações na confirmação da solução (como aconteceu quando Anabela usou a divisão como operação inversa da multiplicação na confirmação do preço unitário do pão). A flexibilidade de cálculo (Threlfall, 2009) fica, pois, evidenciada pela forma como os alunos atenderam às características dos números e às relações existentes entre estes e também pelas estratégias de cálculo construídas.

Referências bibliográficas

Baek, J. M. (2006). Children's mathematical understanding and invented strategies for multidigit multiplication. *Teaching Children Mathematics, 12*(5), 242-247.

Bogdan, R., & Biklen, S., (1994). *Investigação qualitativa em educação – Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Brocardo, J. (2014). Exploring flexibility in mental calculation in the domain of multiplicative reasoning. Paper presented in ECER, Porto, Portugal.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, *115,* 11-17.

Cramer, K., & Post, T. (1993). Connecting research to teaching proportional reasoning. *Mathematics Teacher, 86*(5), 404-407.

Fernández, C., Llinares, S., Van Dooren, W., De Bock, D., & Verschaffel, L. (novembro, 2010). The development of students' use of additive and proportional methods along primary and secondary school. *Hub Research Paper, 32.*

Fosnot, C., & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work: Constructing multiplication and division.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Foxman, D., & Beishuizen, M. (2002). Mental calculation methods used by 11-year-olds in different attainment bands: A reanalysis of data from the 1987 APU survey in UK. *Educational Studies in Mathematics, 51*(1-2), 41-69.

Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2013). Design Research from the learning design perspective. In T. Plomp & N. Nieveen (Eds.). *Education Design Research – Part A: An introduction* (pp. 73-112). Netherlands, Institute for Curriculum Development.

Hartnett, J. (2007). Categorisation of mental computation strategies to support teaching and to encourage classroom dialogue. In J. Watson, & K. Beswick (Ed.), *Mathematics: Essential Research, Essential Practice. Proceedings of the thirtieth annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. (MERGA-30)* (*I*, pp. 345-352). Hobart: MERGA.

McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics, 12*(3), 2-8,44.

Mendes, F., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2013). A evolução dos procedimentos usados pelos alunos: Contributo de uma experiência de ensino centrada na multiplicação. *Quadrante*, *22*(1), 133-162.

Mulligan, J. T., & Mitchelmore, M. C. (1997). Young children's intuitive models of multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(3), 309-330.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Ponte, J.P. (2005). Gestão curricular em matemática. O professor e o desenvolvimento curricular. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Threlfall, J. (2009). Strategies and flexibility in mental calculation. *ZDM Mathematics Education*, *41*(5), 541-555.

Santos, S. (2016). *A flexibilidade de cálculo multiplicativo num contexto de ensino exploratório.* Dissertação de mestrado, Escola Superior de Educação de Lisboa, Instituto Politécnico de Lisboa, Lisboa, Portugal.

Vergnaud, G. (2014). A *criança, a matemática e a realidade*. Paraná: Editora UFPR.

Yin, R. K. (2010). Estudo de caso. Planejamento e métodos. (D. Grassi, Trad.). Porto Alegre: Bookman.

Anexo

Pãezinhos I[1]

Todos os sábados, o padeiro da padaria *Pão Bom* cozinha 800 pãezinhos que dispõe em tabuleiros. Tens uma ideia de quantos tabuleiros precisará? Confirma a tua ideia.

[1] Conceção da tarefa *Pãezinhos I e II*: Jean Marie Kraemer

Pãezinhos II

A Beatriz está na padaria com o seu colega Bernardo. Ela compra seis pãezinhos e paga oitenta e quatro cêntimos.

- Então – pensou Beatriz – um pãozinho custa mais do que 10 cêntimos!

O Bernardo paga os seus cinco pãezinhos com uma moeda de 50 cêntimos e uma de 20 e não recebe troco.

- Ah! – exclama Beatriz – já sei quanto custa cada pãozinho!

UM CATÁLOGO DE TINTAS NA SALA DE AULA: UMA DISCUSSÃO SOBRE A AUTENTICIDADE DE PROBLEMAS DE MODELAÇÃO MATEMÁTICA

Ana Margarida Baioa[1], *Susana Carreira*[2]
[1]Agrupamento de Escolas D. Manuel I – Tavira, ambaioa@gmail.com
[2]Universidade do Algarve e UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, scarrei@ualg.pt

Resumo. *Com base num breve episódio de uma atividade de modelação matemática envolvendo trabalho experimental, realizada por alunos do 9º ano, o objetivo deste artigo é refletir sobre critérios de autenticidade para tarefas de modelação matemática escolar. O estudo pretende desenvolver a capacidade dos alunos para recolher e interpretar dados em situações do mundo real, bem como a capacidade de desenvolver pensamento matemático e a comunicação. Os resultados mostram que os alunos aderiram ao trabalho experimental e aos materiais que lhes foram propostos; no entanto, a compreensão da situação real e a solução proposta para o problema parece ter perdido de vista, em certa medida, o contexto inicial.*

Abstract. *Based on a brief episode of a modeling activity involving experimentation, performed by 9th graders, the goal of this article is to reflect on criteria of authenticity for school modeling tasks. The study aims to develop students' ability to collet and interpret data in real world situations as well as the ability to develop mathematical thinking and communication. The results shows that students adhered to the experimental work and to the materials proposed; still their understanding of the real event and their proposed solution to the problem seems to have missed, to a certain extent, the real problem setting.*

Palavras-chave: *Desenvolvimento de conceitos, aprendizagem experiencial, modelos matemáticos, proporção.*

Introdução

Os currículos de matemática escolar em todo o mundo (por exemplo, Canadá, Estados Unidos, Irlanda, Brasil, Nova Zelândia, entre outros) incluem o objetivo geral de assegurar o conhecimento, as habilidades e as competências que permitirão aos indivíduos compreender o mundo altamente tecnológico e matematizado do presente e permitir que eles participem criticamente e conscientemente em processos que envolvem matemática e suas aplicações. Este objetivo estratégico da educação matemática é claramente ecoado pela retórica de testes internacionais, como é o caso do PISA e do TIMSS.

No entanto, a modelação matemática é reconhecidamente uma atividade exigente para os alunos, não apenas porque cada etapa do ciclo de modelação pode constituir um potencial bloqueio (Blum, 2015), mas também porque, por exemplo, o foco para muitos estudantes parece ser chegar a um única solução em vez de desenvolver uma estrutura matemática adequada para lidar com uma situação problemática do mundo real. Recentemente, Blum (2015) reafirmou que os objetivos do ensino de aplicações e modelação podem ser vistos como tendo uma dupla função. Por um lado, o conhecimento da matemática e da sua utilização é vital para o mundo real e para o seu progresso, principalmente na resolução de problemas reais e na realização de projetos complexos; por outro lado, o mundo real e a forma como este incorpora o conhecimento matemático é extraordinariamente importante como um veículo para atribuir significado à aprendizagem de conceitos matemáticos e, em geral, para a conceção da matemática enquanto disciplina.

Bonotto e Basso (2001) também discutiram outra natureza dual: a dos artefactos culturais que, além de pertencerem ao mundo da vida quotidiana, também fazem parte do mundo dos símbolos. Se os artefactos podem ser a base para a compreensão de estruturas matemáticas subjacentes à realidade, eles também podem ser usados para a matemática, tendo em conta que os conceitos incorporados em objetos e processos do mundo real se tornam materiais para a reflexão e resolução de problemas.

Neste artigo, queremos refletir sobre essa dualidade de objetivos da modelação de situações reais e, paralelamente, sobre a dualidade de papéis que um tipo particular de tarefa, aqui rotulado como uma tarefa baseada em atividade experimental, pode desempenhar na aplicação/compreensão do conceito de proporcionalidade direta. A matemática experiencial é uma forma de os estudantes lidarem com o conhecimento vivo e prático de um problema ou situação no contexto da modelação matemática em ambiente escolar. Esta abordagem pretende desenvolver a capacidade dos alunos para recolher e interpretar dados em situações do mundo real, bem como a capacidade de desenvolver o pensamento matemático e a comunicação, ao relatarem as suas ideias e conclusões aos outros. A matemática experiencial coloca a situação real como parte integrante do trabalho dos alunos, permitindo que eles compreendam como ela funciona na realidade e como podem "manipulá-la" matematicamente (Palm, 2008, 2009; Vos, 2011, Galbraith, 2006).

Suporte teórico

Autenticidade de uma situação de modelação

A questão da autenticidade dos exemplos propostos para a implementação da modelação matemática tem sido dissecada por vários investigadores e ganha especial ênfase nos ambientes educacionais informados por uma visão sociocultural da modelação matemática. Por exemplo, Rosa e Orey (2016) defendem o uso da *etno-modelação* como uma ferramenta para propósitos de ensino onde, em vez de se distorcer a realidade cultural e étnica, o objetivo é ajudar os alunos a aprender a encontrar e trabalhar em situações autênticas e reais, emergentes de artefactos culturais e históricos, abrangendo ideias matemáticas, pensamentos e práticas desenvolvidas pelas culturas ao longo do tempo e do espaço.

Outra possibilidade refere-se à visão socio-crítica da modelação, segundo a qual se pretende que os alunos, muitas vezes trabalhando colaborativamente, utilizem a matemática para resolver um problema com origem na realidade e na vida quotidiana, mas de tal forma que a situação real seja problematizada e questionada.

Em qualquer caso, parece ser relativamente consensual a visão de que há uma considerável falta de autenticidade em muitas das situações que a matemática escolar apresenta aos alunos, que em muitos casos acabam apenas por imitar cenários do mundo real, privilegiando objetivos educacionais e o alinhamento com o currículo sobre enfrentar a realidade mal definida de muitos problemas (Vos, 2011; Palm 2008, 2009; Eames, Brady & Lesh, 2015).

Blum (2015) observa explicitamente que o papel motivador ou de *marketing* frequentemente atribuído às tarefas de modelação matemática em livros escolares e materiais curriculares resulta na criação de problemas que são apenas um disfarce de uma situação real. Mas outros autores criticaram fortemente a pseudo-autenticidade dos problemas de modelação, particularmente nos testes do PISA. Isso não invalida a noção partilhada de que um cenário existente no mundo fora da escola não pode corresponder completamente a um cenário proposto numa tarefa de matemática escolar. E isso parece ser ainda mais inquestionável quando se trata de formular problemas em testes de avaliação.

> É claro que uma tarefa escolar nunca pode simular completamente uma situação existente fora da escola. No entanto, a situação escolar pode ser

> organizada e construída de tal forma que, muitos dos aspetos dessa situação da vida real possam ser simulados, levando os alunos a trabalharem tão próximo quanto possível da situação real. Em certos casos, por exemplo, em testes de grande escala, as condições sob as quais a resolução de tarefas ocorre restringem severamente as possibilidades de simular muitos dos aspetos com elevada fidelidade (Palm, 2008, p.48).

De acordo com Palm (2008), os alunos têm sido predominantemente confrontados com tarefas matemáticas irrealistas e têm dado, em muitos casos, respostas irrealistas a essas questões. Ao mesmo tempo, não é totalmente óbvio até que ponto o realismo das tarefas motivará uma maior atenção dos alunos para o realismo das suas respostas. Além disso, Palm observa que há uma falta de consenso na comunidade de educação matemática sobre o conceito de realismo de uma tarefa em termos de ajuste entre um trabalho que é pedido ao aluno na escola e uma situação da vida real. E a evidência disso pode ser encontrada na variedade de termos diferentes para tarefas que de alguma forma tentam imitar situações reais (tarefas autênticas, tarefas realistas, tarefas da vida real), juntamente com os muitos significados diferentes que estão ligados a cada um deles.

Vos (2011, 2015) tem abordado sistematicamente a questão da autenticidade e sugerido critérios que nos permitem julgar a tendência, mais ou menos autêntica, de uma tarefa. A sua primeira preocupação é o uso do termo tarefa autêntica porque o ambiente educacional exigirá inevitavelmente adaptações, de um modo semelhante ao que acontece com um simulador de voo: os critérios de *eficácia* do ambiente de aprendizagem e de *realismo* das situações propostas devem portanto prevalecer. A sua principal proposta é a de que o conceito de autenticidade de uma tarefa é, antes de mais, uma construção social, portanto nunca universalmente definível. Assim, uma tarefa pode ter alguns aspetos autênticos, mas também pode ter outros que são deliberadamente introduzidos e concebidos para responder a fins educacionais.

Em suma, deve-se reconhecer que nem todos os aspetos de uma tarefa têm de ser autênticos, embora admitindo que as tarefas se tornam mais envolventes se forem respeitadas algumas questões que têm origem na situação real.

Uma vez colocada em perspetiva a questão da autenticidade das tarefas de modelação, o desafio consequente diz respeito à procura de princípios que orientem a construção de tarefas de modelação interessantes, que sejam simultaneamente eficazes e intelectualmente honestas (Blum, 2015; Galbraith, 2006). Em grande medida, o desafio é converter uma ideia frutífera enraizada numa situação do mundo real num problema que seja bastante bem enquadrado pelos detalhes da situação e que seja acessível a uma resolução que também respeite a autêntica matemática escolar (Vos, 2011).

Existem atualmente algumas propostas de formulações de princípios básicos para informar o caráter autêntico das tarefas de modelação na matemática escolar. Iremos aqui considerar algumas dessas sugestões, tendo por base os trabalhos de Palm (2009), Galbraith (2009) e Vos (2015).

Palm (2009) considera várias variáveis para a aferição da autenticidade de uma tarefa: o *Evento*, a *Questão*, a *Informação*, a *Apresentação*, as *Estratégias de Resolução*, as *Circunstâncias*, os *Requisitos da Solução* e o *Objetivo*. Galbraith (2009) propõe, por seu turno, aquilo a que chama uma série de princípios: uma *Ligação com o mundo real*, uma *Questão acessível*, um *Processo de solução viável*, a *Existência de Conhecimento*, uma *Avaliação possível*, uma *Estrutura*. Vos (2015) oferece ainda um conjunto de critérios, dentro de uma definição pragmática de autenticidade, onde o que importa acima de tudo é que os objetivos e os métodos dos investigadores em modelação convirjam com os dos desenhadores de tarefas, isto é, que sejam tidos em conta: *aspetos autênticos no campo da matemática* (símbolos, questões investigativas, experiência investigativa) e *aspetos autênticos não-matemáticos* (aparatos, contextos profissionais, aplicabilidade da matemática, cenário do problema).

Neste estudo, vamo-nos concentrar nos aspetos que se relacionam diretamente com a parte experimental da situação do mundo real e desenvolvimento de uma solução matemática. Selecionaremos, assim, os seguintes parâmetros: o *evento* e a *questão*, a *ligação com o mundo real*, o *aparato* e o *cenário do problema*.

Aprendizagem experiencial

Bonotto e Basso (2001) sugerem o uso de artefactos culturais e, em particular, de objetos que fazem parte da experiência quotidiana das crianças e dos adultos, como uma estratégia para estabelecer conexões entre a matemática envolvida em situações do mundo real e a matemática escolar. As autoras concluíram que para os alunos trazerem a matemática para a realidade, é útil introduzir factos matemáticos que estão incorporados e codificados em artefactos. De acordo com os seus estudos, ao realizar experiências matemáticas a partir da interpretação de artefactos, os alunos fazem a transição do mundo real para o mundo dos símbolos (matemática horizontal), mas além disso o uso de artefactos também lhes dá a oportunidade de avançar na construção de conceitos matemáticos (matemática vertical). Os artefactos (materiais concretos) também podem ser usados como ferramentas para a aplicação de conhecimentos prévios em novos contextos e para consolidar o conhecimento matemático existente, elevando-o para um nível mais alto (Bonotto & Basso, 2001).

Bonotto (2007) defende a necessidade de claras mudanças se o nosso intuito for o de criar situações realistas em tarefas de modelação matemática, isto é, recomenda situações menos estereotipadas e mais realistas, designadamente com recurso a materiais concretos, defendendo que estes são relevantes para os alunos, enquanto parte da sua experiência de vida, oferecendo referências significativas relacionadas com situações concretas.

Outros teóricos também argumentam que os conhecimentos e habilidades fundamentais podem ser mais facilmente acessíveis se os alunos estiverem diretamente envolvidos em atividades práticas e experimentais, pois podem promover não só a perceção da utilidade dos materiais em questão, mas também uma melhor compreensão dos conceitos explorados. A aprendizagem pela descoberta e o trabalho prático como veículo para a aprendizagem são ideias inerentes ao modelo de educação experiencial. O modelo de aprender fazendo, desenvolvido por Kolb (1984), consiste num ciclo de quatro processos. Esses processos são: Experiência (realizar uma atividade); Refletir (fazer perguntas e falar sobre o que aconteceu na parte experimental, analisando possíveis inconsistências entre o observado e o previsto); Abstrair (gerar uma ideia nova ou modificar uma ideia anterior); Aplicar (usar o que foi aprendido numa situação semelhante ou diferente, e que pode, por sua vez, criar a necessidade de novas experiências). Atividades experimentais levam os alunos a interagir, analisar, questionar, refletir e transferir. A atividade vem em primeiro lugar; a aprendizagem vem dos pensamentos e ideias que surgem como resultado do processo de aprender fazendo. Consequentemente, o impulso para o desenvolvimento de novos conceitos é fornecido por novas experiências: “Aprender é o processo pelo qual o conhecimento é criado através da transformação da experiência” (Kolb, 1984, p. 38).

Aprender fazendo aparece, portanto, como uma perspetiva de aprendizagem natural se a modelação for considerada como uma atividade que é semelhante aos métodos das ciências experimentais ou à pesquisa em matemática aplicada. “Embora as experiências, enquanto tais, possam ser consideradas típicas da ciência em vez da matemática, muitas atividades, representações e modelos matemáticos estão fortemente ligados a experiências." (Halverscheid, 2008, p.225).

A perspetiva dos ambientes de modelação experimental descritos por Halverscheid (2008) concentra-se em atividades apoiadas por experiências que dão a oportunidade de construir modelos matemáticos e produzir conhecimento matemático em torno das questões investigadas durante a atividade experimental. O papel da experiência é liderar a busca de um modelo matemático adequado que possa explicar os dados e resultados reais. A experiência prática, como defendida pelo autor, torna-se o 'resto do mundo' dentro da sala de aula ou laboratório da escola. Os modelos são, portanto, produzidos para explicar e interpretar esse mundo autêntico pretendido.

A abordagem teórica que aqui adotamos pretende combinar a questão da autenticidade com a ideia de ambientes de modelação experimental. Consideramos, portanto, que a autenticidade de uma tarefa de modelação escolar exige uma descrição clara de um *evento* que ocorre numa situação fora da escola e a formulação de uma *questão* relevante e pertinente nesse mundo real. Mas acrescentamos que a busca de uma solução envolve uma *ligação ao mundo real* que é feita por meio de um *aparato* experimental e recria um *cenário do problema* que é simulado experimentalmente na sala de aula.

Abordagem metodológica

Este estudo segue uma metodologia qualitativa de investigação-ação, tendo como pilar da abordagem metodológica uma experiência de ensino que visa a implementação de uma nova abordagem pedagógica envolvendo modelação e aplicações da matemática (Loughran, 2007). O ciclo de investigação-ação utilizado foi o de Whitehead com a duração de um ciclo (Latorre, 2003). Este ciclo divide-se em cinco etapas: 1) Sentir ou experimentar um problema, 2) Imaginar a solução do problema, 3) Colocar em prática a solução imaginada, 4) Avaliar os resultados das ações realizadas e 5) Modificar a prática à luz dos resultados. As motivações pedagógicas da experiência de ensino correspondem à necessidade de dar significado e sentido prático à matemática, contribuir para mudar a visão negativa que muitos alunos têm sobre a matemática e desenvolver o seu gosto pela matemática, relacionando-a com o seu dia-a-dia.

Duas turmas de 9º ano participaram neste estudo. A idade dos alunos variou entre 14 e 17 anos, com uma média de 14 anos de idade. Estes alunos podem considerar-se, em termos globais, estudantes colaborativos e empenhados. A maioria dos alunos mais fracos trabalhou muito para melhorar o seu desempenho, apesar das muitas dificuldades que manifestaram na aplicação de conceitos matemáticos e na resolução de problemas. Nenhum dos alunos tinha tido contacto com tarefas de modelação em anos anteriores.

As tarefas de modelação propostas incluíram 4 seções. A primeira correspondia a introdução ao problema em estudo. A segunda consistiu numa atividade prática, usando objetos manipuláveis e do quotidiano. A terceira compreendia a análise dos dados obtidos na fase experimental, com o objetivo de criar um modelo que possa ser utilizado em situações semelhantes. Finalmente, era prevista a realização de um relatório escrito com a inclusão dos seguintes pontos: explicação da situação experimental, hipóteses formuladas, estratégias utilizadas, resultados, avaliação do trabalho e as dificuldades encontradas.

Para resolver as tarefas os alunos trabalharam em grupos de três ou quatro elementos organizados de acordo com a sua vontade. O tempo atribuído a cada tarefa foi de 90 minutos (2 aulas), nuns casos, e 180 minutos (4 aulas), noutros. Durante a resolução da tarefa, os alunos tiveram a oportunidade de se movimentar na sala e discutir com os colegas as suas ideias e as de outros grupos.

A recolha de dados incluiu observação participante e notas de campo do professor-investigador (a professora da turma). As aulas foram gravadas em vídeo e áudio com uma câmara móvel e a atividade de um grupo-alvo também foi gravada em vídeo e áudio com uma câmara fixa. Para cada tarefa, um grupo alvo foi escolhido aleatoriamente. Os relatórios escritos entregues por todos os grupos no final de cada atividade também foram recolhidos.

Neste artigo iremos concentrar-nos na atividade e no trabalho de um único grupo de quatro alunos. Vamos considerar, em particular, o que eles desenvolveram na fase de trabalho experimental e no modelo proposto.

A tarefa envolve a determinação de quantidades de pigmentos para obtenção de tintas de parede de diferentes cores. O objetivo foi simular o procedimento utilizado em máquinas industriais que funcionam de acordo com o chamado sistema tintométrico. Num sistema tintométrico, colocamos uma lata de tinta neutra no misturador, já com uma determinada quantidade, escolhemos a cor pretendida e o sistema volumétrico de pigmentos, dispensa os pigmentos necessários nas quantidades exatas para a obtenção da cor pretendida. O misturador centrifuga todos os componentes obtendo-se a tinta na cor final.

A tarefa foi apresentada na sala de aula da seguinte forma:

Introdução. Uma loja de pintura interior e exterior utiliza uma máquina misturadora de tintas na qual só é necessário colocar a lata com a tinta neutra e introduzir o código da cor escolhida no catálogo. Mas ocorreu um problema na máquina e esta deixou de funcionar parcialmente. Já não dispensa os pigmentos necessários, só pode misturá-los. Agora, os assistentes de loja devem colocar manualmente os pigmentos para obter a cor escolhida pelo cliente. Isso significa um novo problema. Eles não têm informações sobre as quantidades de pigmento a serem usadas para cada cor do catálogo. Portanto, a tua missão é criar uma paleta de cores e fornecer a quantidade de pigmentos a serem usados para cada cor.

Atividade prática. Tens à tua disposição, líquido branco (leite) e pigmentos líquidos coloridos (corante alimentar), um copo e seringas de 1 ml. Produz uma paleta de cores que envolva duas cores primárias e uma tabela de referência com as quantidades precisas a serem usadas pelos assistentes para fazer cada cor exata.

Análise. Escolhe duas cores primárias, prepara uma paleta de cores com vários tons e faz uma tabela com as quantidades de pigmentos a usar para latas de 1L, 5L, 10L e 20L.

Relatório. Regista todos os procedimentos realizados e resultados no relatório final.

A atividade dos alunos

O processo executado com o aparato experimental disponibilizado foi o mesmo na maioria dos grupos. Ficou claro que os alunos conheciam a ideia de um catálogo de cores de tinta de parede e sabiam que as tonalidades são rotuladas com nomes. Portanto, em geral, eles criaram uma sequência de tons e deram um rótulo a cada tom. Eles usaram uma pequena quantidade de pigmento de cada vez e acrescentaram sempre essa quantidade à mistura anterior. No início, só tinham leite (equivalente à tinta neutra) e, em seguida, acrescentaram cor pela adição de quantidades de dois pigmentos por eles escolhidos. Ao longo das experiências todos os grupos registaram os valores em tabelas e subsequentemente calcularam as quantidades de pigmento para diferentes quantidades de tinta a produzir. Alguns dos grupos não apresentaram uma fórmula geral para uma quantidade de tinta indeterminada (isto é, variável) e só fizeram os cálculos das quantidades necessárias para fazer as quantidades especificamente pedidas no problema. O grupo-alvo utilizou pigmentos amarelos e verdes. No seu relatório, o grupo descreveu como os seus elementos criaram uma paleta de quatro tons:

> Usando a seringa começamos com 0,1 mL de pigmento amarelo no copo com leite (60 mL) e esta cor é a Baunilha. Em seguida, adicionamos mais 0,2 mL de pigmento amarelo ao copo que já tinha 0,1 mL de amarelo e a cor é a Creme. Após adicionarmos mais 0,2 mL de pigmento amarelo e 0,1 mL de pigmento azul ao copo de vidro que já tinha alguma quantidade de pigmento essa cor é a Menta. Por fim, adicionamos ao copo de vidro mais 0,4 mL de pigmento amarelo e mais 0,5 mL de pigmento azul e a cor é a Verde Amazônia. Agora, usando os resultados da nossa tabela, vamos determinar a quantidade de pigmento a ser usado com 1L, 2L, 5L e 10L de tinta. Para obter esses valores, usamos a regra três simples. Para o caso da Baunilha obtemos:

$$\begin{array}{l} 60 \text{ -----} 1000 \\ 0.1 \text{-----} \text{ x} \end{array} \qquad x = \frac{1000 \times 0.1}{60} = 1.(6)\text{ mL}$$

Para completar a descrição dos resultados do grupo, importa notar que os alunos criaram uma tabela para cada tamanho de lata e para os quatro tons, mostrando as quantidades de tinta base, pigmento amarelo e pigmento azul. Para o Verde Amazônia, por exemplo, a tabela indicou: 20000 mL de tinta, 300 mL de amarelo e 200 mL de azul.

Discussão e conclusão

Neste episódio de sala de aula e tendo por base os dados empíricos apresentados, queremos sublinhar que os alunos aparentemente atribuíram autenticidade significativa à tarefa, nomeadamente: ao *evento* de produzir um catálogo de cores de tinta; à *questão* de encontrar as quantidades de pigmentos para a mistura manual devido à avaria da máquina; à *ligação com a situação real*, isto é, ajudando o assistente a recuperar as quantidades de pigmentos para cada tom; e ao uso do *aparato* experimental que era essencial para a matematização e para a simulação do processo real.

No entanto, registamos que os alunos não tiveram em conta alguns aspetos da situação real que levaram a que a sua solução não seja totalmente autêntica. Como se reconhece nos dados, o modelo matemático é claramente formulado pelos alunos e percebe-se a sua consciência do facto de existir uma proporcionalidade direta entre as quantidades de tinta branca (leite) no modelo experimental e as quantidades de tinta neutra no tamanho real, bem como a proporcionalidade direta entre as quantidades de um pigmento no modelo (corante) e as quantidades nas latas de tamanho real. Esta é obviamente uma conclusão sólida. No entanto, o que pode ter levado os alunos a tomar a quantidade de tinta branca na lata de tamanho real como um valor conhecido? E o que os levou a pensar que essa quantidade de tinta branca seria a capacidade total da lata de tinta? De facto, os alunos assumiram sem discussão que a quantidade de tinta branca que se colocaria na lata era igual à capacidade da lata, o que equivale a dizer que a lata ficaria completamente cheia com tinta branca e, portanto, sem capacidade disponível para uma quantidade adicional de pigmentos. Esta ideia, porém, não ocorreu aos alunos que se detiveram no valor conhecido – a capacidade da lata – para iniciarem os seus cálculos para a determinação das quantidades de pigmentos.

Perante os resultados, e tendo em conta, os critérios teóricos que adotámos para a análise da autenticidade da tarefa, admitimos que o aspeto da situação de modelação mais frágil se refere à autenticidade do *cenário do problema*. Com efeito, foi explicado aos alunos como funciona uma máquina misturadora de tintas e qual a intenção do *software* utilizado. Mas há um detalhe que é relevante na operação da máquina: a primeira pergunta que esta envia ao operador é a do tamanho da lata; só depois calcula e dá como saída as quantidades de tinta base e de pigmentos. Assim, o total da mistura destes vários elementos nunca excederá a capacidade da lata que se coloca na máquina (ficando até ligeiramente abaixo).

Em contrapartida, o cenário experimental em que os alunos trabalharam foi um cenário que envolveu quantidades muito menores do que as latas reais. Nesse contexto experimental, não estava em jogo nenhum desejo de correção exata dos cálculos, como ressalta Vos (2011). Na verdade, o leite usado no copo correspondeu a um volume que foi apenas ligeiramente alterado pela adição de pequenas doses de pigmentos. Por outras palavras, é notório que quase não há distinção entre o volume de base branca e o volume da mistura no copo da experiência (Figura 1). Mas isso a diferença deixa de ser desprezável quando queremos produzir uma lata de 20 litros de cor verde amazônica.

Figura 1. Duas cores com volumes indistinguíveis

Nesse caso, o valor obtido para as quantidades combinadas de pigmentos amarelos e azuis era de 500 mL e essa já constitui uma quantidade que, se adicionada a 20 litros de tinta base, excede largamente a capacidade da lata.

Certamente, outros fatores podem ser considerados como responsáveis pela matemática imprecisa que levou a uma resposta inadequada como solução para o problema real. Uma delas refere-se à dificuldade que os alunos têm com a noção de proporção, que está bem documentada na investigação sobre este conceito matemático central. Na verdade, a regra de três simples mostrou-se uma estratégia imediata para todos os alunos. E a ideia de proporção nunca foi realmente considerada. Portanto, o volume total da mistura (na experiência e no mundo real) não foi visto como a verdadeira quantidade conhecida, na qual se tem de saber que proporção está cada um dos componentes misturados. Em qualquer caso, a verdade é que os alunos não diferenciaram a quantidade de tinta da cor final da quantidade de tinta branca, como é evidente a partir da tabela produzida que mostra 20000 ml de “tinta” em vez de “tinta branca”. Assim, foi esse o valor que fizeram corresponder aos 60 mL de leite na regra três simples usada.

Em conclusão, o conceito de proporção nunca foi ativado e, em vez disso, a proporcionalidade foi usada como um processo de ampliação do "tamanho", ou seja, parecendo interpretar uma mudança de escala entre o trabalho experimental que ocorreu na sala de aula e o fenómeno real ocorrido no sistema tintométrico.

Referências bibliográficas

Blum, W. (2015). Quality Teaching of Mathematical Modelling: What Do We Know, What Can We Do?. In S. J. Cho (Ed.), *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*, (pp. 73–96). New York, NY: Springer.

Bonotto, C. (2007). How to replace the word problems with activities of realistic mathematical modelling. In W. Blum, P. Galbraith, M. Niss & H. W. Henn (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study*, (pp.185–192). New York, NY: Springer.

Bonotto, C. & Basso. M. (2001). Is it possible to change the classroom activities in which we delegate the process of connecting mathematics with reality? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 32(3), 385–399.

Eames, C. L., Brady, C., Lesh, R. (2015). Connecting Real-World and In-School Problem-Solving Experiences. *Quadrante*, XXIV(2), 5–38.

Galbraith, P. (2006). Real world problems: Developing principles of design. In P. Grootenboer, R. Zevenbergen, & M. Chinnapan (Eds.), *Identities, cultures and learning spaces*, (pp. 229–236). Adelaide: MERGA.

Halverscheid, S. (2008). Building a local conceptual framework for epistemic actions in a modelling environment with experiments. *ZDM*, *40*(2), 225–234.

Kolb, D. A. (1984). *Experiential learning: experience as the source of learning and development*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Latorre, A. (2003). *La investigación-acción. Conocer y cambiar la práctica educativa*. Barcelona: Graó.

Loughran, J. (2007). Researching Teacher Education Practices**:** Responding to the Challenges, Demands, and Expectations of Self-Study. *Journal of Teacher Education*, *58*, 12–20.

Palm, T. (2008). Impact of authenticity on sense making in word problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 67,* 37–58.

Palm, T. (2009). Theory of authentic task situations. In L. Verschaffel, B. Greer, W. Van Dooren, & S. Mukhopadhyay (Eds.), *Words and worlds: Modelling verbal descriptions of situations,* (pp. 3–19). Rotterdam: Sense Publishers.

Rosa, M. & Orey, D. C. (2016). Humanizing Mathematics through Ethnomodelling. *Journal of Humanistic Mathematics,* 6(2)*,* 3–22.

Vos, P. (2011). What Is ‘Authentic’ in the Teaching and Learning of Mathematical Modelling? In G. Kaiser et al. (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling*, (pp. 71–722). New York, NY: Springer.

Vos, P. (2015). Authenticity in Extra-curricular Mathematics Activities: Researching Authenticity as a Social Construct. In G. A. Stillman, W. Blum, & M. S. Biembengut (Eds.),*Mathematical Modelling in Education Research and Practice,* (pp. 105–113). New York, NY: Springer.

O DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO GEOMÉTRICO DOS ESTUDANTES E A LEITURA DE HISTÓRIAS EM QUADRINHOS: UMA ARTICULAÇÃO POSSÍVEL

Elias Santiago de Assis[1], *Maria Helena Martinho*[2]

[1]Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, elyassantiago@gmail.com
[2]Universidade do Minho, mhm@ie.uminho.pt

Resumo. *Esta pesquisa, de natureza qualitativa, tem como objetivo identificar a variação do pensamento geométrico dos estudantes a partir da leitura de histórias em quadrinhos que versam sobre a Geometria Euclidiana numa perspectiva axiomática. Trata-se de um estudo de caso realizado com um grupo de alunos da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia. Através de dezasseis encontros os participantes entraram em contato com sete HQs produzidas e supervisionadas pelos investigadores. Nas HQs foram expostos assuntos como congruência de triângulos, a desigualdade triangular, o teorema do ângulo externo, dente outros. Todos estes conteúdos foram apresentados à luz de uma estrutura axiomática previamente escolhida. Ao final de cada HQ foram propostas algumas atividades. As respostas apresentadas pelos discentes ajudaram os investigadores na identificação dos tipos de pensamento geométrico desenvolvidos por eles. Os dados revelaram que o raciocínio de natureza dedutiva, embora não seja tão fácil de se alcançar, pode ser estimulado e desenvolvido pelos alunos.*

Abstract. *This qualitative research aims to identify the variation of students' geometric thinking from the reading of comic books that deal with Euclidean geometry in an axiomatic perspective. This is a case study carried out with a group of students from the Federal University of Recôncavo da Bahia. Through sixteen meetings the participants came into contact with seven comics produced and supervised by the researchers. In the HQs were exposed subjects such as congruence of triangles, triangular inequality, the external angle theorem, other teeth. All these contents were presented in light of a previously chosen axiomatic structure. At the end of each HQ some activities were proposed. The answers presented by the students helped the researchers to identify the types of geometric thinking developed by them. The data showed that deductive reasoning, although not as easy to achieve, can be stimulated and developed by students.*

Palavras-chave: *Geometria Euclidiana; Níveis de pensamento geométrico; Histórias em quadrinhos*.

Introdução

Este trabalho tem como objetivo identificar o raciocínio geométrico de um grupo de estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia (UFRB) a partir do contato desses sujeitos com histórias em quadrinhos (HQs) confeccionadas com propósitos educacionais. Esses sujeitos eram, à época, estudantes recém-chegados à universidade. Os seus conhecimentos em geometria estavam, no início da investigação, relacionados à escolaridade básica entendida neste texto como toda formação escolar que antecede o curso superior.

Segundo Hansen (1998), o ensino de Geometria, em muitos países, aparece desprovido de abordagens axiomáticas. É de se esperar, portanto, que os estudantes concluam a educação básica com deficiências no raciocínio lógico dedutivo. Com efeito, assinala Duval (1998), a Geometria é um palco privilegiado para o desenvolvimento dos raciocínios indutivos e dedutivos dos estudantes.

O contato com a Geometria numa perspectiva axiomática é necessário para o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo dos estudantes. Os alunos precisam ser convidados a justificar as suas respostas à luz da estrutura axiomática que dispõem. Segundo Dreyfus (1999), "a tarefa de justificação é extremamente difícil mesmo para os alunos razoavelmente proficientes" (p. 93). Tais considerações dizem respeito a todos os níveis de escolaridade.

Neste trabalho busca-se a associação entre a abordagem axiomática (densa e complexa) e a leitura de HQs (motivante e lúdica). Por meio desta articulação, pretende-se aqui responder à seguinte questão: *Através da aplicação de um conjunto de HQs que raciocínio geométrico se pode identificar nos alunos?* Para responder a essa questão, foram aplicadas sete HQs contendo assuntos de Geometria Plana, num viés axiomático, em uma turma de estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da UFRB. Ao final de cada HQ foram propostas algumas atividades. Os proponentes desta pesquisa analisaram os níveis de raciocínio geométrico dos estudantes a partir das respostas desses sujeitos. As HQs foram confeccionadas pelo primeiro autor sob a supervisão do segundo. A análise de dados será feita à luz das teorias desenvolvidas pelos autores mencionados na próxima secção.

Tipos de raciocínio geométrico

As argumentações matemáticas apresentadas pelos estudantes variam em função do desenvolvimento cognitivo desses sujeitos. Nesse sentido, autores como Barth (1987), Duval (1998), Martin et al. (2009), Harel e Sowder (1998) e o casal Van Hiele (Battista, 2009) buscaram caracterizar os tipos de raciocínio geométrico dos estudantes.

Segundo Barth (1987), há três estágios na aprendizagem de Geometria: percepção, comparação, inferência e verificação da inferência. A *percepção* ocorre de três formas: sensorial (manipulação dos objetos); icônica (contato com desenhos/ imagens); simbólica (mais uso de palavras). Após atravessar as fases de percepção sensorial e icônica, o aluno já consegue distinguir um quadrado de um retângulo, sem recorrer a justificações elaboradas. No estágio de *comparação*, é possível distinguir exemplos de não exemplos e comparar conceitos distintos. A percepção e a comparação ajudam o estudante a criar conjecturas. Quando o discente começa a estabelecer a relação "causa-efeito" inicia-se o estágio de *inferências*. A inferência pode ser indutiva ou dedutiva. A inferência indutiva baseia-se em exemplos. A inferência dedutiva faz uso do raciocínio lógico (e não, necessariamente, de exemplos). Por fim, pontua Barth (1987), ocorre a verificação da inferência.

Segundo Duval (1998), a aprendizagem de Geometria contempla três fases: a visualização, a construção e o raciocínio. A fase de *visualização* corresponde à percepção sensorial e icônica da teoria de Barth (1987). Durante a fase da *construção* costuma ocorrer a criação de conjecturas. Faz parte dessa fase a utilização de régua, compasso ou *software*. A fase do *raciocínio* diz respeito a obtenção de novas informações a partir de informações dadas. Recorre-se a alguma estrutura axiomática.

Para tratar dos processos de aprendizagem de Geometria, Martin et al. (2009) pontuam que os estudantes podem apresentar algum dos seguintes tipos de raciocínio: empírico, pré-formal ou formal. O *empírico* baseia-se na realização de experimentos. O *pré-formal* contempla os raciocínios intuitivo e indutivo. O *formal* está relacionado com as argumentações rigorosas por meio da sistematização de resultados conhecidos como verdadeiros (os chamados axiomas).

O casal Pierre Van Hiele e Dina Van Hiele classificam o pensamento geométrico em cinco níveis: visual-holístico, descritivo-analítico, relacional-inferencial, formal-dedutivo, rigor. Tais níveis não têm a ver com a idade dos estudantes, mas com o desenvolvimento cognitivo desses atores. Segundo o casal Van Hiele os níveis são sequenciais e hierárquicos (Battista, 2009).

No nível *visual-holístico* os estudantes centram-se na aparência global dos objetos. Pensam que um quadrado não é um retângulo, pois acreditam que estes últimos não podem ter todos os lados do mesmo comprimento. No nível *descritivo-analítico* os estudantes não veem uma figura somente como um todo. Dão-se conta de algumas de suas propriedades. Não conseguem, porém, relacioná-las. No nível *relacional-inferencial os* estudantes conseguem relacionar as propriedades de determinado objeto. Conseguem deduzir que a soma das medidas de um quadrilátero convexo é 360º decompondo-o em dois triângulos a partir de uma diagonal. No nível *formal-dedutivo* os estudantes conseguem elaborar provas matemáticas à luz do raciocínio dedutivo. No nível do *rigor* os estudantes conseguem analisar e distinguir os sistemas axiomáticos.

Harel e Sowder (1998) optam por descrever os níveis de raciocínio dos estudantes a partir das provas comumente apresentadas por estes atores. Preferem chamá-los de esquemas de prova. De acordo com esses atores, são três os possíveis esquemas de prova: a convicção externa, o esquema empírico e o dedutivo. A *convicção externa* consiste na aceitação de uma prova por estar presente no livro didático ou por ser apresentada pelo professor. Não há necessariamente um entendimento da prova (a compreensão pode ser substituída pela memorização). O *esquema empírico* consiste na utilização de casos particulares seguidos de generalização. Relaciona-se também com as experiências sensoriais dos sujeitos. Há uso de figuras e predomina o raciocínio indutivo. Por fim, há o *esquema dedutivo* em que aparecem as relações de causa e efeito a partir de um sistema axiomático.

Os dois primeiros estágios da *percepção* apontada por Barth (1987) correspondem à *fase de visualização* na classificação de Duval (1998). Conforme se pode perceber na Figura 1, durante essa fase o nível de pensamento geométrico dos estudantes é do tipo *visual-holístico* à luz da classificação de Van Hiele (Battista, 2009). Nesse estágio, partindo da categorização de Martin et al. (2009), o raciocínio do estudante pertence ao *nível empírico*.

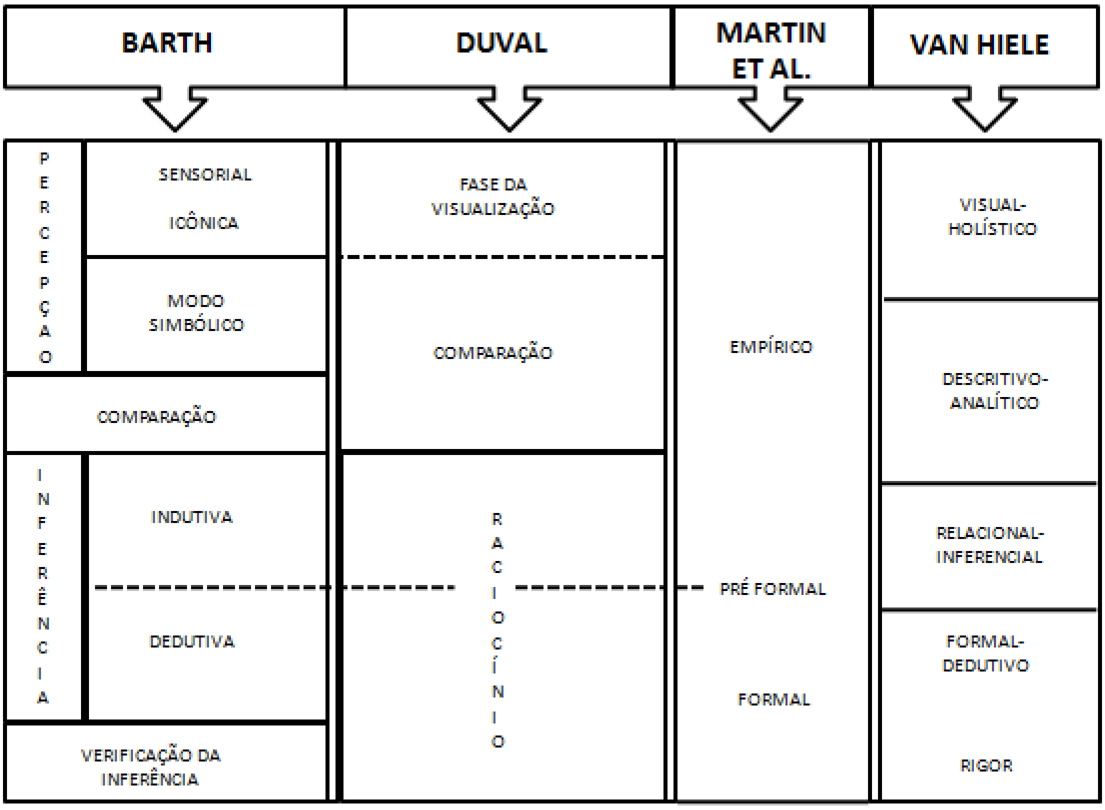


Figura 1. Processos de aprendizagem em geometria

As duas primeiras colunas da Figura 1 dialogam com as fases de aprendizagem em geometria. As duas últimas dizem respeito ao tipo de raciocínio empregado em cada uma dessas fases.

Ainda sobre o processo de aprendizagem de Geometria, Jones (2002) assinala que a visão computacional que os estudantes têm da matemática fazem com que eles não compreendam o valor das provas matemáticas e tampouco a forma como devem desenvolvê-las. É necessário resgatar a abordagem dedutiva intercalando-a com a indução e com a experimentação.

Materiais e métodos

O conjunto dos participantes da pesquisa é constituído por trinta e dois estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da UFRB que estavam cursando o componente curricular *Geometria Plana e Espacial* do primeiro ano e cujas idades variavam entre 17 e 35 anos. Foram aplicadas sete HQs ao longo de dezesseis encontros realizados no ano de 2014. A pesquisa foi realizada no ambiente de trabalho do primeiro autor deste trabalho (designado de agora em diante como o *investigador*), mais especificamente em uma turma em que ele atuava como professor. Esta escolha deveu-se aos seguintes fatores: interesse pessoal do investigador em realizar pesquisas dentro do espaço onde já atuava; facilidade quanto a obtenção da anuência da direção do campus universitário no que tange a realização da investigação.

A pesquisa seguiu o paradigma qualitativo de investigação e o modelo metodológico adotado foi o estudo de caso. Optou-se por investigar com profundidade os impactos da utilização das HQs em um grupo específico. Nesta pesquisa não se pretende generalizar os resultados obtidos num contexto específico mas contribui para a produção de conhecimento (Mazzotti e Gewandsznajder, 1999). O investigador atuou como pesquisador-participante atuando numa interação constante com os participantes (Chizzoti, 2003).

Após a aplicação de cada HQ, foram entregues algumas atividades aos participantes acerca dos conteúdos apresentados. As respostas das atividades permitiram ao investigador avaliar a compreensão dos estudantes acerca dos conteúdos expostos bem como identificar o tipo de raciocínio geométrico empregado por eles. Houve também, em cada HQ, uma seção intitulada *Parando um pouco para refletir sobre a leitura* (PPPRSL). Esta seção consistia em uma atividade de múltipla escolha inserida no meio de cada HQ. Caso os estudantes assinalassem a alternativa correta poderiam prosseguir com a leitura. Caso contrário, deveriam reler a HQ até aquele ponto para então tentar responder novamente a atividade. A cada par de estudantes foi entregue uma HQ. As HQs foram produzidas pelo investigador, no *toondoo* (disponível em: www.toondoo.com) de junho de 2013 a julho de 2014. A Tabela 1 apresenta o conteúdo de cada HQ.

Tabela 1. Relação dos conteúdos presentes nas HQs

HQ	Conteúdos
HQ_1	Os Elementos de Euclides
HQ_2	Axiomas de incidência e de ordem. Segmento de reta, semirreta e semiplano.
HQ_3	Axiomas de medição de segmentos. Ponto médio de um segmento.
HQ_4	Axiomas de medição de ângulos. Classificação de ângulos. Retas perpendiculares.
HQ_5	Congruência de triângulos. Propriedades de triângulos isósceles. Bissetriz, mediana e altura relativa a um triângulo.
HQ_6	Teorema do ângulo externo. Desigualdade triangular.
HQ_7	Cálculo de área de regiões limitadas por figuras planas.

Além das respostas às atividades de cada HQ foram utilizados outros instrumentos de recolha de dados tais como questionários e entrevistas. Foram quatro questionários, um diagnóstico (QD) e três ao longo da experiência (Q1, Q2 e Q3). O QD teve como objetivo identificar a formação prévia dos participantes, sobretudo no que compete aos conteúdos de Geometria. Os restantes destinaram-se à coleta das impressões dos alunos acerca da HQ_2, HQ_4, HQ_6, respetivamente. A análise das outras HQs se deu através das entrevistas as quais ocorreram com nove participantes. A escolha desses últimos sujeitos se deu a partir da disponibilidade dos mesmos em encontrar o investigador fora do horário da aula. Eles se disponibilizaram espontaneamente após uma solicitação estendida a toda a turma.

A partir de agora os participantes serão denotados por A_i, com i variando de 1 a 32. Os termos *participantes*, *alunos*, *estudantes* ou *discentes* serão usados como sinônimos. Da mesma forma, os termos *investigador*, *pesquisador* e *professor* serão utilizados para designar o primeiro autor deste trabalho.

Os níveis de pensamento geométrico dos estudantes foram classificados segundo a descrição apresentada na tabela 2. Não foi adotado um único autor, dentre Barth, Duval, Martin et al. ou o casal Van Hiele, por se entender aqui que as teorias propostas por eles não são excludentees mas complementares.

Tabela 2. Níveis de pensamento geométrico utilizados

Níveis de pensamento	Descrição
Formal-dedutivo (FD)	Inferência dedutiva de Barth Nível formal de Martin et al. (2009) Nível formal-dedutivo de Van Hiele (foram acrescentadas algumas respostas ainda que contenham pequenos deslizes de linguagem ou notação)
Formal-dedutivo a melhorar (FDm).	Semelhante ao FD mas peca em: prolixidade, ordenamento das ideias, respostas demasiadamente sucintas
Semi-dedutivo (SD)	Argumentações bem estruturadas e dadas de forma dedutiva alternam-se com afirmações sem justificações. Foram inseridas aqui as respostas em que foram utilizados resultados não demonstrados em sala. Inserem-se aqui respostas inacabadas com lógica dedutiva. Está entre o nível relacional-inferencial e formal-dedutivo de Van Hiele. Aproxima-se do nível pré-formal de Martin et al. (2009)
Raciocínio indutivo ou incompleto (IN).	Contempla as inferências indutivas (Barth, 1987), raciocínio empírico (Martin et al. 2009) e está entre os níveis descritivo-analítico e relacional-inferencial (Van Hiele). Respostas inacabadas que seguem uma lógica indutiva
Raciocínio inconclusivo ou com erros conceituais (EC).	Atividades não respondidas, respondidas com erros, utilização de resultados equivocados, confusão entre hipótese e tese

Na próxima secção serão apresentadas algumas respostas que se constituem como representativas do conjunto de respostas apresentadas pelos alunos. Como as atividades propostas nas duas primeiras HQs não demandam necessariamente a construção de argumentações formais, o raciocínio geométrico dos alunos foi analisado a partir das restantes HQs.

Resultados

O raciocínio geométrico dos estudantes não está dissociado das experiências prévias desses sujeitos com as argumentações em Matemática. Por meio das entrevistas (E) realizadas, os alunos A_6, A_7, A_9 e A_{10} fizeram as seguintes declarações:

> [A geometria] era mais cálculo, cálculo de área, encontrar cateto, encontrar hipotenusa, medição dos ângulos, do triângulo, era mais voltado para esse lado. [A_6]
>
> Na educação básica a gente nunca ouviu falar de axioma (...) é só mecânica, prática. Eles passam, por exemplo, a área de um triângulo: base vezes altura dividido por dois. E por aí vai... Mas não demonstram para a gente o porquê daquilo ou quem foi que chegou naquilo. [A_7]
>
> (...) eram basicamente desenhos no quadro... muito poucos exemplos, (...) não davam assim, muita ênfase pra esse conteúdo. [A_9]

(...) falaram que... tipo... a soma dos ângulos interno do triângulo.... Nem explicavam o porquê. Falou que era e pronto! [A_{10}]

As declarações acima apontam para a ausência de um ensino pautado numa perspectiva lógica-dedutiva. Priorizava-se as atividades envolvendo cálculos numéricos. A validade dos resultados matemáticos provinha da autoridade do professor ou da utilização de desenhos apresentados pelo docente. As demonstrações matemáticas não eram apresentadas e tampouco cobradas dos estudantes como referiu A_7 na entrevista: "Até chegar aqui, (...) nunca tive a necessidade, nunca precisei, nunca foi cobrado demonstrar".

Por uma questão de tempo e espaço, optou-se por apresentar aqui os excertos de respostas apresentadas por alguns participantes para as atividades propostas nas HQs de número 4, 6 e 7. Tal escolha deveu-se ao fato dessas respostas conterem o raciocínio geométrico que mais esteve presente ao longo de toda a investigação. No que concerne às demais HQs, serão expostos dados numéricos resultantes das análises de todas as respostas apresentadas. Os dados postos iniciam-se na HQ de número 3.

Na HQ_3 foram propostas duas atividades. No Gráfico 1 pode-se ver uma descrição dos tipos de raciocínio geométrico utilizados pelos alunos.

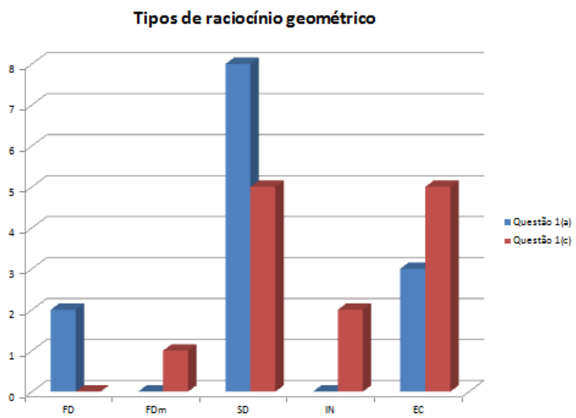


Gráfico 1. Tipos de raciocínio geométrico verificado nas respostas dos alunos às atividades propostas na HQ_3

O gráfico 1 revela uma supremacia do raciocínio semi-dedutivo (SD). Nas respostas da primeira atividade não foram encontrados raciocínio dos tipos FDm e IN. Na segunda atividade não houve respostas de natureza FD.

Na HQ_4 foram apresentados os resultados relacionados com os axiomas de medição de ângulos. Ao final da HQ foram propostas duas atividades. A Figura 2 traz o excerto da resposta apresentada por alguns alunos à primeira atividade.

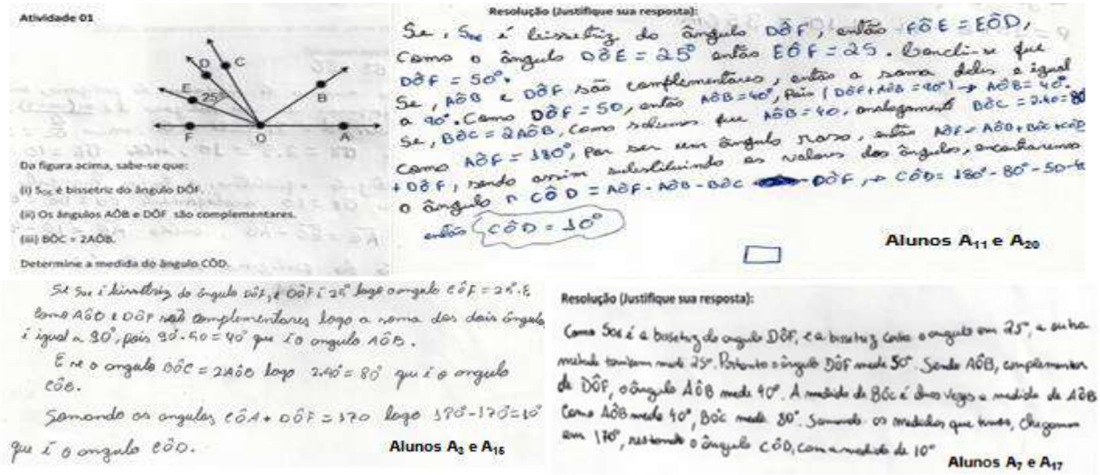


Figura 2. Excerto de respostas apresentadas por A_{11} e A_{20}, A_3 e A_{15}, A_7 e A_{17} à primeira questão proposta ao final da HQ_4.

As respostas indicadas na figura 2 revelam que os alunos usaram as hipóteses de forma lógica e dedutiva. Os textos estão bem escritos e revelam a presença do raciocínio geométrico FD. Esse mesmo tipo de raciocínio foi verificado nas respostas apresentadas por onze duplas dentre as treze duplas presentes. O Gráfico 2 apresenta os tipos de raciocínio geométrico empregados pelos alunos na resolução das duas atividades.

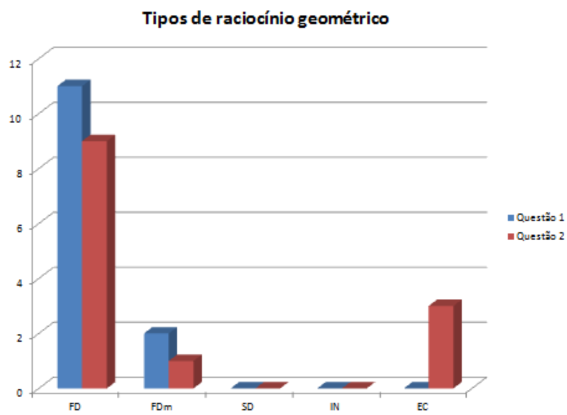


Gráfico 2. Tipos de raciocínio geométrico empregados pelos estudantes nas respostas das atividades propostas na HQ_4

De acordo com o gráfico 2 em ambas as atividades houve a predominância do raciocínio geométrico FD. Não foram identificados registos dos raciocínios SD e IN. O raciocínio EC foi verificado apenas na segunda atividade. No que se refere ao conteúdo desta HQ, A_{12} mencionou no questionário Q_2 que “o assunto é fácil e a revista ajuda bastante”.

O Gráfico 3 apresenta os níveis de raciocínio geométrico identificado nas respostas atribuídas pelas treze duplas que respondera às duas questões propostas na HQ_5.

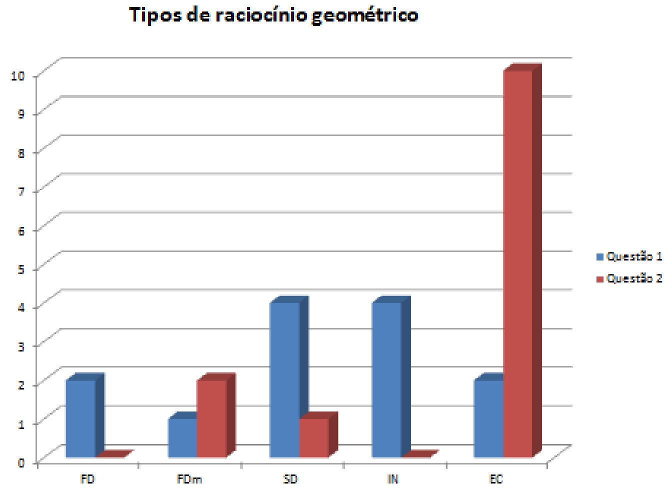


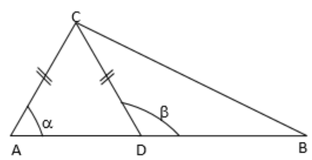
Gráfico 3. Tipo de raciocínio geométrico verificado nas respostas dos alunos às atividades propostas na HQ_5

O gráfico 3 revela a predominância dos raciocínios SD e IN na primeira questão. Houve registos dos cinco tipos de raciocínio geométrico. Na segunda questão há, de um lado, a supremacia de respostas com raciocínio EC e do outro a ausência do raciocínio FD.

A HQ_6 contempla o teorema do ângulo externo, a desigualdade triangular e os casos de congruência de triângulos retângulos. Diante da quantidade de assuntos, a leitura da HQ ocorreu em três momentos distintos. Foram propostas três questões no final da HQ conforme mostra a Figura 3.

Atividades Propostas

Considerando a figura abaixo, sabe-se que $\overline{CA} = \overline{CD}$.



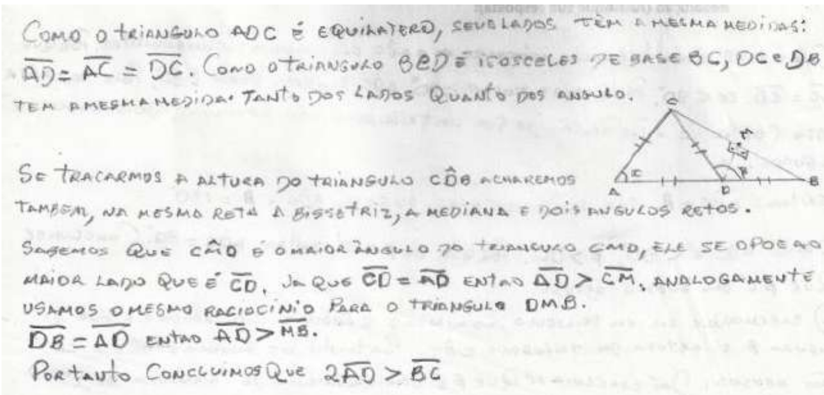
(a) Mostre que β é um ângulo obtuso.

(b) Prove que BC é o maior lado do triângulo BCD.

(c) Supondo que ADC é um triângulo equilátero e que BCD é um triângulo isósceles, mostre que $\overline{BC} \leq 2\overline{AD}$.

Figura 3. Atividades propostas na HQ_6

A terceiro item retratado na Figura 3 pode ser resolvida por meio da desigualdade triangular (DT). A_{10} e A_{28}, porém, não recorreram à DT. Eles apresentaram uma solução extensa que se destaca pela forma como foram empregados os conteúdos da HQ_6. A figura 4 traz o excerto da solução apresentada por esses alunos.



Como o triângulo ADC é equilátero, seus lados têm a mesma medidas: $\overline{AD} = \overline{AC} = \overline{DC}$. Como o triângulo BCD é isosceles de base BC, DC e DB tem a mesma medida. Tanto dos lados quanto dos angulo.

Se traçarmos a altura do triângulo CDB acharemos também, na mesma reta a bissetriz, a mediana e dois angulos retos.

Sabemos que $C\hat{M}D$ é o maior angulo do triangulo CMD, ele se opõe ao maior lado que é $\overline{CD}$. Já que $\overline{CD} = \overline{AD}$ então $\overline{AD} > \overline{CM}$, analogamente usamos o mesmo raciocínio para o triangulo DMB.

$\overline{DB} = \overline{AD}$ então $\overline{AD} > \overline{MB}$.

Portanto concluimos que $2\overline{AD} > \overline{BC}$

Figura 4. Solução apresentada por A_{10} e A_{28} à terceira questão proposta ao final da HQ_6

Como se pode ver na figura 4, A_{10} e A_{28} recorreram às propriedades dos triângulos isósceles. Apresentaram os argumentos de forma lógica e dedutiva. Em todos os itens da atividade retratada na figura 3, a maior parte das respostas foi construída por meio do raciocínio FD. O gráfico 4 apresenta um levantamento da quantidade de respostas construídas com cada tipo de raciocínio geométrico considerado neste texto.

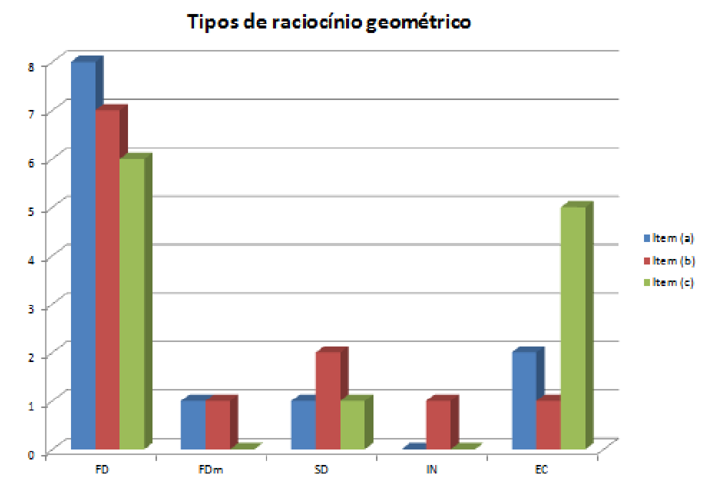


Gráfico 4. Tipos de raciocínio geométrico encontrado nas respostas dos estudantes às questões propostas ao final da HQ_6

O gráfico 4 revela o predomínio do raciocínio FD. Nos itens *a* e *b* houve uma expressiva diferença entre a quantidade de respostas com raciocínio FD e a quantidade de respostas com os outros tipos de raciocínio geométrico. No item *c* essa diferença diminuiu. Houve um aumento nas respostas com raciocínio EC.

A fragmentação da leitura da HQ_6 em três etapas fez com que o número de secções PPPRSL aumentasse. Os alunos foram convidados a apresentar as justificativas nas duas últimas secções. O gráfico 5 apresenta a quantidade de respostas dadas por meio de cada tipo de raciocínio geométrico nas duas últimas secções de PPPRSL.

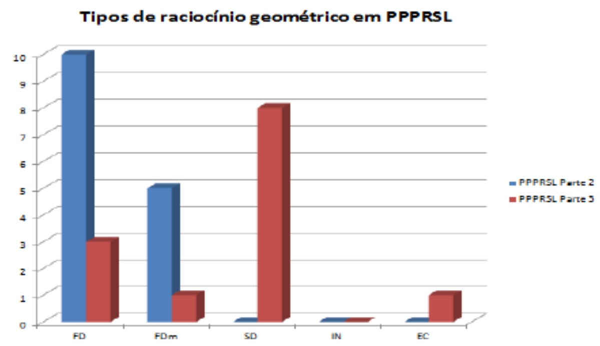


Gráfico 5. Tipos de raciocínio geométrico encontrado nas respostas dos estudantes às duas últimas partes da secção PPPRSL na HQ_6

Conforme se pode perceber através do gráfico 5, ao longo da leitura da HQ_6 os alunos recorreram ao raciocínio FD, FDm ou SD. Não houve registos de respostas construídas segundo uma lógica IN e apenas uma na presença do raciocínio EC.

Sobre a HQ_6, os alunos A_9 e A_{11} fizeram os seguintes comentários no questionário Q_3: "Como já tinha dito ao professor, esta foi uma das melhores historinhas [A_9]; "Essa revista ficou muito explicativa. Deu para absorver o máximo de conteúdos (...) eu não modificaria nada [A_{11}].

A HQ_7 contemplou o cálculo de área de figuras planas. Tendo como cenário um campo de futebol foram apresentadas as deduções das fórmulas das áreas das regiões limitadas por alguns polígonos (retângulo, paralelogramo, triângulo, trapézio) e pelo círculo. A figura 5 apresenta as atividades propostas ao final da leitura.

Figura 5. Atividades propostas ao final da HQ$_7$

O item *c* presente na figura 5 refere-se à comparação entre o comprimento do círculo central e o perímetro do trapézio MNRS. A maior parte das respostas foi construída por meio dos raciocínios FD ou FDm. As duplas que apresentaram o raciocínio do tipo FDm destinaram ao leitor (o professor, os colegas) a tarefa de estabelecer conexões entre as etapas que constituem a resolução. As duplas que apresentaram o raciocínio geométrico FD reuniram corretamente as linguagens simbólica, icônica e verbal. A figura 6 apresenta a resposta construída por uma das duplas.

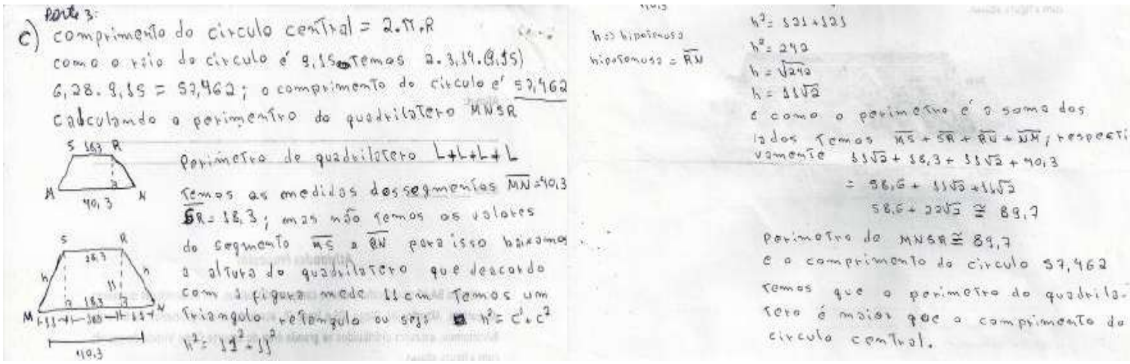


Figura 6. Solução proposta pelos alunos A$_{12}$ e A$_{29}$ ao terceiro item da questão proposta ao final da HQ$_7$

Como se pode perceber na figura 6, os alunos A$_{12}$ e A$_{29}$ tentaram estabelecer um diálogo com o leitor: “não temos os valores do[s] segmento[s] $\overline{MS}$ e $\overline{RN}$ para isso baixamos a altura do quadrilátero”. Estes estudantes não apresentam apenas os cálculos e as figuras, mas tentaram explicar textualmente os procedimentos adotados. Apresentaram o raciocínio geométrico FD.

O gráfico 6 apresenta a distribuição dos tipos de raciocínio geométrico ao longo dos três itens propostos.

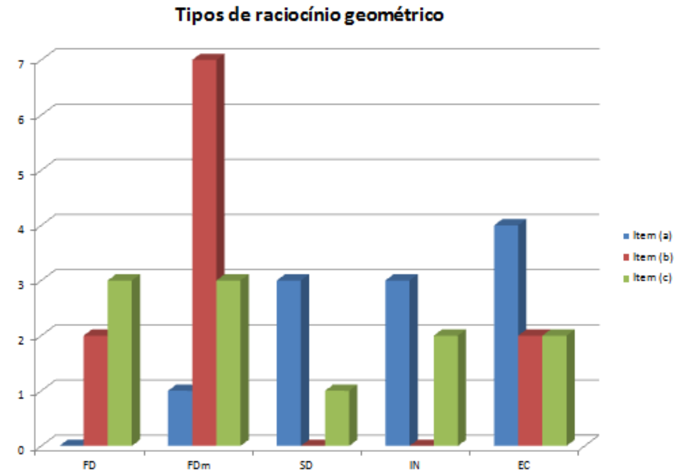


Gráfico 6. Tipos de raciocínio geométrico encontrado nas respostas atribuídas pelos estudantes às atividades propostas na HQ_7

O gráfico 6 apresenta um pico do raciocínio do tipo FDm durante a resolução do item *b*. No item *a* há um predomínio dos raciocínios SD, IN e sobretudo do raciocínio EC. Já no item *c* destacam-se os raciocínios FD e FDm.

Discussões

Na apresentação dos resultados, os níveis de raciocínio geométrico dos alunos foram classificados em: FD, FDm, SD, IN e EC. Desta vez, primando pela simplicidade do texto, optou-se por apenas três categorias: Dedutivo (FD e FDm), Semi-dedutivo (SD) e Não dedutivo (IN e EC). O gráfico 7, construído a partir dos gráficos apresentados na secção anterior, mostra a incidência desses níveis de raciocínio a partir das respostas dos estudantes às atividades propostas.

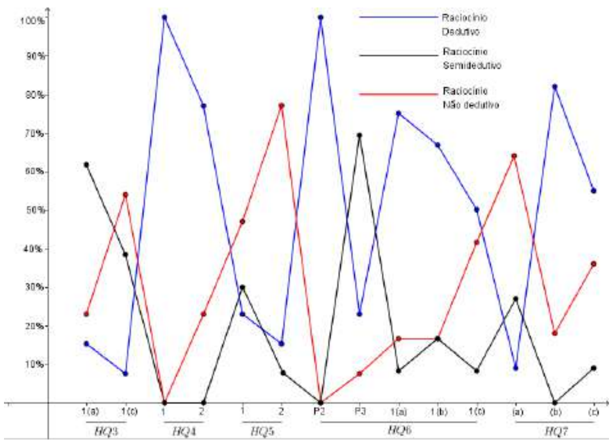


Gráfico 7. Percentual de respostas com os raciocínios dedutivo, semidedutivo e não dedutivo

Com o intuito de tornar o gráfico 7 mais compreensível optou-se por traçar linhas contínuas em vez apresentar apenas pontos isolados. Desta forma é mais fácil identificar o crescimento e o decrescimento de cada tipo de raciocínio. É possível ainda perceber o raciocínio predominante em cada atividade.

A despeito da falta do tratamento dedutivo em Geometria ao longo da educação básica dos participantes, o gráfico revela que as argumentações de natureza dedutiva foram aquelas encontradas com maior frequência. Na maior parte deste gráfico, a linha azul aparece acima das linhas vermelha e preta. A maior incidência do raciocínio dedutivo se deu nas atividades relacionadas às HQs de números 4, 6 e 7. Em momento algum a linha azul interceptou o eixo das abscissas. Isto significa que em todas as atividades foi possível encontrar alguma resposta dadas de forma dedutiva.

A seção anterior aponta alguns elementos que nos ajudam a entender a predominância do raciocínio dedutivo nas HQs de números 4, 6 e 7. A HQ_4 apresentou um conteúdo de baixo grau de complexidade de acordo com muitos participantes. A HQ_6 teve a sua leitura dividida em três momentos. A aprendizagem pôde ocorrer de forma mais processual. A HQ_7 trouxe o cálculo de área, um assunto comumente visto na educação básica.

Como as linhas azuis nem sempre estão acima das linhas vermelhas e pretas no gráfico 8 é razoável considerar que o nível de raciocínio de alguns estudantes nem sempre são de natureza formal-dedutiva. Esta conclusão aproxima-se da hipótese de que os níveis de raciocínio geométrico da classificação de Van Hiele não são necessariamente disjuntos. Conforme defende Pegg e Davey (1998, citado por Clements, 2003) alguns estudantes podem ter raciocínios de dois níveis diferentes sem ter necessariamente esgotado ambos os níveis. Há, porém sempre um nível predominante, defendem os autores.

Comparando os resultados obtidos no gráfico 8 com a formação prévia dos participantes é possível concluir que o raciocínio de natureza dedutiva pode ser estimulado e desenvolvido. É necessário, antes, que os estudantes tenham acesso a argumentações dessa natureza como o tiveram por meio das HQs.

Conclusões

Na fase inicial da pesquisa, os alunos não demonstraram familiaridade com o tratamento formal-dedutivo em Geometria. A partir das HQs aplicadas iniciou-se a aproximação desses sujeitos com as justificações de caráter lógico-dedutivo. O gráfico 7 revela que o contato com as HQs ajudou os participantes a desenvolverem o pensamento geométrico formal-dedutivo. A banda desenhada não pode ser caracterizada como a única responsável pelos dados expostos no gráfico 7. Contudo, não se pode descartar a sua influência no processo dos estudantes de aquisição da Geometria sob um viés axiomático.

Os dados revelaram que o desenvolvimento do raciocínio geométrico perpassa pela necessidade imposta aos estudantes de justificar as suas respostas à luz da estrutura axiomática que lhes é apresentada. É preciso interpelá-los, estimulá-los, incentivá-los a desenvolver argumentações de natureza dedutiva. Quanto maior a compreensão dos estudantes acerca dos conteúdos apresentados maior será a qualidade das argumentações apresentadas. A metodologia de ensino também exerce um papel relevante. Em vez de se apresentar uma série de resultados em um curto intervalo de tempo é preferível apresentá-los de forma mais gradual para que a aprendizagem possa ocorrer de forma efetiva.

Este trabalho trata-se de uma pesquisa pioneira que necessita, portanto, ser revisitada e aprimorada. Nem todos os conteúdos de Geometria Euclidiana Plana foram expostos nas HQs. Além disso, apesar de beber na fonte de Barth (1987), Duval (1998), Martin et al. (2009) e casal Van Hiele (Battista, 2009), ao classificar o raciocínio geométrico dos alunos o investigador pode ter cometido algum equívoco de interpretação. Esta investigação tem, portanto, as suas limitações.

Como tema de futuras investigações põe-se aqui a dicotomia entre a formalidade da linguagem matemática, sobretudo nas estruturas axiomáticas, e a coloquialidade da linguagem quadrinística. É plausível investigar em que medida o rigor matemático pode fragilizar a ludicidade que tanto se espera das histórias em quadrinhos.

Referências bibliográficas

Bankov, K. (2013). Teaching geometry of Bulgaria. *European Journal of Science and Mathematics Education, 1*(3), 158-164.

Barth, B. M. (1987). *A aprendizagem da abstração: métodos para um maior sucesso escolar*. Lisboa: Instituto Piaget.

Battista, M. T. (2009). Highlights of research on learning school geometry. In T. V. Craine, & R. Rubenstein (Eds.), *Understanding geometry for a changing world* (pp. 91-108). United States: National Council of Teachers of Mathematics.

Chizzoti, A. (2003). A pesquisa qualitativa em ciências humanas e sociais: evolução e desafios. Revista Portuguesa de Educação, 16(2), 221-236.

Clements, D. H. (2003). Teaching and learning geometry. In J. Kilpatrick, W. Gary Martin & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 151–178). Reston, Virginia, USA: NCTM.

Dreyfus, T. (1999). Why Johnny can't prove. *Educational Studies in Mathematics*, *38*(1), 85-109.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (pp. 37 - 52). London: Kluwer Academic Publishers.

Hansen, V. L. (1998). Changes and trands in geometry curricula. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (pp. 235-242). London: Kluwer Academic Publishers.

Harel. G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: results from exploratory studies. *CBMS Issues in Mathematics Education*, *7,* 234-283.

Jones (2002). Issues in the teaching and learning geometry. In L. Haggarty (Ed.), *Aspects of Teaching Secondary Mathematics: perspectives on practice* (pp. 121-139). London: Routledge Falmer.

Martin, W. G., Carter, J. A., Forster, S., Howe, R., Kader, G. D., Kepner, H., Quander, J. R., McCallum, W., Robinson. E., Snipes, V. & Valdez, P. (2009). *Focus in high school mathematics: Reasoning and sense making*. United States: Nacional Council Teachers of Mathematics.

Mazzotti, A. J. A., & Gewandsznajder, F. (1999). *O método nas ciências naturais e sociais: pesquisas quantitativas e qualitativas*. São Paulo: Editora Pioneira.

AVALIAR ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: ARTICULAÇÃO ENTRE INVESTIGAÇÃO, TEORIA E PRÁTICA

Louise dos Santos Lima[1], *Ariana Cosme*[2]
[1]Doutoranda em Ciências da Educação da Universidade do Porto,
louisefalconnyery@hotmail.com
[2]Faculdade de Psicologia e Ciências da Educação da Universidade do Porto,
ariana@fpce.up.pt

Resumo. *Este trabalho é um recorte de uma tese de doutoramento em desenvolvimento que objetiva analisar, interpretar e compreender a intervenção/ação de docentes durante o processo em que alunos constroem estratégias que emergem no decorrer de uma aula orientada pela Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas. A partir de pressupostos teóricos e de reflexões sobre avaliação por meio de uma aula orientada pela Metodologia, nos indagamos sobre o que é ensinar, aprender e avaliar, considerando estas três ações como indissociáveis. Por fim, apresentamos a articulação entre achados investigativos, que consideram que o registro oral dos alunos é mais rico que o registro escrito; a teoria sobre avaliação e a prática docente.*

Abstract. *This work is a cut of a doctoral thesis in development that intends to analyze, interpret and understand the intervention/action of teachers during the process in which students construct strategies that emerge in the course of a class guided by the Methodology of Teaching-Learning-Assessment through Problem Solving. Based on theoretical assumptions and reflections on evaluation in a class oriented by the methodology, we ask ourselves what is teaching, learning and evaluating, considering these three actions as inseparable. Finally, we present the articulation between investigative findings, which consider that the oral record of the students is richer than the written record; The theory of assessment and the teaching practice.*

Palavras-chave: *Ensino-Aprendizagem-Avaliação; Resolução de Problemas; Intervenção docente.*

O cenário é para refletir

Freire (1996) sublinha que não existe o ato de ensinar sem o ato de aprender, de tal forma que foi aprendendo que o ser humano descobriu a possibilidade de ensinar. Entretanto, considerando que no modelo de avaliação do ensino tradicional, todos os alunos devem avançar ao mesmo tempo no conteúdo e atingir, ao mesmo tempo, os objetivos; chamamos para a reflexão: Se um estudante obtém baixo rendimento em uma área, ou seja, não aprendeu o que era suposto, podemos considerar que o conteúdo foi ensinado? Ampliando a reflexão, se o conteúdo não foi aprendido, o que devemos alterar para que o seja? Neste sentido, como podemos avaliar a nossa própria prática de ensinar? Como a avaliação pode ser um instrumento de orientação das práticas discentes e docentes?

Considerando que nas aulas expositivas exercidas como modalidade quase exclusiva do ensino tradicional, o saber do professor é afirmado mediante uma sucessão de enunciados, não há a valorização de como ocorre a aquisição de conhecimentos pelos estudantes, nem como os mesmos são utilizados, conforme elucidam Trindade e Cosme (2010). Apresentamos a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas como alternativa ao modelo de ensino tradicional, de tal forma que haja reconhecimento e valorização pelo processo de construção e aquisição do conhecimento pelos alunos, objetivando uma possível avaliação contínua das práticas docentes e discentes.

Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas: A teoria

A Metodologia de Ensino–Aprendizagem–Avaliação através da Resolução de Problemas considera que os três processos (ensinar, aprender e avaliar) devem ocorrer simultaneamente durante a construção do conhecimento. Aqui, deve ser possibilitado, conforme indica Freire (1996) que o aluno se assuma "como sujeito também da produção do saber", tendo o professor de estar convencido "de que ensinar não é *transferir conhecimento*, mas criar as possibilidades para a sua produção ou a sua construção".

Nesta metodologia, o problema – atividade desafiadora em que o aluno não dispõe de uma solução imediata – pode disparar o processo de construção de conhecimento e, por isso, é o ponto de partida das aulas de matemática. O objetivo é contribuir para formar conceitos antes mesmo de estes serem apresentados em linguagem matemática formal, priorizando a ação por parte do aluno. Desta forma, a Resolução de Problemas não deve ser desenvolvida como um tópico isolado do currículo, mas como uma orientação para a própria aprendizagem.

Adotar a Metodologia favorece (e promove) ambientes alternativos na aula de matemática, esperando que os professores conheçam e compreendam o raciocínio dos alunos para que sejam capazes de dar suporte ao desenvolvimento das suas aprendizagens, bem como capazes de promover outras habilidades como: autonomia, criatividade, iniciativa, ouvir crítico-reflexivo e reflexão sobre a resolução e solução.

Planejar uma aula orientada por esta Metodologia exige o conhecimento do contexto, ou seja, as condições e circunstâncias em que a atividade (planificada) será aplicada, tanto em relação aos alunos quanto ao conteúdo, aos recursos e aos objetivos. Em geral, a turma é organizada em pequenos grupos, propiciando a aprendizagem cooperativa-colaborativa. Neste momento, é necessário mais que a condução por meio desta divisão para trabalhar um problema, requerendo a orientação do professor, para que os alunos: obtenham a compreensão da dinâmica do grupo; aprendam matemática trabalhando juntos; e desenvolvam a habilidade necessária para a aprendizagem cooperativa-colaborativa, conforme Artzt e Newman (1991 *apud* Azevedo, 2002), e para as discussões coletivas.

A prática é orientada pelo roteiro de trabalho para a sala de aula proposto por Onuchic e Allevato (2011). Neste roteiro, é sugerido que o professor planeje o problema, o apresente à turma para que haja a leitura individual e posterior leitura em grupo. A partir daí, há a resolução do problema em grupo, enquanto o professor realiza o papel de mediador, observador, consultor e incentivador da aprendizagem, conforme Onuchic (1999). Em seguida, os resultados são expostos, pelos alunos, na lousa, para que haja uma plenária para a análise dos resultados, com as necessárias intervenções do professor, e posterior consenso entre os estudantes. Nas palavras de Fernandes *et al.* (2015: 268), a "participação do professor é um indicador relevante na classificação do ambiente de aprendizagem e, na sua organização". Assim, o ambiente da sala de aula pode se configurar como um cenário natural para que os alunos apresentem variadas soluções ao seu grupo e, posteriormente, à classe, aprendendo matemática por meio de interações sociais, negociações significativas e de compreensão compartilhada. Finalmente, o docente formaliza os conceitos e definições matemáticas, realizando as demonstrações que forem necessárias.

Nesta Metodologia, a aprendizagem é um processo ativo e não estático e individual. As interações dos sujeitos com o meio e com os outros indivíduos são as principais promotoras da aprendizagem, o que possibilita a construção do conhecimento, indo ao encontro da teoria sociocultural de Vygotsky (1991). Tal princípio supõe que todas as ações educativas deveriam acontecer em uma interação social, e que a aprendizagem é mais eficaz quando ocorre em grupos do que individualmente, ou seja, em um contexto de cooperação e colaboração com os seus pares.

Na Metodologia, o aluno é sujeito ativo o qual constrói o próprio conhecimento. Quando o aluno "participa ativamente na construção do seu conhecimento, num ambiente favorável à pesquisa e ao questionamento, produz-se uma aprendizagem significativa e integradora, necessária à aquisição e mobilização perene do conhecimento", conforme salienta Fernandes *et al*. (2015: 265). A partir do momento que o estudante está envolvido no processo, para Bruner, a aprendizagem ocorre por descoberta (Pires, 2004), defendendo que o conteúdo deve ser apresentado em forma de problema a ser resolvido e não de forma imediata. Esta ação promove o trabalho autônomo, a autoconfiança e a automotivação (Pires, 2001), o que é possibilitado pela aprendizagem através da Resolução de Problemas.

Ao final da execução de um planejamento, são realizadas considerações - que não encerram o percurso. Este é o momento para avaliar os processos e resultados, esperando que haja novos olhares e reflexões sobre a própria prática docente, o desempenho e a participação dos alunos, bem como a análise da aprendizagem ocorrida.

Avaliar através da Resolução de Problemas

Na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas, consideramos o professor como mediador e os alunos intervenientes ativos, no decurso do processo de construção do conhecimento. O ensino e a aprendizagem ocorrem simultaneamente durante e através da Resolução de Problemas e, a fim de que a avaliação seja integrada ao processo é necessário que esta seja contínua, para que se possa acompanhar o desenvolvimento dos alunos, ao passo que reorienta as práticas docentes, quando necessário. Desta forma, o professor quando avalia através da Resolução de Problemas, tanto considera o trabalho do aluno quanto a sua própria prática. Há uma mudança em relação à função da avaliação, que deve ser ampliada em relação ao conceito tradicional de realização de provas, conforme Nunes (2010). Avaliar continuamente oferece a oportunidade do professor compreender as ideias anteriores dos alunos e identificar em qual etapa do raciocínio estão, podendo, com isso, planejar as formas de intervir e orientar a construção do conhecimento.

Achados investigativos e teoria sobre avaliar

As conclusões da dissertação "O Ensino de Matemática através da Resolução de Problemas: Investigando estratégias dos alunos do Ensino Fundamental" (Lima, 2014), que apresentam uma investigação sobre que tipos de estratégias orais e escritas transparecem em uma aula, na qual foi utilizada a Metodologia de Ensino-Aprendizagem através da Resolução de Problemas, indicam que o registro escrito dos alunos representa uma parte muito pequena do raciocínio realizado durante as atividades. Isso sugere maior atenção por parte dos professores para que haja compatibilidade e coerência entre o registro oral e o escrito.

É apresentado por meio do registro oral dos alunos como estes organizam suas ideias e traçam caminhos muitas vezes mais criativos do que os que foram apresentados nos cadernos. Como exemplo, pode-se citar alguns estudantes que possuíam dificuldades em escrever e organizar seus raciocínios no papel, mas conseguiam verbalizar a resolução do problema tanto para o professor, quanto para os outros integrantes do grupo.

Em alguns casos, ainda que argumentando oralmente, os alunos não identificavam em seu discurso o que correspondia à justificativa da questão. Constatou-se, assim, que os alunos se apresentaram mais criativos e com argumentos mais sólidos em seus registros orais do que nos escritos. Nota-se que a mediação do professor foi fundamental neste processo, mas não suficiente para que eles conseguissem escrever o que pensavam, sugerindo que fosse dada maior atenção a esta etapa. Ainda que haja a necessidade de aperfeiçoamento no processo da mediação docente, o papel do professor como mediador do conhecimento, no momento em que questiona os alunos acerca das razões que os levaram a proceder daquele modo, foi um dos aspectos que contribuíram para o desenvolvimento da capacidade dos estudantes em generalizar.

Considerando que o que o aluno registra por escrito representa (muito) pouco do raciocínio que realiza ao resolver um problema, refletimos sobre a função da avaliação no processo de construção do conhecimento. Tradicionalmente, a avaliação somativa é o final deste processo. Caracterizada por ser classificatória, o objetivo é informar o nível de aprendizagem obtido, comparar os resultados obtidos, visando a atribuição de notas. Entretanto, há outras formas de avaliar, por meio da avaliação diagnóstica e da avaliação formativa.

A avaliação diagnóstica é baseada em verificar a aprendizagem dos conteúdos, para que, a partir de um diagnóstico, possamos traçar caminhos para contornar possíveis obstáculos. Cabe salientar que, por vezes, a avaliação diagnóstica é realizada por meio de provas e testes; entretanto, seu foco não é voltado à nota, mas em compreender o processo de construção de conhecimento.

A avaliação formativa é realizada no decorrer das atividades escolares, durante o processo de produção de conhecimento pelos alunos, o que nos possibilita localizar dificuldades encontradas no caminho. A preocupação central da avaliação formativa reside na coleta de dados para a reorientação do processo de ensino-aprendizagem. O foco não é a atribuição de uma nota, mas da possibilidade de intervir e agir no percurso.

A prática: possibilidades para avaliar

A aula orientada pela Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas assenta em um caráter exploratório, surgindo, após o trabalho autônomo dos alunos apoiados pela mediação do professor, uma fase importante: a discussão coletiva. Estes momentos de discussão que, segundo Ponte (2005: 16), são "oportunidades fundamentais para a negociação de significados matemáticos e construção de novo conhecimento", permitem que a comunicação matemática ocorra por meio do debate. É importante que os objetivos sejam bem definidos, pelo professor, facilitando a interação entre os estudantes e o professor em torno das contribuições dadas pelos alunos e propiciando o compartilhamento de dúvidas e resultados. Este é um momento de trabalho capaz de potencializar a aprendizagem dos alunos em que é papel do professor assumir e concretizar um processo no qual os alunos possuem relevância na comunicação entre os grupos e a turma, devendo estimular os estudantes a confrontarem-se com outras perspectivas, compreendendo potencialidades e limitações.

Com base nas resoluções dos alunos e de modo que a turma possa progredir na aprendizagem, a tarefa de orquestrar e atingir uma discussão coletiva rica matematicamente, que não ocorre de forma espontânea nas aulas, é uma função difícil para o professor, carecendo de planejamento e delimitação dos objetivos, conforme Stein *et al*. (2008). Mais que isso, é necessário gerar o envolvimento ativo dos alunos e não meramente reativo, devendo haver o ouvir crítico-reflexivo e a expressão do seu próprio pensamento, como cita Menezes *et al*. (2014).

Para fomentar a discussão, não somente entre os grupos, mas entre todos os estudantes, segundo Stein *et al*. (2008), é necessário que o professor monitorize o trabalho dos alunos; selecione e organize as resoluções para apresentação e debate; estabeleça conexões entre as várias estratégias apresentadas; e relacione conceitos e procedimentos, realçando as principais ideias matemáticas presentes. Estas ações docentes devem estar relacionadas com os objetivos para que ocorra o debate e a consequente aprendizagem, devendo haver preocupação com a qualidade nas apresentações dos alunos, regulação das interações durante a discussões, criação de um ambiente propício e gestão das relações entre os estudantes, como afirmam Canavarro, Oliveira e Menezes (2014).

A proposta é de que todos os participantes possam ser co-autores das regras construídas na convivência do grupo, compartilhe as decisões tomadas e sejam responsáveis pela qualidade do que é produzido, conforme suas possibilidades e interesses, o que é fomentado pelo trabalho cooperativo-colaborativo.

Articulando investigação, teoria e prática

Filiamo-nos, neste trabalho, à proposta de avaliação formativa. Uma vez que a avaliação formativa é uma prática contínua no processo de ensino-aprendizagem, objetivando melhorar as aprendizagens em curso e reorientar a prática docente; esta possui características que alinham com a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas.

A avaliação não pode ser direcionada exclusivamente ao aluno. Neste processo, a avaliação formativa envolve professores e estudantes a verificarem o que se sabe e o que ainda não se sabe, possibilitando sempre a reorientação da prática do professor.

Freire (1996: 22) sublinha que "a reflexão crítica sobre a prática se torna uma exigência de relação Teoria/Prática sem a qual a teoria pode ir virando blablablá e a prática, ativismo". Como podemos, então, articular a investigação (teoria) e a prática docente?

Em uma aula orientada pela Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas, temos a oportunidade de atingirmos discussões coletivas ricas matematicamente e, por isso, há a possibilidade de ouvir os alunos durante o trabalho cooperativo-colaborativo.

Neste sentido, ouvir os alunos permite ao professor auxiliar os estudantes durante o processo de Resolução de Problemas, dando suporte e preenchendo lacunas. Em uma aula de matemática, a intervenção do professor está relacionada com o domínio dos conceitos e procedimentos próprios da matemática, com o domínio da organização de estratégias que o ajuda a definir o caminho a se seguir, bem como com as necessidades que podem vir a surgir nesse percurso, segundo Trindade e Cosme (2010).

O trabalho cooperativo-colaborativo é uma oportunidade que permite que haja a reflexão e avaliação da própria ação educativa, uma vez que estão educadores, alunos e conhecimentos em permanente construção, que podem se fazer e refazer pelas mediações entre as teorias e práticas produzidas.

A investigação em curso: A intervenção dos docentes

O tema exposto possui relevância teórica e propõe uma mudança do papel do professor e do aluno, da organização do ambiente da sala de aula e dos processos de

Ensino-Aprendizagem-Avaliação em relação ao ensino tradicional, por meio de uma Metodologia alternativa. O objetivo geral da pesquisa em desenvolvimento é analisar, interpretar e compreender como ocorre a intervenção/ação de docentes de Matemática em turmas de 9º ano do Ensino Fundamental no Brasil e, de forma equivalente, de 9º ano do Ensino Básico em Portugal em aulas orientadas pela Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas.

As leituras dos autores de referência acerca do tema em análise contribuíram para a elaboração de um conjunto de questões orientadoras. São elas:

Q1: Como ocorre a intervenção dos docentes no processo de construção de estratégias por alunos em uma aula orientada pela Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas?

Q2: Como o docente gerencia o ambiente da sala de aula, quando opta pela utilização da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas?

Q3: Quais são os recursos e como o docente os disponibiliza para que os alunos atinjam a coerência entre os seus registros orais e escritos?

Q4: Como as diversas interações que ocorrem em sala da aula podem contribuir ou potencializar a aprendizagem do raciocínio matemático em alunos do 9º ano do 1º Ciclo do Ensino Básico/Ensino Fundamental?

Q5: Como a opção pela utilização da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas contribui para a formação de professores do Ensino Básico?

Considerando as questões orientadoras, formamos a seguinte pergunta de partida: ***De que forma os professores, por meio da sua intervenção, enquanto gestores do processo de Ensino-Aprendizagem-Avaliação e do Trabalho Pedagógico, potencializam a Aprendizagem Matemática dos alunos em uma aula orientada pela Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas?***

Pretendemos focar no contexto de instituições públicas portuguesas de Ensino Básico, em turmas do 9º ano do Ensino Básico. Tal escolha decorre da militância por uma Educação Matemática de qualidade para todos, em que o docente tenha condições de instituir atos pedagógicos, assumindo o seu papel transformador. Por se tratar do último ano do nível de ensino correspondente, permite observar a consolidação de uma etapa de aprendizagem.

A pesquisa em desenvolvimento assenta-se numa abordagem qualitativa, cuja preocupação global é indagar o significado dos fenômenos no contexto em que se produzem (Pérez Gómez, 1995 *apud* Morgado, 2016), com recurso ao método de Estudo de Caso. A escolha pela abordagem permite que o investigador foque nos processos e significados, considerando o contexto e as subjetividades dos envolvidos. Adicionalmente, o método escolhido trata de uma metodologia de investigação adequada para a entendimento, análise e a descrição de acontecimentos em contextos complexos, nos quais estão, ao mesmo tempo, envolvidos diversos fatores.

Partindo do pressuposto que “a educação é um fenômeno de cariz eminentemente social” (Morgado, 2016: 25); que a escola é “habitada por seres humanos” (Waller, 1932 *apud* Bogdan e Biklen, 1994: 31); e, ainda, que o ato educativo é “[constitutivo] do sujeito e da sociedade” (Amado, 2014: 22), pretende-se realizar um estudo marcado pelo paradigma interpretativo-fenomenológico, por não ter como propósito desvendar as relações causa-efeitos do fenômeno educativo da aprendizagem Matemática. Todavia, pretende-se procurar interpretar e compreender, a partir da análise das estratégias de Resolução de Problemas, que alunos e professores utilizam, como é que Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas pode estabelecer-se como potenciadora da aprendizagem do raciocínio matemático e, por isso, constituir-se como uma ferramenta bem-sucedida em Matemática.
A investigação foi dividida em duas fases, com o suporte de diferentes técnicas de recolha de dados: a primeira que envolve docentes, com quatro etapas; e a segunda que envolve alunos, com três etapas. Na primeira fase, em sua primeira etapa, por meio da observação participante (De Ketele & Roegiers, 1996 *apud* Morgado, 2016; Goetz & Lecompte, 1988) haverá uma discussão *online*, com os professores que aplicarão as atividades, sobre a Metodologia e suas implicações no ensino, objetivando dar a conhecer e/ou aprofundar os conhecimentos dos docentes nos conceitos necessários para o progresso da aula a ser realizada. As atividades aplicadas pelos professores serão elaboradas por eles, neste espaço de discussão.

Em seguida, realizaremos entrevistas semiestruturadas (Vermersch, 1996; Morgado, 2016) com os docentes envolvidos para que haja a posterior observação direta (Quivy &

Campenhoudt, 2003) das suas aulas. Finalmente, novas entrevistas semiestruturadas serão realizadas com os professores.

A voz dos alunos está presente em toda esta investigação. Assim, além da observação direta dos alunos, realizada durante a aplicação das atividades, aplicaremos questionários (Quivy & Campenhoudt, 1998) e realizaremos *focus group* (Morgado, 2016) com os estudantes, com o objetivo de revelar suas críticas, sugestões e compreensões sobre um ensino que realmente o contemple como construtor do conhecimento.

Organizaremos, classificaremos e submeteremos os dados coletados à análise de conteúdo (Bardin, 1995; Amado, 2014), objetivando descrever e interpretar o conteúdo individual das entrevistas, das observações e dos questionários. Posteriormente, haverá a análise de forma articulada tanto entre eles quanto em relação ao quadro teórico. Ademais, utilizaremos a análise do discurso (Parker, 1992) para averiguar as construções ideológicas inerentes à teoria presentes nas entrevistas.

Algumas considerações

Neste trabalho apresentamos a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas como alternativa ao modelo de ensino tradicional, de tal forma que haja reconhecimento e valorização pelo processo de construção e aquisição do conhecimento pelos alunos, bem como o envolvimento e participação ativa do estudante neste percurso. Entretanto, é destacado por Shulman (1986) que não há um estilo que resolva todos os problemas do ensino, sendo necessário oferecer alternativas durante a formação docente, para que este possa refletir e agir debruçado em um processo em que é agente ativo.

No início deste trabalho, refletimos sobre algumas inquietações que a prática nos sugere. Não tencionando respondê-las na totalidade, mas a ampliar a reflexão, apresentamos nossas ideias.

Se um estudante obtém baixo rendimento em uma área, ou seja, não aprendeu o que era suposto, podemos considerar que o conteúdo foi ensinado? Como citado anteriormente, Freire (1996) já nos responde que não existe o ato de ensinar sem o ato de aprender.

Mas, então, se o conteúdo não foi aprendido, o que devemos alterar para que o seja? A escolha da metodologia de ensino, aprendizagem e avaliação é feita de acordo com o aluno, com suas características, com o conteúdo, com o contexto, entre outras variáveis, devendo ser valorizada a autonomia docente e o propósito do ensino comprometido com a aprendizagem e com a construção do conhecimento.

Assim sendo, como a avaliação pode ser um instrumento de orientação das práticas discentes e docentes? Por meio da avaliação formativa, o discente consegue, pelo que percebe no desenvolvimento dos alunos, reorientar a própria prática. O professor exerce papel fundamental na efetivação de práticas de ensino em sala de aula que propiciam aos alunos os benefícios que o conhecimento matemático pode oferecer. Para isso, é necessário que a formação de professores, inicial e continuada, promova uma profunda reflexão em relação ao próprio conhecimento matemático, aos seus processos de Ensino-Aprendizagem-Avaliação e ao seu lugar no currículo.

Referências bibliográficas

Amado, J. (2014). *Manual de Investigação Qualitativa em Educação*. Coimbra: Imprensa da Universidade de Coimbra.

Azevedo, E. (2002). *Ensino-Aprendizagem das equações algébricas através da resolução de problemas.* (Dissertação de mestrado). Retrieved from http://www.athena.biblioteca.unesp.br/exlibris/bd/brc/33004137031P7/2002/azevedo_eq_me_rcla.pdf

Bardin, L. (1995). *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação: Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Canavarro, A. P., Oliveira, H., & Menezes, L. (2014). Práticas de ensino exploratório da Matemática: Ações e intenções de uma professora. In J. P. d. Ponte (Ed.), *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp. 217-233). Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

Fernandes, D., Pinho, I., Cabrita, I., Alves, L., Silva, J. C. e., & Duarte, P. (2015). Redes multiplicativas e soletos: Aprendizagens matemáticas com sentido. Paper presented at the *Atas do XXVI Seminário de Investigação em Educação Matemática*.

Freire, P. (1996). *Pedagogia da Autonomia*: Paz e Terra.

Goetz, J., & LeCompte, M. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Madrid: Morata.

Lima, L. (2014). *O Ensino de Matemática Através da Reslução de Problemas: Investigando Estratégias dos Alunos do Ensino Fundamental.* (Dissertação de Mestrado). Retrieved from http://www.pg.im.ufrj.br/pemat/62%20Louise%20Lima.pdf

Menezes, L., Ferreira, R. T., Martinho, M. H., & Guerreiro, A. (2014). Comunicação nas práticas letivas dos professores de Matemática. In J. P. d. Ponte (Ed.), *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp. 135-161). Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Morgado, J. C. (2016). *O Estudo de Caso na Investigação em Educação* (2ª ed.). Santo Tirso: De facto Editores.

Nunes, C. B. (2010). *O Processo Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Geometria através da Resolução de Problemas: Perspectivas didático-matemáticas na formação inicial de professores de matemática.* (Dissertação de Mestrado). Retrieved from http://repositorio.unesp.br/handle/11449/102122

Onuchic, L. d. L. R. (1999). Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In M. A. Bicudo (Ed.), *Pesquisa Em Educação Matemática: Concepções e perspectivas* (pp. 199-218). São Paulo: Editora Universidade Estadual Paulista.

Onuchic, L. d. L. R., & Allevato, N. G. (2011). Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. *Boletim de Educação Matemática, 25*(41), 73-98.

Parker, I. (1992). *Discourse Dynamics: Critical analysis for social and individual psychology*. Londres: Routledge.

Pires, D. (2001). *Práticas Pedagógicas Inovadoras em Educação Científica: Estudo no 1º Ciclo do Ensino Básico.* (Tese de doutoramento). Retrieved from http://essa.ie.ulisboa.pt/ficheiros/resumos_teses/2001_resumotesedoutoramento_delminapires.pdf

Pires, D., Morais, A. M., & Neves, I. P. (2004). Desenvolvimento científico nos primeiros anos de escolaridade: Estudo de características sociológicas específicas da prática pedagógica. *Revista de Educação, XII*(2), 129 - 158.

Ponte, J. P. d. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Quivy, R., & Campenhoudt, L. V. (1998). *Manual de Investigação em Ciências Sociais* (J. M. Marques, M. A. Mendes, & M. Carvalho, Trans. 4ª ed.). Lisboa: Gradiva.

Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), 313-340. doi:10.1080/10986060802229675

Trindade, R., & Cosme, A. (2010). *Educar e Aprender na Escola - Questões, desafios e respostas pedagógicas*. Vila Nova de Gaia: Fundação Manoel Leão.

Vermersch, P. (1996). *L'entretien d'explicitation*. Paris: ESF Éditeur.

Vygotsky, L. (1991). *A formação social da mente* (G. d. D. e. R. B.-D. d. C. B. USP, Trans.). São Paulo: Livraria Martins Fontes.

AS PRÁTICAS DE ENSINO DE GRANDEZAS E MEDIDA NO 1.º CICLO DO ENSINO BÁSICO - UMA PERSPETIVA ONTOSSEMIÓTICA

Isabel Cláudia Nogueira[1]

[1] Escola Superior de Educação de Paula Frassinetti/CIPAF, isa.claudia@esepf.pt

Resumo. *A partir de um estudo exploratório sobre grandezas e medida no 1.º ciclo do Ensino Básico – que estabeleceu como objetivos determinar que práticas matemáticas são implementadas na sala de aula, qual a natureza do conhecimento presente e/ou emergente em tais práticas, que relações são estabelecidas entre objetos e processos matemáticos e didáticos implicados nessas práticas, que funções aí desempenham professor e alunos e, ainda, que recursos materiais apoiam essas práticas –, apresenta-se neste texto a descrição das práticas matemáticas mais significativas identificadas nos processos de ensino analisados. Os resultados obtidos evidenciaram o uso de situações extramatemáticas e/ou do quotidiano e o predomínio de conhecimento procedimental e algorítmico como as práticas matemáticas mais características destes processos de ensino.*

Abstract. *Based on an exploratory study of Measurement classroom practices in the 1st cycle of Primary Education – which set as objectives to determine which are the mathematical classroom practices, what is the nature of present and/or emerging knowledge in such practices, what relationships are established between mathematical and didactic objects and processes implied in those practices, what functions do teacher and students play in classroom practices and what kind of resources support these practices –, this paper presents the most significant pratices identified in the study processes analyzed. The results obtained evidenced the use of extra-mathematical and/or from daily life and the predominance of procedural and algorithmic knowledge as the most characteristic mathematical practices of these study processes.*

Palavras-chave: *análise didática; modelo ontossemiótico; práticas de sala de aula; grandezas e medida; ensino básico.*

1. Introdução

A descrição e reflexão de práticas da sala de aula parecem-nos componentes fundamentais à compreensão dos processos de aprendizagem/ensino da Matemática. Não negligenciando a importância das atividades a montante desse momento, a análise de práticas letivas afigura-se preponderante na construção de um cenário que ilustre o desenvolvimento curricular desta disciplina, contribuindo para um alargamento do *corpus* de conhecimentos da Educação Matemática.

Fruto do desenvolvimento e implantação de perspetivas de cariz sociocultural e situado da cognição, da aprendizagem e do ensino, segundo as quais não é possível separar o conhecimento do(s) contexto(s) em que este é adquirido, assiste-se ao renascer do interesse por estudos sobre as práticas educativas, concebidas como indiscutíveis fontes de conhecimento, encarando a aula como um contexto de ensino e de aprendizagem construído por professores e alunos. Assim, quando tentamos compreender as interações dos intervenientes em processos estudo, o estudo da configuração de práticas escolares apresenta-se como um processo apropriado: a clarificação do desenvolvimento curricular na exploração da Medida, nomeadamente no que concerne ao currículo implementado neste tema matemático, possibilitada pela análise detalhada de práticas letivas de Matemática no 1.º ciclo do Ensino Básico, poderá permitir detetar dificuldades sentidas na sua realização e aspetos que as influenciem, contribuindo para um melhor entendimento desses processos. A perceção de que tarefas de carácter relativamente rotineiro – cálculo de medidas, aplicação de fórmulas e conversão de unidades – constituíam o centro das atividades de sala de aula no âmbito da exploração da Medida consubstancia-se na literatura existente. A par da utilização pouco significativa de instrumentos de medida, a prevalência desse tipo de tarefas nos diferentes tópicos sobre medida é apontada como estando na origem de uma aprendizagem por processos de memorização de fórmulas e de repetição de procedimentos (Battista & Clements, 1996; Outhred & Mitchelmore, 2000; Clements & Bright, 2003; Kamii, 2006).

Neste trabalho, apresentamos resultados parcelares da análise didática realizada a processos de ensino e aprendizagem de grandezas e medidas no 1.º ciclo do Ensino Básico. Após a inclusão de contributos da literatura sobre a exploração de grandezas e medida apresentada na secção 2, procede-se na secção 3 à apresentação do marco teórico que sustenta a análise dos processos de ensino. Na secção 4 são explicitados os contornos metodológicos da investigação desenvolvida e que produziu os resultados descritos na secção 5, que evidenciam e exemplificam o tipo de práticas matemáticas desenvolvidas em esses processos de ensino e aprendizagem. Conclui-se este trabalho na secção 6 com algumas reflexões finais decorrentes da sua elaboração.

2. A Medida no Ensino Básico

No panorama recente da investigação em Didática da Matemática, não tem sido muito numerosa a produção relacionada com práticas do tema Medida no Ensino Básico. No contexto português, subsiste a necessidade de realização de estudos sobre os processos desenvolvidos nas práticas educativas da aprendizagem e do ensino da Matemática específicas para o 1.º ciclo (Gomes, Ralha e Hirst, 2001), nomeadamente no que diz respeito a práticas relacionadas com a abordagem de grandezas e dos processos de medição. Partilhando com Chamorro (2001) da necessidade de identificação e compreensão dos aspectos didáticos específicos à aprendizagem e ensino destes conteúdos, entendemos tanto a sua descrição como a sua explicação como ferramentas eficazes e adequadas ao serviço da engenharia didática nesta área, alimentando um corpo de conhecimentos essencialmente ao nível do currículo implementado nas salas de aula do 1.º ciclo aquando das explorações das grandezas e dos processos de medição.

Do ponto de vista matemático, a complexidade inerente à formalização dos conceitos integrados na Medida torna, para a mesma autora, a sua aprendizagem e o seu ensino tradicionalmente difíceis: para os alunos, que não os chegam a compreender, reduzindo-os apenas à manipulação e memorização de regras eminentemente aritméticas subjacentes ao funcionamento do Sistema Métrico Decimal; para os professores, na sua tarefa de os apresentarem aos seus alunos de forma compreensível (Chamorro, 1995). Por outro lado, e segundo a mesma autora, a acessibilidade a instrumentos de medição tecnologicamente sofisticados que substituem grandezas por números – balanças digitais e instrumentos utilizando tecnologia *laser*, por exemplo –, permitem falar de uma crescente "*aritmização da medida*" (1995, p. 36), desvalorizando o seu caráter topológico, desvanecendo os contornos inerentes à conservação da grandeza e transpondo a ordenação de objetos de uma dada grandeza para uma ordenação numérica, entre outras reduções. A compreensão das relações estabelecidas entre conceitos, professor e alunos durante esses processos revela-se por isso essencial ao tratamento didático destes temas.

Na exploração dos conceitos de grandeza e/ou medida, Aires e Campos (2011) apontam não só as dificuldades detetadas nas práticas deste tema como referem igualmente os erros mais comuns dos alunos, salientando o não reconhecimento da relação de proporcionalidade inversa entre unidade de medida e valor da grandeza a medir, a recorrente confusão entre os conceitos de perímetro e área (e também entre área e volume), o uso excessivo de valores inteiros (levando os alunos a assumir apenas os números inteiros como medidas exatas) e a utilização de dados irreais em enunciados (que poderão dificultar quer atividades de estimação, quer mesmo o seu espírito crítico). Para as mesmas autoras, uma inadequada análise sensorial (estimar uma grandeza através do recurso a um sentido errado) poderá, em certos casos, justificar a seleção incorreta do instrumento de medição, que apontam ainda a baixa utilização de diferentes instrumentos de medição em situações variadas como causa para a manipulação inadequada dos mesmos e, consequentemente, para a obtenção de medições erradas.

3. Marco teórico de referência

A abrangência e complexidade que caraterizam o estudo de práticas de sala de aula orientaram a procura de um marco teórico e metodológico que, no âmbito da Educação Matemática, disponibilizasse ferramentas adequadas para descrever, analisar e interpretar estas práticas: o modelo Ontossemiótico da Cognição e Instrução Matemática (EOS), descrito em Godino e Batanero (1998) e em Godino, Contreras e Font (2006), afigurou-se-nos adequado a estas exigências.

O EOS considera os objetos matemáticos como entidades emergentes de "*sistemas de práticas manifestadas por um sujeito (ou instituição) perante um conjunto de situações-problema*" (Godino, 2002, p. 242), classificadas como operativas (toda a ação realizada por alguém para resolver problemas matemáticos), discursivas ou comunicativas (visando a comunicação e a validação da solução) ou normativas ou de regulação (permitindo a sua generalização a outros problemas ou contextos). A realização de qualquer prática matemática implica, para este modelo, a mobilização de um conjunto de objetos primários, que poderão ser de distintos tipos (situações-problema, linguagem, definições e conceitos, proposições, procedimentos e argumentos) e que serão os constituintes básicos de objetos de complexidade superior (*ibidem*, p. 246) obtidos por processos matemáticos.

As aplicações deste modelo, descritas em Gonzato, Godino e Neto (2011), Crisóstemo (2012), Fernández, Godino e Cajaraville (2012), Aké (2013) e Drivers *et al.* (2014), atestam a sua utilidade na compreensão de processos de estudo na sua complexidade, pelo que foi assumido como marco concetual de referência a esta investigação.

4. Opções metodológicas

Optou-se pela realização de um estudo interpretativo, de natureza eminentemente descritiva, suportado na análise de excertos de aulas do 1.º ciclo do Ensino Básico, inscrevendo-se esta investigação como um estudo de caso agregado (Patton, 1990; Ponte, 1994; Stake, 1994). A opção de recolha de dados recaiu na observação naturalista e não participante, em consonância com Yin (2005) e Estrela (1986).

Este texto descreve os resultados obtidos na identificação e análise de práticas matemáticas, de natureza discursiva e operativa, presentes ou emergentes nessas aulas, respeitando noções teóricas do EOS detalhadas em D'Amore, Font e Godino (2007), em Font e Contreras, (2008), em Godino, Font, Wilhelmi e Castro (2009) e em Font, Planas e Godino (2010), por exemplo.

5. Apresentação de resultados

Na fase inicial deste ciclo de escolaridade (1.º e 2.º anos), as manifestações de natureza discursiva dos alunos recaem essencialmente na apresentação de propostas de procedimentos de medição, de comunicação e por vezes de interpretação dos resultados e de elaboração de justificações para as soluções encontradas. A prática discursiva docente incide na apresentação oral de contextos extramatemáticos como motivação para as tarefas e de contextos intramatemáticos para a explicitação de conteúdos; destina-se também a gerir as intervenções dos alunos e a promover a institucionalização de conceitos.

As práticas operativas dos alunos incidem em técnicas de determinação de quantidades da grandeza, por comparação direta ou indireta, e de utilização de instrumentos de medição. A comparação direta baseia-se na utilização de unidades de natureza antropomórfica e outras unidades não; a medição indireta apoia-se na utilização de instrumentos de medida de uso comum (réguas, fitas métricas e balanças). A exemplificação de técnicas e de utilização de instrumentos de medição, a par da validação de procedimentos e da avaliação das soluções, são as práticas matemáticas mais frequentemente desenvolvidas pelo docente.

A tabela 1 inclui evidências das práticas identificadas no 1.º ano de escolaridade.

Tabela 1. Práticas operativas e discursivas no 1.º ano

P: Vamos imaginar que a M. vai andar de balancé com a irmã mais velha. O que acontece se alguém sai de um lado?
A professora coloca o estojo num dos pratos da balança e no outro coloca um cone de revolução em madeira. P: O que é mais pesado, I.? Al: O estojo do J.M. P: Porquê? Al: Porque está a cair mais para baixo! P: Isso significa que é tão pesado que faz força para baixo.
P: Quando medimos a nossa altura o que é que usamos? Se calhar um carpinteiro

usa outro utensílio…
P: Hoje nós utilizamos então o metro para fazermos medições, porque assim não há confusões, é tudo igual! Já alguém viu utilizar o metro? Al: O meu pai quando quer vender as casas. P: Para quê? Al: Para os senhores saberem o tamanho. P: Imaginem agora – que vão para o segundo ano – que vão comprar uma nova mochila. Há mochilas de muitos tamanhos. Mas vocês não sabem se os vossos livros cabem lá dentro. O que fazemos? L: Podemos medir os livros para ver se cabem.

Na tabela 2, que a seguir se apresenta, estão incluídos exemplos respeitantes a aulas do 2.º ano de escolaridade

Tabela 2. Práticas operativas e discursivas no 2.º ano

P: Vocês então vão todos à Comunhão! Als: Sim! P: Então agora façam de conta que eu sou a vossa mãe e estou a organizar a vossa festa. Reparei que me faltam algumas coisinhas…
P: Imaginem que queríamos medir a largura da porta e não temos nada connosco. O que fazemos? Al: Abrimos os braços e… Al: Já sei! Púnhamos as mãos; se não chegassem púnhamos outra. Depois se fossem quatro a medida era quatro. P: [*dirigindo-se ao aluna que falou*] Vem mostrar na porta. *A criança levanta-se, dirige-se à porta e mede a sua largura utilizando palmos.* P: Outra maneira. B. Al: Se tivermos uma régua muito grande também conseguimos medir a porta. P: Mas nós não temos! Não temos nada connosco. Al: Já sei, com os pés! P: [*dirigindo-se ao aluno que fez a última proposta*] Vem-nos mostrar. *O aluno mede a largura da porta, verificando que esta corresponde a quatro passos.*
P: Então agora vamos utilizar uma medida igual para toda a gente. Vou também dar um clip a cada grupo e vão medir a capa, o caderno e a palhinha. Viram que quando medimos com palmos não deu igual a toda a gente. Agora vamos ver quantos clips contam. *Os alunos começam a efectuar as suas medições. Em todos os grupos o ambiente é calmo. São utilizadas duas estratégias: nuns grupos, a repetição da unidade é conseguida rodando o clip sobre si mesmo; noutros, marcando a extremidade do clip antes de o retirar para prosseguirem a medição. A professora vai circulando pelos grupos, verificando os procedimentos e ajudando, quando necessário*
P: Agora vamos ver quais foram os valores obtidos com os fios. *A professora volta ao quadro e regista os novos valores obtidos por cada grupo, completando a tabela anterior:*

	clips	*fios*
Grupo 1	8 e meio	3 e meio
Grupo 2	9 e meio	2 e um terço
Grupo 3	12	3 e meio
Grupo 4	11 e meio	3 e meio

Grupo 5	6 e meio	5 e meio

P: Eu dei um clip e um fio a cada grupo. Porque será que dá números diferentes?
Als: Porque têm tamanhos diferentes.
P: Reparem no tamanho dos fios. Já viram como este é pequeno? Estão a ver que é por isso que tiveram de …
Al: … o utilizar mais vezes!
P: Como aconteceu quando medimos o comprimento da sala, que não deu igual.

Nas aulas dos dois primeiros anos de escolaridade, destaca-se a presença de entidades matemáticas de natureza linguística e de carácter procedimental, associadas à determinação de quantidades de grandeza, materializados verbalmente e recorrendo a representações simbólicas. As proposições enunciadas são raramente fundamentadas em objetos matemáticos e as sequências argumentativas observadas evidenciam formulações em que estão praticamente ausentes regras e especificidades da linguagem matemática.

No 3.º e no 4.º ano de escolaridade, e como podemos constatar nos exemplos integrados nas tabelas 3 e 4, regista-se maior prevalência em práticas de natureza algorítmica. As ações dos alunos centram-se na exercitação de técnicas de representação simbólica de quantidades de medida e de realização de cálculos para determinação de valores de medida, subsistindo residualmente atividades de medição (indireta) por recurso a instrumentos de medição. O professor vai gerindo os processos de exercitação desenvolvidos, procedendo à sua exemplificação e validando os resultados, terminando habitualmente cada configuração com a institucionalização do conhecimento posto em jogo no processo de ensino. No domínio discursivo, a enunciação de proposições e a formulação de soluções para as tarefas são insistentemente suportadas por registos escritos, requerendo a leitura e interpretação de enunciados por parte dos alunos e representação escrita dos resultados.

Tabela 3. Práticas operativas e discursivas no 3.º ano

P: Quantos centímetros são do zero ao um?
Als: Um centímetro.
P: E quanto é do quarenta e cinco ao quarenta e seis?
Als: Um centímetro.
P: Um centímetro é só um bocadinho pequenino dos que têm no metro articulado. E quantos centímetros tem o vosso metro articulado?
Al: Cem.
P: E como se chama este pedacinho [*referindo-se a um decímetro*]?
Als: Decímetro.

P: Então um decímetro está dividido em quantos centímetros?
Als: Dez.
P: Então o decímetro está dividido em dez partes iguais.

Al: Um dia tem vinte e quatro horas, mas em vez de fazermos a soma de vinte e quatro horas sete vezes fazemos vinte e quatro a multiplicar por sete!
P: Alguém tem outra explicação?
Al: Nós sabemos que uma semana tem sete dias e um dia tem vinte e qautro horas, então, fazemos logo directamente sete vezes vinte e quatro.
P: Ou vinte e quatro vezes sete.
No quadro, o aluno resolve a multiplicação $\begin{array}{r} 24 \\ \times\ 7 \\ \hline 168 \end{array}$ *e escreve 24 x 7 = 168*
completando no quadro: E uma semana? Uma semana tem 168 horas.

Os registos simbólicos e gráficos assumem especial importância nas dinâmicas de aula nos dois últimos anos de, constituindo a tradução ostensiva de conceitos (não ostensivos) envolvidos nas práticas, das propriedades nelas reconhecidas e dos procedimentos algorítmicos realizados; as proposições enunciadas são fruto dos resultados que vão sendo obtidos na resolução das situações exploradas e em alguns casos traduzem equivalências previamente instituídas.

Tabela 4. Práticas operativas e discursivas no 4.º ano

Situação Problemática:
O Manuel partiu da estação de comboios Coimbra B às 11h 40m. A viagem até Aveiro demorou 30 minutos. A que horas chegou o Manuel a Aveiro?

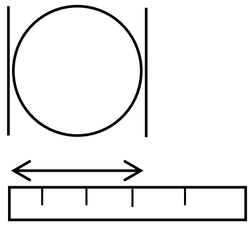
Três alunos respondem de imediato.
P: Raciocinem mentalmente comigo. F., Meio dia e dez, porquê?
Al: Se passassem vinte minutos era ao meio-dia, assim como são trinta são mais dez, então é meio-dia e dez.
P: P., diz lá tu!
O aluno repete a justificação. O professor pede-lhe que vá ao quadro para ir resolver a situação colocada. O aluno escreve no quadro:

$$\begin{array}{r} 11\text{ h }40\text{ min} \\ +\ 00\text{ h }30\text{ min} \\ \hline 11\text{ h }70\text{ min} \end{array}$$

P: Então, meio-dia e dez ou onze horas e setenta?
Al: É indiferente!
P: Não, não é!
Al: Posso ir fazer diferente?
P: Vai lá ao quadro fazer.
O aluno dirige-se ao quadro, e vai explicando à medida que vai escrevendo:

$$\begin{array}{r} 11\text{ h }40\text{ m} \\ +\ 00\text{ h }20\text{ m} \\ \hline 12\text{ h }00\text{ m} \\ +\ 10\text{ m} \\ \hline 12\text{ h }10\text{ m} \end{array}$$

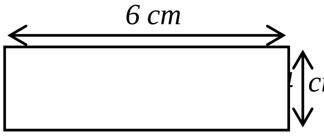
O professor dirige-se ao quadro onde representa:



P: Assim, eu não determinava o diâmetro?
Als: Sim.

No quadro, o professor acrescenta:

6 cm



cm *Calcula o perímetro da figura*
P =

Um aluno vai ao quadro e completa a igualdade: P = 6+6+4+4 = 20 cm

Em todos os anos de escolaridade as atividades são suportadas em processos de comunicação e representação de noções, procedimentos e propriedades matemáticas, visíveis mediante processos de materialização: os conceitos e as proposições enunciados, de carácter essencialmente não ostensivo, são concretizados com recurso à linguagem verbal (no registo oral e na sua representação escrita) e por vezes em linguagem simbólica; os procedimentos matemáticos de índole algorítmica executados – comparação de quantidades de grandeza, determinação de valores de quantidades de grandeza por medição e resolução de operações de cálculo de valores de medida – são suportados por registos materializados com recurso a linguagem simbólica e gráfica.

6. Reflexões finais

A análise de processos de ensino sobre grandezas e medida no 1.º ciclo do Ensino Básico revelou como práticas matemáticas: o recurso a situações extramatemáticas e/ou do quotidiano dos alunos como pontos de partida para a mobilização de conteúdos; a prevalência de práticas algorítmicas, de natureza manipulativa (manuseamento de instrumentos de medida) e operativa (determinação de quantidades de medida) em detrimento de exploração concetual; o predomínio de objetos e processos matemáticos suportados na linguagem verbal, nos anos iniciais, e na linguagem simbólica e gráfica, no final do 1.º ciclo de escolaridade.

A aplicação de ferramentas didáticas disponibilizadas pelo modelo EOS, parcialmente descrita neste texto, proporciona uma maior visibilidade da sala de aula, entendida como um contexto de ensino e aprendizagem construído pelas atividades desenvolvidas por alunos e professor, tornando possível explicitar *o que* e *como* os alunos aprendem e *o que* e *como* os professores ensinam Matemática.

A análise de práticas sobre uma grandeza específica transversal aos quatro anos do 1.º ciclo, ou orientadas por um único professor com a sua turma durante um ano letivo ou, ainda, focadas na integração de recursos didáticos nas aulas sobre grandezas e medida, são outras possibilidades de investigação.

Referências bibliográficas

Aires, A.P. & Campos, H. (2011). Construção intuitiva do conceito de medida. In P. Palhares, A. Gomes, E. Amaral (Coords.), *Complementos de Matemática para Professores do Ensino Básico* (pp. 47-62). Lisboa: Lidel-Edições Técnicas.

Aké, L.P. (2013). *Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros en formación.* Tese de doutoramento, Universidad de Granada, Espanha.

Battista, M. T. & Clements, D. H. (1998). Students' understanding of three-dimensional cube arrays: Findings from a research and curriculum development project. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 227-248). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Chamorro, M.C. (1995). Aproximación a la medida de magnitudes en la Enseñanza Primaria. *Uno*, *3*, 31-53.

Chamorro, M.C. (2001). Las dificultades en la enseñanza aprendizaje de las magnitudes en educación primaria y E.S.O. In E. Fernández González (Coord.), *Dificultades del Aprendizaje de las Matemáticas* (pp. 79-122). Madrid: Ministério de Educación, Cultura e Deporte, Instituto Superior de Formación del Profesorado.

Clements, D. H. & Bright, G. (Eds.) (2003). *Learning and teaching measurement, 2003 yearbook*. Reston, VA: NCTM.

Crisóstemo, E. (2012). *Idoneidad de procesos de estudio del cálculo integral en la formación de profesores de matemáticas: Una aproximación desde la investigación en didáctica del cálculo y el conocimiento profesional.* Tese de doutoramento, Universidad de Granada, Espanha.

D'Amore, B., Font, V. & Godino, J.D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Paradigm*a, *XXVIII*(2), 49-77.

Drijvers, P. Godino, J.D., Font, V. & Trouche, L. (2013). One episode, two lenses. A reflective analysis of student learning with computer algebra from instrumental and onto-semiotic perspectives. *Educational Studies in Mathematics, 82*, 23-49.

Estrela, A. (1986). *Teoria e Prática de Observação de Classes. Uma Estratégia de Formação de Professores*. Lisboa: Instituto Nacional de Investigação Científica.

Fernández, T., Godino, J.D. & Cajaraville, J.A. (2012). Razonamiento Geométrico y Visualización Espacial desde el Punto de Vista Ontosemiótico. *Bolema, 26*(42), 39-63.

Font, V. & Contreras, A. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 69*, 33-52.

Font, V., Planas, N. & Godino, J.D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, *33*(2), 89-105.

Gomes, A., Ralha, E. & Hirst, K. (2001). Sobre a formação matemática dos professores do 1º Ciclo: Conhecer e compreender as possíveis dificuldades, In I. C. Lopes, M. Cecília

Costa (Orgs.), *Actas do XII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 175-196. Lisboa: APM.

Godino, J.D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *22*(2/3), 237-284.

Godino, J.D. & Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. In A. Sierpinska, J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer.

Godino, J.D., Contreras, A. & Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, *26*(1), 39-88.

Godino, J.D., Font, V., Wilhelmi, M.R. & Castro, C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias, 27*(1), 59-76.

Gonzato, M., Godino, J.D. & Neto, T. (2011). Evaluación de conocimientos didácticomatemáticos sobre la visualización de objetos tridimensionales. *Educación Matemática*, *23*(3), 5-37.

Kamii, C. (2006). Measurement of length: How can we teach it better? *Teaching Children Mathematics*, *13*(3), 154-158.

Outhred, L. N. & Mitchelmore, M. C. (2000). Young children's intuitive understanding of rectangular area measurement. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(2),144-167.

Patton, M.Q. (1990). *Qualitative evaluation methods*. London: Sage.

Ponte, J.P. (1994). O estudo de caso na investigação em educação matemática. *Quadrante, 3*(1), 3-18.

Stake, R. (1994). Case studies. In N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 236-247). London: Sage Publications.

Yin, R. (Ed.) (2005). *Introducing the world of education. A case study reader*. Thousand Oaks: Sage Publications.

O HUMOR EM MANUAIS ESCOLARES DE MATEMÁTICA

Luís Menezes[1], *António Ribeiro*[1], *Ana Maria Oliveira*[1], *Véronique Delplancq*[1], *Helena Gomes*[1], *Ana Patrícia Martins*[1], *Isabel Aires de Matos*[1], *Floriano Viseu*[2], *Pablo Flores*[3] *João Paulo Balula*[1]
[1] Escola Superior de Educação de Viseu e CI&DETS, menezes@esev.ipv.pt
[2] Universidade do Minho e CIED, fviseu@ie.uminho.pt
[3] Universidade de Granada, pflores@ugr.es

Resumo. *O humor tem larga presença na vida das pessoas, combinando elementos afetivos e cognitivos com o intuito de bem-dispor. Para além dos contextos de lazer, o humor tem também sido utilizado em contextos associados ao trabalho, nomeadamente nas escolas, colocado ao serviço do ensino. Sendo os manuais escolares um recurso muito utilizado pelos professores, particularmente pelos de Matemática, pareceu-nos pertinente: (i) averiguar a utilização do humor em manuais escolares de Matemática; e (ii) descrever o humor utilizado nos manuais, discutindo o seu enquadramento didático. Para isso, submetemos a análise de conteúdo quatro manuais escolares de Matemática (dos 4.º e 5.º anos de escolaridade) com larga difusão nacional. Os resultados revelam que o humor, tanto no texto como na ilustração, não tem praticamente expressão nos manuais. Ainda assim, todos os manuais valorizam, ao nível da ilustração, situações de boa disposição, apresentando, recorrentemente, pessoas a rir.*

Abstract. *Humor has a wide presence in people's lives, combining affective and cognitive elements with the intention of well-being. In addition to the leisure contexts, humor has also been used in contexts associated with work, namely schools, placed at the service of teaching. Since school textbooks are a resource widely used by teachers, particularly those of mathematics, it seems pertinent to us: (I) to access the usage of humor in Mathematics school textbooks; and (ii) describe the humor used in textbooks and discuss their didactic framework. For this, we submitted, to content analysis, four textbooks of Mathematics (of the 4th and 5th grades) with wide national diffusion. The results reveal that humor, both in the text and in the illustration, has practically no expression in the textbooks. Even so, all textbooks value, at the illustration level, light-hearted situations, presenting repeatedly, people laughing.*

Palavras-chave: *Humor; ensino da Matemática; manuais escolares; ensino básico.*

Introdução

O humor é uma parte integrante da experiência humana, sendo largamente valorizado na sociedade atual (Adão, 2008; Meyer, 2015). A abundância de publicações e programas de cariz humorístico (televisivos, radiofónicos e internet) é um indicador de que o humor é apreciado em contextos de lazer, contribuindo para a criação de ambientes de boa disposição e para a diminuição do *stress*. A utilização do humor em contextos associados ao trabalho tem sido experimentada em diversas instituições, como empresas, hospitais e escolas, embora sem consenso, porque a ideia de "sério", que se liga ao trabalho, nem sempre se conjuga bem com o humor (Martin, 2007). Alguns autores que estudam o humor contrariam esta associação, referindo-se à "seriedade do humor ao longo dos séculos" (Martins, 2015) e ao "lado sério do humor" (Adão, 2008). Um conjunto importante de estudos realizados no final do século XX, revistos por Martin (2007) e Banas, Dunbar, Rodriguez e Liu (2011), dá conta de que o humor tem presença nas escolas e no ensino, estando sobretudo associado ao discurso do professor, favorecendo um estilo de comunicação que motiva os alunos para a aprendizagem, cria ambientes descontraídos e facilita a retenção de informação (Banas *et al*, 2011; Guitart, 2012; Lomax & Moosavi, 2002; Martin, 2007; Meyer, 2015).

Os manuais escolares são, na generalidade dos países, recursos didáticos muito usados pelos professores. Coloca-se a questão de saber em que medida estes manuais incluem situações humorísticas enquanto recurso didático. Embora a investigação sobre o humor em manuais escolares seja escassa, diversos autores, relativamente a diversas disciplinas, referem que ele tende a estar pouco presente (Lomax & Moosavi, 2002; Martin, 2007). Neste contexto, pareceu-nos relevante perceber o que se passa nos manuais escolares portugueses de Matemática. De entre eles, escolhemos quatro manuais com larga difusão nacional, dos níveis de ensino onde temos realizado mais investigação: 1.º e 2.º ciclos do ensino básico. Assim, selecionámos dois manuais do 4.º ano e dois do 5.º ano com o objetivo de: (i) Averiguar a utilização do humor em manuais escolares de Matemática; e (ii) Descrever o humor utilizado nos manuais e discutir o seu enquadramento didático. À custa destes objetivos, procuramos responder à questão: Em que medida os manuais escolares de Matemática incluem situações humorísticas enquanto recurso didático?

Humor e sentido de humor

Os primeiros médicos da antiguidade clássica recorriam ao lexema *humor* para se referirem a alguns líquidos existentes no corpo e acreditavam que o equilíbrio desses líquidos determinava as condições físicas e mentais do indivíduo. Nessa época, acreditava-se que havia quatro humores: sangue, bílis amarela, fleuma e bílis negra. Portanto, o humor era um estado afetivo ligado à constituição do organismo. Sobre essa estrutura psicofisiológica, o ser humano tenderia a ser irritável, impassível, triste, alegre, entre muitos outros estados. Seria uma condição do corpo e da mente que ultrapassaria a ação imediata. Por isso, seria difícil contar piadas a uma pessoa amargurada ou irritada (Adão & Oliveira, 2010).

O conceito de humor tem evoluído ao longo do tempo, sendo alvo de estudo de diversas disciplinas científicas como, por exemplo, a Psicologia, a Linguística e a Sociologia, desde os clássicos gregos, Platão e Aristóteles (Martins, 2015). Banas *et al* (2011) referem que "o humor envolve a comunicação de múltiplos significados incongruentes que são divertidos de alguma maneira" (p. 117). O humor é, pois, uma forma de comunicação, que alguns autores designam como comunicação humorística (Banas *et al*, 2011; Meyer, 2015; Pina, 2014), que joga com a ambiguidade e a polissemia, e que combina elementos cognitivos e emotivos para fazer os outros rir (Banas *et al*, 2011; Guitart, 2012; Martin, 2007). O riso e o humor são partes integrantes das características do ser humano, uma vez que aumentam a sociabilidade entre o homem e participam do desenvolvimento da linguagem (Adão, 2008; Meyer, 2015; Pina, 2014). Mas, se o riso e o humor estão intimamente relacionados, não são sinónimos. Na verdade, o riso pode ser a consequência do humor, mas também pode ser mecânico e quase impulsivo. Da mesma forma, o humor pode causar o riso, mas não necessariamente (Adão, 2008).

Se o riso é, na sua essência, "le propre de l'homme" – para retomarmos a expressão consagrada de François Rabelais – ele constitui, na sua materialidade, o testemunho audível e visível de que a mensagem humorística é compreendida e partilhada. Independentemente das formas que as suas dimensões culturais, éticas ou axiológicas possam assumir, o riso está indiscutivelmente associado ao humor e a uma dinâmica de partilha que só se realiza no seio da relação dialógica que o locutor humorista mantém com o(s) seu(s) interlocutor(es). Pondo de lado os exemplos de humor físico presentes em certos "*gags*", o humor puramente circunstancial ou ainda o humor que obedece a códigos semióticos assentes na imagem, nomeadamente na caricatura ou nos cartoons sem legendas, verificamos que há um forte peso da componente linguística na maioria das manifestações humorísticas.

O humor pode recorrer a diferentes mecanismos, que são explicados por diversas teorias, das quais salientamos as seguintes: a teoria da superioridade, a teoria da incongruência e a teoria da libertação (Adão, 2008; Banas *et al*, 2011; Martins, 2015). Para a primeira teoria, o humor assenta num sentido de superioridade de alguém que promove a ridicularização engraçada de comportamentos do outro – trata-se de um mecanismo muito associado ao humor britânico e, habitualmente, presente no humor político (Martins, 2015). A incongruência é um mecanismo em que se confrontam, de forma hilariante, duas situações aparentemente incoerentes (Adão, 2008; Martins, 2015). O terceiro mecanismo caracteriza-se por um crescendo de tensão que se desfaz repentinamente por um acontecimento inesperado (Adão, 2008; Martins, 2015). O humor pode assumir várias formas (anedotas, piadas, trocadilhos, *cartoons*, banda desenhada, ilustrações), pode aparecer em diferentes situações (formais ou informais), pode referir-se a diferentes alvos e pode ser espontâneo, ou preparado antecipadamente (Adão, 2008; José, 2008).

Cada pessoa tem a sua maneira própria de processar o humor, isto é, de percecionar e produzir humor: "Embora quase todos se envolvam no humor até certo ponto, as pessoas diferem umas das outras na sua compreensão e produção de humor" (Martin, 2007, p. 229). O sentido de humor pode ser considerado uma característica da personalidade, referindo-se a uma tendência consistente de compreender, desfrutar ou criar humor na sua vida quotidiana (Martin, 2007). O sentido de humor passou a ser encarado pelos psicólogos como um ingrediente essencial para a saúde mental, sendo associado à autoconsciência, à tolerância e como característica de uma personalidade madura e saudável, sinónimo da capacidade de se adaptar ao *stress* (Adão, 2008; Allport, 1961; José, 2008).

Influenciado pelas teorias de Jean Piaget, McGhee (1979) argumenta que a genuína reação humorística das crianças só começa por volta de meados do segundo ano de vida, quando se desenvolve a capacidade de fantasiar e de fingir, no jogo de faz de conta, o que, em termos piagetianos, corresponde à transição entre o estádio sensorial e motor para o preoperacional. Nesta fase, as crianças já são capazes de usar símbolos e palavras para representarem objetos (Hancock, Dunham & Purdy, 2009).

Humor instrucional

Como vimos, o humor faz parte da experiência humana e em maior ou menor grau, consoante o sentido de humor de cada um, ele está presente na nossa vida. Sendo a educação, formal ou informal, um facto importante dessa existência humana, uma questão se coloca: o humor tem lugar na escola, na prática de ensino dos professores? Em particular, está presente nos manuais escolares? Banas *et al* (2011) e Martin (2007), a partir da revisão que fazem da investigação realizada nas últimas décadas, assinalam, em primeiro lugar, que no final do século XX houve um grande interesse pelo estudo do impacto do humor na aprendizagem, facto esse que diminuiu substancialmente no século em que estamos. Os estudos revistos, que adotam sobretudo metodologias experimentais e quantitativas, dizem respeito a contextos em que o humor é introduzido na prática do professor, procurando-se correlacionar com diversas variáveis, como a capacidade para memorizar informação e a realização de aprendizagens específicas (Banas *et al*, 2011; Martin, 2007). Os principais resultados destes estudos, embora não apontando todos no mesmo sentido, relativamente ao papel do humor em contexto educativo, revelam as tendências seguintes:

- O humor é utilizado enquanto ação comunicativa, ou seja, é visto como um instrumento que facilita a comunicação e o estabelecimento de relações com os alunos: "O uso do humor é um comportamento predominante na comunicação em ambientes pedagógicos e serve para diferentes propósitos" (Banas *et al*, 2011, p. 137);
- O humor tem resultados positivos na criação de ambientes que facilitam a aprendizagem: "o humor instrucional apropriado está relacionado positivamente com um ambiente de aprendizagem agradável" (Banas et al, 2011, p. 130);
- O humor aumenta a capacidade de concentração dos alunos: "Um número substancial de estudos empíricos assinala a capacidade do humor em atrair e manter a atenção dos alunos" (Banas et al, 2011, p. 131);
- O humor ajuda a aprender conceitos que habitualmente geram mais dificuldades nos alunos: "O uso de humor instrucional para aliviar a tensão pode ser especialmente útil para o ensino de tópicos que, em geral, são percebidos pelos alunos como provocadores de ansiedade" (Banas et al, 2011, p. 130);
- O humor utilizado em situações de exame ajuda a diminuir o *stress* que muitas vezes está associado a estes momentos: "A incorporação de humor nos itens do exame pode reduzir o desconforto e a ansiedade experimentados durante as situações de teste, melhorando assim o desempenho" (Banas *et al*, 2011, p. 134).

O estudo sobre a utilização do humor para ensinar Matemática é escasso. Nos últimos anos, Pablo Flores tem trabalhado continuadamente neste tema, tendo editado dois livros sobre o tema, nos quais, a par da teorização, apresenta muitos exemplos, sobretudo na forma de *cartoons*: "Humor gráfico en el aula de Matemáticas" (Flores, 2003) e "Matemáticamente competentes para reír" (Flores & Moreno, 2011). Outros autores têm realizado também trabalho nesta área, dando conta dos benefícios da utilização do humor no ensino e aprendizagem da Matemática (Guitart, 2012; Matarazzo, Durik & Delaney, 2010 ; Shmakov & Hannula, 2010).

A investigação sobre o uso do humor em manuais escolares é bastante escassa e não dá conta do modo como ele é utilizado (Martin, 2007). Este autor refere que o humor pode ser útil para melhorar a atenção dos alunos durante o estudo, mas não existem evidências de que melhore a compreensão dos conceitos (Martin, 2007). Esta conclusão não especifica a forma como o humor é inserido nos manuais escolares, nem como esses manuais são usados pelos alunos. Lomax e Moosavi (2002) comentam que a proposta para o seu primeiro livro de Estatística incluía exemplos humorísticos para motivar, reduzir a ansiedade e promover a compreensão conceptual, mas que quase todos foram retirados pelo editor por considerar que não lhe dava um cariz académico. Aparentemente, o humor em suportes escritos destinados ao ensino, nomeadamente da Matemática, coloca problemas de credibilidade. Como refere Martin (2007), o humor é, por definição, *não sério* num certo sentido, já que ele não pode ser entendido literalmente. A credibilidade e a seriedade do humor instrucional são questões sensíveis, que são muito marcadas culturalmente.

Metodologia

Tendo em conta o objetivo de averiguar a utilização do humor em manuais escolares de Matemática, adotou-se uma metodologia qualitativa, de natureza interpretativa, baseada na análise documental. Assim, foram analisados quatro manuais com larga difusão em Portugal, dois do 4.º ano e dois do 5.º ano de escolaridade. Cada manual foi analisado inicialmente por uma dupla de investigadores, um da área de Didática da Matemática e outro da área de Linguística – a constituição destas duplas deveu-se, por um lado, à natureza comunicativa do humor e, por outro, à área de conteúdo dos manuais. Esta primeira análise foi depois discutida por todos os investigadores da equipa, em momentos plenários, com o intuito de a afinar.

A opção por estes anos de escolaridade decorre de duas razões: (i) estes anos integram os níveis de ensino nos quais os autores desta comunicação trabalham habitualmente; e (ii) nestas idades, os alunos têm melhores condições para apreciar o humor comparativamente com os anos iniciais do 1.º ciclo. Os manuais do 4.º ano analisados foram o *Alfa - Matemática 4*, da Texto Editora, e *Pasta Mágica*, da Editora Areal. Do 5.º ano foram analisados os manuais *Máximo*, da Porto Editora, e *MSI 5*, da Areal Editores.

A análise de dados efetuada foi orientada por categorias de análise apoiadas na literatura, algumas delas definidas *a priori*, e outras que vieram a incluir-se em virtude de a análise de conteúdo mostrar que as categorias definidas inicialmente não eram suficientemente abrangentes. Quanto ao recurso ao humor, apoiados em diversos autores (Adão, 2008; Banas *et al*, 2011; Martin, 2007; Martins, 2015; Meyer, 2015), considerou-se pertinente analisar qual o *tipo de humor* presente, quais os *objetivos da sua utilização*, *que desafios colocava aos alunos* e, ainda, *qual a forma como o humor era apresentado*. Incluiu-se, *a posteriori*, um conjunto de outras categorias como o tipo de ilustração e o tipo de texto utilizados, categorias essas que permitiram incluir um novo tema de análise dos manuais associado ao rir (dada a sua ligação ao humor): *recurso a ambientes de boa disposição* (Quadro 1). De facto, todos os manuais escolares analisados apresentam, em diversas secções, propostas que incluem ilustrações e/ou textos que, não fazendo recurso ao humor, criam *situações de boa disposição*. Para cada uma das categorias de análise foram definidos indicadores, conforme se apresenta no Quadro 1.

Quadro 1. Categorias de análise do humor em manuais escolares.

Temas	Categorias	Indicadores
Recurso ao humor	**Tipo de humor** (mecanismo utilizado)	-*Utiliza incoerência* -*Utiliza o ridículo*
	Objetivos do humor (função instrutiva)	-*Criar um clima agradável* -*Gerar conflitos cognitivos* -*Despertar a criatividade*
	Desafio ao aluno (ação a desenvolver)	-*Observa* -*Discute* -*Resolve uma tarefa (a partir da situação)*
	Forma de apresentação (suporte discursivo)	-*Texto* -*Gráfico*
Recurso a ambientes de boa disposição	**Ilustrações** (situação apresentada)	-*As personagens riem-se expressamente* -*São apresentados ambientes agradáveis*
	Texto (processos discursivos utilizados)	-*Ambiguidade* -*Incongruência* -*Polissemia*

Apresentação e análise de dados

A apresentação e análise de dados está organizada em duas partes, de acordo com os temas de análise definidos: (i) Recurso ao humor; e (ii) Recurso a ambientes de boa disposição. Quanto ao *recurso ao humor*, analisam-se todas as situações encontradas nos manuais. Já em relação *ao recurso a ambientes de boa disposição*, apresentam-se somente algumas evidências exemplificativas. Por isso, a análise do recurso ao humor está estruturada de acordo com as categorias definidas: (i) Tipo de humor; (ii) Objetivos do humor; (iii) Desafio ao aluno; e (iv) Forma de apresentação.

Recurso ao humor

Os manuais analisados raramente recorrem a situações humorísticas. Das que identificámos, só uma parece corresponder a uma intenção explícita dos autores, que para isso recorrem a uma tira de Astérix (Figura 1). Nos outros casos, embora possa haver lugar para explorar o humor, pelo ridículo ou pela ambiguidade, isso não parece corresponder a uma intenção dos autores (Figura 2).

Figura 1. Banda desenhada de Astérix – *MSI5* (p. 7, parte 3).

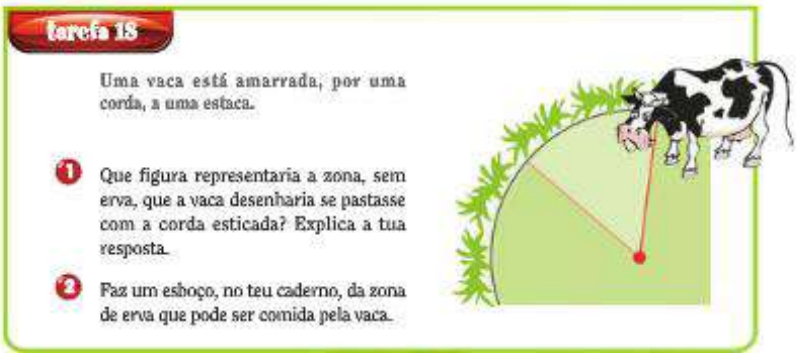


Figura 2. Utilização do ridículo – MSI 5 (p. 84, parte 1).

Tipo de humor

A situação humorística retratada na figura 1 utiliza o mecanismo da incoerência dado que o pedido colocado na primeira vinheta, "parte três talhadas deste bolo", tendo em conta que havia três pessoas, pressupunha uma divisão em três partes iguais, o que não vem a revelar-se nas vinhetas seguintes. É esta incongruência que, depois da surpresa pelo desfecho, gera o humor ao inferir-se a intenção do protagonista.

No manual *MSI5* foi identificada uma situação que, aparentemente, recorre ao mecanismo do ridículo, ainda que, porventura, de forma não intencional (Figura 2).

Com efeito, a proposta de uma zona circular, uma vaca com ar triste e as respetivas representações bastante desproporcionadas, deixam transparecer uma situação de ridículo e com características humorísticas.

Objetivos do humor

No que diz respeito aos objetivos visados com a utilização do humor, tanto na situação da figura 1, como em outros casos em que o humor está implícito (p.e., Figura 2), sobressai o intuito de criar um clima agradável. Para além disso, na figura 1 emerge também a intenção de criar uma situação geradora de conflito cognitivo nos alunos, levando-os a encontrar justificações para a partilha realizada por Obélix.

Desafio ao aluno

Naquilo que diz respeito aos desafios que as situações podem representar para os alunos, os casos identificados exigem a resolução de uma tarefa (Figuras 1 e 2) e a observação da parte dos alunos (Figura 3).

Figura 3. Apelo implícito à observação - Alfa (pp. 104, 105).

Nos manuais analisados não foram identificados exemplos que, implícita ou explicitamente, apelassem à resolução de problemas matemáticos a partir de uma situação humorística. Ainda assim, reconhece-se que algumas ilustrações podem ser utilizadas para recorrer ao humor. A ilustração seguinte (Figura 4) permite explorar a subjetividade do Rui que acha que viveu "mais de um milhão de dias" e que é ridicularizado pelo João.

Figura 4. Ilustração passível de exploração humorística – *Pasta Mágica* (p. 16).

Com efeito, existe uma incongruência na estimativa de dias vividos. A ilustração explora, de facto, a associação de duas questões que podem ser complexas para os alunos do 4.º ano: a conceção de tempo e o sentido de número (valor de “milhão”).

Forma de apresentação.

A forma como se apresentam as situações humorísticas resulta de uma combinação entre ilustração e texto. São disso exemplo todas as situações apresentadas anteriormente (Figuras 1 a 4).

Recurso a ambientes de boa disposição

Se, por um lado, o recurso ao humor nos manuais é escasso, por outro lado, o recurso a situações ou ambientes capazes de promover a boa disposição são abundantes, quer se apresentem sob a forma de *ilustrações*, quer se apresentem sob a forma de *texto* quer, mais frequentemente ainda, sob a forma de combinação de ambos.

Há evidentes preocupações em todos os manuais, sem exceção, com a promoção de ambientes de aprendizagem agradáveis. No caso do manual *Alfa*, do 4.º ano, tal preocupação é evidente, por exemplo, na capa, no personagem central do manual (Figura 5), bem como nas restantes ilustrações. Regra geral, apresentam personagens a rir e bem-dispostas (Figuras 6 e 7).

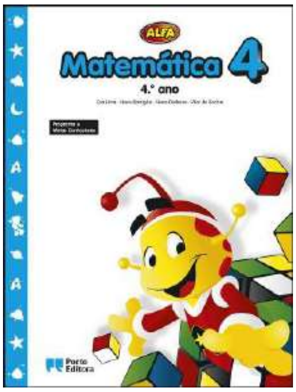


Figura 5. Capa do manual *Alfa*.

Figura 6. Imagem do *Alfa* retratando um ambiente agradável (p. 19).

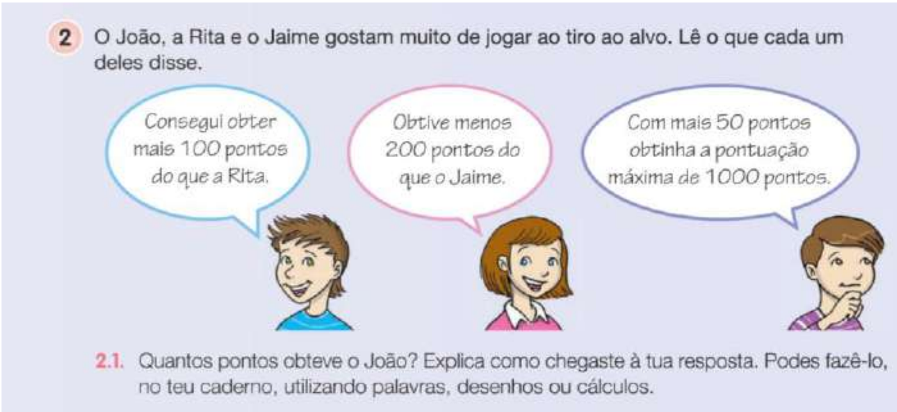


Figura 7. Imagem envolvendo crianças sorridentes – *Alfa* (p. 25).

No caso do manual *Pasta Mágica* existe a mesma preocupação. Por exemplo, na capa (Figura 8) pode encontrar-se retratado um ambiente alegre com crianças sorridentes e bem-dispostas.

Figura 8. Capa do manual *Pasta Mágica*.

A preocupação com este aspeto é transversal, também, nos restantes manuais do 5.º ano. Por exemplo, no manual *MSI 5* podem encontrar-se propostas de trabalho ilustradas com crianças sorridentes, tal é o caso daquelas que estão representadas nas imagens seguintes (Figuras 9 e 10).

Figura 9. Propostas de trabalho ilustradas com crianças sorridentes – *MSI5* (pp. 18-19, parte 1).

Figura 10. Propostas de trabalho ilustradas com crianças sorridentes – *MSI5* (p. 37, parte 1).

No caso do manual *Máximo*, onde também se recorre a imagens de crianças sorridentes, como é o caso do exemplo seguinte (Figura 11), também se utiliza a figura de um adulto, o professor, também ele sorridente (Figura 12).

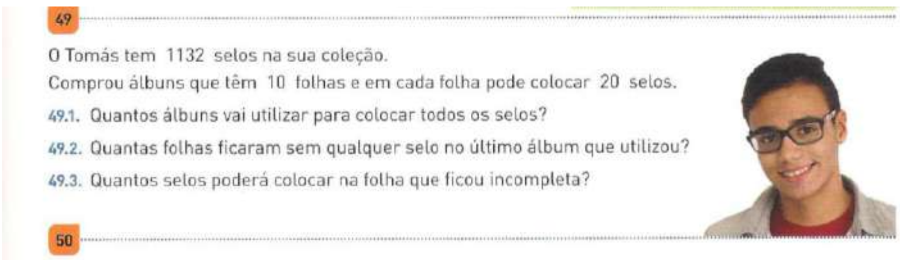


Figura 11. Proposta de trabalho ilustrada com jovem sorridente – *Máximo* (p. 45, parte 1).

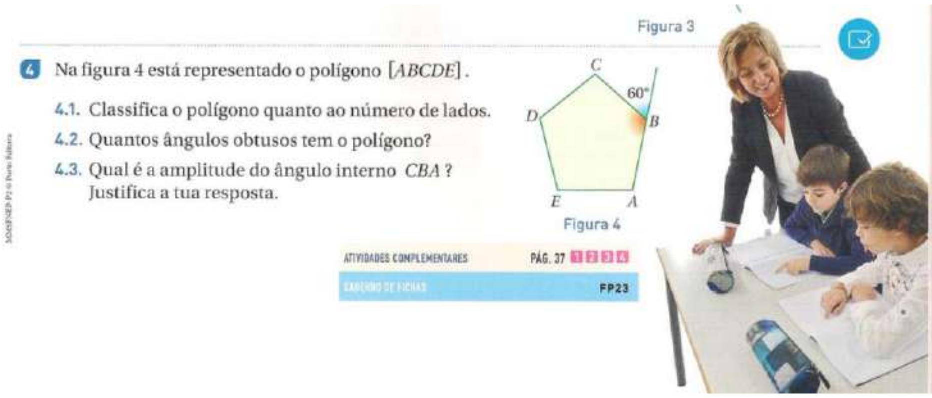


Figura 12. Proposta de trabalho ilustrada com professor sorridente – *Máximo* (p. 13, parte 2).

Indicadores como o recurso à ambiguidade, incongruência e polissemia no texto não são frequentes nos manuais analisados. Ainda assim, os contextos apresentados nas situações seguintes poderão ser considerados contextos favoráveis para se explorar, com intuito humorístico, a polissemia de palavras associadas a conceitos matemáticos:

- Moda (OTD/ Estatística) - "Qual é a moda das brincadeiras?" (*Pasta Mágica* – pp. 110-111)
- Massa (Geometria e Medida/ medida de massa) - "Para medir massas utilizamos balanças" (*Pasta Mágica* – p. 144).

Conclusões

Os manuais escolares de Matemática analisados não fazem, praticamente, uso do humor com propósitos didáticos. Contudo, algumas situações, que parecem não ser intencionais, revelam potencialidades para o usar (especialmente em situações de ridículo). Todos os manuais analisados estão profusamente ilustrados com ambientes de boa disposição, apresentando imagens onde aparecem figuras humanas (desenhadas e fotografadas, de crianças e de adultos) a rir e em ambientes descontraídos ou de lazer. Em qualquer uma destas situações, parece haver a intenção de criar um clima agradável que facilite a aprendizagem dos alunos. Na generalidade das situações, o desafio colocado aos alunos é, essencialmente, o de observar a ilustração. Em termos de texto, os manuais não recorrem habitualmente à ambiguidade, à incongruência ou à polissemia, ingredientes básicos do humor.

A combinação encontrada nos manuais escolares de Matemática, a quase ausência de humor, mas a valorização de ambientes descontraídos, leva-nos a conjeturar que, para os seus autores, o lado sério da Matemática é pouco compatível com o recurso ao humor, mas não com a ilustração de ambientes agradáveis e de boa disposição. Esta questão da seriedade do humor face à seriedade e credibilidade do texto didático, abordada por diversos autores (Adão, 2008; Lomax & Moosavi, 2002; Martin, 2007), deve ser repensada em razão das possibilidades formativas do humor, tanto no campo afetivo como no campo cognitivo (Banas et al, 2011; Guitart, 2012; Lomax & Moosavi, 2002; Martin, 2007; Meyer, 2015). Na origem do humor está o jogo intelectual, o trabalho sobre a ideia e sobre a palavra, a busca da sintonia na aproximação de sensibilidades e de culturas. Urge, pois, repensar o lugar do humor na aula de Matemática, nomeadamente através do texto didático, não apenas para que os alunos se possam familiarizar com processos de criatividade e de ambiguidade específicos de cada língua, mas também para que possam ter acesso ao seu sistema de conotações e possam penetrar na rede de conivência cultural que se estabelece entre os membros da comunidade que partilha o uso dessa mesma língua.

Agradecimentos

Este trabalho inscreve-se no projeto HUMAT – *Humor in Mathematics Teaching* (PROJ/CI&DETS/2015/005), financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia, I.P., no âmbito do projeto UID/Multi/04016/2016. Agradecemos adicionalmente ao Instituto Politécnico de Viseu e ao CI&DETS pelo apoio prestado.

Referências bibliográficas

Adão, T. & Oliveira, A. M. (2010). Humour and Leadership at School. *Proceedings of The 22nd International Society for Humor Studies Conference 2010*. City University of Hong Kong.

Adão, T. (2008). *O Lado Sério do Humor – Uma Perspectiva Sociolinguística do Discurso Humorístico*. Famalicão: Editorial Novembro.

Allport, G. (1961). *Pattern and Growth in Personality*. New York: Holt, Reinhart & Winston.

Banas, J. A., Dunbar, N., Rodriguez, D., & Liu, S. J. (2011). A review of humor in educational settings: Four decades of research. *Communication Education*, *60*(1), 115-144.

Conceição, A., Almeida, M., Castanheira, I., & Cebolo. V. (2016). *MSI 5 - Matemática sob Investigação*. Porto: Areal.

Guitart, M. (2012). *Permitido reír... Estamos en clase. El humor como recurso didáctico en aula de Estadística* (Tese de doutoramento, Universidade Nacional de Cuyo, Mendonza, Argentina).

Flores, P. & Moreno, A.J. (2011). *Matemáticamente competentes para reír*. Barcelona: Graó.

Flores, P. (2003). *Humor gráfico en el aula de Matemáticas*. Granada: Arial.

Hancock, J.; Dunham, P. J. & Purdy, K. (2009). Children's comprehension of critical and complimentary forms of verbal irony. *Journal of cognition and development*, 1(2), 227-248.

José, H. M. (2008). *Resposta humana ao humor: quando o humor integra o agir profissional dos enfermeiros* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa).

Lima, E., Barrigão, N., Pedroso. N., & Rocha. N. (2016). *Alfa Matemática 4*. Lisboa: Porto Editora.

Lomax, R. G., & Moosavi, S. A. (2002). Using humor to teach statistics: Must they be orthogonal?. *Understanding Statistics: Statistical Issues in Psychology, Education, and the Social Sciences, 1*(2), 113-130.

Martin, R. (2007). *The Psychology of Humor – An Integrative Approach.* London: Elsevier Academic Press.

Martins, A. I. (2015). A seriedade do Humor ao longo dos séculos: uma retórica do poder político ou de um contra-poder?. *Revista Iberoamericana de Estudios de Desarrollo*, *4*(1), 323-346.

McGhee, P.E. (1979) *Humor: Its origin and development*. W.H. Freeman, San Francisco.

Matarazzo, K. L., Durik, A. M., & Delaney, M. L. (2010). The effect of humorous instructional materials on interest in a math task. *Motivation and emotion*, 34(3), 293-305.

Meyer, J. C. (2015). *Understanding Humor Through Communication: Why be Funny, Anyway*?. Lanham: Lexington Books.

Neves, M. A., Faria, L., & Silva. A. P. (2016). *Máximo5*. Lisboa: Porto Editora.

Pina, J. A. (2015). *Comunicar com Humor: Insensatez ou Profissionalismo*. Lisboa: Pactor.

Rodrigues, A., & Azevedo. A. (2016). *Pasta Mágica - Matemática 4*. Porto: Areal.

Shmakov, P., & Hannula, M. S. (2010). Humour as means to make mathematics enjoyable. In *Proceedings of CERME* (Vol. 6, pp. 144-153).

AVALIAÇÃO E COMUNICAÇÃO NA AULA DE MATEMÁTICA: UM PROJETO DE INVESTIGAÇÃO

António Guerreiro[1], *Cristina Martins*[2]
[1]ESEC, Universidade do Algarve, aguerrei@ualg.pt
[2]ESEB, Instituto Politécnico de Bragança, mcesm@ipb.pt

Resumo. *A avaliação e a comunicação na aula de matemática constituem premissas do processo de ensino e de aprendizagem, entendidas de dois modos distintos: a comunicação como instrumento de ensino e de avaliação, nomeadamente através do questionamento oral e escrito, e a comunicação como suporte das interações entre o professor e os alunos, por exemplo através das discussões em sala de aula. A investigação em curso, que aqui apresentamos, tem como principal objetivo compreender a relação existente entre a avaliação e a comunicação na aula de matemática no 2.º ciclo do ensino básico. A investigação estrutura-se em seis fases que incluem a perceção e as práticas dos professores e a implementação de práticas propícias à comunicação e à avaliação para a aprendizagem matemática dos alunos. Recolhidas as perceções dos professores de matemática no 2.º ciclo do ensino básico sobre a avaliação e a comunicação, através de uma entrevista semiestruturada, é nosso propósito nesta comunicação, dar nota sobre as perceções de um dos professores participantes, com o intuito de refinar as subcategorias de análise. Os dados iniciais, neste caso, apontam para a associação da avaliação da aprendizagem à comunicação como instrumento comunicativo e da avaliação para a aprendizagem à comunicação como processo de interação entre alunos e professor.*

Abstract. *The evaluation and the communication in a mathematics class constitutes an assumption of the teaching-learning process, understood in two different ways: communication as a tool for learning and evaluating, namely through oral and written questioning, and communication as a support for the interactions between teacher and student, namely through classroom discussions. The ongoing investigation, presented here, has as its main goal to understand the issue of the relationship between evaluation and communication in the mathematics lecture in the 2nd cycle of basic education. The investigation is structured around six steps which include perception and practices of teachers and implementation of practices conducive to communication and evaluation for the mathematic learning of students. Having gathered the perceptions of 2nd cycle of basic education teachers on the articulation between evaluation and communication, through a semi-structured interview, it is our purpose to in this paper, to present the data concerning one of the participating teachers to their perception with the purpose of refining the analytical subcategories. Initial data, in this case, point to the association of evaluation of learning to communication as a communicative tool and evaluation to learning to communication as an interaction process between students and teacher.*

Palavras-chave: *avaliação; comunicação; matemática; práticas profissionais.*

Da ideia à consecução do projeto

Dos interesses académicos dos autores, no campo da investigação em educação matemática, surgiu a ideia deste projeto de investigação, alicerçado na avaliação e na comunicação no contexto das práticas letivas dos professores de matemática. As relações entre a avaliação e a comunicação são de importância crucial na aula de matemática, dado que a comunicação pode servir como instrumento de ensino e de avaliação e a concretização da avaliação pode conduzir à criação de momentos ricos de comunicação na sala de aula. Pareceu-nos à partida que compreender as relações existentes entre a avaliação e a comunicação trará contributos à melhoria das práticas profissionais dos professores e dos futuros professores de matemática e contribuirá para um melhor conhecimento das dinâmicas de sala de aula.

Em qualquer trabalho que se pretenda consistente, estruturado e sequenciado, a etapa inicial é sem dúvida de importância fulcral para a sua concretização. Neste caso, as fases de perceção e de práticas profissionais dos professores constituem o alicerce na estruturação da investigação empírica que sustentará a criação de conhecimentos sobre as relações entre a avaliação e a comunicação na aula de matemática. Neste artigo, pretendemos apresentar o projeto de investigação em desenvolvimento e responder à questão: Quais as perceções de um dos professores participantes no estudo sobre as relações entre a avaliação e a comunicação na aula de matemática?

Avaliação na aula de matemática

Adotando que avaliar não é classificar, centrando-nos na opinião de Fernandes (2001), consideramos que a avaliação é "um poderoso processo que deve ajudar professores e alunos a ensinar e a aprender melhor, respetivamente. Um processo que, tanto quanto possível, deve estar fortemente articulado com os processos de ensino e de aprendizagem" (p. 86).

O processo de avaliação deve incluir as componentes do conhecimento, das atitudes e valores, da forma de agir e pensar, bem como o empenho e a dedicação dos alunos face às tarefas propostas (Rafael, 1998). Para tal, a diversificação de ações de recolha, análise e registo da informação é fundamental (e.g. observações, diálogos, trabalhos escritos, testes, relatórios e apresentações), dado que "avaliar pressupõe a existência de recolha de informações" (Neves & Ferreira, 2015, p. 23), orais ou escritas, reguladas pelo processo de *feedback* do professor.

Para Menino (2004), tradicionalmente, o instrumento de avaliação mais utilizado tem sido o teste escrito com questões fechadas e realizado em tempo limitado. Para este autor, este instrumento de avaliação é insuficiente para dar ao professor um conhecimento profundo sobre o pensamento e compreensão dos seus alunos. Dada a natureza das aprendizagens, nenhum instrumento isolado, por si só, pode fornecer todas as informações sobre o conjunto das aprendizagens e o desenvolvimento de competências (Abrantes, 2002).

Na sequência desta ideia, é conveniente referir que segundo Fernandes (2001) persistem alguns mal entendidos relativamente à avaliação formativa e à sumativa, assinalando que o importante é que ambas sejam rigorosas, podendo utilizar dados de natureza quantitativa ou qualitativa, surgindo, neste contexto, a distinção entre avaliação das aprendizagens e avaliação para as aprendizagens. Como refere o autor,

> A avaliação formativa está associada a todo o tipo de tomadas de decisão e de formas de regulação e de autorregulação que influenciam de forma imediata os processos de ensino e aprendizagem, enquanto a avaliação sumativa proporciona informação sintetizada que, no fundo, se destina a registar e a tornar público o que parece ter sido aprendido pelos alunos (Fernandes, 2001, p. 90)

Saliente-se que na avaliação formativa ou avaliação para as aprendizagens os alunos são frequentemente chamados a participar, nomeadamente através da autoavaliação, os professores distribuem regularmente *feedback* a todos os alunos e o seu poder de avaliar é partilhado com outros intervenientes (e.g., outros professores, pais, alunos).

É, desta forma, evidenciada a função de regulação da avaliação, sendo esta entendida por Santos (2002) como um ato intencional que, agindo sobre os mecanismos de aprendizagem, contribui diretamente para a progressão ou redireccionamento dessa aprendizagem, assumindo-se que todo e qualquer ato de regulação tem necessariamente que passar por um papel ativo do sujeito a avaliar, pois "nenhuma intervenção externa age se não for percebida, interpretada e assimilada pelo próprio" (Santos, 2002, p. 77).

Em jeito de síntese, Fernandes (2015), afirma que "a avaliação para as, e das, aprendizagens é um processo de natureza eminentemente pedagógica cujo fundamental propósito é melhorar o que e como se ensina e o que e como se aprende" (p. 13).

Comunicação na aula de matemática

A comunicação no processo de ensino e de aprendizagem é estudada em múltiplas perspetivas, como a comunicação na sala de aula, em qualquer das áreas do currículo, e em múltiplos contextos, como a aprendizagem mediada pela tecnologia. A comunicação, no contexto da aula de matemática, pode ser reduzida a um instrumento do processo de ensino e de aprendizagem em que professor desenvolve estratégias de comunicação reguladas pelo processo de *feedback* (Antão, 2001) ou valorizada como uma competência a ser desenvolvida pelos alunos e pelo professor, através da valorização do diálogo (Alro & Skovsmose, 2006).

Assumindo uma perspetiva de valorização do aluno, enquanto indivíduo singular, a comunicação na aula de matemática não se restringe a uma situação comunicativa mas resulta da construção do conhecimento matemático, através do estabelecimento de conexões entre as conceções dos alunos e as novas aprendizagens (Guerreiro, Tomás Ferreira, Menezes & Martinho, 2015). Neste sentido, os autores defendem que "um ensino com características expositivas equaciona a comunicação como instrumento de verbalização e transmissão do conhecimento; por sua vez, o ensino com uma forte vertente de interação social apoia-se na comunicação como construção partilhada do conhecimento matemático" (p. 280).

A comunicação na aula de matemática pode resultar num maior controlo do professor, através de uma comunicação unidirecional ou contributiva, ou numa centralidade no pensamento do aluno, através de uma comunicação reflexiva ou instrutiva (Brendefur & Frykholm, 2000). Nas comunicações unidirecionais e contributivas, o professor domina o discurso da aula e o aluno assume o papel de ouvinte ou de contribuinte para o discurso do professor. Nas comunicações reflexivas ou instrutivas, o discurso assume o papel central na aprendizagem da matemática, em resultado de ser objeto de reflexão ou de instrução, democraticamente partilhado entre o professor e os alunos.

As formas de comunicação oral e escrita perspetivam-se como processos valorativos na construção do conhecimento matemático. A oralidade decorre da conexão da linguagem e do conhecimento do indivíduo com a linguagem dos outros (Cândido, 2001), num processo de negociação de significados matemáticos, a escrita ajuda-nos a refletir sobre a nossa experiência matemática, construindo e reconstruindo o sentido das significações matemáticas (Powell & Bairral, 2006) e a leitura é um ato de conhecer, compreender, transformar e interpretar um texto escrito (Smole & Diniz, 2001).

O questionamento surge como uma função da comunicação na sala de aula, caracterizado por pedido de informação, com ou sem a forma interrogativa (Menezes, Guerreiro, Martinho & Tomás Ferreira, 2013). Na aula de matemática ocorrem perguntas de verificação ou teste, de focalização e de inquirição (Mason, 2000). As perguntas assumem uma referência aos conhecimentos (verificação ou teste dos conhecimentos e focalização nos conhecimentos) ou ao pensamento dos alunos (focalização nas estratégias ou inquirição sobre o pensamento dos alunos).

Nesta perspetiva, o questionamento oral ou escrito assume uma natureza avaliativa caracterizada pela testagem de conhecimentos mas também pela possibilidade de partilha comunicativa entre intervenientes, o que pressupõe a aceitação do outro como sujeito ativo:

> Em especial o questionamento, é certamente um processo poderoso para que o professor ajude o aluno a regular a sua aprendizagem enquanto realiza o seu trabalho na sala de aula. A interacção professor-aluno, desenvolvida pelo professor com intenção de contribuir para a aprendizagem do aluno é uma forma de colocar em prática a avaliação formativa (Santos, 2004, p. 159).

Em síntese, a natureza da comunicação na aula de matemática estrutura as interações entre os alunos e entre estes e o professor e condiciona o processo de ensino e de aprendizagem, assumindo o domínio comunicativo do professor na sala de aula ou, em contrapartida, sustentando a partilha de conhecimento entre todos os intervenientes.

***Design* de investigação e opções metodológicas**

No estudo mais alargado, em desenvolvimento, assumimos um *design* de investigação interpretativo, com uma componente de colaboração entre investigadores e os professores participantes, com o intuito de interpretar, compreender e explicar significados, num contexto específico, tendo por propósito responder à questão de investigação: Que relações existem entre a avaliação e a comunicação nas aulas de matemática no 2.º ciclo do ensino básico?

O objetivo principal desta investigação é estudar as relações entre a avaliação e a comunicação, num contexto colaborativo, tendo em vista proporcionar significativas aprendizagens matemáticas dos alunos. Os participantes neste estudo, para além dos investigadores (autores deste artigo), são quatro professores do 2.º ciclo do ensino básico (dois do distrito de Bragança e dois do distrito de Faro) que lecionam matemática neste nível de ensino.

O *design* desta investigação sobre a avaliação e a comunicação, contempla as seguintes fases: (i) construção do referencial teórico, através da revisão da literatura; (ii) perceção dos professores, através da realização de entrevista semiestruturada; (iii) práticas profissionais dos professores, através da observação de aulas de matemática de uma mesma turma; (iv) colaboração investigacional, através da realização de trabalho colaborativo entre os investigadores e os professores do 2.º ciclo do ensino básico (cada investigador a trabalhar em colaboração com dois professores), tendo em vista a identificação de relações entre a avaliação e a comunicação; (v) experimentação na aula, através do desenvolvimento de tarefas matemáticas que relacionem conscientemente a avaliação e a comunicação; (vi) reflexão, através da revisitação do referencial teórico e da indicação de práticas de sala de aula em que se verifique a existência de relações entre a avaliação e a comunicação na aula de matemática.

A recolha de dados decorreu da realização duma entrevista semiestruturada aos professores participantes no estudo, tendo por intento averiguar as perceções dos professores do 2.º ciclo do ensino básico sobre a avaliação e a comunicação no contexto das suas práticas profissionais na aula de matemática. O guião da entrevista era constituído por questões de resposta aberta sobre a avaliação e a comunicação, realizadas com o objetivo de recolher informação que permitisse conduzir à concretização do objetivo primordial da investigação – relações entre avaliação e comunicação na aula de matemática. A título de exemplo, apresentam-se as questões realizadas nas subcategorias instrumentos de avaliação e formas de comunicação: Que instrumentos utiliza para avaliar as aprendizagens matemáticas dos alunos? Privilegia alguns destes instrumentos? Em que contextos/momentos utiliza os referidos instrumentos de avaliação? Como os utiliza? Pode exemplificar? Considera-os uteis ou utiliza por rotina? Privilegia a comunicação oral ou escrita? Pode dar exemplos de comunicação oral e de comunicação escrita? Em que momentos favorece a comunicação oral e a comunicação escrita?

Para a análise dos dados, nesta fase do estudo, atendendo ao referencial teórico, foram criadas as categorias e subcategorias expostas no Quadro 1.

Quadro 1. Categorias e subcategorias criadas

Categorias	Subcategorias
Avaliação	Conceito de avaliação Componentes integrantes da avaliação Instrumentos de avaliação dos alunos Funções da avaliação no processo de ensino e de aprendizagem dos alunos
Comunicação	Conceito de comunicação na aula de matemática Características da comunicação na aula de matemática Formas de comunicação na aula de matemática Funções da comunicação no processo de ensino e de aprendizagem dos alunos

As categorias e subcategorias delineadas foram criadas tendo por base o enquadramento teórico de referência, com a clara intenção de, a partir delas, fazer emergir as relações entre a avaliação e a comunicação tendo por base as perceções e as práticas profissionais dos professores.

Esta comunicação centra-se na análise das percepções da professora Violeta. A escolha desta professora como pivô desta primeira apresentação do trabalho deveu-se, sobretudo, à constatação dos autores da profundidade da reflexão efetuada pela mesma sobre os conceitos em apreço, tornando-se desta forma uma mais-valia para o aprimorar das subcategorias.

Contributo das perceções dos professores no projeto de investigação

Neste ponto pretendemos dar conta dos resultados obtidos, num dos casos em estudo – Violeta. A professora tem vinte e seis anos de serviço docente, essencialmente no 2.º ciclo do ensino básico.

Perceções sobre avaliação na aula de matemática

No caso em consideração, foi possível verificar que a avaliação na aula é entendidas nas vertentes da avaliação das e para as aprendizagens, sendo claro que Violeta, em consonância com Fernandes (2015), realça a natureza interativa da avaliação no que concerne às aprendizagens dos alunos e do próprio professor, ou seja, ser realizada com o propósito de melhorar o que e como se ensina e o que se aprende.

Conceito de avaliação. Assumindo uma avaliação para a aprendizagem, Violeta perspetiva a avaliação inseparável das práticas de ensino e de aprendizagem:

> Um processo sistemático, constante, não tem momentos, (…) Quando estou a acompanhá-los, estou a escutá-los e estou a mediar o que eles estão a fazer, estou ali a fazer uma avaliação (…) e eles próprios estão a perceber, estão a entender, também estão a fazer uma avaliação.

Violeta perspetiva a avaliação como um processo regulador, apelando às suas características de acompanhamento, partilha e mediação, com o intuito de monitorizar o decurso do processo de ensino e de aprendizagem e, consequentemente, de o melhorar:

> Avaliar é algo muito complexo… Avaliar é acompanhar um processo que está a decorrer. Acompanhar … e para quê? Para regular (…). É um processo partilhado. Para mim avaliar só tem sentido se for partilhado. (…) É mais o mediar, ver como é que as coisas estão correndo para melhorar, sempre para melhorar e não para penalizar. (…) É a minha conceção muito pouco formal do que é avaliar.

Componentes integrantes da avaliação. A professora defende que os alunos é que se deviam propor para ser avaliados – “Eu até sou a favor de que eles é que devem escolher quando é que devem ser avaliados”, dado que tem ritmos diferentes – “não têm de ser todos avaliados na mesma altura”.

Violeta salienta a natureza do trabalho desenvolvido na sala de aula – “eles [os alunos] dizem: «professora, é a única professora que faz trabalho de grupo na sala de aula»” – que influencia o conhecimento avaliativo que tem dos alunos, principalmente no campo das atitudes e das relações entre os alunos.

Instrumentos de avaliação dos alunos. Os instrumentos mais tradicionais de avaliação, como os testes escritos, assumem um papel central na avaliação dos alunos: “Os testes valem noventa porcento, é terrível”. Neste sentido, Violeta questiona as práticas usuais de avaliação – “Como é que eu estou a avaliar os meus alunos por um teste?” – com aquilo em que acredita – “Agora vamos comunicar, vamos ver o que é que descobriram e tudo isso, interagir e depois teste (ironiza)”. Numa vertente mais formal da avaliação, Violeta diz incluir nos testes diferentes tipos de perguntas:

> No teste, faço todo o tipo de pergunta, faço aquela pergunta de escolha múltipla, a pergunta em que não tem de justificar, não é? Há a pergunta em que eles têm de explicar como pensaram, há a pergunta mais aberta, a pergunta mais fechada, há uma pergunta de resposta curta, faço todo o tipo de perguntas.

Assim, Violeta refere recorrer a testes e a outros trabalhos escritos e orais e aos relatórios como instrumentos principais de avaliação, acompanhados pela auto e heteroavaliação dos alunos através do registo das suas atitudes em listas de verificação.

Contudo, a professora considera que o número de alunos da turma [vinte e oito] é limitador na diversificação dos instrumentos de avaliação – "Não estou habituada a trabalhar com turmas tão grandes". Os alunos desenvolvem autonomamente, ao longo do período escolar, diferentes tipos de projetos, como por exemplo pequenas filmagens com o telemóvel ou construção de textos poéticos sobre temáticas da matemática, que também contribuem para a avaliação.

Violeta particulariza que não recorre aos trabalhos de casa para efeitos de avaliação – "Não utilizo os trabalhos de casa para a avaliação porque acho isso uma injustiça (…) embora na grelha *Excel* [critérios de avaliação do agrupamento de escolas] esteja lá" – em função da especificidade dos alunos que, em geral, recorrem a explicações após as atividades letivas.

A professora desvaloriza, numa perspetiva avaliativa, o discurso oral, em parte devido à ausência de registo, realçando no entanto que, por vezes, "pode ficar um registo na [sua] cabeça da avaliação matemática" dos desempenhos matemáticos dos alunos.

Funções da avaliação no processo de ensino e de aprendizagem dos alunos. Violeta crítica fortemente o papel dado à avaliação dos alunos pelo sistema escolar – "A avaliação é ali o castigador: «Agora é a avaliação, o dia da comparência»" –, especialmente em relação às provas nacionais que condicionam fortemente a atitude dos professores – "Quem tem exame está aflito, é uma estupidez, é aquela pressão, tenho que dar aquilo tudo" – mesmo ao nível do 2.º ciclo do ensino básico.

Esta pressão está relacionada com as avaliações que fazem aos agrupamentos de escolas – "As avaliações que fazem às escolas, estes rankings estúpidos, porque as escolas têm as provas de aferição … O ministro pode dizer: «Para aferir». Não, não é verdade porque as escolas pressionam os professores, os professores sentem-se pressionados, pressionam os alunos".

A avaliação dos alunos constitui um recurso para a aprendizagem profissional do professor – "tento melhorar as minhas práticas" –, particularmente quando os alunos apresentam dificuldades – "Quando eles erram uma pergunta e nós vamos explorar porque é que houve ali o erro, eu muitas vezes percebo o que é que eu tenho de mudar como professora para que isso não aconteça". A identificação dos erros pode originar uma mudança na lecionação de um dado tema ou conteúdo matemático – "um tema que tenho de trabalhar de maneira diferente" – ou a reformulação do instrumento de avaliação – “o tipo de pergunta que eu tenho de alterar” –, com a ajuda dos alunos – “Como é que [a pergunta] devia ter sido feita? E eles dizem-me, muitas vezes eles ajudam-me”.

Em síntese, Violeta confronta-se com uma dicotomia entre uma avaliação reguladora e promotora das aprendizagens, em que acredita, e uma avaliação formal, baseada em testes, imposta pelo sistema escolar. Salienta o papel da avaliação dos alunos na reestruturação das suas práticas profissionais, particularmente na lecionação dos temas matemáticos e na reformulação dos próprios instrumentos de avaliação.

Perceções sobre comunicação na aula de matemática

Neste caso em análise, a comunicação assume, conforme defendido por Guerreiro, Tomás Ferreira, Menezes e Martinho (2015), o papel de instrumento comunicativo e o de processo de interação entre os alunos e entre estes e o professor.

Conceito de comunicação na aula de matemática. Violeta assume a comunicação como uma ação constante nas aulas – “A comunicação é normal, fluída e existe sempre” –, apesar de poder ser caracterizada de distintos modos – “Eu acho que é constante, pode é haver momentos de diferentes tipos de comunicação, uma parte de discussão, uma parte mais interativa”. Neste sentido, a professora diferencia a comunicação enquanto instrumento comunicativo (a oralidade, a escrita) e enquanto processo de interação entre os sujeitos (a discussão, o debate), assumindo a existência de perspetivas comunicativas distintas na aula de matemática.

Características da comunicação na aula de matemática. A professora crítica a comunicação unidirecional entre os alunos em que existe uma liderança marcadamente assumida pelos alunos com mais conhecimentos – “[Os alunos] são muito influenciados por aquele que sabe mais” – e pouco recetivos a ouvir os restantes alunos – “O que tem mais conhecimento não quer ouvir o outro que tem menos conhecimento”. Tenta contrariar esta prática de imposição comunicativa estimulando a escuta ativa entre todos os alunos – “Escutar e nessa escuta questionar”.

Para a professora, a escuta é o ponto fulcral da comunicação – “Uma comunicação só é efetiva quando há uma escuta” – associada à partilha de ideias entre os alunos – “Há um que vai partilhar, comunicar as suas ideias, vai partilhar as suas ideias e o outro tem que escutar com entendimento e gerando algum produto” – e entre estes e o professor – “Escuto muito os alunos, dou-lhe muito a voz”.

Formas de comunicação na aula de matemática. Violeta assume a importância da escrita matemática nas suas aulas – "os miúdos precisam muito de concretizar a parte escrita" –, entendida de modo amplo, como qualquer forma de registo. Nesta escrita matemática a professora íntegra todo o tipo de registos icónicos, gráficos e tabelares, seja por iniciativa da docente – "eu tenho sempre a necessidade de um registo" – ou por ação dos alunos – "eles têm que registar, pode ser através duma imagem, duma tabela, através de um gráfico, através de um desenho, através dum esquema, de umas setas". Os registos gráficos, esquemáticos e tabelares apoiam as explicações dos alunos – "explicar como resolveram, como pensaram" – no decorrer das apresentações das suas atividades matemáticas.

Funções da comunicação no processo de ensino e de aprendizagem dos alunos. Violeta assume-se como uma professora construtivista – "eu tento ser construtivista, que eles construam o seu conhecimento" –, tentando que as suas interações como os alunos tenham uma natureza de questionamento desafiante – "tento fazer uma pergunta provocatória" –, de modo a contribuir para a autonomia destes na construção do conhecimento – "eu não os oriente muito, eu quero que eles pensem por si próprios, pela sua cabeça".

A professora crítica a perspetiva que os alunos trazem a propósito da natureza das respostas – respostas curtas e imediatas – ao questionamento do professor – "porque muitas vezes os miúdos estão à espera e querem dar a resposta que o professor quer ouvir". Para contrariar este tipo de interações com os alunos, a professora tenta fazer perguntas mais abertas – "tento mais fazer uma pergunta mais aberta" –, de modo a levar os alunos a argumentar e a defenderem as suas ideias matemáticas – "tentam argumentar, tentam explicar (…) de argumentar, de defender o seu próprio pensamento".

Violeta associa a verbalização pelos alunos das atividades desenvolvidas a um processo de regulação das suas próprias aprendizagens – "quando eles [os alunos] estão a comunicar, eles estão ao mesmo tempo a regular as suas aprendizagens (…) estão a avaliar aquilo que fizeram". Este interação comunicativa e avaliativa é extensível aos restantes alunos – "tanto eles como os seus colegas" –, atendendo ao princípio da escuta ativa defendida pela professora.

Em síntese, Violeta assume a permanente presença da comunicação nas aulas de matemática, defende a "escuta ativa e generativa" como núcleo central de uma comunicação eficaz e recorre (a professora e os alunos) aos registos escritos, icónicos, gráficos e tabelares para apoiar a oralidade e a argumentação. A professora tenta questionar os alunos de forma "provocatória" como modo destes argumentarem, defenderem as suas ideias matemáticas e construírem o seu próprio conhecimento.

Primeiras apreciações

A opção de natureza metodológica, de iniciar o estudo empírico com base nas perceções dos professores, parece ser facilitador da análise posterior das práticas de avaliação e comunicação na aula de matemática.

Dos resultados obtidos sobressai a ideia que Violeta considera que a avaliação e a comunicação são indissociáveis atendendo ao papel regulador da avaliação e ao papel promotor da comunicação em relação às aprendizagens. Tenta diversificar a avaliação através de distintos tipos de perguntas, especialmente nos registos escritos. Promove as interações entre os alunos como forma de promover as aprendizagens matemáticas e o conhecimento dos alunos na dimensão relacional. O questionamento surge com alguma centralidade na articulação entre a avaliação e a comunicação, com referência ao registo escrito, como no caso dos testes de avaliação.

A comunicação na aula de matemática apresenta-se ao serviço da avaliação das aprendizagens dos alunos: o questionamento, os registos escritos, as discussões em aula conjugam uma intenção avaliativa com uma intenção comunicativa. Contudo, a mesma intenção de avaliação, no sentido global, decorre de práticas de comunicação distintas que, no caso analisado, são repetidamente salientadas como promotoras de distintos significados sobre o processo de ensino e de aprendizagem.

Nesta perspetiva, as práticas letivas na aula de matemática, ao serviço da avaliação e da comunicação, assumem um foco na gestão e no clima de sala de aula (desenvolvimento das tarefas propostas, estrutura da aula, organização do trabalho dos alunos, …). Assim, o confronto entre as perceções e as práticas do professor desencadeará uma necessária reflexão sobre a relação triangular entre ensino e aprendizagem, avaliação e comunicação.

Referências bibliográficas

Abrantes, P. (2002). Avaliação das Aprendizagens no Ensino Básico. In: P. Abrantes & F. Araújo (Coord.) *Avaliação das Aprendizagens* (pp. 9 -15). Lisboa: Ministério da Educação e Departamento da Educação Básica.

Antão, J. (2001). *Comunicação na sala de aula*. Porto: Edições Asa.

Arlo, H. & Skovsmose, O. (2006). *Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica.

Brendefur, J. & Frykholm, J. (2000). Promoting Mathematical Communication in the Classroom: Two preservice teachers' conceptions and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 3, 125-153.

Cândido, P. (2001). Comunicação em Matemática. In Smole, K. & Diniz, M. (Orgs.) *Ler, escrever e resolver problemas* (pp. 15-28). Porto Alegre: Artmed Editora.

Fernandes, D. (2001). Avaliar para melhorar as aprendizagens: análise e discussão de algumas questões essenciais. In I. Fialho & H. Salgueiro (pp. 81-107), *Turma Mais e Sucesso Escolar. Contributos teóricos e Práticos*. Évora. CIEPUE. Universidade de Évora.

Fernandes, D. (2015) Prefácio. In Neves, A. C. & Ferreira, A. L. (2015). *Avaliar é Preciso? Guia prático de avaliação para professores e formadores.* Lisboa: Guerra & Paz.

Guerreiro, A.; Tomás Ferreira, R.; Menezes, L. & Martinho, M. H. (2015). Comunicação na sala de aula: a perspetiva do ensino exploratório da matemática. *Zetetiké – FE/UNICAMP & FEUFF* – v. 23, n. 44 – julho/dezembro.

Mason, J. (2000). Asking mathematical questions mathematically. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31*(1), 97-111.

Menezes, L., Guerreiro, A., Martinho, M. H., & Tomás Ferreira, R. A. (2013). Essay on the role of teachers' questioning in inquiry-based mathematics teaching. *Sysiphus, 1*(3), 44-75.

Menino, H. (2004). *O relatório escrito, o teste em duas fases e o portefólio como instrumentos de avaliação das aprendizagens em Matemática: Um estudo no 2.º ciclo do Ensino Básico.* Lisboa: APM.

Neves, A. C. & Ferreira, A. L. (2015). *Avaliar é Preciso? Guia prático de avaliação para professores e formadores.* Lisboa: Guerra & Paz.

Powell, A. & Bairral, M. (2006). *A escrita e o pensamento matemático.* São Paulo: Papirus.

Rafael, M. (1998). *Avaliação em Matemática no ensino secundário: Concepções e práticas de professores e expectativas de alunos* (Tese de mestrado). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Santos, L. (2002). Auto-avaliação regulada: Porquê, o quê e como?. In P. Abrantes, & F. Araújo (Coord.). *Reorganização Curricular do Ensino Básico: Avaliação das aprendizagens. Das concepções às práticas* (pp.75-83). Lisboa: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Básico.

Santos, L. (2004). La evaluación del aprendizage en matemáticas: orientaciones y retos. In J. Giménez; L. Santos, & J. P. Ponte (Coords.). *La actividade matemática en el aula: Homenaje a Paulo Abrantes* (pp. 157-168). Barcelona: Biblioteca de Uno.

Smole, K. & Diniz, M. (2001). Ler e Aprender Matemática. In Smole, K. & Diniz, M. (Orgs.) *Ler, escrever e resolver problemas* (pp. 69-86). Porto Alegre: Artmed Editora.

INTEGRAÇÃO CURRICULAR: A FILOSOFIA NAS MALHAS DE UM PROBLEMA

Pedro Duarte[3], *Dárida Maria Fernandes*[2], *António José Guedes*[3]
[1]Escola Superior de Educação do Politécnico do Porto, pedropereira@ese.ipp.pt
[2]Escola Superior de Educação do Politécnico do Porto, daridafernandes2@gmail.com
[3]Escola Superior de Educação do Politécnico do Porto, ajoguedes@gmail.com

Resumo. *O presente trabalho pretende explicitar os resultados obtidos num processo de investigação em que se relacionou a Filosofia para Crianças, enquanto metodologia e a capacidade de Resolução de Problemas em crianças do 1.º Ciclo do Ensino Básico. O estudo desenvolveu-se numa turma do 2.º ano no concelho do Porto, em que se trabalhou colaborativamente com a professora titular de turma e se integrou as diferentes áreas curriculares, numa perspetiva curricular, transversal e de educação para a cidadania. Nesta investigação pretendia-se perceber o impacto desta metodologia no desenvolvimento do raciocino e da comunicação matemática associada ao processo de resolução de problemas relacionado com a aquisição e a mobilização do conhecimento matemático.*

Abstract. *The present work intends to explain the results obtained in a research process in which the Philosophy for Children, as methodology, and the Problem Solving capacity in children of the 1st Cycle of Basic Education were related. The study was developed in a 2nd grade class in the city of Oporto, in collaboratively work with the class teacher and integrating the different curricular areas, in a a perspective of curricular transversality and citizenship Education. This research aimed to understand the impact of this methodology on the development of reasoning and mathematical communication associated with the problem solving process related to the acquisition and mobilization of mathematical knowledge.*

Palavras-chave: *Integração Curricular; Filosofia para Crianças; Resolução de Problemas; Comunicação Matemática; Educação para a Cidadania.*

Reconhecendo o contributo da Resolução de Problemas enquanto competência matemática e competência social de extrema relevância, o presente trabalho pretende perceber se há alguma influência no desenvolvimento dessa competência, tendo por base as propostas de Lipman de Filosofia para Crianças. Ainda que seja uma metodologia relativamente recente, as propostas de Filosofia para Crianças têm sido relacionadas com diversas áreas do saber, como a literatura, a linguística e os estudos socias. Com o presente trabalho, pretende-se perceber de que forma é que esse contributo é, ou não, relevante para a (aprendizagem da) Matemática.

Questão-problema e objetivos

De acordo com Dewey (2013), existe uma complexidade crescente da realidade social, que deve obrigar a escola a adaptar-se de modo a permitir uma educação plena das crianças. De acordo com a perspetiva apresentada, é essencial que a escola cumpra o seu papel de formar cidadãos, alicerçando a suas práticas numa verdadeira educação para a cidadania (Quimelli, 2006; Medicis & Zago, 2008). Para tal, é necessário despertar, nas crianças, a capacidade de criticar e analisar (Medicis & Zago, 2008), para que que sejam capazes de, no futuro, exercer ativamente a sua cidadania plena (Garcia, 1999) e reconstruir a sociedade (Quimelli, 2006). Contudo, a escola continua a não desenvolver o espírito crítico e reflexivo dos seus estudantes, penalizando, assim, a sua formação enquanto individuo e agente social (Garcia, 1999).

A par disso, como referem Borralho e Neutel (2011), há um problema significativo relativamente ao insucesso da matemática. Apesar de existirem melhorias nos estudos mais recentes do PISA, estes autores referem que os estudantes portugueses continuam a revelar uma literacia matemática deficiente, bem como dificuldades em raciocinar e em resolver problemas. Percebe-se, por isso, a preocupação, por parte da comunidade investigativa, de encontrar os melhores e mais adequados métodos para desenvolver a capacidade de resolver problemas (Borralho, 1994).

Neste sentido, e considerando que a Filosofia para Crianças pretende promover o desenvolvimento das competências habilidades de pensamento, e considerando que a Resolução de Problemas é um ato mental, pretende-se perceber alguma correlação entre a abordagem pedagógica de Filosofia para Crianças e a promoção de competências na Resolução de Problemas

Face ao apresentado, pretendeu-se *perceber de que modo a abordagem pedagógica em Filosofia para Crianças, no 1º Ciclo do Ensino Básico, desenvolve competências na resolução de problemas, especificamente na capacidade de comunicar e raciocinar matematicamente?*

Com esta questão pretende-se perceber os contributos da abordagem transversal de Filosofia para Crianças que concorrem para o desenvolvimento de competências específicas em Resolução de Problemas. Nesta sequência foram delineados os seguintes objetivos específicos, alicerçados na abordagem em Filosofia para Crianças:

- Analisar a predisposição das crianças, para raciocinar matematicamente na exploração de situações problemáticas;
- Identificar o desenvolvimento dos estudantes ao comunicarem com os outros descobertas e ideias matemáticas através da linguagem oral e escrita.

Tendo em consideração os dados referidos, através deste projeto de investigação pretende-se estudar se a abordagem transversal de Filosofia para Crianças, no 1º Ciclo do Ensino Básico, influencia a forma como as crianças resolvem problemas.

Filosofia para Crianças: O Projeto de Lipman

Segundo Kant (1997), a Filosofia não é passível de ser ensinada, apenas se pode aprender a filosofar, isto é, a pensar, refletir e discutir sobre assuntos filosóficos. Atente-se, ainda, que, de acordo com Dewey (1976), é através do pensamento que se constrói conhecimento, contudo o mesmo autor (1989), refere que não é possível ensinar-se a alguém como deve pensar.

Tendo em conta esses propósitos, Matthew Lipman desenvolveu uma proposta que visa, intencionalmente desenvolver, através de temas filosóficos, as habilidades cognitivas das crianças (Elias, 2005) visando fortalecer um pensamento profundo e refletido (Lorieri, 2002), defendido por Dewey (1989). Assim, a abordagem de Filosofia para Crianças visa melhorar as capacidades de pensamento, sendo para isso necessário auxiliá-las na descoberta de regras de pensamento e a sua aplicação (Johnson, 1984).

É fundamental ter em atenção que este tipo de iniciativas não pretende tornar as crianças em filósofos, mas sim incentivá-las e apoiá-las a pensar mais, a tornarem-se, por isso, indivíduos mais reflexivos (Lipman, Sharp, & Oscanyan, 2001). Os defensores destas propostas consideram que não basta abordar os conteúdos das diversas disciplinas para desenvolver e fortalecer a capacidade de pensar dos alunos (Lorieri, 2002), uma vez que, como refere Dewey (1989), «el pensamento requiere una cuidadosa y atenta orientación educativa» (p.37).

Tendencialmente, os professores pedem aos alunos para estudarem um processo acabado, mas, e de acordo com a perspetiva de Dewey (2013), perpetuada por Lipman, os professores deveriam centrar-se mais no processo de descoberta do que nos conteúdos factuais (Daniel, Schleifer, & Lebois, 1992; Lipman, 2003), evitando considerar-se a aquisição de conhecimento como um objetivo sustentado em si mesmo, no qual o aluno é transformado numa «enciclopédia de informação inútil» (Dewey, 1989, p. 69).

A abordagem de Filosofia para Crianças pretende colmatar essas falhas, uma vez que a sua abordagem tem potencialidades para desenvolver, nos mais novos, a capacidade de estabelecer conexões e verificar distinções, de definir e clarificar, de avaliar objetiva e criticamente as informações factuais (Lipman, Sharp, & Oscanyan, 2001), permitindo desenvolver o espírito crítico e criativo e eticamente cuidado (Guedes & Rego, 2012). O que se pretende é que se assuma, numa tríade, a valorização daquilo que o ser humano tem de melhor: a capacidade de pensar criticamente, desenvolvendo instrumentos que a potenciem; a criatividade que nos faz pensar, desenhar e criar novos mundos e que decorre de um pensamento esclarecido; e por último, a capacidade de se agir num contexto solidário de valores e que permita, por essa via, tratarmos dos outros, numa perspetiva solidária e compreensiva, valorizando aquilo que a expressão de Lipman tem de melhor: «*to care*» - tratar de.

Atente-se, porém, que Lipman (2003) reconhece que a inclusão de Filosofia para Crianças no currículo não é suficiente, a par disso, o autor refere a necessidade de, nas outras disciplinas, reforçar-se a importância ao pensamento e atender-se à forma como as crianças pensam. Só assim, a escola cumpre o seu dever de proporcionar a consolidação das potencialidades cognitivas das crianças, para que consigam ter um pensamento mais efetivo nas situações futuras (Lipman, Sharp, & Oscanyan, 2001).

Com a proposta de Lipman, as crianças são estimuladas a pensar por si mesmas, na tentativa de promover a sua autonomia intelectual (Vansieleghem, 2005; Dinis, 2011), exercendo, para isso, o livre pensamento, a reflexão, a crítica, a desconstrução e a peleja ao conformismo (Guedes & Rego, 2012).

Para atingir esses objetivos, Lipman sustenta a sua abordagem de Filosofia para Crianças no que denominou de *comunidade de investigação* (referente ao conjunto dos estudantes que integrantes no processo) (Lipman, 1988; 1999; 2003; Daniel, Schleifer, & Lebois, 1992; Gadotti, 1999; Vansieleghem). Através da comunidade de investigação, pretende-se que as crianças discutam e reflitam sobre conceitos como: o respeito, a liberdade, a justiça, a igualdade, a cooperação, … (Daniel, Schleifer, & Lebois, 1992). Todavia, não se pode ignorar que é necessário garantir que existe um objetivo na comunidade (Lipman, 2003) e que os seus intervenientes pretendem, genuinamente, contribuir para o alcançar (Daniel, Schleifer, & Lebois, 1992).

Resolução de Problemas: Competências fundamentais

Existe, ainda, outra área essencial em Filosofia para Crianças, a abordagem ao pensamento lógico. Recorde-se que Dewey (1976) considera que o pensamento lógico é basilar no desenvolvimento do conhecimento individual e coletivo. Face ao referido, entende-se que o trabalho de conteúdos lógicos, com os mais novos, deve proporcionar uma forma de se aperceberem e de analisarem os seus próprios pensamentos, de maneira ordenada, estruturada e clara (Lipman, Sharp, & Oscanyan, 2001). É ainda de referir, que o desenvolvimento de competências lógicas, segundo Lipman (2003), é essencial para os estudantes, uma vez que permite às crianças fazerem inferências e possibilita o diálogo filosófico. Essa perspetiva vai ao encontro do que é espelhado por Kant (1997) quando refere que «em todo o raciocínio há uma proposição que serve de princípio e outra, a conclusão, que dela é extraída e, por fim, a dedução (a consequência), pela qual a verdade da última esta indissoluvelmente ligada à verdade da primeira» (p. 301).

Como refere Pólya (1990), a resolução de problemas é uma atividade humana essencial. Salienta-se, porém, que a abordagem em Filosofia para Crianças não lhes vai permitir resolverem os seus problemas, mas, através da abordagem da lógica e das suas regras, as crianças terão capacidade de distinguir um bom de um mau raciocínio (Johnson, 1984). Vai ser essa capacidade de distinguir formas de pensamento adequadas ou inadequadas o que vai facilitar o processo de resolução de problemas (Lipman, 2003), mobilizando o que Schoenfeld (1992) denomina de ferramentas matemáticas: a abstração, a representação e manipulação de símbolos. Tem que se ter em atenção o facto de, muitas vezes, as crianças possuírem os conhecimentos necessários para a resolução de problemas e, mesmo assim, não os serem capazes de resolver (Borralho, 1994). São estas ferramentas que vão permitir desenvolver o pensamento matemático sendo fundamentais para, de forma mais sistemática e exata, os solucionar (SIU, 2006). Mas para ser possível alcançar esse objetivo, é essencial desenvolver a capacidade derefletir (Borralho & Neutel, 2011) e de tomar decisões (Abreu, 2003).

Percebe-se assim, a existência de uma relação próxima entre a filosofia e a matemática, como menciona Kunnen (2007), uma vez que duas áreas reconhecem a importância da Resolução de Problemas, ainda que a tipologia dos problemas seja distinta. Recorde-se, ainda, que o “Palatino” – um conjunto de 46 problemas numéricos − foi aludido por Platão nas suas obras (Rojano, 1996).

Relembra-se que, na década de 1980, o National Council of Teacher of Mathematics 1984, considera a Resolução de Problemas se encontrava no topo dos princípios orientadores para a educação matemática. Note-se, ainda, que a Resolução de Problemas não é o único propósito do ensino da matemática, mas como refere o National Council of Teacher of Mathematics (1994) e Nagel (1996), é um objetivo primordial, tornando-se, assim, «um objectivo educativo central, inserido nos programas escolares de todos os países» (PISA, 2004, p. 7).

Como os verdadeiros problemas não apresentam uma resolução evidente e necessitam que os estudantes relacionem vários saberes (Diniz, 2001; Abreu, 2003), as crianças, para resolverem problemas, precisam de pensar e aplicar conhecimentos o que lhes permitem desenvolver novas perceções matemáticas (Fernandes, 2006; Smole, 2013). Salienta-se, ainda, que esta perspetiva, ao contrário do que é, tradicionalmente legitimado pelos professores em sala de aula, valoriza o processo matemático envolvido no raciocínio dos estudantes (Nagel, 1996). Para isso ser possível é fundamental que, em sala de aula, o professor não limite as tarefas propostas a exercícios, uma vez que não se pretende que os estudantes se limitem a encaram a matemática como um processo mecânico e rotineiro (Pólya, 1990). É necessário, portanto, enfatizar o processo de resolução e as diferentes estratégias utilizadas pelos estudantes (Diniz, 2001). Estes pressupostos vão ao encontro do que é aludido por Borralho (1994) relativamente à necessidade de, em contexto educativo, se explorar a metacognição, especialmente no âmbito da resolução de problemas, porque a compreensão do raciocínio é um elemento inerente ao desenvolvimento do processo.

Há, ainda, um outro aspeto que requer maior atenção: o processo e a comunicação da Resolução de Problemas. Assume-se, que não é possível considerar que as crianças limitam a Resolução de Problemas à procura de resposta a uma situação-problema, é esperado que sejam capazes de comunicar e explicar a forma como chegaram à solução (Diniz, 2001). Atente-se que as formas de representação do pensamento permitem às crianças ampliar o seu pensamento e raciocínio matemático (Smole, 2013). Porém, é preciso relembrar que a comunicação matemática não se circunscreve ao processo de registo escrito (seja por desenhos, esquemas, texto, …), a forma mais natural, na sala de aula, de comunicação matemática é linguagem oral: ouvir e falar (Diniz, 2001; Cândido, 2001; Thompson & Chappell, 2007). É aconselhável relembrar que a utilização da linguagem simbólica e abstrata da matemática é fundamental na construção de elos e na construção do sentido (National Council of Teachers of Mathematics, 1994).

É através da comunicação que os estudantes vão ter possibilidade de esclarecer, refletir e organizar os seus pensamentos (Cândido, 2001). Compreende-se, portanto, a necessidade de valorizar as múltiplas representações e estratégias utilizadas pelas crianças na resolução do problema, uma vez essa componente é essencial para o desenvolvimento da literacia matemática e para a expansão do conhecimento matemático dos estudantes (Thompson & Chappell, 2007).

Metodologia

Tendo em conta o que foi explorado, estabeleceu-se uma relação entre a Resolução de Problemas e a Filosofia para Crianças, como se verifica na seguinte tabela:

Tabela 1. Relação entre Filosofia para Crianças e Resolução de Problemas

Momento da resolução de problemas de acordo com Polya (1992), apresentado por Fernandes (2000)	Habilidades de pensamento Adaptado de Kohan (1999) e Lipman (2008)	
1. Compreensão do Problema	• Interpretar • Perceber • Relacionar	• Considerar o contexto • Classificar
2. Estabelecimento de um plano	• Relacionar • Deduzir • Levantar hipóteses	• Antecipar • Criar alternativas
3. Execução do plano estabelecido	• Formular • Projetar modelos	• Explicar
4. Avaliação	• Universalizar • Generalizar • Padronizar	• Detetar imprecisões • Procurar alternativas

Através da Tabela 1, é possível perceber que as habilidades de pensamento que podem ser desenvolvidas através da abordagem de Filosofia para Crianças, relacionam-se, com os diversos momentos propostos para a Resolução de Problemas.

Tendo isso em consideração, o projeto de investigação pretende verificar se a abordagem transversal de Filosofia para Crianças, no 1.º Ciclo do Ensino Básico, influencia a forma como as crianças resolvem problemas.

Caracterização do contexto

O trabalho foi desenvolvido numa turma de 2.º ano numa escola do Concelho do Porto. A turma é composta por 21 estudantes, entre as quais 8 são do sexo feminino e 13 do sexo masculino. A turma é constituída por crianças que pertencem a famílias socioeconómica e culturalmente desfavorecias.

Para o estudo, apenas foram explorados os resultados de 18 crianças. Explica-se este facto tendo em conta dois motivos: i) uma das crianças da turma tem Necessidades Educativas Especiais, pelo que não foi possível desenvolver as sessões e a recolha de dados como era expectável; ii) duas crianças faltaram em, pelo menos, um momento da recolha de dados, não sendo, por isso, possível utilizar os seus dados para análise.

Caracterização do processo

Numa fase inicial, pretendeu-se recolher dados sobre a turma, para verificar nos quais eram os aspetos que o projeto devia incidir. Optou-se por centrar a análise no raciocínio e na comunicação matemática, tendo em conta a forma como os estudantes se comportaram face aos problemas propostas.

Após essa fase inicial, foram desenvolvidas 10 aulas que incorporaram a abordagem de Filosofia para Crianças, com os conteúdos específicos de cada disciplina. Após o desenvolvimento de todas as sessões, considerou-se necessário desenvolver duas sessões extra para explorar as relações possíveis entre a Expressão Plástica e a Filosofia para Crianças.

Para que o desenvolvimento das aulas fosse sistemático e incorporasse a abordagem de Filosofia para Crianças de forma consistente, optou-se por desenvolver uma planificação própria que revela-se, claramente, essas relações (confrontar com Anexo A), centrando-se a abordagem de Filosofia para Crianças no que é proposto por Kohan (1998) e Lipman (2008).

A abordagem relativa a Filosofia para Crianças centrou-se em dois aspetos: i) desenvolvimento de ferramentas específicas que serviram de motivação ou sistematização dos conteúdos abordados em diversas áreas curriculares ii) adoção de uma postura pedagógica e de práticas que permitam «questionar constantemente o que se diz, de explorar conceitos, trabalhar com opostos, pensar nos seus contrários» (Machado, 2013, p. 520).

As sessões desenrolaram-se de acordo com o que se encontra explanado na seguinte tabela:

Tabela 2. Distribuição das sessões de acordo com as áreas curriculares

Área Curricular	Português	Estudo do Meio (Ciências Sociais)	Estudo do Meio (Ciências Naturais)	Matemática	Expressão Plástica
Nº de sessões	3	3	3	1+2*	2
Área estruturante da Filosofia	• Antropologia Filosófica • Ética • Filosofia da Linguagem	• Antropologia Filosófica • Ética • Investigação social	• Filosofia da Linguagem • Natureza da Perceção	• Filosofia da Linguagem	• Filosofia da Linguagem • Antropologia Filosófica

*sessões relativas à resolução de problemas (recolha de dados)

Sustentação metodológica e instrumentos de recolha de dados

Para uma análise mais sustentada dos diversos elementos em estudo, optou-se por uma abordagem de *Mixed Methods* (métodos mistos). De acordo com Bryman (2012) e Creswell (2014), este método implica a integração, simultânea, de métodos de análise quantitativa e métodos de análise qualitativa, ainda que se assume que se incidiu, com maior relevância, nos dados quantitativos. Este tipo de abordagem não limita a análise a uma tipologia de elementos, permitindo, dessa forma, uma compreensão mais completa e complexa do fenómeno em estudo.

Desta forma, é essencial recolher e articular dados qualitativos e quantitativos sobre o mesmo fenómeno (Cohen & Manion, 1994; Fortin, 1999). Para o presente trabalho optou-se por diversos instrumentos de recolha de dados: i) produções dos estudantes; ii) grelhas de observação; iii) entrevista à professora titular.

Para isso, foram recolhidos os problemas resolvidos pelas crianças no dia 13 de novembro e no dia 22 de janeiro. Os problemas foram adaptações dos que foram escolhidos para os Testes Intermédios do 2º ano de Matemática entre 2011 e 2013. Ao escolher problemas do GAVE, pretendia-se introduzir um elemento neutro na investigação e que permitisse uma comparação nos diversos momentos. Foram analisados problemas resolvidos em pares (Anexo B) e individualmente (Anexo C), para ser possível uma análise mais ampla do processo de resolução.

A grelha de observação ainda que seja referente a aspetos tendencialmente qualitativos, apresenta-se como um instrumento quantitativo. Ao atribuir níveis de desempenho (de 0 a 2) quantificam-se os comportamentos evidenciados pelas crianças durante a aula. É ainda de salientar que a grelha foi preenchida por dois observadores (um dos autores e a professora titular de turma) durante o processo de resolução de problemas pelos estudantes.

A entrevista surge com a necessidade de explorar mais significativamente o processo evolutivo da turma tendo em conta as aulas desenvolvidas no âmbito da Filosofia para Crianças. Pretende-se que a entrevista à docente seja um instrumento que permita uma análise não apenas do resultado, mas também do processo e do desenvolvimento de capacidades nas crianças. Este instrumento, como sustenta Ferreira (2014) é essencialmente para a recolha de dados qualitativos. Refira-se, ainda, que, de acordo com o mesmo autor, a entrevista realizada foi semi-diretiva e foi desenvolvida após todas as sessões indicadas na Tabela 2.

Análise dos Dados

Tabela 3. Correção e raciocínio das respostas apresentadas pelas crianças

	Resposta			
	Corretas	Incorretas	Não apresenta	
13/11/2014	18	0	0	
22/01/2015	16	1	1	
	Raciocínio			
	Corretas	Incompleto	Não apresenta	Inadequado
13/11/2014	8	4	4	2
22/01/2015	16	1	1	0

Através da comparação dos dados relativamente aos dois momentos distintos: 13 de novembro de 2014 e 22 de janeiro de 2015, é possível verificar diversos aspetos que revelam interesse.

Por um lado, e como se verifica pela Tabela 3, há um decréscimo do número de respostas corretas. Ao contrário do que se sucedeu no primeiro momento, em que todas as crianças resolveram corretamente o problema individual, no segundo momento, duas delas não conseguiram realizar ou não resolveram corretamente. Por sua vez, ao comparar-se o raciocínio a situação é consideravelmente diferente. Verifica-se que há uma progressão de 100% da correção no raciocínio e um decréscimo de 75% nas respostas que não apresentavam um raciocínio ou apresentavam um raciocínio incompleto. A par disso, é possível verificar que, ainda que no primeiro momento duas crianças apresentem um raciocínio inadequado, esse tipo de abordagens ao problema não se encontra presente no segundo momento.

Numa análise inicial, os dados parecem indicar que a turma apresenta resultados menos positivos na forma como resolve problemas, uma vez que existe um número maior de respostas incorretas. Contudo, ao analisá-los com maior profundidade, percebe-se que as crianças apresentam resultados superiores no seu raciocínio e na forma como o comunicam. Assim, a turma, no segundo momento, revela uma maior preocupação no processo, não se limitando a indicar uma resposta.

Esses dados são corroborados quando se procede à atribuição e análise dos níveis de correção. É necessário considerarem-se os seguintes níveis, adaptados da grelha de correção indicada pelo GAVE nos diversos testes intermetidos entre 2011 e 2013.

Nível 0:	Não apresenta resposta ou explicação;
Nível 1:	Apresenta uma resposta incorreta;
Nível 2:	Apresenta uma resposta correta mas não apresenta uma resolução adequada;
Nível 3:	Apresenta uma resposta correta, mas com explicação incompleta;
Nível 4:	Não apresenta resposta, mas apresenta uma explicação completa e adequada;
Nível 5:	Apresenta uma resposta e uma explicação correta;

Ao elabora-se uma análise tendo em conta os níveis indicados, verifica-se que há uma evolução de, aproximadamente, 29 % da média geral da turma. No primeiro momento, a média é de 3,5 (em 5 possíveis), e no segundo momento a média é de 4,5 (em 5 possíveis). Contudo, existe uma análise que requer mais atenção.

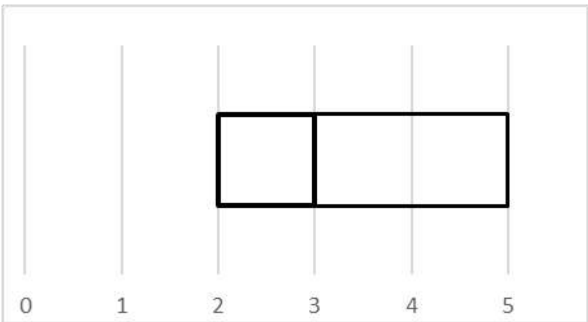


Gráfico 1. Distribuição dos níveis de correção a 13/11/2014

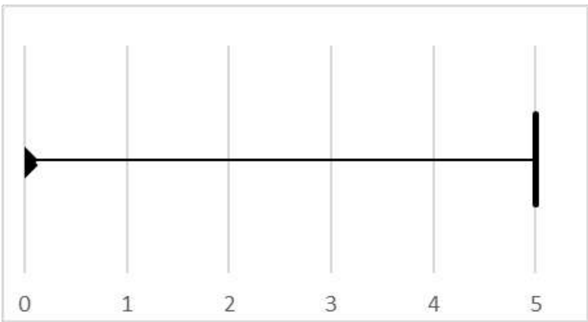


Gráfico 2. Distribuição dos níveis de correção a 22/01/2015

Ao comparar-se a distribuição dos níveis (confrontar com o Gráfico 1 e 2), é possível verificar que no primeiro momento há uma distribuição dos níveis entre o 2 e o 5, existindo maior incidência nos níveis entre o 3 e o 5. Por sua vez, no segundo momento, há uma incidência quase total no nível 5 e a distribuição dos outros níveis, entre o 0 e o 4, são essencialmente residuais. De acordo com os dados, revela-se uma progressão significativa da turma no sentido de se aproximarem, claramente, do nível máximo, que exige, além da apresentação de uma resposta correta, a explicação de um raciocínio coerente e correto.

Atente-se que, de acordo com o que é possível verificar nas figuras 1 e 2, a 22 de janeiro de 2015 os estudantes, ao resolverem o problema individualmente, apresentam o seu raciocínio de forma clara e através da utilização de estratégias diversificadas. Este facto não se apresentou de forma sistemática no dia 13 de novembro de 2014, em que por vezes se verificou explicações e resoluções inadequadas (confrontar com gráfico 1).

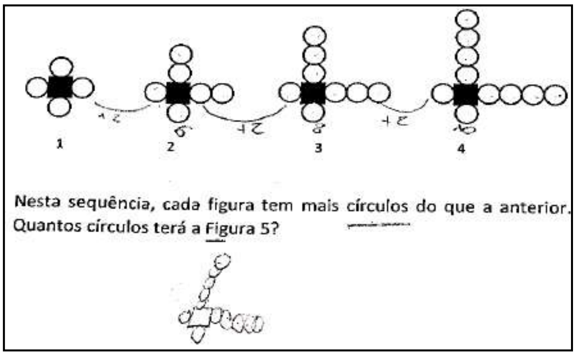


Figura 1. Resolução individual I

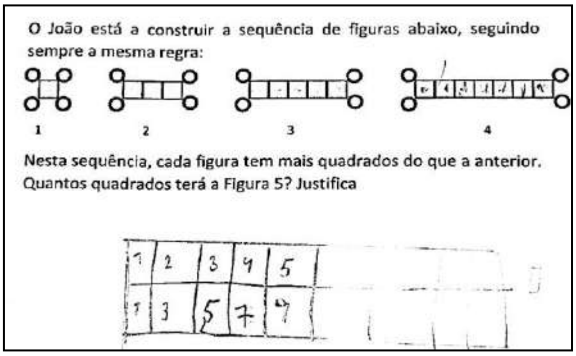


Figura 1. Resolução Individual II

Atendendo às produções dos estudantes, é verificável que, tanto num problema como no outro, as crianças revelaram perceber o problema, ainda que de formas distintas. É ainda de referir que, na figura 1, o estudante não se limitou a encontrar a regularidade, pois ao desenhar a figura 1, torna-se explícito para o leitor em que figura pensada pela criança pensou e se o seu raciocínio está correto ou não. Por sua vez, na segunda resolução encontra-se espelhada a organização do pensamento da criança, a, tendo sido estruturado numa tabela, indicando o grau de sistematização conseguido. Essa análise indicia uma melhoria significativa na forma como as crianças resolveram os problemas individualmente.

Para a análise da clareza apresentada pelos pares, foram considerados três níveis de desempenho possíveis de resolução:

Clara: A explicação apresentada é facilmente percetível; **Pouco clara:** A explicação apresentada permite, com alguma dificuldade, perceber o raciocínio; **Nada clara:** A explicação apresentada não permite perceber o raciocino;

Em nenhum dos momentos foram apresentadas respostas que se poderiam considerar nada claras, pelo que a as respostas ou foram pouco claras ou claras. Ao confrontar com Gráfico 3, é possível verificar que no primeiro momento 61% das respostas revelam clareza no raciocínio e constata-se uma melhoria de 45% para o segundo momento, no qual 89% das crianças apresenta a sua resolução de forma clara. Por sua vez, há um decréscimo de 75% (variação de 89% para 11%) das crianças que estruturam a resolução do problema de forma pouco clara.

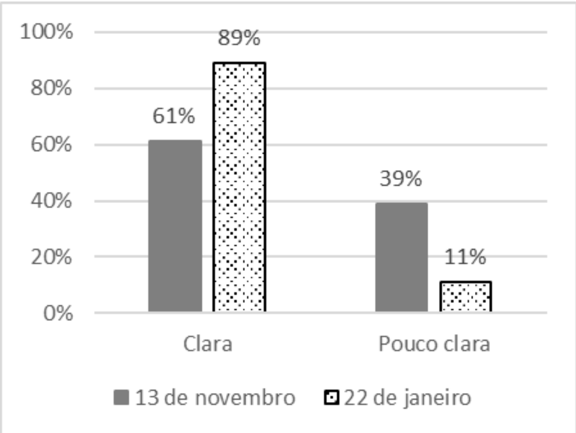


Gráfico 3. Níveis de clareza apresentados

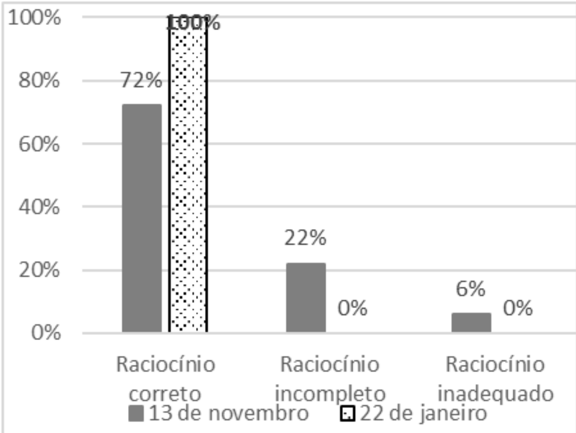


Gráfico 4. Tipologia de raciocínio apresentado

Para a análise do raciocínio apresentado pelas crianças, durante o momento de resolução a pares, optou-se por considerar três tipos de raciocínios possíveis:

Raciocínio correto: A resolução apresentada demonstra um raciocínio correto e adequado ao problema; **Raciocínio incompleto:** A resolução apresentada permite subentender um raciocínio correto e adequado do problema, contudo não são apresentados todos os passos de resolução; **Raciocínio inadequado:** A resolução apresentada ou não se adequa ao problema apresentado, ou, face ao que é evidenciado, o raciocínio não é correto.

Focando a análise neste âmbito (confrontar com Gráfico 4), e ao considerarem-se os dados recolhidos no dia 13 de novembro, verifica-se que 72% das crianças resolveram o problema com um raciocínio correto, apenas 22% não apresentam uma resolução completa e só 6% apresenta um raciocínio incorreto. No dia 22 de janeiro, verifica-se uma melhoria de 28% nas respostas de raciocínio completo e correto (confrontar com Gráfico 4). Esta melhoria indicia-se ao verificar-se que todas as respostas dos pares apresentam um raciocino correto. Estes dados vão ao encontro do que já tinha sido apresentado relativamente à apresentação clara da resolução de problemas, tendo em conta a forma como as crianças explicaram o processo de resolução. Face ao exposto existe uma convergência de resultados entre os dados recolhidos no âmbito da comunicação e do raciocínio matemático.

Em concomitância com estes dados, é necessário mencionar o desenvolvimento das competências transversais das crianças. Os dados, recolhidos através da grelha de observação, foram agrupados de acordo com 3 níveis distintos, em cada um dos quatro parâmetros em análise (Exploração de diversas opções na resolução do problema; Comunicação do que pensou; Trabalho em pares para a resolução do problema; Compreensão do raciocínio dos outros):

Nível 0:	Não demonstra competências, no parâmetro em estudo;
Nível 1:	Demonstra, parcelarmente, competências no parâmetro em estudo;
Nível 2:	Demonstra competências no parâmetro em estudo.

De acordo com o Gráfico 5, é possível verificar que há uma progressão em todas as capacidades em estudo. Através da sua análise, destaca-se, indubitavelmente, a melhoria na capacidade dos estudantes de perceberem o raciocínio dos outros, aproximadamente de 77%. Por sua vez, e mesmo com uma melhoria de 64%, os estudantes relevam maior dificuldade em comunicar a forma como pensaram. As capacidades de explorar diversas opções na resolução de problemas e a de trabalhar em par para a resolução dos mesmos, apresentam melhorias idênticas e menos significativas, de 56% e 57%, respetivamente.

Salienta-se, ainda, que as capacidades que os estudantes apresentam melhores resultados são: a compreensão do raciocínio dos outros e o trabalho em pares para a resolução dos problemas, que se aproximam do valor médio máximo (nível 2).

Numa avaliação geral, e considerando a média das 4 capacidades em estudo, verifica-se que há uma tendência para a aproximação do nível máximo, com uma melhoria de 77%, aproximando o valor médio das 4 capacidades no nível 1,5.

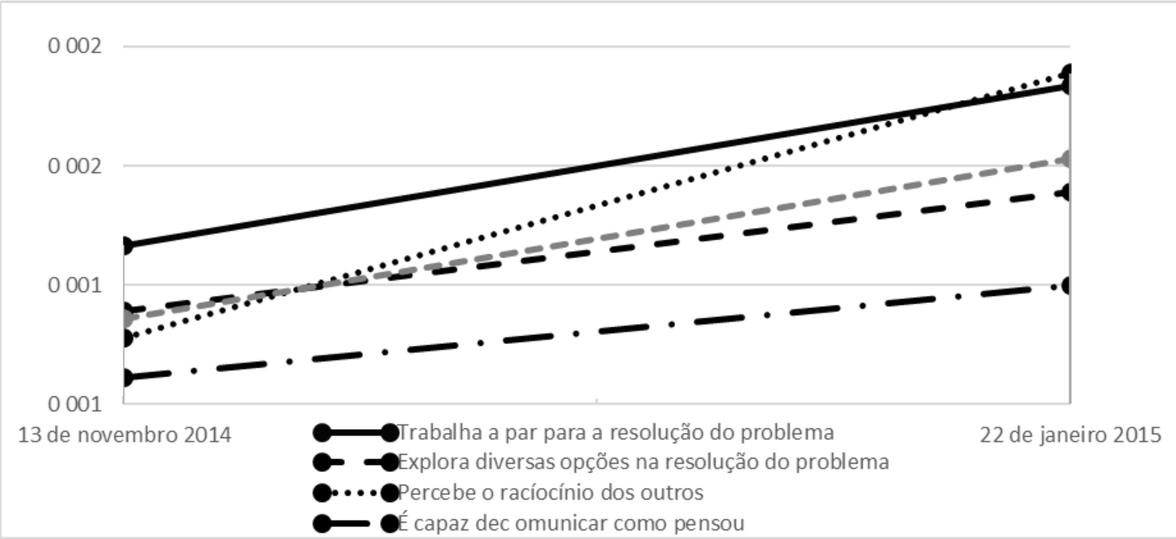


Gráfico 5. Evolução do nível médio das 4 capacidades em estudo

Além da progressão específica de cada uma das capacidades relacionadas com a resolução de problemas, é fundamental referir o progresso no desenvolvimento transversal das crianças. De acordo com o que foi referido pela professora titular ao longo da entrevista, as sessões desenvolvidas permitiram «*levar os alunos a pensar*».

De acordo com a entrevista à docente, os estudantes «*conseguiram ser menos egoístas, menos egocêntricos, pensar um bocadinho nos outros e refletir e até questionarem-se a eles próprios*». Apesar de não se apresentarem como competências específicas de resolução de problemas, não podem ser ignoradas no processo de compreensão e resolução de problemas. O facto de as crianças mostrarem abertura na relação com/aos colegas, influencia, diretamente, a forma como elas comunicam, como percebem os outros e, também, como explicam o seu raciocínio. Verifica-se, portanto, que os resultados previamente apresentados (relacionados com a comunicação dos estudantes), são também evidenciados pelo que foi aludido pela professora. Salienta-se, ainda, que os dados obtidos referentes à melhoria no âmbito da comunicação das crianças, pode ser explicado pelo que foi referido pela docente titular de turma, que considerar que «*os alunos agora (...) conseguem ser mais críticos em relação aos colegas, em relação a coisas que se passam e não ficam contentes logo assim com a primeira explicação: estão sempre a questionar*».

Relativamente à forma como as crianças trabalham em par, é necessário aludir ao facto da professora considerar que os estudantes *«já ouvem os outros»* e que *«se os colegas explicarem eles até aceitam»*. Percebe-se, portanto, que há uma maior flexibilidade e facilidade em ouvir e compreender os outros. Sem esta capacidade não é possível trabalhar em pares.

Em simultaneidade com o que já foi analisado, não se pode ignorar que se as crianças se questionam a elas próprias, mais facilmente irão refletir sobre como resolveram o problema e se o seu raciocínio está ou não correto. É ainda de ressalvar que, como a docente referiu, os estudantes *«habituaram-se, aprenderam que antes de fazer qualquer coisa, ou até antes de responder, primeiro têm que pensar, têm que refletir, olhar para dentro deles e pensar mais no que estão a ler, ou no que se está a dizer, antes de se verbalizar o que lhes vai no pensamento»*. Percebe-se, portanto, que existe melhoria dos raciocínios apresentados no segundo momento de recolha de dados, pois as crianças refletem antes de comunicar com os outros. A professora refere ainda que as crianças são mais críticas e reflexivas e mais dificilmente irão expor um raciocínio que não foi pensado e discutido. Os dados obtidos espelham o cuidado e a reflexão das crianças no momento da resolução de problemas e da explicitação dos seus raciocínios aos colegas.

Síntese dos resultados

Tendo em conta os dados que foram explanados nos pontos anteriores, é legítimo considerar que há uma progressão significativa das crianças face à Resolução de Problemas, tanto no que se refere aos resultados obtidos, como no desenvolvimento de capacidades transversais: de comunicação e de raciocínio matemático. Essa melhoria é corroborada por todos os elementos que foram analisados, o que permite considerar que as melhorias evidenciadas indicam que as aprendizagens das crianças desenvolveu-se de modo a permitir a progressão nos diferentes parâmetros em análise.

Através dos dados recolhidos é possível indiciam que a abordagem de Filosofia para Crianças, no 1º Ciclo do Ensino Básico, poderá ter afetado positivamente a forma como os estudantes desenvolvem o seu raciocínio matemático (primeiro objetivo de análise). Esses resultados foram também evidenciados pela insistência e discussão dos diversos raciocínios que surgiram durantes as 12 sessões implementadas. Ao explorar os raciocínios dos estudantes nas diversas áreas curriculares, as crianças indiciaram ter desenvolvido e mobilizado o seu raciocínio matemático na resolução das situações problemáticas, como se verifica com se pode constatar na análise do gráfico 5.

De modo convergente pode-se induzir que, pela análise dos gráficos 3 e 5, existe uma melhoria significativa na forma como as crianças comunicam as suas ideias matemáticas (segundo objetivo de análise), tanto de forma oral (na discussão com os pares), como de forma escrita (através das produções individuais e a pares). De facto, durantes as sessões de Filosofia para Crianças, houve uma preocupação em garantir que crianças comunicassem de forma suficientemente clara as suas ideias aos colegas para estes compreenderem melhor os seus raciocínios, tendo havido um contributo significativo na melhoria da comunicação.

Ao existirem melhorias na forma como os estudantes desenvolvem o seu raciocínio, como se pode verificar no gráfico 4, comunicam e trabalham (individualmente e em colaboração) para a resolução das situações problemáticas (recordar a análise do gráfico 5), é possível considerar que as crianças desenvolveram competências essenciais para a resolução de problemas matemáticas – raciocínio e comunicação matemática. Ainda que não se possa limitar as melhorias reveladas às aprendizagens desenvolvidas nas apenas sessões de Filosofia para Crianças, não se pode ignorar o seu contributo para os resultados apresentados.

Reflexões e Considerações Finais

A especificidade do projeto e a escassa investigação existente que envolva o trabalho transversal e sistemático de Filosofia para Crianças, em todas as disciplinas/áreas curriculares de forma a tentar perceber a sua relação com a capacidade de resolver problemas, revelou dificuldades adicionais na conceção, desenvolvimento e avaliação do mesmo. Neste contexto, refira-se ainda que teria sido interessante verificar o impacto da abordagem de Filosofia para Crianças e o desenvolvimento de competências de Resolução de Problemas em diferentes anos letivos, ou num período temporal mais amplo.

Seria ainda relevante verificar, por exemplo, de que forma a Filosofia para Crianças contribui para o desenvolvimento das capacidades de interpretação de uma experiência científica, ou para a compreensão dos contextos sociais e históricos. Deixam-se, assim, hipóteses de trabalho para investigações futuras.

Referências bibliográficas

Abreu, M. M. (2003). *Os professores de Matemática e a resolução de problemas na gestão do currículo*. Universidade de Aveiro. Associação de Professores de Matemática.

Borralho, A. (1994). Formação de Professores de Matemáticas e Resolução de Problemas. Em L. J. Nieto, & V. M. Jiménez (Coords.), *La Formacion del Professorado de Ciencias Y Matematicas en España y Portugal* (pp. 67-80). Badajoz: Departamento de Didáctida de las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas de la Universidade de Extremadura.

Borralho, A., & Neutel, S. (2011). O Currículo Nacional do Ensino Básico e a Prática Lectiva dos Professores de Matemática. *Revista Iberoamericana de Educación*, 56, 227-246.

Bryman, A. (2012). Social Research Methods (4th ed.). Great Clarendon Street, Oxford: Oxford University Press.

Cândido, P. T. (2001). Comunicação em Matemática. Em K. S. Smole, & M. I. Diniz (orgs.), *Ler, escrever e resolver problemas: Habilidades básicas para aprender matemática* (pp. 15-28). Porto Alegre: Artmed.

Cohen, L., & Manion, L. (1994). *Research Methods in Education*. New York: Routledge.

Creswell, J. W. (2014). *Research Design: qualitative, quantitative, and mixed methods approaches*. London: SAGE Publications.

Daniel, M.-F., Schleifer, M., & Lebois, P. (1992). Philosophy for Children: The Continuation of Dewey's Democratic Project. *Analytic Teaching*, 43(4), 3-12.

Dewey, J. (1976). Some Stages of Logical Thought. Em J. A. Boydston (Ed.), *The Middle Works of John Dewey* (pp. 151-174). United States of America: Souther Illinois University Press.

Dewey, J. (1989). *Cómo pensamos: Nueva exposición de la relación entre pensamiento reflexivo y processo educativo*. (M. A. Galmarini, Trad.) Barcelona: Ediciones Paidós.

Dewey, J. (2013). *Democracy and Education*. The Project Gutenberg. Obtido de http://www.gutenberg.org/files/852/852-h/852-h.htm

Dinis, C. M. (2011). *O que é a Filosofia para Crianças: Programa de Matthew Lipman*. Dissertação de Mestrado, Universidade da Beira Interior, Artes e Letras.

Diniz, M. I. (2001). Resolução de Problemas e Comunicação. Em K. S. Smole, & M. I. Diniz (orgs.), *Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática* (pp. 87-37). Porto Alegre: Artmed.

Elias, G. G. (2005). *Matthew Lipman e a Filosofia para Crianças*. Dissertação de Mestrado, Universidade Católica de Goiás, Goiânia.

Fernandes, D. M. (2006). *Aprendizagens algébricas em contexto interdisciplinar no ensino básico*. Dissertação de Doutoramento, Universidade de Aveiro, Departamento de Didáctica e Tecnologia Educativa da Universidade de Aveiro.

Ferreira, V. S. (2014). Artes de Entrevistar: Composição, Criatividade e Improvisação a duas vozes. Em L. L. Torres, & J. A. Palhares (orgs.), *Metodologia de investigação em Ciências Sociais* (pp. 164-195). Vila Nova de Famalicão: Húmus.

Fortin, M.-F. (1999*). O Processo de Investigação: Da concepção à realização*. (N. Salgueiro, Trad.) Loures: Lusociência.

Gadotti, M. (1999). A Filosofia para Crianças e Joves e as perspetivas atuais da Educação. *Congresso Internacional de Filosofia coma Crianças e Jovens - IX Encontro do ICPIC*. Brasilia: Conselho Internacional para a Investigação Filosófica com Crianças.

Garcia, J. (1999). Indisciplina na Escola: uma reflexão sobre a dimensão preventiva. *Revista Paranaense de Desenvolvimento-RPD*, 95, 101-108.

Guedes, A. J., & Rego, M. Á. (2012). Filosofia para crianças no contexto educativo português. *Revista Iberoamericana de Educación / Revista Ibero-americana de Educação*, 58(3).

Johnson, T. W. (1984). *Philosophy for Children: An Approacht to Critical Thinking*. Phi Delta Kappa Educational Foundation.

Kant, I. (1997). *Crítica da Razão Pura.* Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Kohan, W. O. (1998). Fundamentos para compreender e pensar a tentativa de M. Lipman. Em W. O. Kohan, & W. Míriam, *Filosofia para Crianças - Tentativa pioneira de Matthew Lipman* (3ª ed., pp. 95-110). Petrópolis, RJ: Editora Vozes.

Kunen, K. (2007). *The Foundations of Mathematics*. London: College Publications.

Lipman, M. (1988). *Philosophy Goes to School. United States of America*: Temple University Press.

Lipman, M. (1999). Sobre a diferenças entre "filosofia para crianças", "filosofia com crianças" e "a filosofia da infância". Em W. O. Kohan, & B. Leal (orgs.), *Filosofia para Crianças Em debate* (2.ª ed., Vol. IV, pp. 130-138). Rio de Janeiro: Editora Vozes.

Lipman, M. (2003). Thinking in Education (2nd ed.). New York: Cambridge University Press.

Lipman, M. (2008). Reforçar o raciocínio e o julgamento pela filosofia. Em C. Leleux (org.), *Filosofia para crianças: o modelo de Matthew Lipman em discussão* (F. Murad, Trad., pp. 17-29). Porto Alegre: Artmed.

Lipman, M., Sharp, A. M., & Oscanyan, F. S. (2001). *A Filosofia na Sala de Aula*. (A. L. Falcone, Trad.) São Paulo: Nova Alexandria.

Lorieri, M. A. (2002). Educação para o Pensar. Em E. A. Castro, & P. Ramos-de-Oliveria (orgs.), *Educando Para o Pensar* (pp. 11-31). São Paulo, Brasil: Pioneira Thomson Learning.

Machado, C. M. (2013*). Educar (para) o pensar: Desenvolvimento de competências reflexivas em professores e alunos do 1.º CEB - Contributos da Filosofia para Crianças.* Tese de Doutoramento, Universidade de Aveiro, Departamento de Educação, Aveiro.

Medicis, F. A., & Zago, J. A. (2008). A Formação do Cidadão Crítico: Análise de uma unidade escolar. *Saber Acadêmico*, 6, 190-191.

Nagel, N. G. (1996). *Learning Thru Real-World Problem Solving: The Power of Integrative Teaching*. (T. K. Bennett, Ed.) United States of America: Corwin Press.

National Council of Teachers of Mathematics. (1994). *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar* (2.ª ed.). (E. Veloso, F. Nunes, H. M. Guimarães, J. F. Matos, J. M. Duarte, L. C. Leal, . . . R. F. Carvalho, Trads.) Associação de Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional.

Patriota, M. (1999). O que a Literatura oferece à Filosofia. Em W. O. Kohan, & B. Leal (orgs.), *Filosofia para Crianças Em debate* (2.ª ed., Vol. IV, pp. 130-138). Rio de Janeiro: Editora Vozes.

PISA. (2004). *Conceitos Fundamentais em Jogo na Avaliação de Resolução de Problemas*. Lisboa: Gabinete de Avaliação Educacional do Ministério da Educação.

PISA. (2014*). PISA 2012 Results: Creative Problem Solving: Students' Skills in Tackling Real-Life Problems* (Volume V). OECD Publishing. doi:10.1787/9789264208070-en

Pólya, G. (1990). *How to Solve i: A new Aspect of Mathical Method*. England: Penguin Mathematics.

Quimelli, G. A. (2006). Educação para a Cidadania e sua Relação com a Extensão Universitária. *Revista Conexão*, 1(1), 43-47.

Rojano, T. (1996). The Role of Problems and Problem Solving in the Development of Algebra. Em N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Edits.), *Approaches to Algebra - Perspectives for Research and Teaching* (pp. 55-63). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. Em D. Grouws (Ed.), Handbook for Research on Mathematicsa Teaching and Learning (pp. 334-370). New York: Macmíllan.

SIU, M.-K. (2006). Mathematics for math-haters. *International Journal of Mathematical*, 8(1), 17-21. doi:10.1080/0020739770080102

Smole, K. S. (2013). Entre o pessoal e o formal: as crianças e as suas muitas formas de resolver problemas. Em K. S. Smole, & A. C. Muniz (orgs.), *A matemática em sala de aula: reflexões e propostas para os anos iniciais do ensino fundamental* (pp. 49-66). Porto Algre: Penso.

Thompson, D. R., & Chappell, M. F. (2007). Communication and Representation as Elements in Mathematical Literacy. *Reading & g & Writing Quarterly: Overcoming Learning Difficulties*, 23(2), 179-196. doi:10.1080/10573560601158495

Vansieleghem, N. (2005). Philosophy for Children as the Wind of Thinking. *Journal of Philosophy of Education*, 39(1), 19-35.

Anexo A

ESE | POLITÉCNICO DO PORTO
ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO

Data:
Professor:
Turma

DISCIPLINA | TEMÁTICA/TÍTULO

CONSIDERAÇÕES GERAIS	Explicar o objetivo geral da aula
INDICAÇÕES NORMATIVAS	**PROGRAMA** • **METAS CURRICULARES** •
ABORDAGEM EM FILOSOFIA PARA CRIANÇAS adaptado de Kohan(1999) e Lipman (2008)	**ÁREA ESTRUTURANTE DA FILOSOFIA / TEMA** • **HABILIDADES DE PENSAMENTO** • **COMPETÊNCIAS** •
MATERIAIS E RECURSOS	**MATERIAIS** **RECURSOS** R1.
DESCRIÇÃO DAS EXPERIÊNCIAS DE APRENDIZAGEM	**TÍTULO DA ATIVIDADE** [09:15-09:35] **Observações relevantes** *Breve justificação e explicação do que é pretendido desenvolver com a tarefa* Etapas M1 | R1
AVALIAÇÃO	O que vai ser avaliado
OBSERVAÇÕES	Observações
REFLEXÃO	*A ser preenchido após a ação*

Anexo A (preenchido)

ESE | POLITÉCNICO DO PORTO
ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO

Data: 18 de Novembro de 2014
Duração: 90 minutos

ESTUDO DO MEIO | O AR EXISTE MESMO?

APRECIAÇÕES GERAIS

A aula deverá permitir trabalhar a existência do ar e refletir sobre o que existe e que não vemos.

INDICAÇÕES NORMATIVAS

PROGRAMA

- OS ASPECTOS FÍSICOS DO MEIO LOCAL
  - Reconhecer a existência do ar (realizar experiências).
  - Reconhecer o ar em movimento (vento, correntes de ar...).
- REALIZAR EXPERIÊNCIAS COM O AR
  - Reconhecer a existência do ar (balões, seringas...).
  - Reconhecer que o ar tem peso (usar balões e bolas com ar e vazios).

ABORDAGEM EM FILOSOFIA PARA CRIANÇAS
adaptado de Kohan(1999) e Leleux (2008)

ÁREA ESTRUTURANTE DA FILOSOFIA / TEMA

- Natureza e perceção
- Mundo
- Natureza
- Descoberta

HABILIDADES DE PENSAMENTO

- Comparar;
- Relacionar;
- Fornecer Explicações;
- Encontrar semelhanças
- Fazer distinções

COMPETÊNCIAS

- Raciocínio
  - Traçar inferências
- Questionamento e investigação
  - Formar e confrontar hipóteses
  - Procurar sentido
- Formação de conceitos
  - Estabelecer relações
  - Traçar distinções
  - Precisar semelhanças

MATERIAIS E RECURSOS

MATERIAIS

M1. Saco de plástico
M2. Balões
M3. Caixa dos balões
M4. Balança
M5. Cruzeta

M6. Fios

RECURSOS

R1. Folha para Pensar (Anexo A)

DESCRIÇÃO DAS EXPERIÊNCIAS DE APRENDIZAGEM

NEM TUDO O QUE SE VÊ...

[09:00-09:30]

Discutir filosoficamente a existência do ar e a forma de o provar

Entregar folha para pensar

Discutir as respostas:

- Só porque não conseguimos ver, devemos considerar que não existe?
- Que existe mais que nós não conseguimos ver?
- Será que podemos mesmo confiar na nossa visão?
- Como podemos verificar que as coisas "invisíveis" existem?

R1

O AR EXISTE MESMO?

[09:30-09:45]

Pretende-se que esta atividade permita verificar se o ar existe

Pedir às crianças para apanharem o ar;

Questionar se realmente apanharam o ar ou não;

Perguntar como se poderia garantir que se apanha e armazena o ar;

Verificar se é possível armazenar num saco de pipocas/ boião;

Sistematizar numa frase no quadro. (e.g. Ainda que não se veja, o ar existe)

M1

O AR OCUPA ESPAÇO?

[09:45-10:15]

Com esta atividade pretende-se que os alunos verifiquem que o ar ocupa espaço

Levar uma caixa com balões;

Perguntar se os posso recolocar facilmente na caixa.

Voltar a retirar os balões e pedir para as crianças recolocarem na caixa, mas com ar.

Interrogar o que terá impossibilitado isso;

Sistematizar numa frase no quadro (e.g. Com a experiência que fizemos, descobrimos que o ar ocupa espaço)

M2; M3

O AR TEM PESO?

[09:15-10:30]

Com esta tarefa pretende-se verificar se o ar tem peso, mas fazer com que as crianças construam a experiência.

Questionar se é possível pesar o ar;

Página 2

- Já vimos que o ar existe e que o ar ocupa espaço. Mas será que ele tem peso?
- Como podemos ver isso?
- Comparando um balão cheio com um vazio?
- Mas se pesar muito pouquinho, precisaríamos de ter mais ar ou menos para ver o seu peso?

Tentar verificar através de experiências com os materiais levados para a sala;

Sistematizar numa fase no quadro. (e.g Com a experiência descobrimos que o ar também tem peso)

M3; M4; M5; M6

AVALIAÇÃO	Apontamentos de aula Envolvimento nas experiencias
OBSERVAÇÕES	Estar atento à forma como as crianças respondem às questões
BREVE REFLEXÃO	*Existem vários aspetos da aula que necessitem reflexão. Por um lado, as crianças interagiram facilmente com as questões levantadas no exercício de Filosofia para Crianças. Algumas respostas foram interessantes, e permitiram explorar questões como: a perceção sensorial, a diferença de opiniões, o plurissignificado de algumas palavras; o sentido das palavras. A par disso, e ainda relativamente ao tema de FpC, as crianças tiveram oportunidade de explicar as suas opiniões, como foi das primeiras abordagens em FpC não incidi em várias questões formais de lógica, mas consegui com que as crianças se apercebessem de algumas contradições e, pela reação delas, em várias questões eles ficaram intrigados e pensaram sobre isso.* *No âmbito específico da área das ciências, creio que foi possível as crianças explorarem duas propriedades fundamentais do ar, o facto de ocupar espaço e ter peso. Foi um processo difícil, uma vez que não pretendia dar respostas, mas apenas fazer perguntas. Contudo, uma vez que eles não estão acostumados a um ensino experimental das ciências, foi complicado pô-los a pensar como um contínuo e a perceber erros que não iam dar resposta ao que era pretendido. Contudo, ainda que interferindo mais do que pretendia, as crianças tiveram possibilidade de questionar o procedimento e verificar que há formas de verificar, ou não, as suas hipóteses. Porém, numa situação futura, devo salientar mais os aspetos de hipótese e de verificação da mesma.* *Para terminar, creio que é importante referir que o gestão do grupo foi mais simples e mais eficiente que na aula anterior. Em situações futuras deve continuar a focar este aspeto e tentar perceber quais são os melhores métodos para o controlo do grupo. É ainda de referir que devo estar atento para que toda a turma possa ver o que está a ser feito. Numa nota final, numa aula posterior devo estar atento ao comportamento do JoHe, uma vez que ele tem controlo sobre os restantes colegas, mais precisamente, os da última fila.* *19 de novembro de 2014*

Nome: ____ Data: 18 de novembro de 2014

Desafio para pensar

Preenche a tabela de acordo com a tua opinião, colocando um X no espaço que consideras mais correto.

	Existe	Não existe	Tenho dúvidas
Um mar vermelho			
O Rato Mickey			
Uma mesa branca			
As palavras			
O pensamento			
Uma porta de madeira			
A escola			
As nuvens			
Os sentimentos			
Uma cadeira azul			
Um relógio triangular			
Uma flor negra			
Plantas que se deslocam			
Uma carteira preta			
Um lápis			
O Super-Homem / A Super-Mulher			
O ar			

Anexo B

Data: 13 de novembro de 2014

Nome: ____

Nome: ____

Vamos resolver em pares

Resolvam o seguinte desafio.
Não se esqueçam de explicar o raciocínio. No final, irão explicar à turma como resolveram

A mãe pediu ao Bernardo para ir ao supermercado comprar castanhas. Quando lá chegou tirou a seguinte senha:

Sabendo que o cliente com a senha 9 acabou de ser atendido, quantas pessoas estão à frente do Bernardo?

Resposta: ____

Adaptado do teste intermédio de 2011

Data: 13 de novembro de 2014

Nome: ____

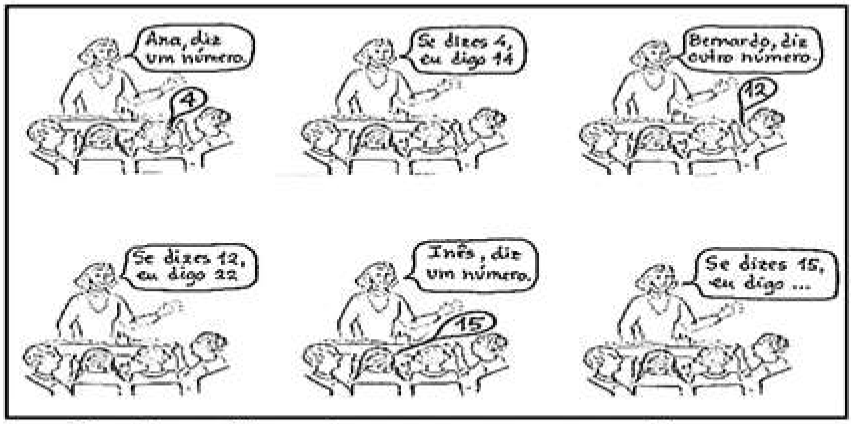
Nome: ____

Vamos resolver em pares

Resolvam o seguinte desafio.

Não se esqueçam de explicar o raciocínio. No final, irão explicar à turma como resolveram

Numa turma do 2º ano, uma professora, no dia 13 de novembro, fez o seguinte jogo:



Que número dirá a professora, se usar a mesma regra?

Resposta: ____

Adaptado do teste intermédio de 2011

Data: 13 de novembro de 2014

Nome: ____

Anos da Inês

Resolve o seguinte desafio.

A Ana, a Maria e a Inês são três irmãs.
Quando a Ana fez 4 anos, a Maria fez 8 anos e Inês fez 10 anos.

Quando a **Ana fizer 9 anos,** quantos anos **terá a Inês**?

Resposta: ____

Adaptado do teste intermédio de 2012

Data: 13 de novembro de 2014

Nome: ____

A Regra

Resolve o seguinte de desafio.

A Daniela e a Matilde, durante o Magusto, estavam a fazer um jogo. A Daniela escrevia um número num papel e a Matilde, mediante uma regra, escrevia outro número.

As duas amigas fizeram a seguinte tabela:

Daniela	Matilde
13	31
14	41
21	12
26	

Que número vai agora escrever a Matilde, se usar a mesma regra? Justifica.

Resposta: ____

Baseado no teste intermédio de 2011

Anexo C

Data: ______/_______/__________

Nome: ____

Nome: ____

Vamos resolver em pares

Resolvam o seguinte desafio.
Não se esqueçam de explicar o raciocínio. No final, irão explicar à turma como resolveram

A Ana, a Maria e a Inês são três irmãs.
Quando a Ana fez 4 anos, a Maria fez 8 anos e Inês fez 10 anos.

Quando a **Ana fizer 9 anos,** quantos anos **terá a Inês**?

Resposta: ____

Adaptado do teste intermédio de 2012

Data: ____/____/______

Nome: ____

Nome: ____

Vamos resolver em pares

Resolvam o seguinte desafio.
Não se esqueçam de explicar o raciocínio. No final, irão explicar à turma como resolveram

Para fazer um bolo de aniversário, a professora vai escolher uma forma e uma cobertura (de morango ou de chocolate).

Quantos bolos diferentes pode fazer a professora?

Resposta: ____

Adaptado do teste intermédio de 2011

Data: ____/____/______

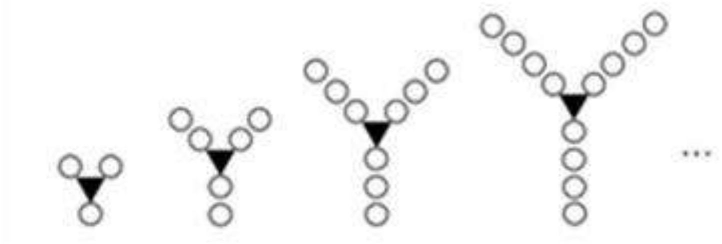
Nome: ____

Nome: ____

Vamos resolver em pares

Resolvam o seguinte desafio.
Não se esqueçam de explicar o raciocínio. No final, irão explicar à turma como resolveram

A Ana está a construir a sequência de figuras abaixo, seguindo sempre a mesma regra:



1 2 3 4

Nesta sequência, cada figura tem mais círculos do que a anterior. Quantos círculos terá a Figura 5?

Resposta: ____

Retirado do teste intermédio de 2013

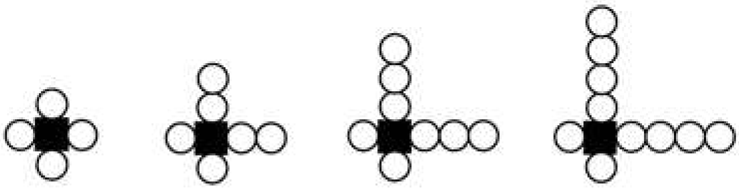
Data: ______/_______/__________

Nome: ____

Os círculos

Resolve

O João está a construir a sequência de figuras abaixo, seguindo sempre a mesma regra



1 2 3 4

Nesta sequência, cada figura tem mais círculos do que a anterior. Quantos círculos terá a Figura 5?

Resposta: ____

Adaptado do teste intermédio de 2013

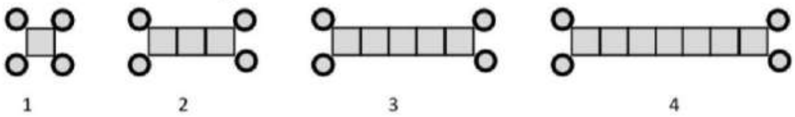
Data: ______/_______/_________

Nome: ____

Os quadrados

Resolve

O João está a construir a sequência de figuras abaixo, seguindo sempre a mesma regra:



Nesta sequência, cada figura tem mais quadrados do que a anterior. Quantos quadrados terá a Figura 5? Justifica

Resposta: ____

Adaptado do teste intermédio de 2013

A APRENDIZAGEM DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NUM CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Álvaro Fernandes Serafim Filho [1], *Maria Helena Martinho* [2]
[1] Centro de Formação de Professores, Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, alvarofernandesserafim@ufrb.edu.br
[2] Centro de Investigação em Educação, UMinho, mhm@ie.uminho.pt

Resumo. *Esta comunicação apresenta uma prática pouco explorada no ensino superior, particularmente no ensino do Cálculo Diferencial e Integral, que visa apresentar aos estudantes uma série de tarefas de natureza exploratória e investigativa com o suporte da tecnologia. O interesse investigativo por este tema tem-se apresentado de forma bastante acentuada devido aos altos índices de reprovação na matéria, além da necessidade de avançar do método exclusivamente expositivo para práticas mais dinâmicas e reflexivas que permitam a participação ativa dos alunos na elaboração do conhecimento. Com o apoio de alguns programas matemáticos os alunos exploram, ao longo de um semestre letivo, uma série de tarefas diversificadas. Para este estudo, procuramos o suporte teórico das explorações e investigações matemáticas apoiadas nos recursos tecnológicos. A introdução da informática na sala de aula, além de incorporar importantes fatores motivacionais, permite explorações dinâmicas do conhecimento. Seguindo uma metodologia qualitativa de carácter descritivo interpretativo. A estrutura experimental contou com a aplicação das tarefas em pequenos grupos e com a observação criteriosa do quadro evolutivo dos alunos, tanto no aspecto da aprendizagem quanto nos cenários das dificuldades e superações, inclusive no uso das tecnologias. Os resultados evidenciam as potencialidades que as tarefas exploratórias, com suporte nas tecnologias, agregam ao ensino do Cálculo. Estas abarcam uma diversidade enorme de assuntos da disciplina e permitem aos alunos: a possibilidade de abordar, do ponto de vista numérico, gráfico e analítico, uma série de tarefas contextualizadas; desenvolver as habilidades típicas dos processos investigativos matemáticos; compartilhar conhecimentos e cooperar na construção do conhecimento em pequenos grupos de trabalho, além de assumirem papéis ativos no processo de aprendizagem.*

Abstract: *This communication presents a little explored practice in superior education, particularly in the teaching of Differential and Integral Calculus, which aims to present students with a series of tasks of an exploratory and investigative nature supported by technology. The investigative interest in this subject has been presented in a very accentuated way in the present time due to the high failure rates in the matter, besides the need to move from the exclusively expository method to more dynamic and reflexive practices that allow the active participation of the students in the elaboration of knowledge. With the support of mathematical software, the students explored a sequence of wide range tasks with the purpose of applying some knowledge, enhancing others and introducing themes of the curricular grade. In this research, we look for the theoretical support of mathematical explorations and* *investigations by using technological resources in relevant problems. This combination is an important mechanism for the discovery-based learning. The introduction of the informatics in the classroom, besides its important motivational aspects, allows more dynamical exploration of the knowledge by using modern technologies. Following a qualitative methodology of descriptive interpretive character, the experimental structure was compounded by the application of tasks in groups and a careful observation of the evolution of the students, considering the learning aspects as well as scenarios of difficulties and overcoming, including the use of technologies. The results show the potential that the exploratory tasks, with support in the technologies, add to the teaching of Calculus. These potentialities contains a diversity of topics and allows the students: the possibility to approach, from the numeric, graphic and analytical point of view, a series of relevant in-context tasks; to develop typical skills of the mathematical investigative process; sharing knowledge and cooperating with the construction of the knowledge in small groups and work actively in the learning process.*

Palavras-chave: Cálculo Diferencial e Integral; Tarefas exploratórias e investigativas; Tecnologia educacional

Introdução

Diversos estudos nas últimas quatro décadas no Brasil apontam altos índices de reprovação nas disciplinas iniciais dos cursos de exatas, particularmente na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I (e. g., Barufi, 1999; Gomes, Lopes & Nieto, 2005; Saback, 1980). A grande evasão dos alunos recém-ingressos nesta disciplina e as notórias dificuldades observadas na aprendizagem têm repercutido em diversos fóruns educacionais. Tanto a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) quanto a Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) têm manifestado esta preocupação e vêm levantando a necessidade do aprofundamento das discussões em torno dos preocupantes números de reprovações observados na disciplina, nas diversas instituições de ensino superior do país, que oscilam na média dos 50%. Zuchi (2005), em sua tese doutoral, também reflete sobre esta temática e aponta que uma das principais dificuldades encontradas pelos alunos está na compreensão do conceito de limite, particularmente na definição formal com a simbologia $\varepsilon-\delta$, conceito este que impacta no desenvolvimento dos demais assuntos da matéria, como derivadas e integrais.

Uma tendência que vem ganhando cada vez mais espaço no ensino da Matemática consiste em envolver os estudantes em atividades matematicamente mais ricas e produtivas, sejam em contextos da realidade do aluno ou puramente matemáticos e lógicos (Ponte, 2005). Nesse sentido, a tecnologia entra como um valioso instrumento em auxílio ao aprendizado, pois o computador equipado com um bom *software* matemático pode ser usado não somente como uma sofisticada calculadora, mas também como um precioso instrumento de ajuda no processo de aprendizagem (Andrade, 2004).

A proposta deste estudo foi, portanto, investigar uma estratégia diferenciada de ensino para o Cálculo Diferencial e Integral que viesse a colaborar na qualidade da mediação e na aprendizagem dos alunos, contribuindo para reduzir as estatísticas negativas no quadro das reprovações. Através de tarefas exploratórias e investigativas, realizadas em pequenos grupos num laboratório de informática, o primeiro autor deste artigo, como professor da turma, explorou os principais conceitos e aplicações da disciplina. Exercendo o papel de investigador e de professor buscou verificar se havia uma mudança de postura no comportamento dos alunos ao propor explorações e investigações amparadas nos modernos recursos de animação e análise computacionais. O professor/investigador procurou se a atitude dos alunos assumiu uma condição mais laborativa e reflexiva, tornando-se um agente ativo na construção do seu próprio conhecimento (Bianchini e Santos, 2002).

Recorreu-se a uma experiência com uma turma para observar a influência de um conjunto de investigações com o auxílio da tecnologia sobre os alunos. Pretende-se, neste artigo, compreender a forma como dois grupos de alunos trabalham uma tarefa sobre derivadas com recurso ao *GeoGebra*.

Referencial teórico

Para este estudo, procuramos o suporte teórico do ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral, do ensino exploratório em Matemática, além do auxílio dos recursos tecnológicos para as investigações em relevantes problemas da disciplina.

A descoberta do Cálculo no século XVII foi um dos grandes marcos da história da matemática. Alguns relevantes problemas que haviam preocupado físicos e matemáticos por mais de vinte séculos passaram a ter uma solução relativamente elementar pelo que hoje conhecemos como o Teorema Fundamental do Cálculo. Essencialmente aplicamos os principais resultados teóricos do Cálculo Diferencial para medir taxas de variação em funções e perceber os efeitos dessas mudanças, além de usar o Cálculo Integral para resolver uma série de problemas da física-matemática que estão correlacionados com a quadratura de áreas limitadas por funções (Garbi, 2011). O alcance das suas aplicações tem levado o Cálculo a tratar de uma diversidade enorme de problemas dinâmicos da natureza e das ciências

As dificuldades apresentadas pelos alunos, além da sua postura passiva espectadora geralmente manifestada quando o professor expõe os assuntos, evidenciam o grau de complexidade e abstração na exposição formal dos conteúdos do Cálculo, principalmente na sua etapa inicial ao explorar o tema de limites. Talvez por este não ser um tema oficial do ensino médio, talvez pela inabilidade de explorar os conteúdos de maneira mais rigorosa, numa tendência quase sempre a "decorar" e aplicar fórmulas de maneira "artificial" em detrimento de um entendimento mais amplo e significativo dos conteúdos (Frescki & Pigatto, 2009, p. 911). Talvez por estas e outras razões os alunos acabam por evidenciar grandes dificuldades ao adentrar um curso introdutório de Cálculo. Alguns estudos focalizam parte desta problemática no aluno, na sua falta de base ou até mesmo na sua metodologia de estudo (Curi & Farias, 2008). O problema pode estar no facto da disciplina ser ministrada geralmente no início do curso, tratando-se de um primeiro contato do aluno com uma matemática "distinta" da trabalhada no ensino médio e as novidades de ser estudante universitário (Gomes, 2012). Outros estudos apontam para a metodologia de ensino do professor (Garzella, 2013). A qualidade na mediação dos assuntos ministrados pelo professor tem grande influência na aprendizagem dos alunos (Garzella, 2013). Estudos outros de natureza epistemológica (Rezende, 2003) realçam problemas que estão além das técnicas ou métodos de ensino, localizando-os na concepção originária dos conceitos que estão na base estrutural do Cálculo.

A necessidade de práticas mais dinâmicas, reflexivas e construtivas para o ensino do Cálculo fundamenta também este estudo. As orientações preconizadas nos parâmetros curriculares oficiais assinalam a importância das renovações pedagógicas para o tratamento diversificado dos conteúdos matemáticos, inclusive pelas vias exploratórias e investigativas. Estas orientações sugerem tratamentos diversificados dos conteúdos matemáticos, dando ênfase à resolução de tarefas desafiantes, como sendo esta uma atividade genuinamente matemática (São Paulo, 1991).

Neste estudo, é dado destaque ao ensino exploratório. Adentramos este modelo de ensino enfatizando as suas notórias características. No ensino exploratório os estudantes desempenham papéis ativos na aprendizagem. Esta se dá de uma forma reflexiva e construtiva, o pensamento autônomo dos alunos é incentivado (Ruthven, Hofmann & Mercer, 2011; Chapman & Heater, 2010) e, inclusive, os variados contextos investigativos favorecem que eles reflitam sobre o seu próprio processo de aprendizagem (Bishop & Goffree, 1986). No ensino exploratório as ideias matemáticas que emergem são discutidas em grupos, confrontadas e sistematizadas no coletivo (Canavarro, 2011; Ponte, 2005). Esta modalidade de ensino oportuniza aos alunos desenvolverem uma série de capacidades matemáticas ao possibilitar que os conhecimentos surjam com mais significado. A resolução de problemas, as estratégias de abordagem, os raciocínios analíticos e a comunicação matemática são algumas das habilidades potencializadas no ensino exploratório (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2003). Estes autores destacam a importância do papel do professor nesta abordagem de ensino. A gestão da aula, a escolha apropriada das tarefas e a maneira de fazer ressaltar o conhecimento destes trabalhos são algumas das suas relevantes atribuições. Para além disso, o professor acompanha, interpreta e compreende as ações e respostas dos alunos de forma a articular e harmonizar o conjunto de saberes que brotam para garantir a aprendizagem matemática.

Neste sentido, destacamos também a importância da tecnologia em auxílio à aprendizagem do Cálculo. Alguns programas (neste estudo usamos o *GeoGebra*) apresentam excelentes recursos que integram dinamicamente as funções numéricas, algébricas e gráficas de forma a privilegiar a abordagem e a compreensão de muitos dos seus assuntos. Se estas ferramentas forem utilizadas em sala de aula, em apoio às tarefas exploratórias e investigativas, devem contribuir significativamente para tornar o ambiente de ensino e aprendizagem mais atraente e produtivo, desobrigando os alunos de situações mais mecânicas e operacionais e envolvendo-os em cenários mais reflexivos e conceituais (Allevato, 2005). O auxílio do *software* matemático, nesses ambientes, possibilita que os alunos participem mais ativamente na construção do próprio conhecimento. Eles passam a modelar problemas, fazer simulações, formular conjecturas e a visualizar situações que seriam muito complicadas, ou até mesmo inviáveis, sem o suporte da tecnologia. Os ambientes informatizados permitem situações mais dinâmicas para o ensino e a aprendizagem do Cálculo; favorecem, inclusive, que os alunos passem a comunicar mais expressivamente e a compartilhar os seus pensamentos e ideias em pequenos grupos de trabalho (Allevato, 2005).

Metodologia e apresentação da tarefa

A metodologia adotada neste estudo pauta-se nos preceitos da pesquisa qualitativa, alicerçada no paradigma descritivo interpretativo. Este modelo metodológico busca explorar e compreender um conjunto de conhecimentos que emergem de contextos experimentais e aprofundar as explicações que abrangem o conjunto de atitudes dos seus participantes.

As tarefas exploratórias e investigativas foram realizadas em pequenos grupos no laboratório de informática, numa turma composta por 36 alunos com 19 anos de idade em média e aprovados na disciplina anterior de Introdução ao Cálculo, matéria que estuda tópicos elementares da Matemática, tais como conjuntos, funções, logaritmos, exponenciais, trigonometria, dentre outros. Foram formados 12 grupos de 3 componentes cada, sendo que 2 grupos – G1 (composto por João, Alberto e Ricardo) e G2 (composto por Sandra, Flávia e Mônica) – se voluntariaram para uma observação mais criteriosa. Nesse ambiente os dados foram recolhidos pelo próprio professor investigador que recorreu a observações participativas, aplicação de questionários (anexo 1), entrevistas semiestruturadas − baseadas nas respostas fornecidas pelos próprios alunos em cada tarefa − além dos documentos elaborados pelos grupos de trabalho. Os questionários e entrevistas foram aplicados logo após o término de cada tarefa. Vale destacar o permanente contato do professor com os alunos ao longo do semestre letivo, numa frequência de três dias semanais em encontros de duas horas cada. Este convívio permite um olhar mais atencioso do investigador sobre todas as ações empreendidas no estudo e as expectativas dos participantes (Goetz & LeCompte, 1984; Merriam, 1988).

Para esta comunicação iremos considerar apenas a tarefa 1 (anexo 2), constituída por duas questões. Esta tarefa explora o conceito das retas tangentes no contexto do cálculo de áreas de triângulos. Alguns lugares geométricos apresentam características e aplicações interessantes e que tomam contornos investigativos. As tangentes traçadas nas hipérboles de equações $y = (a/x), a \in \mathbb{R}^*$, determinam, com os eixos ox e oy, triângulos cujas áreas possuem sempre um mesmo valor, independente do ponto de tangência. Esta tarefa visa colocar os alunos diante de uma notável situação exploratória, onde eles desempenham verdadeiros papéis de investigadores matemáticos, lançando suposições e realizando provas algébricas. A possibilidade que o *software* oferece da visualização dinâmica das tangentes, deslizando sobre as curvas e gerando uma infinidade de triângulos distintos, todos com a mesma área, não deixa dúvida da veracidade do resultado. Porém, o maior desafio é demonstrar algebricamente a conjectura principal. Esta tarefa insere-se após os alunos terem explorado a interpretação gráfica da derivada e aprenderem a fórmula geral da reta tangente.

Apresentação dos resultados

Inicialmente realizamos em conjunto a leitura integral do roteiro da tarefa. O professor informou a classe que avançaria no estudo das derivadas, explorando o conceito de reta tangente, dentre outros, num problema geométrico. Os alunos então iniciaram os trabalhos. Após um tempo preliminar de discussões internas, relativamente ao item a) do primeiro problema, G1 já analisa a questão com o auxílio do *software*:

> *Ricardo:* Entre com a função f [no computador] e ponha um ponto sobre o gráfico.
> *Alberto:* Qual ponto?
> *Ricardo:* Ponha aí um ponto qualquer (acompanhando a figura do roteiro) e vamos tentar calcular a área [do triângulo]!

Os alunos criam no programa o ponto de coordenadas $(1,1)$ e partem para obter a reta tangente. Depois de certo tempo tentando realizar os cálculos no rascunho, continuam:

> *João*: Não deu certo. Não está tangente...
> *Alberto*: Olhe aqui (apontando para o caderno). A regra do "x^n" (derivada da função potência) é mais rápida... Lembra-se desse exercício? Tem que transformar em potência!
> *João*: Mas será que dá o mesmo resultado?
> *Alberto*: Ela também não veio do limite?
> *João*: Pode ser... Professor, podemos usar esta fórmula para "$1/x$"?

Este diálogo é fruto de um conhecimento trabalhado anteriormente em sala de aula. Enquanto Ricardo se concentra mais nas construções computacionais, João e Alberto desenvolvem os cálculos realizando consultas bibliográficas. Eles estavam tentando obter a derivada através da definição (pelo limite) e estavam se complicando nas contas. O professor estava por perto e então João solicitou a sua orientação. O professor apontou o equívoco de modo que prosseguissem no desenvolvimento. O professor também solicitou que ele calculasse a derivada através da regra da potência, afim de que comparasse os resultados. Este fato seria útil nas discussões coletivas.

Um aspecto singular que mereceu destaque nesta tarefa foi a estratégia diferenciada de derivação. Alguns alunos utilizaram a definição clássica da derivada, outros pegaram o "atalho" da regra da potência e outros ainda utilizaram a regra operacional do quociente. Obviamente, quem usou a regra da potência ganhou um pouco mais de tempo. O professor tinha essa percepção quando circulava pelo laboratório e observava os trabalhos. Não orientou para uma "melhor" forma, para que os alunos seguissem o seu próprio caminho. No entanto, registou e aproveitou essa diversidade para ser apresentada e destacada nas discussão final. Quando os grupos se apresentaram, foram descritos os seguintes processos de derivação (fig.1) que implicaram a necessidade de tempos diferentes para a sua conclusão.

Derivada pela regra da potência:

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$f'(x) = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

Derivada pela regra do quociente:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

Derivada pela definição:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{x - x - \Delta x}{x^2 + x \cdot \Delta x}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x}{x^2 + x \cdot \Delta x} \cdot \frac{1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x^2 + x \cdot \Delta x} = -\frac{1}{x^2}$$

Figura 1. Diferentes formas de obter a derivada utilizadas pelos grupos.

No G2, as dificuldades surgem para gerar o cenário dinâmico no programa. Apesar das alunas terem conseguido plotar a função e a tangente no ponto de abscissa $x_0 = 1$, quando moviam o ponto com o *mouse*, a reta não o acompanhava, e quando tentavam movimentar a reta, esta não acompanhava o movimento.

> *Sandra:* (...) mas quando tento movimentar a reta, ela não vai...
> *Flávia:* Deixe a reta aí parada e movimente o ponto.
> *Sandra:* Mas a reta não acompanha (o ponto). Tem alguma coisa errada...
> *Mônica:* Professor, o que está errado aqui?

O professor constatou que as alunas tinham calculado corretamente a reta tangente no ponto $x_0 = 1$. A tela indicava de forma precisa a situação de tangência desta sobre o gráfico da função. Aparentemente tudo estava perfeito, porém, o problema é que não tinham usado o comando geral de traçado de tangentes do programa, daí essa “confusão”. O ponto era móvel, porém a reta era tangente apenas no ponto $x_0 = 1$. Após a orientação do professor, elas perceberam o equívoco, viabilizaram a disposição dinâmica e prosseguiram as suas análises. Este episódio evidencia a dificuldade preliminar do G2 para visualizar a situação dinâmica no computador, porém o auxílio específico do comando permitiu o desenvolvimento da questão.

Apesar de já ter utilizado o *GeoGebra* em sala de aula, este grupo apresentou dificuldades em usar este comando. Por se tratar de uma tarefa que exigia bastante o uso dos recursos dinâmicos do *software* e esta ser a primeira experiência com essas funções, alguns necessitaram de ajuda do professor. Depois de uma orientação prestada às alunas de G2 o professor fez algumas observações coletivas sobre este domínio específico do programa. A turma parou um instante para acompanhar as breves explicações e seguiram as suas investigações.

Foi possível constatar que o conhecimento estava sendo construído pouco a pouco. A compreensão global do problema se ampliava à medida que as funções dinâmicas do programa eram utilizadas corretamente. O G2 não tinha constatado que o caso particular que estavam a elaborar não serviria para provar a proposição. O professor não os alertou deixando que prosseguissem com os raciocínios, registando pois esses cálculos viabilizariam o que viria a ser feito mais à frente de forma generalizada. Depois que estruturaram o triângulo e visualizaram a medida da área no programa, Sandra comentou “Que legal! O triângulo se move, mas a área fica constante e igual a 2! No outro lado [no 3º quadrante] continua o mesmo resultado! (...) pronto, o valor da área é sempre 2, não importa o ponto! Finalizamos esta parte”.

Conforme ressaltamos, o G2, de posse da equação da reta tangente, passa agora a calcular a área do triângulo. A equipe busca provar que esta é de 2 unidades, porém toda a estrutura analítica está baseada apenas no ponto de abscissa $x_0 = 1$, isto é, particularizam a demonstração. Ao afirmarem (conjecturarem!) que o valor da área era constante em qualquer ponto de tangência, com base na visualização gráfica, equivocadamente partiram para obter a área apenas em um único ponto ($x_0 = 1$). Apesar das discussões já realizadas em tarefas anteriores, Sandra ainda questiona a necessidade da demonstração, argumentando que era suficiente confirmar a situação pelo programa para ter a certeza. Apontando para o gráfico plotado na tela do computador, ela diz: "olha isto aqui, professor, pra que demonstrar? Em todos estes pontos o programa indica o valor de área igual a 2!". Sandra não sentia a necessidade de comprovar o resultado após perceber, através do computador, que o resultado era "claramente verdadeiro". A evidência computacional era tomada por uma prova matemática. Esse foi mais um importante aspecto que ficou registado pelo professor para a discussão final.

O G1 compreendeu de forma mais imediata e segura, a partir das visualizações computacionais, que deveria encaminhar a prova para o caso geral, isto é, demonstrar o resultado num ponto arbitrário do domínio. Eles já entendiam, naquele contexto, que casos particulares não serviam para provar situações abrangentes, mas apenas para formar indícios ou suposições. Esta circunstância mostrou-se bastante útil também para os debates. Inclusive foi interessante relembrar a conjectura de Fermat no diálogo que se seguiu:

> *Professor:* Fermat também se deu por satisfeito ao enunciar um resultado geral com base na evidência de alguns casos particulares na sua famosa conjectura (dirige-se ao quadro): ele afirmava que todos os números obtidos a partir da sequência
> $$f(n) = 2^{2^n} + 1, n = 0, 1, 2, 3 \ldots,$$
> seriam primos.
> *Alberto:* E não são?
> *Professor:* Vamos ver... Quanto dá $f(0)$ e $f(1)$?
> *Alberto:* Pra $n = 0$ dá 3 e pra $n = 1$ dá 5, que são primos!
> *Professor:* João, por favor, calcule agora $f(2)$ e $f(3)$. Ricardo, use o *software* e obtenha $f(4)$. (depois de um tempo analisando os valores os alunos apresentam as respostas)
> *João:* Pra $n = 2$ deu 17 que é primo e pra $n = 3$ deu 257... Aí eu já não sei!
> *Professor:* Está ficando grande, mas posso asseverar que 257 é primo também!
> *Ricardo:* Pra $n = 4$ deu aqui no *GeoGebra* 65.537 (fig. 2). É primo?
> *Professor:* Sim, é primo! Porém Fermat só testou até aí e generalizou erroneamente o resultado! Mais tarde, no século XVIII, Leonard Euler provou que para $n = 5$,
> $f(5) = 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4.294.967.297 = (641)(6.700.417)$
> era composto, "quebrando" a conjectura de Fermat! No caso da tarefa, mesmo diante das evidências computacionais, necessitamos demonstrar o valor da área para validarmos algebricamente o resultado. Vamos prosseguir...

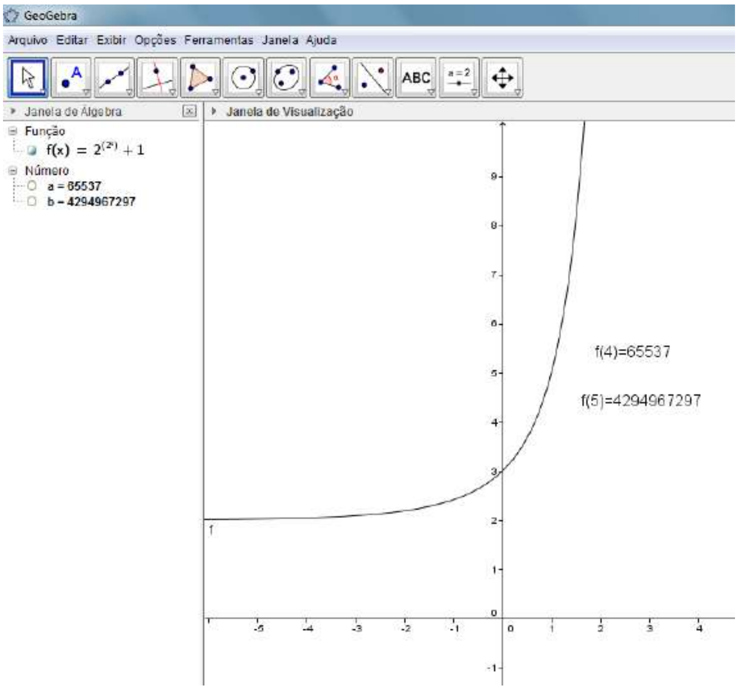


Figura 2. Tela capturada por G1 para a obtenção dos números de Fermat.

Este episódio foi bastante singular e serviu para demonstrar que casos particulares não serviam para generalizar uma conjectura matemática. O episódio evidencia também as ricas situações comunicativas e reflexivas que procedem dos contextos investigativos das tarefas exploratórias apoiadas nos recursos computacionais.

G2 usou a regra do quociente para estabelecer a derivada e montar a equação da reta tangente, enquanto G1 utilizou a regra da potência, variando a técnica operacional, como veremos adiante. Depois que G2 percebeu que estava no caminho errado, concluiu esta etapa da tarefa e apresentou a sua solução (fig. 3). Percebe-se que os alunos calcularam adequadamente os pontos de interseção da reta tangente com os eixos coordenados e determinaram o valor da área do triângulo.

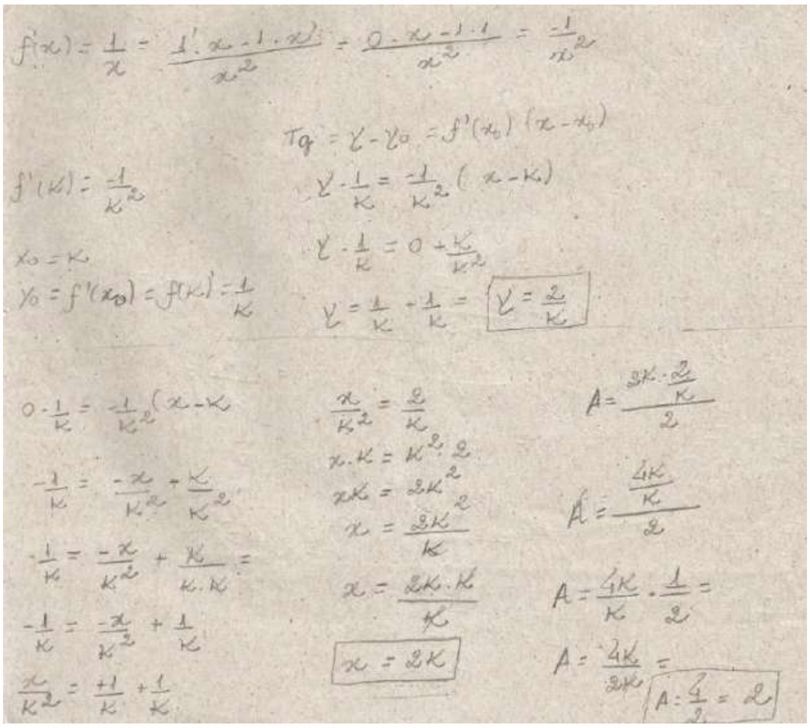


Figura 3. Solução apresentada por G2 à questão 1.

As formas distintas utilizadas pelos grupos para a obtenção da derivada evidenciam a variedade estratégica oriunda das tarefas investigativas. As ricas discussões que brotaram dos pequenos grupos de trabalho permitiram uma maior autonomia para que os alunos decidissem o caminho que julgassem mais adequado para a solução do problema. Ao invés do professor indicar o "melhor" caminho, eles tomaram a iniciativa para alcançar as respostas. Nos debates finais foi possível sistematizar os conhecimentos produzidos.

Apesar da percepção de G1 de realizar a prova genérica para verificar a validade do resultado, outra dificuldade surge, dessa vez no cálculo das dimensões do triângulo. Pelo programa eles conseguem, através do comando "interseção de dois objetos", observar essas grandezas, porém na parte escrita encontram alguns embaraços:

> *João:* (...) use a fórmula da reta tangente [$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$].
> *Alberto:* Qual o valor de y_0?
> *João:* É o valor da função quando substitui x_0. Substitua aí $f(x_0)$. (os alunos se concentram no cálculo da reta tangente e obtêm a sua equação depois de certo tempo)
> *Alberto:* Pronto! Vamos calcular agora a área do triângulo... Qual o valor da base?
> *João:* Estava tentando calcular o valor da altura primeiro. Não é o mesmo valor de y_0?
> *Alberto:* Acho que não, vamos ver... (observando a figura no roteiro, discutem por algum tempo e não chegam a acordo).

O grupo sente alguma dificuldade para determinar algebricamente a base e a altura do triângulo. O professor orienta-os no processo de obtenção dessas medidas, mas, ao observar o desenvolvimento, limita-se a informá-los para prestarem mais atenção às simplificações. Foi possível constatar, posteriormente, nas entrevistas, que os maiores impasses realmente estavam concentrados nesta etapa. A resolução do primeiro problema gerou mais dificuldade do que a resolução do segundo, isto devido à semelhança dos procedimentos. Os dois grupos conseguiram demonstrar o valor da área no primeiro caso e a segunda fase mostrou-se mais tranquila. Isso ficou patente nas entrevistas:

> Foi preciso muita atenção nos pequenos detalhes, principalmente na demonstração do primeiro problema, pois o segundo caso foi muito parecido. Quando o grupo resolveu focar na solução, esta saiu com mais facilidade. (Sandra)

> As maiores dificuldade foram na parte algébrica, na hora de determinar as interseções e estabelecer o valor da área do triângulo no primeiro problema. O *software* exibia os valores [das interseções e da área], mas estávamos com dificuldades de calcular. (...) o programa ajudou bastante na compreensão geral da tarefa. (Alberto)

Na segunda questão da tarefa, a partir da simulação gráfica computacional (fig. 4), G1 conseguiu captar a relação que existia entre os valores das áreas dos triângulos e os respectivos numeradores das funções. De fato, para cada função do tipo $f_a(x) = a/x\,, a = 2, 3, 4, ...$, o valor da área é igual a $2a$. *A conjectura está lançada!* — foi desta forma que João se expressou animadamente ao preencher a tabela 1 do roteiro e descobrir o padrão. Bastava, então, partir para a demonstração solicitada no item b). Foi da seguinte forma que eles procederam ao identificar a relação:

> *João:* Quando (a função) é $2/x$, dá 4 (o valor da área do triângulo); quando é $3/x$, dá 6, quando é $4/x$, dá 8...
> *Alberto:* Então é sempre o dobro, não é!?
> *João:* Isso! O valor da área é o dobro do número que tiver em cima [no numerador da função]. A conjectura está lançada!
> *Ricardo:* Hum, então por isso que no caso anterior a resposta deu 2! Vamos então agora demonstrar!

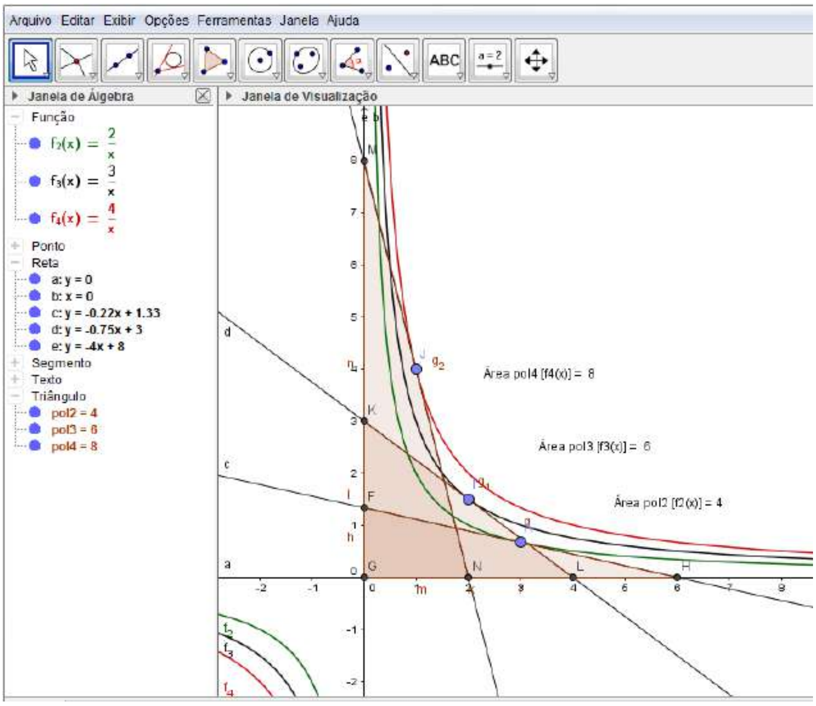


Figura 4. Apresentação dinâmica das hipérboles, suas tangentes e as respectivas áreas dos triângulos. Tela capturada por G1 para a formulação da conjectura principal.

Em função da semelhança deste problema com o primeiro da tarefa, o grupo já apresentou um pouco mais de confiança e requisitava menos o professor. Eles ainda especularam (colocaram uma questão) se o resultado geral continuaria válido para um número real qualquer (diferente de zero) no numerador da função. Apesar desta análise não fazer parte direta da atividade, a proposição permaneceria válida e esta reflexão foi aproveitada nas discussões, enriquecendo o debate e ampliando a percepção da classe. Eles simularam esta situação no *GeoGebra* e constataram a validade do resultado. Estas circunstâncias evidenciam o protagonismo dos alunos na exploração dos conhecimentos e o caráter dinâmico das descobertas viabilizadas pelas análises computacionais. Foi através do seguinte diálogo que eles iniciaram a demonstração no segundo item:

> *João:* No lugar de 1 [na função $y = 1/x$] vamos usar uma variável [t].
> *Alberto:* (...) temos então $f(x) = t/x$. Mas qual o valor de x_0 agora?
> *João:* Vamos deixar x_0 mesmo, acho que pode.
> *Alberto:* Sim. Agora [o procedimento] não é igual ao problema 1?
> *Ricardo:* Penso que deve ser. Vamos calcular a reta tangente e depois obter a área...

Houve uma discussão longa e bastante produtiva no grupo para estabelecer a resposta final. No decurso da demonstração para confirmarem a conjectura, os integrantes debateram intensamente em todas as etapas, desde a estruturação da reta tangente até ao estabelecimento do valor algébrico da área do triângulo. No final, fizeram uma série de simulações no programa para consolidar a veracidade da resposta encontrada e encaminharam a solução (fig. 5). Cabe ressaltar a estratégia diferenciada deste grupo para obter a derivada. Como vimos, G2 utilizou a regra do quociente, enquanto este fez uso da regra da potência. Eles obtiveram mais facilmente as dimensões do triângulo nesta segunda etapa, como se pode constatar, em função de algumas orientações coletivas realizadas na primeira questão.

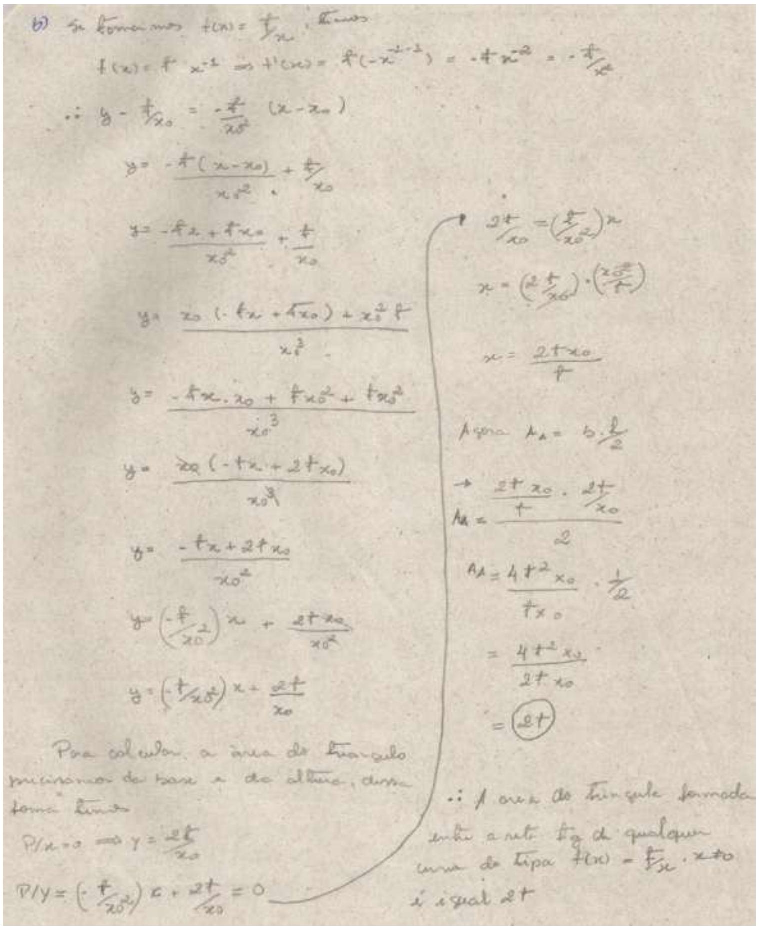


Figura 5. Solução apresentada Por G1 à questão 2.

No G2 as discussões eram encaminhadas de forma parecida. As alunas aproveitaram a construção computacional feita na etapa precedente, fizeram alguns ajustes e não apresentaram maiores dificuldades para perceber o padrão. No preenchimento da tabela, puderam constatar efetivamente a relação de dobro. Ao perceberem que estavam no caminho certo, confirmando a solução do primeiro problema, manifestaram ainda mais entusiasmo na sequência. Depois de algumas discussões em grupo, chegaram também ao resultado esperado. G2 apresentou uma organização textual semelhante a G1, porém utilizando uma forma diferenciada para a derivada (usaram a regra do quociente) e uma notação distinta para o novo parâmetro da função.

Após o término das explorações passaram para a etapa das discussões finais. Puderam ressaltar e refletir conjuntamente uma série de situações. À medida que os grupos iam apresentando as suas produções, os principais factos registrados naquele encontro foram realçados: as três formas possíveis para derivar a função; o equívoco de particularizar as demonstrações; a necessidade das provas algébricas diante das evidências computacionais; a conjectura de Fermat; a extensão do resultado para os números reais; outras propriedades das hipérboles foram lembradas, além da continuidade daquelas investigações na disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias, onde seria possível explorar outras curvas com aquele mesmo comportamento. Alguns alunos mostraram-se curiosos para conhecer tais curvas e iniciar um projeto de pesquisa.

Discussão e conclusões

Através desta tarefa buscamos explorar o conceito das retas tangentes, avançando nos estudos das derivadas, num contexto prático e investigativo envolvendo o cálculo de áreas de triângulos.

As construções geométricas com o *software* seguiam à frente das produções algébricas, como pôde ser notado logo no primeiro episódio. Ainda neste, percebemos que G2 avançou mais rapidamente que G1 no cálculo da derivada, isto em virtude da percepção que tiveram na forma de derivar a função envolvida na investigação. A regra do quociente aplicada por G2 mostrou-se mais eficiente que o procedimento utilizado por G1, que se complicou no cálculo pela definição e posteriormente usou a regra da potência. Essa diversificação na estratégia de derivação foi importante e bastante útil nas discussões finais, onde pudemos confrontar os resultados obtidos e formalizar os conhecimentos produzidos. Esta variedade processual nos mostra que apesar do “roteiro investigativo” ser essencialmente o mesmo, no sentido de estabelecer a equação da reta tangente, determinar as interseções com os eixos coordenados, dimensionar os catetos do triângulo e calcular a sua área, os procedimentos conceituais para alcançar o resultado final foram distintos e relevantes. Após os grupos apresentarem as suas estratégias de abordagem, inclusive indicando o método utilizado para obter a derivada, alguns alunos ficaram surpresos ao ver como uma forma de derivar se mostrava tão mais rápida que a outra.

A utilização da informática, além de favorecer um melhor entendimento das retas tangentes e derivadas, inclusive do ponto de vista gráfico, levou a que os alunos lidassem com técnicas operacionais mais rotineiras com maior conhecimento de causa (Villarreal, 1999). Os grupos estavam bastante empenhados pois a exploração da tarefa continha todos os elementos característicos das investigações matemáticas: as elaborações computacionais com as suas riquezas de visualização e dinamicidade; os raciocínios analíticos na busca de padrões e conjecturas; as reflexões e os diálogos internos. O ambiente informatizado permitiu envolver os alunos em situações dinâmicas para o ensino e aprendizagem, comunicando e partilhando as ideias em grupo (Allevato, 2005).

No segundo episódio pudemos perceber a contribuição valorosa do *software* para que os alunos pudessem conjecturar o valor da área do triângulo de uma forma mais rápida e dinâmica, ampliando a compreensão do problema. O *GeoGebra* mostrou-se eficiente nesta experiência ao auxiliar e possibilitar a exploração de um dos principais conceitos do Cálculo, a derivada (Barufi, 1999; Melo, 2002; Saraiva, 2000). Neste episódio também pudemos notar que as evidências computacionais são às vezes tomadas como uma prova matemática, como foi o caso de Sandra, e por isso a sua "resistência" apresentada para demonstrar algebricamente as conjecturas.

O terceiro episódio, sobre a conjectura de Fermat, surgiu da necessidade de debater com a turma que casos particulares não serviam para provar situações abrangentes, mas apenas para formar indícios/suposições e que as visualizações/simulações computacionais são excelentes ferramentas para isto. G1 teve esta percepção. Muitos autores (e. g., Miquelino & Resende, 2013; Allevato, 2005; Bianchini & Santos, 2002) evidenciam a renovação no aspecto motivacional de alunos que vivenciam as experiências exploratórias e investigativas em ambientes informatizados. Os autores destacam como os recursos computacionais contribuem significativamente para melhorar a relação destes atores, através do contato mais comunicativo que se percebe entre eles nestes ambientes.

Já no quarto episódio percebemos a dificuldade de G1 em realizar os cálculos das dimensões do triângulo, ainda que pelo programa, na função "interseção de dois objetos", eles consigam extrair estas grandezas. Apesar de terem a percepção sobre a necessidade da prova algébrica para constatar a validade do resultado, eles apresentam embaraços para calcular a área do triângulo. Esta foi a etapa que gerou maiores obstáculos à classe e por isso foi necessária uma explicação geral acerca do cálculo das interseções envolvendo parâmetros algébricos.

No quinto episódio ficou clara a percepção de G1 sobre o padrão que existia entre os valores das áreas dos triângulos e os respectivos numeradores das funções. Eles conseguiram detectar esta regularidade, inferindo que para cada função do tipo $f_a(x) = a/x\,, a = 1, 2, 3, 4, \ldots$, o valor da área é igual a $2a$, inclusive João demonstra animadamente a sua compreensão acerca das conjecturas ao completar a tabela 1, afirmando animadamente *A conjectura está lançada!*. O reconhecimento de padrões e regularidades surgiu nesta tarefa permitindo induções e conjecturas (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2003). Este fato ampliou o conhecimento dos alunos sobre os processos investigativos em Matemática.

Focando agora no último episódio, pudemos constatar que G1 já apresentava mais confiança. Aproveitam ainda as construções computacionais para especular a validade do resultado principal, estendendo o numerador da função para os números reais. Esta é uma questão que eles mesmos colocam e, através de ensaios realizados pelo *software*, chegam a uma conclusão positiva. São circunstâncias iguais a esta que evidenciam o protagonismo dos alunos na exploração dos conhecimentos e que são valiosamente viabilizadas pelo caráter dinâmico das analises computacionais. Novamente cabe ressaltar as estratégias diferenciadas utilizadas pelos dois grupos na demonstração algébrica do segundo problema. Enquanto G2 utilizou a regra do quociente para derivar, G1 utilizou a regra da potência (após perceber que esta é muito mais rápida que a definição clássica), evidenciando que os alunos são capazes de trilhar estratégias distintas nas investigações, buscando caminhos alternativos para a solução dos problemas (Cengiz et al., 2011).

Esta tarefa auxiliou a turma a ampliar a sua concepção sobre investigações matemáticas, conjecturas e demonstrações. A abordagem desta tarefa permitiu que os alunos aplicassem os assuntos teóricos ora em estudo (limites e derivadas) e aprofundassem os seus domínios conceituais, evoluindo os seus conhecimentos na disciplina. Num ambiente diversificado de aprendizagem, em pequenos grupos e fazendo uso dos recursos computacionais, eles vivenciaram os notáveis aspectos das atividades investigativas. Ficou evidente a importância do *software* para este trabalho. Os alunos utilizaram os seus dinâmicos recursos para visualizar gráfico de funções, descobrir padrões e verificar os resultados demonstrados. Foi notável também os recursos do programa que possibilitaram o movimento contínuo da tangente, a construção do triângulo e a medida simultânea da sua área, promovendo a ampla compreensão do problema.

Referências bibliográficas

Allevato, N. S. G. (2005). *Associando o computador à resolução de problemas fechados: Análise de uma experiência* (Tese de Doutoramento, Universidade Estadual Paulista).

Andrade, L. N. (2004). *Introdução à computação algébrica com o Maple.* Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática.

Barufi, M. C. B. (1999). *A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral* (Tese de Doutoramento, Universidade de São Paulo).

Bianchini, W., & Santos A. R. (2002). *Aprendendo Cálculo com o Maple - Cálculo de uma variável.* Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora.

Bishop, A. & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel.

Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, *115*, 11–17.

Cengiz, N., Kline, K., & Grant, T. J. (2011). Extending students' mathematical thinking during whole-group discussions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14* (5), 355–374.

Chapman, O., & Heater, B. (2010). Understanding change through a high school mathematics teacher's journey to inquiry-based teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13* (6), 445–458.

Curi, R. C., & Farias, R. M. S. (2008). Métodos de estudo e sua influência no desempenho dos alunos em disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral. In *Anais do XXXVI Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia* (pp. 1–11). São Paulo: ABENGE.

Frescki, F. B., & Pigatto, P. (2009). Dificuldades na aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral na Educação Tecnológica: Proposta de um curso de nivelamento. In *Anais do Simpósio Nacional de Iniciação Científica* (pp. 910–917). Curitiba: UTFPR.

Garbi, G. G. (2011). *A Rainha das Ciências*. São Paulo: Livraria da Física.

Garzella, F. C. (2013). *A disciplina de Cálculo I: A análise das relações entre as práticas pedagógicas do professor e seus impactos nos alunos* (Tese de Doutoramento, Universidade de Campinas).

Goetz, J. P., & LeCompte, M. D. (1984). *Ethnography and qualitative design in educational research*. San Diego, CA: Academic Press.

Gomes, G. H., Lopes, C. M. C., & Nieto, S. S. (2005). Cálculo Zero: Uma experiência pedagógica com calouros nos cursos de engenharia. *In XXXIII Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia* (pp. 1–9). Campina Grande: Cobenge.

Melo, J. M. R. (2002). *Conceitos de integral: Uma proposta computacional para o ensino e aprendizagem* (Dissertação de Mestrado, PUC – São Paulo).

Merriam, S. B. (1988). *Case study research in education: A qualitative approach*. São Francisco, CA: Jossey-Bass.

Miquelino, L. H., & Resende, M. R. (2013). As tecnologias de informação e comunicação e o desenvolvimento profissional do professor de Cálculo. *In XI Encontro Nacional de Educação Matemática* (pp. 1–16). Curitiba: SBEM.

Ponte, J. P., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2003). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autentica Editora.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In Grupo de trabalho de investigação (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). Lisboa: APM.

Rezende, W. M. (2003). *O Ensino de Cálculo: Dificuldades de natureza epistemológica* (Tese de Doutoramento, Universidade de São Paulo).

Ruthven, K., Hofmann, R., & Mercer, N. (2011). A dialogic approach to plenary problem synthesis. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4,* 81–88. Ankara, Turkey: PME.

Saback, M. S. O. (1980). *O Desenvolvimento cognitivo e o desempenho em Cálculo na Universidade: Um estudo de caso* (Dissertação de Mestrado, PUC – Rio de Janeiro).

Saraiva, R. P. (2000). Novas tecnologias no ensino do conceito de limite de função (Dissertação de Mestrado, PUC – São Paulo).

São Paulo (1991). *Proposta curricular para o ensino de Matemática: 2º grau.* São Paulo: SE/CENP.

Silva, J. F. (1994). *Questões metodológicas do ensino do Cálculo Diferencial e Integral* (Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Ceará).

Villarreal, M. E. (1999). *O pensamento matemático de estudantes universitários de Cálculo e tecnologias informáticas* (Tese de Doutoramento, Universidade Estadual Paulista).

Zuchi, I. (2005). *A abordagem do conceito de limite via sequência didática: Do ambiente lápis e papel ao ambiente computacional* (Tese de Doutoramento, Universidade Federal de Santa Catarina).

Anexo 1

QUESTIONÁRIO DE INVESTIGAÇÃO

Caro estudante

Este questionário tem como objetivo principal avaliar o grau de satisfação e aprendizado de alguns tópicos do Cálculo Diferencial e Integral a partir do uso de tarefas exploratórias investigativas em grupo e com o auxílio do computador. Em particular, almejo verificar se esta é uma estratégia que favorece a compreensão acerca da abordagem de investigações matemáticas, conjecturas e demonstrações. As informações que serão prestadas neste questionário não visam estabelecer qualquer tipo de nota ou conceito dos respondentes, servem, porém, para melhor compreender o comportamento e evolução dos discentes a partir dessa estratégia didática para o aperfeiçoamento do ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral.

Enquanto docente e responsável por essa investigação, comprometo utilizar as informações aqui fornecidas apenas no âmbito desta pesquisa, assegurando também o anonimato, de forma que não há necessidade de sua identificação. Assim, conto com a veracidade das informações aqui prestadas e agradeço antecipadamente a sua colaboração.

Atenciosamente,
Prof. Álvaro Fernandes Serafim Filho.

Após a realização da atividade, solicito que responda com bastante atenção e cuidado as seguintes questões:

1. Você considera que esta atividade, realizada em grupo e com auxílio do computador, o ajudou a compreender melhor a abordagem de investigações matemáticas, conjecturas e demonstrações?

(   ) Sim   (   ) Não

Que aspectos na realização dessa tarefa você considera que mais contribuíram para formar a sua opinião? Explique.

____
____
____
____
____

2. Ao longo da realização desta tarefa, foi-lhe sugerido o uso do computador com o *software GeoGebra*. Como foi utilizado este recurso tecnológico?

(   ) Para toda a resolução da tarefa.
(   ) Apenas para visualização do gráfico.
(   ) Apenas para verificação da solução.
(   ) Outra. Qual?

____

Explique a(s) opção(ões) escolhida(s).

____
____
____
____
____
____
____

3. Você encontrou dificuldades na realização desta tarefa?

(   ) Sim   (   ) Não

Se marcou "sim", que dificuldades encontrou?

(   ) Na compreensão da tarefa
(   ) No uso do *software*
(   ) Na demonstração formal dos resultados
(   ) Na realização dos cálculos
(   ) Outra. Qual(ais)?

____

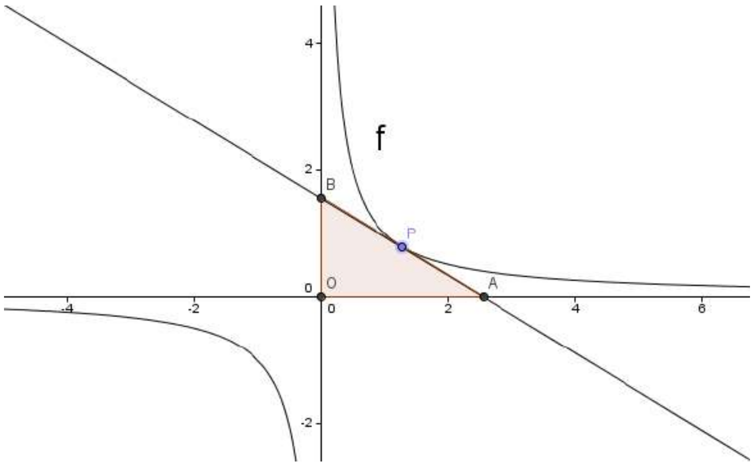
Explique a(s) opção(ões) escolhida(s).

____
____
____
____
____

Anexo 2

Tarefa 1 - Áreas de regiões planas delimitadas por retas tangentes

Questão 1: Considere a função $f(x) = 1/x\,, x \neq 0$. Verifique se é constante (e sempre o mesmo valor!) a área do triângulo AOB, sendo A e B os pontos de interseção de qualquer reta tangente ao gráfico desta função com os eixos coordenados x e y, respectivamente, conforme a figura.



a) Use o *GeoGebra* para investigar esta questão. Caso a sua resposta seja afirmativa, demonstre este resultado.

Questão 2: Ainda com relação a construção anterior, trace sucessivamente os gráficos das funções $f_2(x) = 2/x$, $f_3(x) = 3/x$, $f_4(x) = 4/x$ e observe o comportamento das áreas dos triângulos (complete a tabela).

Função:	Área do triângulo AOB:	Função:	Área do triângulo AOB:
$f_1(x) = 1/x$		$f_4(x) = 4/x$	
$f_2(x) = 2/x$		$f_5(x) = 5/x$	
$f_3(x) = 3/x$		$\vdots$	

a) A partir da observação da tabela é possível estabelecer alguma relação entre a família de funções $f(x) = a/x\,, x \neq 0$, sendo a constante real não nula e as respectivas áreas dos triângulos? Justifique.

b) A partir da sua resposta anterior, demonstre algebricamente a sua afirmação usando os seus conhecimentos do Cálculo Diferencial e Integral.

EXTENSÃO DE CONHECIMENTOS: IMPLICAÇÕES NA COMPREENSÃO DE NUMERAL DECIMAL

Cristina Morais[1] e *Lurdes Serrazina*[2]
[1]Externato da Luz; UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, cristina.morais@campus.ul.pt
[2]Escola Superior de Educação de Lisboa; UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, lurdess@eselx.ipl.pt

Resumo. *Este texto centra-se na discussão intencional da extensão de conhecimentos e as suas implicações na compreensão de numeral decimal.*

Apresenta-se parte de um estudo que segue a modalidade de Investigação Baseada em Design, tendo sido realizada uma experiência de ensino onde participaram 25 alunos e a professora titular, no 3.º e 4.º ano. Neste texto, é analisado o trabalho realizado por uma aluna em tarefas que promovem a discussão da extensão de conhecimentos na interpretação de numerais decimais.

Os resultados apontam evidências de que a discussão da extensão de conhecimentos, para além de evidenciar o conhecimento de numeral decimal em construção pela aluna, apela ao estabelecimento de relações entre numerais decimais e modelos, ao recurso a modelos para comparar grandezas, ao estabelecimento de relações entre unidades da parte não inteira do numeral decimal, contribuindo assim para a compreensão de numeral decimal.

Abstract. *This paper focuses on the intentional discussion of knowledge extensions and their implications to decimal number comprehension.*

Part of a broader study that follows a Design Based Research is reported, within which a teaching experiment was carried out with 25 students and their teacher, in Grade 3 and 4. In this paper, the work of one student is analysed on tasks that promote the discussion of knowledge extensions in the interpretation of decimals.

The results evidence that the discussion of knowledge extensions, besides revealing the student's decimal knowledge still developing, also appeals to the establishment of connections between decimals and models, the use of models to compare number magnitudes, the connections between units in the non-whole part of the decimal, thus promoting decimal number comprehension.

Palavras-chave: *numeral decimal; extensão de conhecimentos; números racionais.*

Introdução

A complexidade do ensino e aprendizagem dos números racionais é evidenciada pela vasta literatura sobre o tema. Vários estudos, nacionais e internacionais, apontam importantes evidências relativas, por exemplo, à valorização do trabalho com números racionais com diferentes significados, diferentes representações, valorizando a conceptualização da unidade ou destacando ainda aspetos como a densidade (e.g., Brocardo, 2010; Lamon, 2007).

No que diz respeito aos numerais decimais, estudos realizados identificam dificuldades reveladas pelos alunos ao trabalhar e operar números representados deste modo (e.g., Steinle & Stacey, 2003) bem como a influência de conhecimentos dos números naturais (e.g., Durkin & Rittle-Johnson, 2015; Resnick, Nesher, Leonard, Magone, Omanson, & Peled, 1989). Existem ainda estudos que revelam que estas dificuldades podem persistir até à vida adulta (e.g., Vamvakoussi, Van Dooren, & Verschaffel, 2012), o que é revelador da importância da compreensão de numeral decimal.

Numa abordagem inicial ao numeral decimal, é natural que os alunos estendam os seus conhecimentos para lidar com números pertencentes a um conjunto numérico até então desconhecido. Neste texto, designamos este aplicar de conhecimentos prévios a novas situações como extensão de conhecimentos, focando os tipos de extensões que conduzem a respostas incorretas.

Assume-se aqui a perspetiva de que o desenvolvimento da compreensão de número racional ocorre na continuidade do desenvolvimento da compreensão de número natural, através do reconhecimento das propriedades que se mantêm e das que mudam entre os dois conjuntos numéricos (Siegler, Thompson & Scheiner, 2011). Assim, promover a discussão de extensões de conhecimentos, que ocorrem naturalmente numa fase inicial da incursão por um novo domínio numérico e que são identificadas na literatura, pode ser potenciador do desenvolvimento da compreensão de numeral decimal, uma vez que apela precisamente ao reconhecimento de diferenças e semelhanças entre os números naturais e os números racionais. Para além disso, a discussão de extensões de conhecimentos reconhecidas na literatura constitui-se como um momento privilegiado em que os alunos confrontam as suas interpretações e, possivelmente, as suas próprias extensões de conhecimentos, com as que estão em discussão (Swan, 2001).

Assim, neste texto analisa-se de que modo a discussão intencional de extensões de conhecimentos pode promover a compreensão de numeral decimal.

A compreensão de numeral decimal

Neste estudo é valorizada a compreensão de numeral decimal numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número, pelo que o modelo proposto por McIntosh, Reys e Reys (1992) oferece importantes orientações para estruturar um conjunto de indicadores da compreensão de numeral decimal.

Este modelo é constituído por três dimensões: conhecimento e destreza com os números, conhecimento e destreza com as operações e a utilização do conhecimento e destreza com números e operações em situações de cálculo. A primeira dimensão assume aqui particular importância. Nesta, McIntosh et al. (1992) consideram quatro componentes: (i) sentido de regularidade dos números; (ii) múltiplas representações; (iii) sentido de grandeza relativa e absoluta dos números; e (iv) sistema de números de referência. Destaca-se ainda uma das ideias contidas na terceira dimensão deste modelo, a facilidade em selecionar uma representação considerada mais eficiente.

Este modelo é considerado como ponto de partida para a construção de um quadro centrado, especificamente, na representação decimal de número racional. Uma das ideias fundamentais para a compreensão de numeral decimal é o domínio do sistema de numeração decimal. Esta noção é elaborada por Baturo (2000), que destaca a importância das noções de posição, base e ordem, sublinhando o papel da vírgula e o efeito do zero em diferentes posições. A autora salienta ainda a noção de equivalência, construção e reconstrução da unidade, e o reconhecimento da estrutura aditiva e multiplicativa do sistema de numeração decimal.

Podemos encontrar vários aspetos referidos por Baturo (2000) entre as ideias valorizadas por Cramer, Monson, Ahrendt, Colum, Wiley e Wyberg (2015), nomeadamente no que diz respeito ao uso de linguagem matemática precisa, à ordenação de numerais decimais recorrendo a conhecimentos relativos ao valor de posição, à identificação da grandeza relativa de numerais decimais e ainda no que se refere à decomposição e recomposição de numerais decimais. Mas entre essas ideias encontramos também a valorização do recurso a representações que possam ser transformadas em modelos.

O papel das representações é igualmente destacado por Post, Cramer, Behr, Lesh e Harel (1993), que sugerem que o desenvolvimento da compreensão de número racional parece estar relacionado com a: (i) flexibilidade na conversão entre representações; (ii) flexibilidade nas transformações dentro de cada representação; e (iii) independência progressiva da utilização de materiais manipuláveis, modelos e representações pictóricas de número racional.

Os aspetos aqui destacados contribuíram para a organização de um conjunto de ideias-chave para a compreensão de numeral decimal, numa perspetiva de sentido de número (Quadro 1).

Quadro 1. Ideias-chave relativas ao conhecimento e flexibilidade com números racionais na sua representação decimal

Conhecimento e flexibilidade com números racionais na sua representação decimal	
Ideias chave	
Múltiplas interpretações de número	Interpretações do número
	Conceptualização da unidade: natureza da unidade; construção e reconstrução; equivalência
Regularidade dos números	Leitura do número (linguagem matemática precisa)
	Sistema de numeração decimal
	Comparação e ordenação de números representados do mesmo modo ou em modos diferentes
	Densidade
Múltiplas representações dos números	Representações: linguagem natural oral e escrita; representações simbólicas, representações icónicas e representações ativas
	Transformações entre representações: tratamentos e conversões
	Decomposição e recomposição de números
	Flexibilidade no uso e seleção de representações mais eficientes
Associação a quantidades	Comparação a um referente manipulativo ou modelo
	Comparação a um referente matemático (sistema de números de referência)

Estas ideias dizem respeito não só ao que é específico da representação decimal, mas também às que são comuns ao conjunto dos números racionais, independentemente da sua representação.

A extensão de conhecimentos na aprendizagem

A investigação centrada nos numerais decimais apresenta evidências das dificuldades reveladas pelos alunos, geralmente associadas à extensão de conhecimentos prévios dos alunos no trabalho com numerais decimais. Note-se que a extensão de conhecimentos, nem sempre conduz a resultados incorretos. Por exemplo, a extensão do conhecimento de que um grupo de dez numa dada posição pode ser substituído por uma unidade da posição imediatamente à esquerda ou que o valor de cada posição é dez vezes maior do que a posição imediatamente à direita, são noções válidas quer nos números naturais quer no caso dos numerais decimais. No entanto, existem extensões de conhecimentos que não se aplicam ao conjunto dos números racionais e, especificamente, aos numerais decimais, sendo este o tipo que focamos neste texto.

Na literatura, estas extensões de conhecimentos que conduzem a incorreções são habitualmente designadas por misconceptions ou, em português, conceções erróneas. Contudo, este termo não nos parece o que melhor define o nosso entendimento do que são estas extensões de conhecimentos. Tal como Swan (2001) refere, o termo "misconception" parece delinear uma barreira entre o certo e o errado, tratando-se de algo a evitar. Estas extensões não são ideias erradas, mas antes evidências de uma fase inicial de aprendizagem de um conceito ou uma generalização local que o aluno faz (Swan, 2001). Assim, as extensões de conhecimentos são naturais e fazem parte do processo de aprendizagem.

Sendo este estudo iniciado aquando da abordagem formal de numeral decimal, focam-se dois tipos de extensões de conhecimentos: (i) a utilização de conhecimentos de naturais (e.g., considerar que 0,15 será maior que 0,3, porque 15 é maior que 3); e (ii) a identificação do valor de posição de zero (e.g., considerar que 0,03 equivale a 0,3 ou considerar que 0,80 será superior a 0,8) (e.g., Durkin & Rittle-Johnson, 2015; Resnick et al., 1989). Ao invés de se considerar estas extensões de conhecimentos como obstáculos a evitar, estas devem ser intencionalmente chamadas e tornadas explícitas de modo a serem discutidas pelos alunos, promovendo assim uma aprendizagem com compreensão (Swan, 2001).

A perspetiva assumida tem subjacente a noção de que um conceito está em constante mudança e evolução. Ao entrar num novo conjunto numérico, os conceitos até então abordados no conjunto dos números naturais, são agora ampliados e enriquecidos. Esta ideia vai ao encontro do que é proposto por Siegler et al. (2011). Estes autores propõem uma teoria integrada de desenvolvimento de conhecimento de todos os conjuntos numéricos contidos no conjunto dos números reais, salientando a continuidade entre o desenvolvimento do conhecimento relativo aos números naturais e aos números racionais, mas reconhecendo também as diferenças existentes. Os autores referem que faz parte do desenvolvimento da compreensão de número tanto o reconhecimento de propriedades que apenas se verificam no conjunto dos números naturais, como a existência de um único sucessor, a possibilidade da contagem ou o efeito das operações; como o reconhecimento das propriedades que são comuns.

Metodologia

Este texto foca parte de um estudo mais amplo que segue a modalidade de Investigação Baseada em Design (IBD). Especificamente, segue-se um tipo de IBD que é designado por Cobb, Jackson e Dunlap (2016) como "classroom design study", uma vez que é uma investigação centrada nos processos de aprendizagem de um conteúdo específico de matemática, no contexto de sala de aula.

Partindo da revisão de literatura realizada, foram elaborados os seguintes princípios de design: 1) usar tarefas cujo contexto apele ao uso de numerais decimais, nomeadamente nos seus significados de medida e parte-todo; 2) promover movimentos entre numeral decimal e outras representações, enfatizando as suas relações; 3) promover o uso de representações que possam ser transformadas em modelos; 4) apoiar o uso de conhecimentos prévios; 5) promover a discussão da extensão de conhecimentos (que norteiam as tarefas que serão foco de análise neste texto); e 6) estabelecer um ambiente de sala de aula onde os alunos são encorajados e se sintam confiantes em partilhar e discutir as suas ideias matemáticas.

Estes princípios nortearam a intervenção bem como a conjetura inicial que resultou da reunião e organização dos princípios: uma experiência de ensino constituída por diferentes tipos de tarefas sequenciadas, explorações e exercícios, com foco nos numerais decimais como medida e parte-todo e o uso da linha numérica e da grelha 10x10, considerando os conhecimentos dos alunos relativos aos números naturais e os seus conhecimentos informais, e invocando a necessidade do uso de numerais decimais, assim como as conexões entre esta e outras representações de número racional, num ambiente de sala de aula onde os alunos têm um papel ativo e o trabalho em pequenos grupos e as discussões coletivas são privilegiadas, irá promover a compreensão de numeral decimal.

A experiência de ensino foi iniciada no 3.º ano (ano letivo de 2013/2014), e as tarefas que constituíram a última fase da experiência de ensino foram realizadas no ano letivo seguinte, no 4.º ano. As tarefas foram resolvidas em aulas de 90 minutos, uma vez por semana, num total de 16 semanas ao longo dos dois anos letivos.

Os participantes são os 25 alunos de uma turma de uma escola em Lisboa, e a professora. Em conjunto com a professora foram selecionados quatro alunos para uma recolha de dados e análise mais detalhada. Esta seleção teve por base: (i) igual número de meninas e meninos; (ii) resultados medianos no estudo diagnóstico realizado anteriormente; (iii) comunicação oral mediana; e (iv) desempenho académico em Matemática de nível "Médio". Neste texto, a análise é centrada no trabalho realizado por um desses quatro alunos, aqui denominada por Rute.

As principais fontes de dados são as gravações vídeo e áudio das aulas, os registos realizados pela aluna e as notas de campo da investigadora (primeira autora).

Uma vez que as tarefas promovem a discussão de extensões de conhecimentos, a análise de dados irá centrar-se numa das componentes consideradas na compreensão de numeral decimal: a regularidade dos números. Para cada uma das ideias-chave que a constituem, são considerados os indicadores apresentados no Quadro 2.

Quadro 2. Indicadores de compreensão de numeral decimal, relativos à componente de regularidade dos números

Conhecimento e flexibilidade com números racionais na sua representação decimal		
	Componente	**Indicadores**
Regularidade dos números	Leitura do número (linguagem matemática precisa)	• Ler o número usando a unidade de divisão mais pequena como unidade (e.g., 0,37 lido como 37 centésimas); • Ler o número como uma composição de unidades (e.g., 0,37 lido como 3 décimas e 7 centésimas);
	Sistema de numeração decimal	• Identificar o valor de posição dos algarismos que compõem o número (e.g., 3 em 0,37 representa 3 décimas e 7 representa 7 centésimas); • Reconhecimento das propriedades aditiva e multiplicativa do sistema de numeração decimal (e.g., 0,37=3x0,1+7x0,01); • Partição e agrupamento de unidades por potências de base 10 para criar unidades de décimas, centésimas, milésimas, … (base 10)
	Comparação e ordenação de números representados do mesmo modo ou em modos diferentes	• Comparar e ordenar números usando números de referência, modelos, selecionando representações consideradas mais eficientes, ou usando o conhecimento de valor posicional;
	Densidade	• Reconhecer que entre quaisquer dois números racionais existem infinitos números racionais.

De modo a facilitar a leitura, ao longo da análise serão destacados a itálico aspetos que dizem respeito aos indicadores apresentados neste quadro.

Analisam-se três tarefas, as duas primeiras foram resolvidas no 3.º ano e a última no 4.º ano, centradas na discussão dos dois tipos de extensões de conhecimentos identificados anteriormente. As tarefas foram resolvidas a pares, cuja constituição foi mudando. Assim, o trabalho de Rute é naturalmente influenciado por esta interação social.

Episódios da sala de aula

Localização de números na reta numérica (3.º ano)

Esta tarefa (Figura 1) foi a primeira centrada na discussão da extensão de conhecimentos relativos ao valor posicional de zero. A representação da reta numérica graduada em décimas tinha sido explorada em tarefas anteriores.

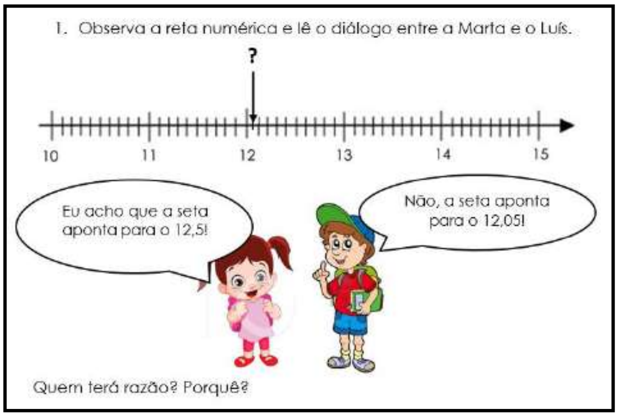


Figura 1. Questão 1 da tarefa "Localização de números na reta numérica"[1]

A posição do número 12,05 era identificada, sendo apenas visível o traço correspondente à localização do número. Os alunos teriam que discutir se o número seria 12,05 ou 12,5. Tal como grande parte dos colegas da turma, Rute começa por considerar que o algarismo zero, em 12,05, não tem valor:

Rute: . . . olha eu acho que doze vírgula cinco é... cinco décimas mas aqui é metade... o zero e o cinco [12,05], então também vai dar cinco! O dez a dividir por dois é igual a cinco! . . . Então como é que eu posso dizer quem é que tem razão? Os dois?!

Rute parece associar que tal como 05 = 5 então 12,05 = 12,5. No entanto, ao recordarem o modo como numerais decimais foram marcados na reta numérica em tarefas anteriores, Rute e Bárbara começam a focar a sua atenção para o significado da parte não inteira em 12,5 e 12,05:

Rute: Isto é o que a Marta diz, que é doze vírgula cinco. Doze unidades e cinco décimas. Só que eu acho que ele é que tem razão, zero vírgula cinco [referindo-se a 12,05] é metade.

[1] Tarefa adaptada de Brocardo, J., Delgado, C., Mendes, F. (2010). Números e Operações: 1.º Ano". Lisboa: DGIDC. Disponível em: http://hdl.handle.net/10400.26/5144.

	Então estamos a falar metade de um quadrado, não é da unidade toda. Por isso é que eu acho que é da unidade.
Bárbara:	Ah, sim! Pensamos em 10, zero vírgula cinco é metade. Metade de 10 é como se fosse 5, então é metade. E aqui, é metade deste, é metade do 12 com metade do 12 vírgula um. Então, mas isto também é metade de 10...

Rute evidencia várias ideias sobre numerais decimais. Faz uma *leitura composta* de 12,5 (doze unidades e cinco décimas), revelando algum entendimento do *valor posicional* dos algarismos que constituem o numeral. Lê a parte não inteira de 12,05 como "zero vírgula cinco", parecendo ignorar o zero, no entanto reconhece diferenças entre este e 12,5. O facto de em 12,05 o algarismo zero estar imediatamente à esquerda de 5 parece levá-la a pensar que a parte não inteira representa a metade de algo mais pequeno que a décima, à qual se refere como "metade de um quadrado". Rute acrescenta ainda "não é da unidade toda", parecendo identificar a unidade como a medida compreendida entre 12 e 13.

Na sua resposta escrita (Figura 2), Rute associa o 5 em 12,05 à noção de metade, fazendo corresponder 10 a cada espaço na reta.

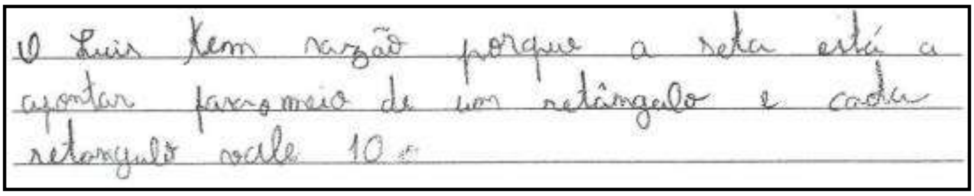

O Luis tem razão porque a reta está a apontar para o meio de um retângulo e cada retângulo vale 10.

Figura 2. Registo de Rute na Questão 1 da tarefa "Localização de números na reta numérica"

Rute não verbaliza porque utiliza o 10 mas pela análise da sua discussão com Bárbara, não parece associar o 10 a 10 centésimas ou a 10% da unidade. Provavelmente terá usado o 10 porque reconhece que 0,5 significa metade, logo 0,05 (05) será a metade de 10 (0,10).

Provas e toalhas (3.º ano)

Nesta tarefa (Figura 3) apresentam-se duas situações de comparação de numerais decimais.

Provas e toalhas

1. Será que 0,60 é igual a 0,6? E será 0,02 igual a 0,2?
   a) Tenta responder a estas questões com o teu colega e regista as vossas ideias.

Figura 3. Enunciado da Questão 1 da tarefa "Provas e toalhas"

Esta tarefa surge no seguimento de outras duas que envolviam a representação da grelha 10x10. Era pedido aos alunos não só que discutissem cada comparação, mas também que recorressem à grelha 10x10 para apoiar as suas respostas.

Rute e André concordam que 0,60 será igual a 0,6 mas que 0,02 e 0,2 não o são. Rute parece não necessitar de representar os numerais decimais na grelha para justificar a *equivalência entre 0,60 e 0,6*, parecendo assim utilizar esta representação como modelo:

Rute:	Então porque sessenta centésimas, nas seis colunas há sessenta centésimas!

É com grande rapidez que Rute apresenta a sua justificação para a igualdade entre 0,60 e 0,6. Evidencia flexibilidade em *agrupar 60 centésimas em 6 décimas*, apoiando-se na estrutura da grelha 10x10, sendo esta a resposta que regista (Figura 4).

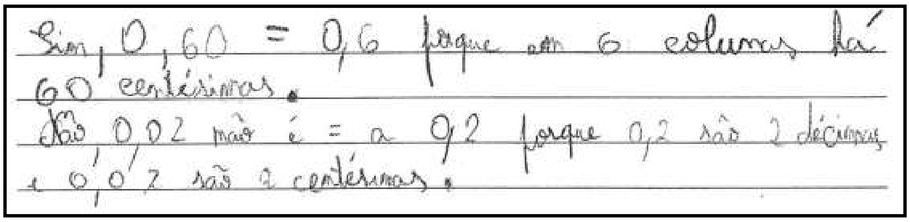

Sim, 0,60 = 0,6 porque em 6 colunas há 60 centésimas.
Não 0,02 não é = a 0,2 porque 0,2 são 2 décimas e 0,02 são 2 centésimas.

Figura 4. Registo realizado por Rute na Questão 1 da tarefa "Provas e toalhas"

Na segunda comparação (0,02 e 0,2), André reconhece que não representam o mesmo número e recorda-se de uma tarefa realizada anteriormente (primeira tarefa aqui analisada):

Rute:	Sabes justificar?
André:	Sei. Como nós vimos na última tarefa… na antepenúltima!
Rute:	Olha, não vamos começar assim. Isto tem que ser resumido!
André:	Está bem, deixa-me lá ver. Zero vírgula zero dois não é igual a... (Rute interrompe)
Rute:	Quer dizer que há duas centésimas.
André:	Ou seja, isto são… Olha Rute, isto são duas colunas e aquele são duas quadrículas.
Rute:	Ok, boa! Isso mesmo.

De novo, a grelha 10x10 parece ser usada como *modelo facilitador da comparação entre os numerais*, associando cada número à sua representação visual. Os alunos recorrem às características da grelha para suportar as suas respostas, sem terem necessidade de usar, efetivamente, a grelha para poderem comparar os numerais decimais.

No momento de discussão coletiva, ao partilhar o modo como resolveram a questão, Rute evidencia conhecimentos relativos ao *valor de posição*:

Rute: Nós fizemos zero vírgula zero dois, o André pensou... e eu, pensámos como ali no zero vírgula zero dois são duas centésimas, o segundo zero como não está lá nada, quer dizer que não há décimas. E então, por isso, pensámos que não era a mesma coisa.

Rute parece interpretar corretamente o papel do zero na parte não inteira do numeral decimal, quer estando posicionado mais à esquerda ou mais à direita. Reconhece o valor posicional dos algarismos da parte não inteira, a que recorre para comparar os numerais. Recorde-se que, na tarefa analisada anteriormente, não parece ter sido identificado o valor posicional de 5, em 12,05, nem o termo “centésima” foi mencionado.

Quem tem razão? (4.º ano)

Nesta tarefa são apresentadas duas questões resolvidas por um aluno (situação fictícia) e é pedido que os alunos se posicionem relativamente às afirmações apresentadas. Na Questão 1 (Figura 5) são apresentadas comparações corretas entre numerais decimais e uma afirmação relativa à possibilidade de comparar grandezas comparando a parte não inteira como se de números naturais se tratassem.

Quem tem razão?

1. Observa as comparações entre vários números realizadas pela Ana:

0,68 > 0,55
0,04 > 0,001

2,005 < 2,7
1,025 < 1,82

Depois de ter feito estas comparações, a Ana concluiu:

“É muito fácil! Olhei para a parte decimal do número e comparei essa parte. Por exemplo, entre 0,68 e 0,55 vi que 68 era maior que 55. Fiz sempre assim!”

Concordas com a justificação da Ana? Porquê?

Figura 5. Enunciado da Questão 1 da tarefa “Quem tem razão?”

Rute e a colega Bárbara concordam com a comparação as duas primeiras situações, mas discordam da terceira. É importante notar que Rute lê os numerais recorrendo a uma *leitura em que usa a unidade de divisão mais pequena como unidade*:

Rute:	Então, sessenta e oito centésimas é maior (diz ao mesmo tempo que Bárbara) do que cinquenta e cinco. Está correto. Agora está a dizer que quatro centésimas é maior do que uma milésima. Este é maior do que este.
Bárbara:	É. Agora, posso ver os outros? Que, dois mil e… dois mil e cinco milésimas…
Rute:	Peeee! (imitando o som de uma campainha)
. . .	
Rute:	Então? Se transformarmos isto também pode ser igual a dois vírgula cinco, não é?
Bárbara:	Não.

Rute parece ignorar o papel do zero no numeral 2,005, referindo que representa o mesmo que 2,5. Na comparação entre 0,04 e 0,001 não parece ter existido dificuldade na interpretação do zero. Contudo, o mesmo não se verifica em 2,005. O facto de conter os algarismos zero e cinco (0,005), parece levar Rute a associar à noção de metade o que, dependendo da unidade considerada, pode conduzir a interpretações incorretas (caso da primeira tarefa analisada). A existência de unidades na parte inteira dos numerais também poderá ter influenciado esta interpretação.

A investigadora aproximou-se do par e questionou Rute de que modo representaria os numerais 2,005 e 2,7 na grelha 10x100 (representação explorada anteriormente):

Investigadora:	O que é que tu ias usar para fazer este dois ponto zero zero cinco? (leitura simplificada intencional)
Rute:	Duas barras e meia.
Investigadora:	E meia? O que é que este zero quer dizer? A seguir à vírgula…
Rute:	Sinceramente, não sei…

Bárbara ajuda Rute, referindo que “Mas isto [5] é milésimas. Cinco milésimas.” Assim, e retomando a representação do numeral na grelha 10x100, Rute parece identificar que 2,005 seria menor que 2,7.

Na segunda questão, a presença do zero na parte não inteira do número já não parece ser um obstáculo para Rute. Apresentava-se uma resolução e uma afirmação sobre a possibilidade de se comparar a grandeza de numerais decimais pelo número de algarismos (Figura 6). A terceira comparação encontrava-se incorreta.

2. Analisa com atenção a resposta do Pedro ao seguinte exercício:

Rodeia o número maior, justificando a tua escolha:

37,265	0,62	125,3
37,18	0,913	125,05

"Rodeei estes números porque são os que têm mais algarismos, por isso são maiores. Quando comparamos números podemos contar quantos algarismos têm e quantos mais tiverem, maior será o número."

Concordas com a resolução e justificação do Pedro? Porquê?

Figura 6. Enunciado da tarefa "Quem tem razão?"

Rute e Bárbara concordam que o número rodeado na terceira comparação não é o que representa o número de maior grandeza. Rute lê ambos os numerais parecendo usar a *centésima como unidade comum*:

Rute: Este está mal... Porque cento e vinte e cinco unidades e cinco centésimas…

Bárbara: Sim…

Rute: É menor do que cento e vinte e cinco unidades e trinta (acentua "trinta")...

Apesar de não usar a unidade "centésimas" ao ler 125,3, esta parece estar subjacente à leitura que faz. Rute acrescenta ainda ". . . porque trinta é igual a três colunas" e elabora:

Rute: Porque... se pensarmos em três colunas... Imagina agora que são três colunas, está bem? Se tivessem todas dez... imagina que é dez, está bem? (desenha) Imagina, isto é dez, isto já é dez, aqui. Ficava dez. Isto era vinte, isto era trinta.

Bárbara: Exatamente.

Rute *mobiliza a grelha* 10x10 como modelo para transformar 125,3 em 125,30. Deste modo, estabelece uma unidade comum a ambos os numerais, comparando-os. O par continua a discutir esta comparação e Rute identifica a parte não inteira de 125,3 como trinta centésimas, referindo "se isto são trinta e zero vírgula três… é igual a tinta centésimas, correto?".

Ao discutirem como poderiam escrever a sua resposta, Rute procura outro contraexemplo para justificar que a afirmação apresentada no enunciado estava incorreta:

Rute: Mete zero vírgula cinco.

Bárbara: Zero vírgula cinco (regista).

Rute: E zero vírgula… setenta e cinco.

. . .

Bárbara: Comparando… não, calma…

Rute: Não! E zero vírgula zero (acentua) setenta e cinco!

. . .

Rute: Zero vírgula cinco e zero vírgula zero setenta e cinco, o maior é o zero vírgula cinco e tem menos números! Tem menos algarismos. (regista) cinco... É o maior!

De seguida, regista por escrito a sua resposta que se apresenta na Figura 7:

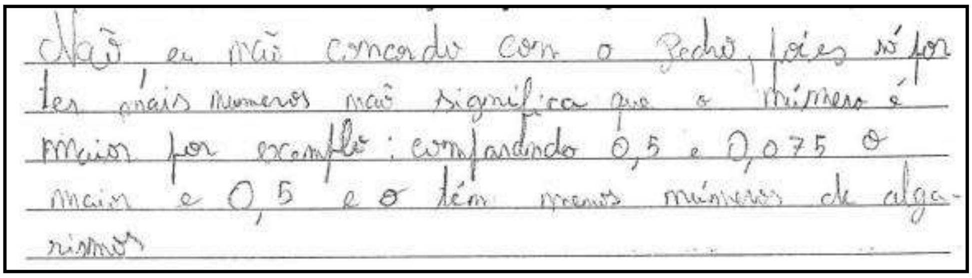

Não eu não concordo com o Pedro, pois só por ter mais numeros não significa que o número é maior por exemplo: comparando 0,5 e 0,075 o maior é 0,5 e o tem menos números de algarismos

Figura 7. Registo realizado por Rute na tarefa "Quem tem razão?"

Rute evidencia conhecimentos relativos ao valor de posição dos algarismos na parte não inteira dos numerais decimais. Seleciona 0,5 e 0,075 como mais um contraexemplo de que não é correto comparar a grandeza representada por numerais decimais comparando o número de algarismos que os compõem. O recurso ao numeral 0,075 evidencia também que Rute reconhece o papel do zero que, neste caso, indica a ausência de décimas.

Discussão e conclusões

Este texto centrou-se no modo como a discussão intencional da extensão de conhecimentos pode promover a compreensão de numeral decimal. Foram analisadas as discussões entre Rute e os seus colegas, provocadas por tarefas centradas em extensões de conhecimentos de números naturais e relativos à identificação do valor de posição de zero.

Rute revela que o seu conhecimento relativo ao valor posicional de zero está em construção, em particular quando o zero se encontra posicionado imediatamente à direita da vírgula. O facto de Rute, na última tarefa analisada, ter retomado a ideia de que pode retirar o zero da parte não inteira de um numeral decimal sem alterar o valor nele expresso (2,005 como 2,5) evidencia a complexidade da compreensão do valor de posição de zero. Estudos que envolvem alunos mais velhos (3.º ciclo) apontam precisamente a persistência da extensão deste conhecimento (Steinle & Stacey, 2002). Esta fragilidade, evidente em momentos distintos, é também reveladora da importância de criar vários momentos de discussão de um mesmo tipo de extensão de conhecimentos, pois em momentos diferentes e com tarefas diferentes, os alunos podem revelar entendimentos diferentes (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010).

Destacam-se também as mudanças na leitura que Rute faz dos numerais decimais, que podem apontar algumas evidências relativamente à compreensão desta representação. Nos números naturais, os numerais são lidos como um conjunto de unidades, contudo, nos numerais decimais não existe uma única unidade utilizada, levando por vezes os alunos a interpretá-los como uma cadeia de dígitos e não como uma única quantidade (Resnick et al., 1989). Rute começa por fazer este tipo de leitura simplificada, como "doze vírgula zero cinco". Contudo, no decorrer das tarefas, usa como unidade a unidade de divisão mais pequena ou faz uma composição de diferentes unidades, lendo, por exemplo, 125,05 como "cento e vinte e cinco unidades e cinco centésimas". Este tipo de leitura pode ser indicador de que Rute compreende um numeral decimal como uma única quantidade.

A discussão de extensões de conhecimentos parece também potenciar o estabelecimento de relações entre várias ideias matemáticas. É notório o uso de modelos para representar e comparar a grandeza dos números representados em numeral decimal. Este recurso a modelos contribui também para o reconhecimento do valor de posição, evitando o uso de procedimentos como acrescentar zeros na ordem mais à direita da parte não inteira, de modo a comparar os numerais como se representassem números naturais. A discussão de extensões de conhecimentos parece contribuir também para o estabelecimento de relações entre diferentes tipos de representações (representação icónica e simbólica) e entre números representados do mesmo modo (como 0,3 = 0,30).

O uso de exemplos de extensões de conhecimentos potencia situações de conflito cognitivo, ou seja, não só os alunos refletem sobre estas extensões como também partilham e discutem as suas próprias interpretações (Swan, 2001). Promove ainda a reflexão sobre os conceitos envolvidos (Brocardo, 2010), assim como o estabelecimento de relações entre várias ideias matemáticas, contribuindo para a compreensão de numeral decimal.

Referências bibliográficas

Baturo, A. (2000). Construction of a numeration model: A theoretical analysis. In J. Bana & A. Chapman (Eds.) *Proceedings 23rd Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 95–103). Fremantle, WA.

Brocardo, J. (2010). Trabalhar os números racionais numa perspectiva de desenvolvimento de sentido de número. *Educação e Matemática, 109,* 15–23.

Cobb, P., Jackson, K., & Dunlap, C. (2016). Design research: An analysis and critique. In L. D. English & D. Kirshner (Eds.) *Handbook of international research in mathematics education* (Third edition, pp. 481–503). New York, NY: Routledge.

Cramer, K., Monson, D., Ahrendt, S., Colum, K., Wiley, B., & Wyberg, T. (2015). 5 indicators of decimal understandings. *Teaching Children Mathematics, 22*(3), 186–195.

Durkin, K. & Rittle-Johnson, B. (2015). Diagnosing misconceptions: Revealing changing decimal fraction knowledge. *Learning and Instruction, 37*, 21–29.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 629-667). Reston, VA: NCTM.

McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics, 12*(3), 2–8.

Post, T., Cramer, K., Behr, M., Lesh, R., & Harel, G. (1993). Curriculum implications of research on the learning, teaching, and assessing of rational number concepts. In T. Carpenter & E. Fennema (Eds.), *Research on the Learning, Teaching, and Assessing of Rational Number Concepts* (pp. 327–362). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum and Associates.

Resnick, L. B., Nesher, P., Leonard, F., Magone, M., Omanson, S. & Peled, I. (1989). Conceptual bases of arithmetic errors: The case of decimal fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(1), 8–27.

Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Scheiner, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology, 62*, 273–296.

Steinle, V. & Stacey, K. (2002). Further evidence of conceptual difficulties with decimal notation. In B. Barton, K. C.Irwin, M. Pfannkuch, & M. O. J. Thomas (Eds.) *Mathematics Education in the South Pacific,* Proceedings of the 25th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (pp. 633–640). Auckland: MERGA.

Steinle, V. & Stacey, K. (2003). Grade-elated trends in the prevalence and persistence of decimal misconceptions. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 259–266). Honolulu, Hawaii: PME.

Swan, M. (2001). Dealing with misconceptions in mathematics. In P. Gates (Ed.), *Issues in Mathematics Teaching* (pp. 147–165). London: Routledge/Falmer.

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. *Journal of Mathematical Behavior, 31*(3), 344–355.

Vamvakoussi, X. & Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation, *Cognition and Instruction, 28*(2), 181–209.

ATITUDES FACE À MATEMÁTICA E À RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NUMA COMPETIÇÃO MATEMÁTICA

Nélia Amado[1], *Susana Carreira*[2]
[1]Universidade do Algarve e UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, namado@ualg.pt
[2]Universidade do Algarve e UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, scarrei@ualg.pt

Resumo. *Neste artigo apresentamos parte de um estudo que incide sobre as atitudes acerca da matemática e da resolução de problemas dos participantes de uma competição matemática inclusiva. Adotamos uma perspetiva multidimensional para estudar as atitudes que engloba: a visão sobre a matemática, a disponibilidade emocional e a perceção das competências pessoais. O estudo segue uma metodologia qualitativa e interpretativa, tendo os dados aqui analisados sido recolhidos através de um questionário. A análise dos dados mostra que os jovens valorizam aspetos na resolução de problemas como: o tipo de problemas propostos, o facto de os problemas poderem ser resolvidos de diferentes maneiras, a oportunidade de os resolver para além da sala de aula e de os discutir e de partilhar as resoluções com outros.*

Abstract. *This article presents part of a study that addresses the attitudes towards mathematics and problem solving of the participants in an inclusive mathematics competition. We adopt a multidimensional perspective to study the attitudes, which involves: the vision of mathematics and problem solving, the emotional disposition and the individual's perceived competence in those domains. The study follows a qualitative and interpretative methodology, drawing on data obtained through a questionnaire. The results from the data analysis show that the young students value a number of aspects in problem solving such as: the type of problems proposed; the fact that problems can be solved in several different ways; the opportunity of solving problems beyond the classroom and of discussing and sharing the solutions with others.*

Palavras-chave: *Alunos; Atitudes*; *Matemática; Resolução de problemas*

Introdução

Ao longo dos anos, a investigação em Educação Matemática tem identificado e analisado alguns fatores ou variáveis envolvidos no sucesso ou insucesso escolar. Atualmente, as dimensões afetivas relacionadas com o ensino e aprendizagem da matemática são consideradas da maior relevância neste processo. Contudo, a sua aparente *invisibilidade* faz com que permaneçam bastante escondidas aos olhos da comunidade escolar e da sociedade em geral, sendo, consequentemente, esquecidas. Esta ideia é partilhada por Goldin (2002) que destaca o mito muito popular de que a matemática é uma atividade puramente intelectual na qual as emoções parecem não ter lugar. Acresce ainda a ideia ou a imagem fantasiosa do matemático como alguém frio, austero, até sem sentimentos. Goldin (2002) refere que quando alguém está individualmente a fazer matemática, o sistema afetivo não é meramente auxiliar do cognitivo, pelo contrário, assume um papel central. De facto, são inúmeras as emoções experienciadas pelos alunos na aprendizagem da matemática que variam entre a alegria por conseguir resolver um problema à frustração de não ser capaz de perceber o que fazer. Ou a atitude negativa de rejeição e desmotivação face à matemática. Há, reconhecidamente, uma infinidade de afetos envolvidos na aprendizagem que merecem a atenção da investigação em Educação Matemática. No entanto, os estudos sobre afetos enfrentam uma enorme dificuldade pois revestem-se de uma característica muito particular, anteriormente referida, que se prende com a sua invisibilidade (Leder, Pehkonen, & Törner, 2002).

O estudo dos afetos é um vasto campo que envolve conceções, atitudes, emoções, valores e sentimentos cuja dificuldade em estudar separadamente é reconhecida na investigação. Este trabalho insere-se na investigação desenvolvida no âmbito do projeto Problem@Web, que envolveu o estudo de várias das dimensões afetivas presentes na participação de alunos (10-14 anos) nos Campeonatos de Resolução de Problemas de Matemática SUB12 e SUB14, que se caracterizam pela sua natureza marcadamente inclusiva.

Face à prioridade que alguns autores atribuem ao estudo das atitudes dos jovens em relação às ciências (Osborne, Simon & Collins, 2003), estabelecemos como objetivo conhecer as atitudes dos jovens participantes nestas competições matemáticas. No que se refere às atitudes relativamente à Matemática, enquanto disciplina escolar, dirigimos o estudo para a questão do gosto que os alunos manifestam. O mesmo propósito conduziu a procurar conhecer o gosto pela resolução de problemas. Julgamos pertinente conhecer a existência de consonância entre estas duas atitudes e tentar relacioná-la com os aspetos que os jovens participantes valorizam na atividade de resolução de problemas que desenvolvem, para além do contexto escolar, no âmbito dos Campeonatos SUB12 e SUB14.

As competições matemáticas no desenvolvimento do gosto pela Matemática

Ao longo dos últimos anos têm sido desenvolvidas inúmeras iniciativas que visam, acima de tudo, motivar todos os alunos para o estudo da Matemática, promovendo o gosto e o interesse por esta disciplina, através de atividades e propostas que os cativem (Kenderov, Rejali, Bussi, Pandelieva, Richter, . . . Taylor, 2009; Stockton, 2012). Como exemplo deste tipo de iniciativas destacamos os Campeonatos SUB12 e SUB14, que têm um carácter regional e decorrem através da Internet.

As competições inclusivas têm a capacidade de envolver um número muito elevado de alunos pelo facto de as atividades propostas serem tendencialmente acessíveis à maioria dos alunos. Este tipo de competições, com características próprias e diferenciadas, converge para um mesmo objetivo – envolver todos os estudantes em atividade matemática atrativa (Kenderov et al., 2009). Um dos aspetos distintivos é, tal como referem Kenderov et al. (2009), que as atividades propostas em competições inclusivas sejam adequadas a participantes com diferentes aptidões:

> … os desafios podem ser adaptados a qualquer nível de desempenho. Mesmo aqueles [participantes] com capacidades mais limitadas podem beneficiar de ambientes desafiantes. Desde o início serão envolvidos em processos de investigação e de procura de estratégias e assim ganharão intimidade com a matemática envolvida. (p. 87)

Estes autores destacam também a importância e, simultaneamente, a vantagem das competições (inclusivas) não estarem dependentes do currículo:

> Um dos problemas da sala de aula é que um currículo escolar é bastante restrito e não se adequa a todos os alunos. As competições permitem expor os alunos a outros aspetos da matemática e proporcionam-lhes condições para aplicar as suas capacidades e conhecimentos a situações novas. As competições enriquecem as experiências de aprendizagem de centenas de milhares, de facto, milhões de alunos que participam em competições inclusivas (Kenderov et al., 2009, p. 64).

Vários estudos indicam que a participação em competições matemáticas (inclusivas), sobretudo dos mais jovens, tem uma influência positiva na sua motivação para aprender matemática (Freiman & Vézina, 2006; Kenderov et al., 2009). Mais ainda, os benefícios da participação em competições matemáticas para além da sala de aula – que são não apenas desafiantes como ainda se desenrolam com a preocupação de serem projetos apelativos e matematicamente enriquecedores – incluem o desenvolvimento de uma relação afetiva positiva com a matemática e a resolução de problemas. E isto acontece tanto para os alunos que têm normalmente um desempenho elevado na matemática escolar como para os que revelam um menor sucesso (Freiman & Vézina, 2006; Freiman, Vézina, & Gandaho, 2005; Kenderov et al., 2009).

Aspetos afetivos na aprendizagem da matemática

Na literatura sobre afetos na aprendizagem da matemática, o trabalho de McLeod (1992) surge como uma referência incontornável. Este autor organiza os afetos segundo três dimensões – conceções/crenças, atitudes e emoções – que são usadas para "descrever um vasto leque de respostas afetivas à matemática" (McLeod, 1992, p. 57). Apesar da aparente dificuldade em separar ou diferenciar estas entidades, elas parecem distinguir-se, por exemplo, pela sua estabilidade. Enquanto as conceções e as atitudes são normalmente estáveis, as emoções mudam tendencialmente de forma rápida. Mas as conceções e as atitudes também se distinguem pelo grau de reação que provocam nos aspetos cognitivos e no tempo que levam a desenvolver-se. As emoções estão no extremo mais forte de um *continuum* de intensidade, com as conceções no polo oposto e as atitudes situadas em pontos intermédios. Segundo McLeod (1992), "o papel das conceções é central no desenvolvimento de respostas atitudinais e emocionais à matemática" (p. 579). Este autor destaca como exemplo frequente de uma conceção a ideia de que a matemática é baseada em regras e fórmulas. Para ilustrar uma atitude dá como exemplo, o não gostar de fazer provas geométricas ou sentir prazer na resolução de problemas. Como exemplo de emoções, aponta a alegria ou frustração que podem estar presentes na atividade de resolução de problemas.

Atitudes em relação à matemática

Embora o estudo das atitudes em relação à matemática tenha um longo percurso e um grande desenvolvimento nos anos 80 e 90 do século XX, onde o contributo de McLeod merece novamente reconhecimento, a evolução registada nos últimos anos permite-nos hoje encontrar várias formas de encarar as atitudes em relação à Matemática. Podemos começar por enunciar as duas principais perspetivas. Numa delas, mais simples e que decorre do trabalho de McLeod (1992), as atitudes em relação à matemática são vistas como uma mera disposição emocional, positiva ou negativa, em relação à Matemática. Para McLeod (1992), as atitudes face à matemática parecem desenvolver-se segundo dois caminhos distintos. Por um lado, "as atitudes podem resultar da automatização de uma reação emocional à matemática, que se verifica repetidamente" (p. 581). Este autor apresenta como exemplo um aluno que tem experiências negativas consecutivas ao resolver problemas (p. ex., recorrentemente não os consegue resolver num período de tempo aceitável); acontece que o impacto emocional dessas experiências acaba por ir diminuindo à medida que o tempo avança, fazendo com que essa resposta emocional se torne cada vez mais estável, transformando-se numa atitude. Ou seja, o aluno passa a ter uma atitude de fraco envolvimento ou interesse por se envolver na resolução de problemas, assumindo que não vai conseguir resolver o problema. Por outro lado, "uma segunda fonte de atitudes consiste na associação de uma atitude existente a uma situação nova, mas relacionada com a anterior" (p. 581). Um exemplo desta transferência de atitudes poderá estar na atitude negativa face à resolução de problemas geométricos que resulta da atitude negativa face à resolução de problemas algébricos. Ou seja, parece existir uma contaminação de experiências negativas.

Numa perspetiva multidimensional, a atitude face à matemática é vista como uma combinação de várias componentes. Para Hart (1989), consiste numa resposta emocional à Matemática, que pode ser positiva ou negativa, numa conceção sobre a Matemática e numa tendência comportamental em relação à Matemática.

Ma & Kishor (1997) propõem uma definição ainda mais ampla que envolve a incorporação das seguintes componentes: i) gostar ou não gostar da matemática, ii) tendência para se envolver ou não na atividade matemática, iii) a conceção de que uma pessoa é apta ou inapta para a matemática e, ainda, iii) a conceção de que a matemática é útil ou inútil.

Mais recentemente, Di Martino e Zan (2011) realizaram um amplo estudo que envolveu 1662 alunos do 1.º ao 13.º ano, com o objetivo de estudar as atitudes em relação à matemática (ATM – *Attitudes Towards Mathematics*). Da análise das narrativas dos alunos acerca da sua relação com a matemática emergiram três componentes fundamentais (Fig. 1): i) *a disposição emocional* relativamente à matemática, expressa através de 'eu gosto ou não de matemática', ii) *a perceção da competência* relacionada com ter ou não sucesso em matemática, isto é, a perceção do alunos sobre ser ou não capaz de resolver um exercício e, iii) a *visão da matemática* que resulta das ideias que os alunos expressam sobre a matemática.

Figura 1. Modelo de ATM (Di Martino & Zan, 2011)

Estes autores destacam "a ação recíproca próxima entre uma disposição emocional negativa para a matemática e as conceções dos alunos acerca do sucesso em matemática" (Di Martino & Zan, 2011, p. 481), enfatizando a importância de promover "uma visão da matemática baseada em processos mais do que produtos, de modo a estimular os alunos a modificar a ideia de sucesso, da produção de respostas corretas para o estabelecimento de processos de pensamento significativos…" (p. 481).

Neste trabalho, partilhamos das ideias de Di Martino e Zan, reconhecendo a importância de promover nos jovens uma visão da matemática consonante com a promoção do sucesso escolar e da inclusão e, em simultâneo, como uma área desafiante e que pode ser interessante para os jovens. Esta perspetiva difere da visão mais frequente que considera as atitudes como predisposições para certos padrões de comportamento.

As atitudes são moderadamente estáveis, envolvendo um equilíbrio na interação entre afetos e cognição. Associada a uma atitude, podemos encontrar emoções igualmente negativas que, ao invés das atitudes, se alteram mais rapidamente. Por exemplo, a alegria de conseguir resolver um problema pode ser uma emoção repentina que pode dissipar-se em poucos minutos. Por outro lado, a tristeza de não conseguir resolver os exercícios propostos pelo professor na aula pode ser uma emoção que se esquece ao sair da escola. No entanto, a repetição de episódios deste tipo pode desencadear uma atitude de rejeição da resolução de problemas e uma perceção de incapacidade de aprender matemática. Além disso, destaca-se a importância dos aspetos sociais em que todas estas experiências ocorrem, em especial, o contexto da aprendizagem. Por exemplo, é conhecido que entre todas as disciplinas escolares, a matemática é a que desencadeia continuamente emoções negativas mais fortes, que se podem instalar e até acabar por gerar uma atitude de recusa em relação a esta disciplina ou bloquear processos de pensamento.

Aspetos metodológicos

O estudo das atitudes pode envolver diversos instrumentos de recolha de dados, como entrevistas individuais, grupos focais, diários, observação ou questionários. O questionário tem sido o instrumento privilegiados para avaliar as atitudes dos alunos, durante décadas. No entanto, uma incursão na literatura mostrou-nos uma larga variedade de abordagens para o estudo das atitudes – por exemplo Di Martino e Zan (2013) recorreram a narrativas dos alunos (ensaios sobre a experiência de cada um com a matemática) para estudar alguns aspetos afetivos, nomeadamente o medo da matemática.

O contexto da nossa investigação não facilita o acesso à observação uma vez que envolve uma competição a distância através da Internet. Por outro lado, a diversidade de informação que se pretendia recolher no decurso do Projeto Problem@Web e o número de estudantes envolvidos, levou-nos a optar por um questionário como um dos instrumentos de recolha de dados que foi complementado por dados qualitativos provenientes de outras fontes.

O questionário (survey) foi aplicado ao universo dos estudantes que frequentavam as escolas com 2.º e 3.º ciclo do ensino básico na região do Algarve. Foi previamente validado com a colaboração de um professor da equipa do projeto e dos seus alunos. A sua implementação decorreu através de sistema online e teve o aval da Direção Regional de Educação do Algarve para a sua disseminação e aplicação junto da comunidade escolar. Esteve disponível para a recolha de respostas durante o último mês do ano letivo, sendo de resposta facultativa e anónima e, tanto no caso dos alunos participantes nos campeonatos como dos não participantes, que podiam aceder à hiperligação e responder, na escola ou noutro local.

- *Questionário*

Deste questionário uma parte era exclusivamente dedicada aos alunos participantes nas referidas competições em pelo menos uma das suas edições e incidia sobre essa participação, focando, em particular, aspetos relacionados com o uso das tecnologias na resolução de problemas e aspetos afetivos. As questões relacionadas com a dimensão afetiva procuram conhecer a opinião dos alunos acerca da matemática, da resolução de problemas, da natureza dos desafios propostos, da importância atribuída à participação, os fatores mais valorizados nas competições e os sentimentos vividos durante a sua participação. Muitas das questões estão subdivididas em sub-questões que foram respondidas numa escala de *Likert* com 4 ou 5 níveis. A taxa de retorno do questionário ronda os 20% no SUB12 e os 17% no SUB14, o que é uma taxa de retorno aceitável para um questionário online. Passamos a apresentar uma breve caracterização dos 350 participantes no SUB 12 e no SUB14 que responderam ao questionário, de escolas da região do Algarve.

Um breve retrato dos participantes neste estudo

O número de participantes do género feminino 191 (54,6%) é ligeiramente superior ao número de participantes do género masculino 159 (45,5%). Em relação à idade dos alunos, 117 tinham 11 anos, (33,4%) e constituem a faixa etária que regista uma adesão mais elevada, seguindo-se os alunos com 12 anos e 10 anos. Nas respostas ao questionário, o número de alunos com 13 e 14 anos tem uma expressão mais reduzida, 47 e 16 alunos respetivamente e, por fim, apenas 3 alunos com 15 anos, participantes no SUB14, responderam ao questionário. Em relação ao nível de escolaridade, os dados mostram-nos como a percentagem de participantes diminui à medida que o nível de ensino aumenta. Esta tendência registou-se em todas as edições dos campeonatos.

O que nos dizem os dados acerca das atitudes face à matemática e à resolução de problemas dos participantes no SUB12 e SUB14

Apresentamos, em seguida, um conjunto de dados que ilustram atitudes em relação à matemática e à resolução de problemas manifestadas pelos jovens participantes nos Campeonatos de Matemática SUB12 e SUB14. Olhamos, em primeiro lugar para o *gosto pela Matemática* e registamos que nem todos os participantes mostram gostar desta disciplina. Cerca de 21% dos jovens confessaram não gostar nada ou gostar pouco, o que parece não ter impedido a sua participação nestas competições matemáticas de resolução de problemas. A grande maioria, mais de 68% gosta ou gosta muito de matemática como revelam os dados apresentados no Gráfico 1.

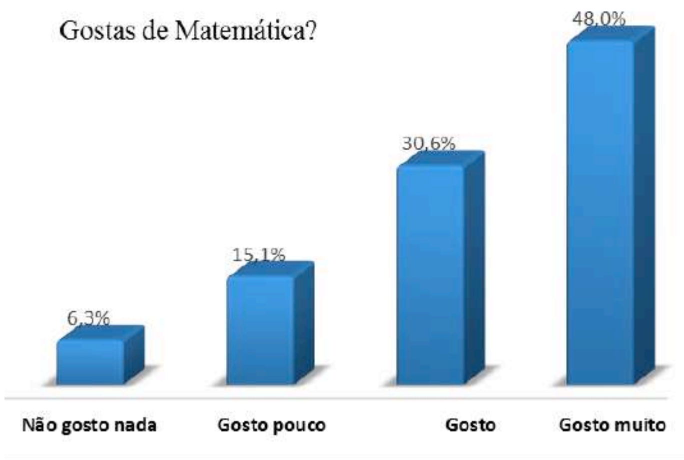


Gráfico 1. Resposta à questão: Gostas de Matemática

A resolução de problemas é a principal atividade envolvida neste campeonato. No Gráfico 2, apresentamos os dados relativos ao gosto dos participantes do SUB12 e SUB 14 pela resolução de problemas. Como podemos constatar, uma larga percentagem de jovens mostra apreciar esta atividade. A percentagem de alunos que responde gostar pouco ou nada de resolução de problemas (cerca de 22%) é muito semelhante à de alunos que mostram pouco ou nenhum gosto pela matemática, embora a percentagem de jovens que afirma não gostar nada da resolução de problemas de matemática seja ligeiramente inferior à dos que referem não gostar nada de matemática. Os resultados mostram um paralelo entre estas *disposições emocionais* tanto na vertente negativa como na positiva. O entanto, a percentagem de alunos a gostar muito de matemática é superior à dos alunos que afirmam gostar muito de resolver problemas. Ou seja, o gosto pela matemática não se resume ao gosto pela resolução de problemas.

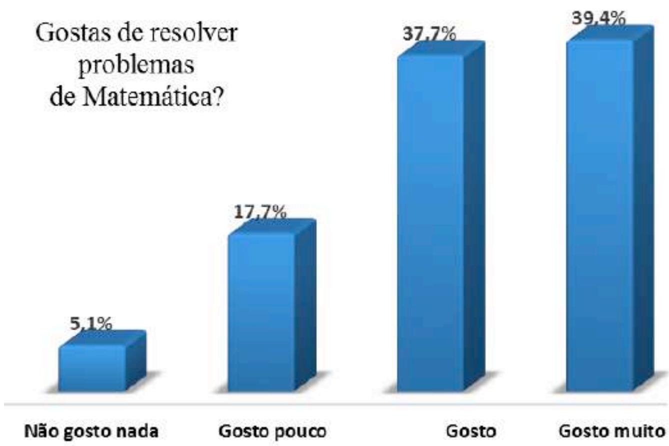


Gráfico 2. Resposta à questão: Gostas de resolver problemas de Matemática?

Nos gráficos seguintes surgem elementos que ilustram aspetos da *visão dos alunos* sobre a atividade de resolução de problemas de matemática.

De acordo com os vários autores anteriormente referidos, o tipo de problemas a apresentar aos alunos é determinante para promover o surgimento de uma atitude positiva face à matemática. Estes campeonatos assumem-se como sendo de natureza inclusiva, o que significa que procuram ser acessíveis a um grande número de jovens. Os dados apresentados no Gráfico 3, mostram que dos respondentes a este questionário, mais de 80% mostram gostar dos problemas propostos. De facto, os problemas apresentados ao longo das várias jornadas das competições, que designámos por 'desafios matemáticos moderados', procuram expor os alunos a diversos aspetos da matemática e proporcionam-lhes condições para colocar em ação as suas capacidades e conhecimentos em situações novas. As competições enriquecem as experiências de aprendizagem dos participantes como tem sido amplamente documentado em diversos trabalhos de investigação (Amado, Carreira, & Ferreira, 2016; Amaral, 2016; Jacinto & Carreira, 2016; Nobre, Amado & Carreira, 2012).

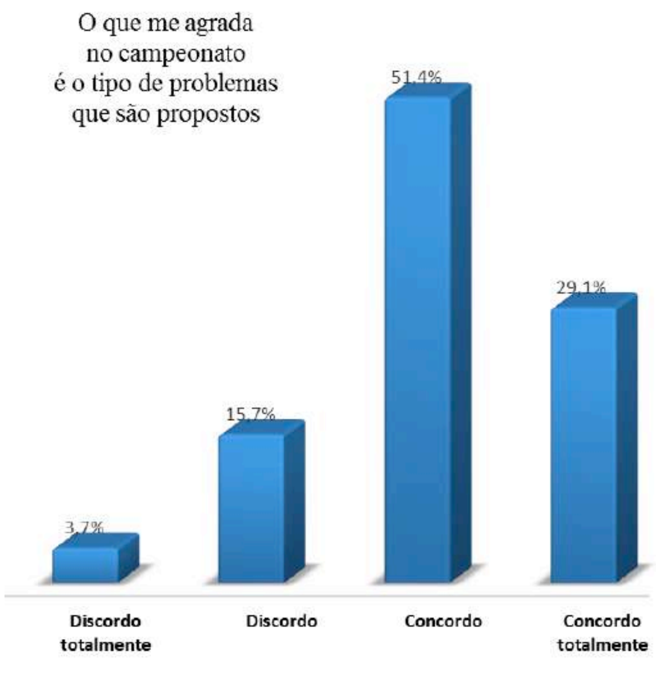


Gráfico 3. Resposta à questão: O que me agrada no campeonato é o tipo de problemas que são propostos.

A existência de várias formas de resolver um problema é um aspeto bastante valorizado pelos participantes, sendo que mais de 90% dos jovens mostra apreciar esta oportunidade (Gráfico 4). A possibilidade de resolver os problemas de várias maneiras é um dos aspetos mais relevantes neste campeonato que o distingue de forma nítida da resolução de problemas em sala de aula. Esta é uma importante característica que potencia a criatividade, uma das evidências que obtivemos no decurso deste projeto de investigação. Por outro lado, esta possibilidade que as competições oferecem aos jovens está relacionada com outros aspetos que a sala de aula não oferece normalmente, por exemplo a oportunidade de recorrerem às tecnologias que têm à sua disposição. Esta liberdade de utilizarem as ferramentas preferidas para resolver os problemas constitui outro elemento chave das competições que não é indiferente na atitude dos jovens perante a resolução de problemas.

No entanto, como veremos em seguida, a diversidade de problemas e a possibilidade de resolver os problemas de várias formas distintas, está intimamente ligada a outros aspetos também valorizados – ir para além da sala de aula e permitir a discussão e partilha de ideias – que contribuem igualmente para que os alunos desenvolvam uma atitude mais positiva em relação à matemática.

Gráfico 4. Resposta à questão: Os problemas dos SUB12 e SUB14 podem ser resolvidos de várias maneiras.

A resolução de problemas em sala de aula decorre geralmente num período de tempo limitado, tendencialmente de forma individual ou em pares, raramente com recurso a tecnologias e os problemas são geralmente associados à matéria dada pelo professor nas últimas aulas. Nestes campeonatos, a resolução de problemas distancia-se do currículo e isso contraria a eventual ideia de que os problemas deverão ser resolvidos com base num processo ou método anteriormente ensinado. Uma outra vantagem que é destacada pelos jovens é a possibilidade de resolver os problemas em casa, quando sentem disponibilidade e usando os recursos que entenderem sem se sentirem pressionados com o tempo de que poderão necessitar para a resolução. Esta possibilidade revela-se importante para alterar igualmente a conceção dos alunos, amplamente relatada na investigação, de que os problemas se devem resolver num curto espaço de tempo. O gráfico 5, oferece-nos uma imagem do interesse dos inquiridos pela atividade de resolução de problemas fora da sala de aula. Embora a maioria dos alunos (66%) pareça apreciar o prolongamento da resolução de problemas de matemática para além da sala de aula, observa-se que cerca de 34% dos jovens não dá muito valor a esta possibilidade. Eventualmente, estão aqui incluídos os alunos que gostam pouco de matemática e de resolver problemas e outros que sentem a necessidade de algum apoio para lidar com os problemas propostos que poderão encontrar na escola.

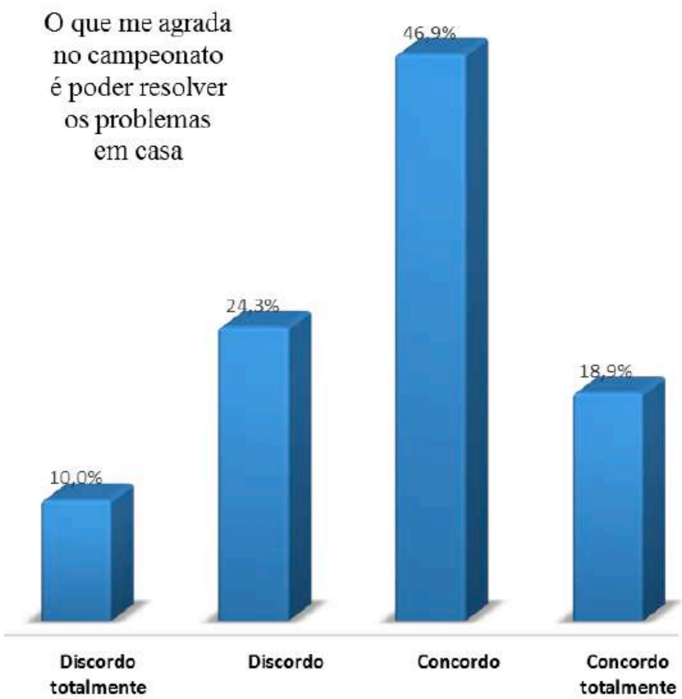


Gráfico 5. Resposta à questão: O que me agrada no campeonato é poder resolver os problemas em casa.

Um último aspeto do agrado dos jovens participantes que destacamos é a possibilidade de discutirem com outros os problemas propostos. Os outros podem ser pais, colegas, irmãos ou familiares, mas também os seus professores de matemática ou de outras disciplinas, e ainda a própria organização dos campeonatos que interage sistematicamente com todos os participantes. De facto, os dados apresentados no Gráfico 6 permitem-nos concluir que perto de 80% dos jovens sente gosto em discutir com outros os problemas e a sua resolução. Esta é uma das características que nem sempre se encontra na sala de aula. Parece assim que uma visão positiva da resolução de problemas envolve a discussão, partilha e reflexão com outros acerca da resolução.

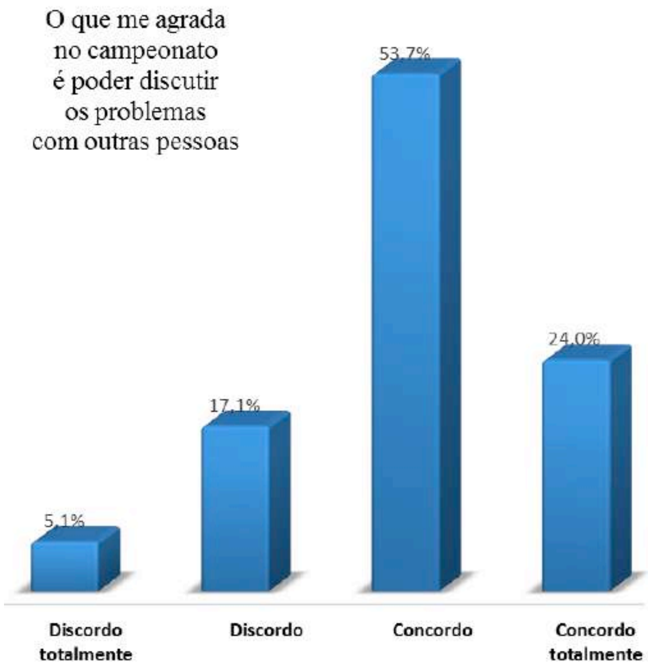


Gráfico 6. Resposta à questão: O que me agrada no campeonato é poder discutir os problemas com outras pessoas.

Considerações Finais

Procuramos destacar alguns dados que nos permitem ilustrar duas das três componentes que consideramos essenciais para caracterizar a *atitude dos alunos face à resolução de problemas de matemática* – a disposição emocional e a visão sobre a matemática e a resolução de problemas.

Os dados que apresentámos revelam uma *atitude dos participantes face à matemática e à resolução de problemas de matemática* francamente positiva. É igualmente evidente a existência de um paralelismo entre a atitude face à matemática e a resolução de problemas, o que nos permite afirmar que esta *disposição emocional* face à matemática e à resolução de problemas embora não sendo coincidentes, não são independentes. Contudo, podemos concluir que apesar de nem todos os jovens que afirmam gostar de matemática também gostam da resolução de problemas, há uma grande interseção entre estes conjuntos. A investigação neste domínio defende a importância de promover nos jovens uma atitude positiva face à matemática (Di Martino e Zan, 2011) considerando esta atitude fundamental para a aprendizagem da matemática.

A *visão em relação à resolução de problemas* demonstrada por estes participantes revela uma ênfase em determinados aspetos que são acentuados pelo contexto onde decorre esta atividade – para além da sala de aula. Kenderov et al. (2009) destacam a importância de criar situações que promovam o gosto e o interesse dos jovens pela aprendizagem da matemática. Os campeonatos de resolução de problemas SUB12 e SUB14 pelo facto de proporcionarem aos jovens uma variedade de problemas desafiantes, mas, simultaneamente, acessíveis a um elevado número de participantes e que podem ser resolvidos de várias formas enquadram-se no tipo de situações apontadas por Kenderov et. al (2009).

Para além destas características, os jovens destacam ainda como relevante a possibilidade de prolongarem a atividade de resolução de problemas, para além da sala de aula, e a possibilidade de discutir com outros, sejam eles professores ou familiares. Este aspeto partilhado da resolução de problemas parece ter reflexos na *consciência (e no desenvolvimento) da competência*, ainda que esta conclusão requeira mais evidências empíricas.

Consideramos que os resultados deste estudo, embora resultantes de uma investigação que decorre num contexto fora da sala de aula, oferecem contributos para conhecer melhor as atitudes em relação à matemática e à resolução de problemas no contexto escolar.

Referências bibliográficas

Amado, N., Carreira, S., & Ferreira, R. (2016). *Afeto em competições matemáticas inclusivas. A relação dos jovens e suas famílias com a resolução de problemas*. Belo Horizonte: Autêntica, Brasil.

Amaral, N. (2016). *A criatividade matemática no contexto de uma competição de resolução de problemas.* (Tese de Doutoramento em Educação. Especialidade de Didática da Matemática). Instituto de Educação, Universidade de Lisboa.

Carreira, S. Jones, K., Amado, N., Jacinto, H. & Nobre, S. (2016). *Youngsters Solving Mathematical Problems with Technology: The Results and Implications of the Problem@Web Project.* New York, NY: Springer.

Di Martino, P., & Zan, R. (2011). Attitude towards mathematics: a bridge between beliefs and emotions. *ZDM*, *43*, 471-482.

Di Martino, P., & Zan, R. (2013). Where does fear of maths come from? Beyond the purely emotional. In B. Ubuz, Ç. Hasser & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth*

Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (pp. 1309-1318). Ankara, Turkey: Middle East Technical University.

Freiman, V., & Véniza, N. (2006). Challenging virtual mathematical environments: The case of the CAMI Project. Pre-conference paper of the Study Conference for ICMI Study 16 – Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom [acedido em http://www.amt.edu.au/icmis16pcanfreiman.pdf].

Freiman, V., Véniza, N., & Gandaho, I. (2005). New Brunswick pre-service teachers communicate with schoolchildren about mathematical problems: CAMI project. *ZDM*, *37*(3), 178-189.

Goldin, G. (2002). Affect, meta-affect, and mathematical belief structures. In G. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Eds.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (pp. 59-72). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Hart, L. (1989). Describing the affective domain: Saying what we mean. In D. B. McLeod & V. M. Adams (Eds.), *Affect and mathematical problem solv*ing (pp. 37–45). New York, NY: Springer.

Jacinto, H. & Carreira, S. (2016). Mathematical Problem Solving with Technology: the Techno-Mathematical Fluency of a Student-with-GeoGebra. *International Journal of Science and Mathematics Education*. (Online First). DOI:10.1007/s10763-016-9728-8.

Kenderov, P., Rejali, A., Bussi, M. G., Pandelieva, V., Richter, K., Maschietto, M., Kadijevich, D., & Taylor, P. (2009). Challenges beyond the classroom – Sources and organizational issues. In E. J. Barbeau & P. Taylor (Eds.), *Challenging mathematics in and beyond the classroom: The 16th ICMI Study* (pp. 53-96). New York, NY: Springer.

Leder, G. C., Pehkonen, E., & Törner G. (2002). Setting the scene. In G. C. Leder, E. Pehkonen, & G. Törner (Eds.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (pp. 1-10). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Ma, X. & Kishor, N. (1997). Assessing the Relationship Between Attitude Toward Mathematics and Achievement in Mathematics: A Meta-Analysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(1), 26-47.

McLeod, D. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 575-596). New York, NY: MacMillan.

Nobre, S., Amado, N., & Carreira, S. (2012). Solving a contextual problem with the spreadsheet as an environment for algebraic thinking development. *Teaching Mathematics and its Applications*, *31*(1), 11–19

Osborne, J., Simon, S., & Collins, S. (2003). Attitudes towards science: a review of the literature and its implications. *International Journal of Science Education*, *25*(9), 1049–1079.

Stockton, J. C. (2012). Mathematical competitions in Hungary: Promoting a tradition of excellence & creativity. *The Mathematics Enthusiast*, *9*(1-2), 37–58.

POSTERS

O GEOGEBRA NA APRENDIZAGEM DE TÓPICOS DE GEOMETRIA DE ALUNOS DO 7.º ANO

Sara Vaz[1], *Nélia Amado*[2], *Susana Carreira*[3]
[1]Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, saravaz@campus.ul.pt
[2]Universidade do Algarve e UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, namado@ualg.pt
[2]Universidade do Algarve e UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, scarrei@ualg.pt

O nosso objetivo, com este *poster*, é ilustrar de que forma o GeoGebra pode contribuir para as aprendizagens dos alunos quando estes são confrontados com situações em que é necessário descobrir um padrão ou uma regularidade em tópicos de geometria.

Vale (2013) considera que reconhecer padrões na natureza ou nos números é o início de uma exploração que irá ajudar os alunos a generalizarem através da resolução de problemas. A mesma autora salienta que o contexto figurativo oferece oportunidades para que os alunos se consigam focar numa estrutura ou padrão.

As tarefas exploratórias são promotoras da aprendizagem dos alunos pois valorizam os seus métodos, permitindo-lhes criar e descobrir. Uma exploração é, por isso, uma tarefa aberta de desafio reduzido que contribui para desenvolver a autoconfiança do aluno (Ponte, 2014).

O presente estudo tem como participantes 19 alunos de uma turma do 7.º ano que recorrem frequentemente ao GeoGebra para resolver tarefas propostas em sala de aula. Em algumas dessas aulas os alunos trabalham em grupo em tarefas que suscitam o debate e a discussão de ideias. Para a concretização do objetivo, optou-se por uma análise de dados qualitativa e interpretativa.

Para este *poster* selecionámos dados recolhidos em sala de aula durante a realização de duas atividades: *Soma dos ângulos internos e externos de polígonos convexos* e o *Teorema de Tales*. O objetivo destas atividades foi introduzir os conteúdos matemáticos relevantes, a partir da exploração por parte dos alunos, das tarefas apresentadas.

Na tarefa dos ângulos internos e externos de um polígono, os alunos trabalharam em pares e resolveram a tarefa durante 60 minutos. Alguns dos alunos optaram por construir polígonos regulares no GeoGebra e, através da opção “ângulo” determinaram a amplitude dos ângulos internos e externos dos polígonos, determinando depois a sua soma. De seguida construíram polígonos convexos não regulares e, do mesmo modo, foram determinando as somas dos seus ângulos internos e externos. Os alunos detetaram facilmente que a soma dos ângulos externos de polígonos convexos seria sempre 360º, no entanto precisaram de mais tempo para descobrirem a fórmula para determinar a soma dos ângulos internos dos polígonos convexos.

Para a realização da tarefa sobre o Teorema de Tales, os alunos trabalharam em grupos de três elementos e, durante 90 minutos, realizaram a tarefa proposta. Utilizaram diversos recursos, nomeadamente um aplicativo construído com o GeoGebra e um vídeo e um *PowerPoint* que explicavam o teorema. O aplicativo ilustrava uma situação em que se pretendia saber a altura de uma pirâmide (valor fixo), usando apenas uma estaca (de altura fixa e posição móvel) e as sombras que eram projetadas no chão (a qualquer hora do dia). Esta tarefa tinha por objetivo levar os alunos a interpretar o Teorema de Tales e compreender como pode ser aplicado. Depois de manipularem o aplicativo e verem os restantes recursos disponibilizados, os alunos recorreram ao lápis e papel tentando aplicar o que haviam observado no vídeo e no *PowerPoint* às situações que eles tinham criado no GeoGebra, obtendo sempre o mesmo resultado para a altura da pirâmide.

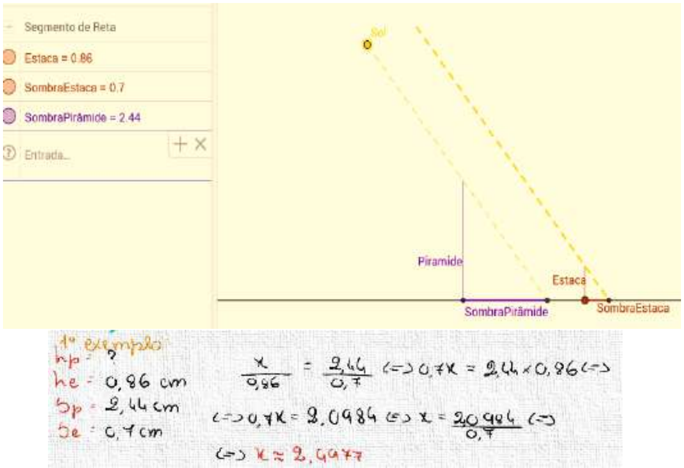


Figura 1: Exemplo ilustrativo de uma resolução

A análise das produções dos alunos e da discussão em sala de aula, permitem-nos afirmar que a utilização do GeoGebra, na resolução destas tarefas, proporcionou aos alunos: i) uma oportunidade de trabalhar de forma mais autónoma, ii) a possibilidade de visualização que contribuiu para atenuar a abstração e, deste modo, tornar os conceitos matemáticos mais percetíveis. O GeoGebra constitui, de acordo com os resultados obtidos, uma ferramenta importante para apoiar a atividade de generalização, em tópicos de Geometria, a partir de tarefas de caráter exploratório.

Referências bibliográficas

Ponte, J. P. (2014). Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. In J. Ponte (Org.), *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp.13-27). Lisboa: Instituto de Educação, Universidade de Lisboa.

Vale, I. P. (2013). Padrões em contextos figurativos: um caminho para a generalização em matemática. *Revemat, 8(2), 64-81*.

ARTE, CULTURA E PATRIMÓNIO: UMA FORMAÇÃO DE PROFESSORES PARA O ENSINO DE SIMETRIAS

Cleber Gouvea Fernandes[1], *Maria Piedade Vaz Rebelo*[2], *Carlota Isabel Leitão Pires Simões*[3]
[1]Faculdade de Psicologia e Ciências da Educação da Universidade de Coimbra, cleber.fernandes@ifrj.edu.br
[2]Faculdade de Psicologia e Ciências da Educação da Universidade de Coimbra, pvaz@mat.uc.pt
[3]Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, carlota@mat.uc.pt

Uma Formação de Professores em curso

A Formação de Professores que apresentaremos resumidamente aqui ainda está sendo desenvolvida como uma das ferramentas de um projeto de pesquisa de doutoramento na Faculdade de Psicologia e Ciências da Educação da Universidade de Coimbra. O projeto de pesquisa busca responder algumas questões sobre o ensino de Simetrias através de recursos artísticos, culturais e patrimoniais, bem como os impactos desta prática metodológica, tendo em vista levar professores e professoras, alunos e alunas ao conhecimento matemático deste tema valendo-se da arte, da cultura e do patrimônio como elementos contextualizadores. Dentre as questões de investigação da pesquisa de doutoramento mencionada, destacamos:

I. Quais as perspectivas, experiências e propostas dos professores para o ensino de Simetrias?

II. De que forma o ensino de Simetrias, presente no 1º CEB, pode ser viabilizado de modo interdisciplinar através da arte, da cultura e do patrimônio?

III. O ensino e a aprendizagem de Simetrias pode ser mais significativo e eficaz se este for desenvolvido através da arte, da cultura e do patrimônio? Isto é, estará associado a maior satisfação e percepção de aprendizagem profissional/competência docente?

Tendo em conta as questões formuladas, estabeleceu-se o objetivo geral da pesquisa como planificar, implementar e avaliar estratégias de ensino dos conceitos de Simetria para 1º Ciclo do Ensino Básico através desses recursos, com o foco na formação de professores, valendo-se de uma metodologia de investigação-ação participativa. A recolha dos dados dar-se-á através de questionários, entrevistas (Focus Grupo e Individuais) e observação não participante e o tratamento dos dados será através de análise de conteúdo.

A Oficina está sendo implementada em 8 sessões presenciais que, juntas, totalizarão 20 horas e 6 sessões autônomas que, juntas, totalizarão outras 20 horas. Além disso, serão discutidos temas como os desafios no ensino e aprendizagem de Matemática, Geometria e Simetrias, transversalidade e contextualização, ensino de Matemática através de recursos artísticos, culturais e patrimoniais, Formação de Professores, Matemática, Geometria e Simetrias no currículo, programas, metas e manuais e a discussão matemática dos conceitos de Simetrias, com uma abordagem do uso do termo ao longo dos tempos e a atual utilização/conceitualização do mesmo. Nas sessões da Oficina são realizadas ações com os seguintes objetivos:

i) Identificar planificações, práticas de ensino e recursos metodológicos já utilizados pelos professores para o ensino dos conceitos de simetria;

ii) Debater a problemática ainda permanente no ensino a na aprendizagem da Matemática, principalmente da Geometria e das Simetrias.

iii) Discutir a possibilidade e rentabilidade do ensino de Simetrias através de recursos artísticos, culturais e patrimoniais.

iv) Criar de forma colaborativa um "Banco de Atividades" que promova o ensino dos conceitos de simetria através de recursos artísticos, culturais e patrimoniais.

v) Desenvolver o ensino dos conceitos de simetria através de recursos artísticos, culturais e patrimoniais nas práticas pedagógicas.

vi) Descrever e analisar práticas docentes de implementação das atividades e recursos criados.

vii) Fomentar práticas docentes que permitam aos alunos e alunas desenvolver o espírito de observação e de percepção de regularidades, e exprimir livremente a sua criatividade.

Algumas dessas ações já ocorreram de acordo com o calendário e faseamento previsto para a Oficina de Formação de Professores em curso e outras ainda estão por ocorrer.

Resultados

Os dados obtidos até o presente momento ainda estão em fase de tratamento, não sendo possível apresentarmos, aqui, considerações mais detalhadas. É relevante perceber – e temos total clareza disto – a necessidade de maior aprofundamento no tratamento dos dados já obtidos bem como os que ainda estão por serem recolhidos. Isto será realizado pormenorizadamente em favor da pesquisa na qual este artigo se associa.

Considerações finais

Entendemos que este conjunto de ações possa gerar um impacto relevante no ensino e na aprendizagem, mesmo que de forma pontual no conteúdo matemático abarcado por este projeto de pesquisa e pela Formação a ele associada, preenchendo, assim, as lacunas na formação de professores que entendam a importância e necessidade de um ensino contextualizado e mais significativo.

Referências bibliográficas

EACEA/Eurydice, 2011. O Ensino da Matemática na Europa: Desafios Comuns e Políticas Nacionais. *Taken and the Current Situation in Europe*. Brussels: EACEA/Eurydice. ISBN 978-92-9201-259-5; doi:10.2797/81606

Festas, M. I. F. (2015). Contextualized learning: foundations pedagogical and practices. *Educação e Pesquisa*, 41 (3), 713-727. https://dx.doi.org/10.1590/S1517-9702201507128518

Maia, C. M. F. (2014). *As Isometrias na Inovação Curricular e a Formação de Professores de Matemática do Ensino Básico*. Tese de Doutoramento, Departamento de Ciências da Educação e do Património - Universidade Portucalense, Portugal.

Nóvoa, A. (2008). O Regresso dos Professores. In: Ministério da Educação (Org.). *Desenvolvimento profissional de professores para a qualidade e para a equidade da Aprendizagem ao longo da Vida*. Conferência promovida no âmbito da Presidência Portuguesa do Conselho da União Europeia. Lisboa: Ministério da Educação, 21-39.

Nóvoa, A. (2009). Profesores: el future aún tardará mucho tiempo? In C. V. Medrano & D. Vaillant (coords.), *Aprendizaje y desarrollo professional docente* (pp, 49-55). Madrid: Fundación Santillana.

Zeichner, K. M. (2010). Repensando as conexões entre a formação na universidade e as experiências de campo na formação de professores em faculdades e universidades. In: *Educação*, Santa Maria, v. 35, n. 3, p. 479-504.

HUMAT - O HUMOR NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Luís Menezes[1], *António Ribeiro*[1], *Helena Gomes*[1], *Ana Patrícia Martins*[1], *Ana Maria Oliveira*[1], *Véronique Delplancq*[1], *Isabel Aires de Matos*[1], *João Paulo Balula*[1], *Floriano Viseu*[2], *Pablo Flores*[3]

[1] Escola Superior de Educação de Viseu e CI&DETS, menezes@esev.ipv.pt

[2] Universidade do Minho e CIED, fviseu@ie.uminho.pt

[3] Universidade de Granada, pflores@ugr.es

Processar o humor e ser capaz de o produzir é, claramente, um sinal de inteligência, revelando, quando bem feito, raciocínios complexos. O humor tem um papel social importante, assumindo-se como uma experiência cognitiva que, para além de criar uma sensação de bem-estar, predispõe as pessoas para o trabalho e pode melhorar a produtividade desse mesmo trabalho (Adão, 2008; Flores & Moreno, 2011; Martin, 2007; Meyer, 2015).

A Matemática é uma disciplina em que o raciocínio ocupa um lugar de destaque, tanto enquanto ciência como enquanto área escolar. Ao mesmo tempo, a Matemática não desperta na generalidade dos alunos o mesmo interesse, havendo alguns que apresentam à partida reações pouco favoráveis (Flores & Moreno, 2011; Menezes & Flores, 2017).

As recentes alterações curriculares no ensino da Matemática têm, na maioria dos países do mundo, afirmado a necessidade de os alunos desenvolverem competências de natureza transversal, como a comunicação, o raciocínio e a resolução de problemas matemáticos a par da aquisição do conhecimento matemático. Também em Portugal, contemplam a importância de promover aprendizagens que aliem a construção de conhecimento matemático ao seu uso, na realização de tarefas matemáticas problemáticas e na comunicação de ideias e raciocínios matemáticos (Guerreiro, Tomás Ferreira, Menezes & Martinho, 2015).

Nos primeiros anos de escolaridade, correspondentes, em muitos países, ao ensino primário, a utilização de textos (pequenas histórias ou banda desenhada), a partir dos quais se desenvolvem tarefas matemáticas desafiantes, é apontada na literatura como potencial promotora das aprendizagens previstas nos documentos curriculares (Banas, Dunbar, Rodriguez & Liu, 2011). Em particular, alguns textos focam tópicos matemáticos de forma humorística que, para serem compreendidos, implicam que os alunos desenvolvam a sua competência matemática (Flores & Moreno, 2011; Guitart, 2012). O desenvolvimento de tarefas matemáticas a partir de textos de cunho humorístico coloca aos professores grandes desafios. Assim, colocam-se-nos algumas questões: Os professores dos primeiros anos de escolaridade utilizam nas suas aulas tarefas ou situações que apresentem, de forma humorística, ideias matemáticas? Que recursos utilizam? E como selecionar, adaptar ou construir textos e tarefas que apresentem, de forma humorística, ideias matemáticas com potencial didático para o ensino nos primeiros anos? Desenvolvidos materiais para o efeito e sensibilizados os professores para o seu uso, estes conseguem integrá-los nas suas aulas?

O projeto HUMAT – *Humor in Mathematics Teaching* procura responder a estas questões, focando-se na: (i) avaliação das práticas e dos conhecimentos dos professores e dos recursos disponíveis quanto ao uso de textos que apresentem, de forma humorística, ideias matemáticas; (ii) seleção, adaptação e construção de tarefas matemáticas a partir de textos que apresentem, de forma humorística, ideias matemáticas com potencial didático para o ensino nos primeiros anos; e (iii) integração e utilização, pelos professores primários, de textos que apresentem, de forma humorística, contextos para o ensino da Matemática.

O projeto, com uma forte dimensão de desenvolvimento curricular, apoia-se no conhecimento disponível sobre planeamento e implementação de ensino exploratório da Matemática, no qual os alunos trabalham tarefas matemáticas desafiantes (Canavarro, Oliveira & Menezes, 2014) e no conhecimento atual sobre as potencialidades didáticas do humor em textos diversos (Flores & Moreno, 2011; Guitart, 2012; Martin, 2007; Meyer, 2015).

Assim, o projeto procura ampliar a visão sobre o conhecimento e as práticas de ensino da Matemática nos primeiros anos (4.º a 6.º anos), apoiadas em tarefas matemáticas usando textos de natureza humorística e, ainda, conceber e produzir materiais de apoio a esse ensino (um livro com textos e tarefas humorísticas alusivos à Matemática, planificações de aulas, episódios de sala de aula e textos de fundamentação teórica sobre o tema).

A equipa do projeto é multidisciplinar, incluindo investigadores doutorados em Didática da Matemática e em Ciências da Linguagem, de instituições de ensino superior. Os primeiros têm um forte interesse nas questões curriculares, tendo trabalho desenvolvido no âmbito da conceção e seleção de histórias alusivas à Matemática e no ensino exploratório apoiado em tarefas matemáticas, algumas de natureza humorística. Os segundos têm trabalhado nestas áreas da investigação, nomeadamente nas questões do texto, da comunicação e do humor, assegurando a desejável articulação entre a Matemática e o texto humorístico.

O projeto, organizado em quatro tarefas, tem um *design* metodológico que combina elementos qualitativos com elementos quantitativos, predominando os primeiros. Neste momento, já foram recolhidos e começam a ser analisados dados referentes ao uso do humor: (i) por professores portugueses e espanhóis nas suas práticas letivas; e (ii) em manuais escolares de Matemática (4.º e 5.º anos de escolaridade) com larga difusão em Portugal e Espanha.

Agradecimentos

Este trabalho inscreve-se no projeto HUMAT – *Humor in Mathematics Teaching* (PROJ/CI&DETS/2015/005), financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia, I.P., no âmbito do projeto UID/Multi/04016/2016. Agradecemos adicionalmente ao Instituto Politécnico de Viseu e ao CI&DETS pelo apoio prestado.

Referências bibliográficas

Adão, T. (2008). *O Lado Sério do Humor – Uma Perspectiva Sociolinguística do Discurso Humorístico*. Famalicão: Editorial Novembro.

Banas, J. A., Dunbar, N., Rodriguez, D., & Liu, S. J. (2011). A review of humor in educational settings: Four decades of research. *Communication Education*, *60*(1), 115-144.

Canavarro, A.P., Oliveira, H. & Menezes, L. (2014). Práticas de ensino exploratório da Matemática: Ações e intenções de uma professora. In J. P. Ponte (Ed.), *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp. 217-233). Instituto de Educação: Lisboa.

Guerreiro, A., Tomás Ferreira, R., Menezes, L., & Martinho, M. H. (2015). Comunicação na sala de aula: A perspetiva do ensino exploratório da matemática. *Zetetiké: Revista de Educação Matemática*, 23(4), 279-295.

Guitart, M. (2012). *Permitido reír... Estamos en clase. El humor como recurso didáctico en aula de Estadística* (Tese de doutoramento, Universidade Nacional de Cuyo, Mendonza, Argentina).

Martin, R. (2007). *The Psychology of Humor – An Integrative Approach.* London: Elsevier Academic Press.

Meyer, J. C. (2015). *Understanding Humor Through Communication: Why be Funny, Anyway*?. Lanham: Lexington Books.