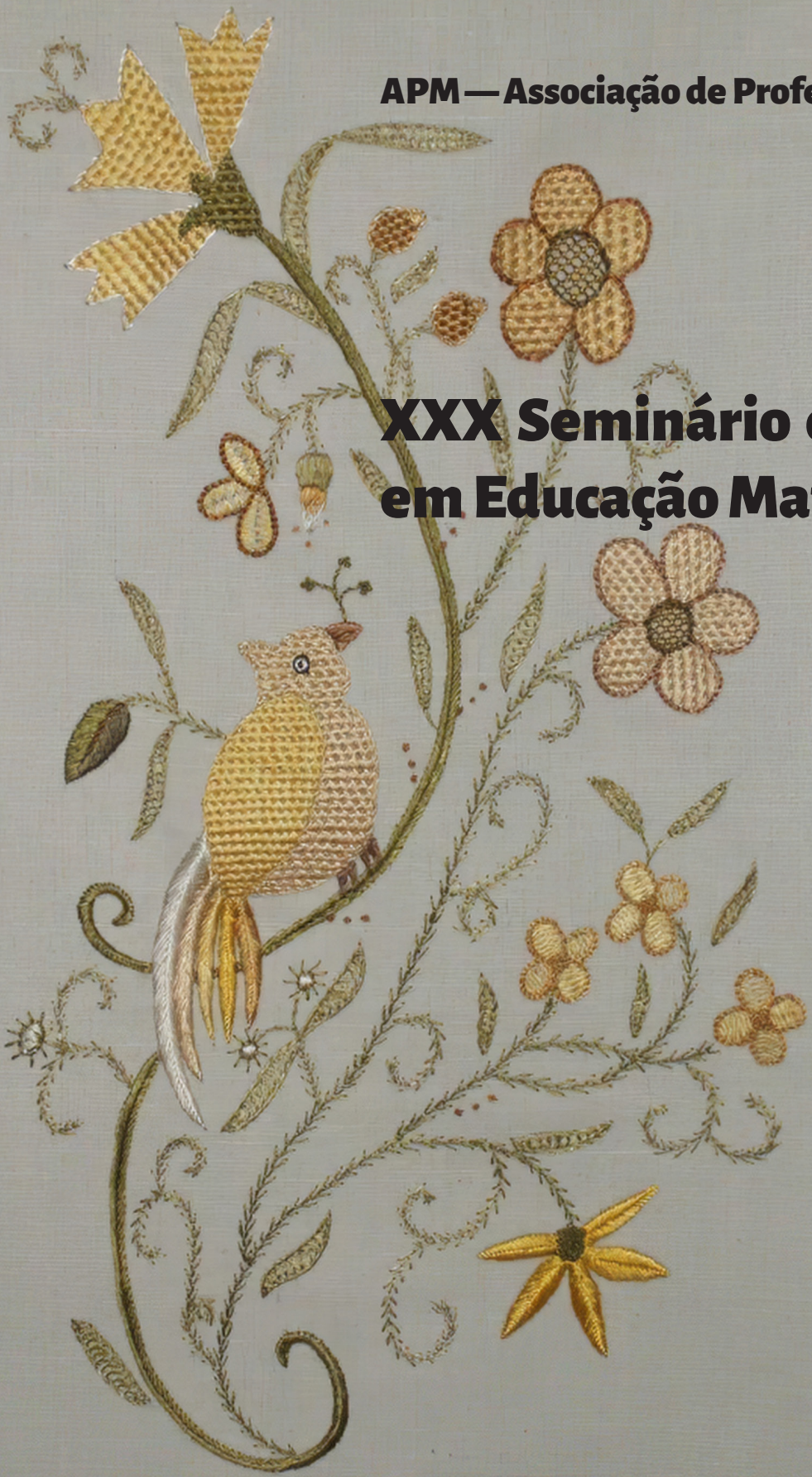
APM — Associação de Professores de Matemática



Atas do

XXX Seminário de Investigação em Educação Matemática

Castelo Branco
10–11 de Julho
2019

Henrique Guimarães
Ana Silvestre
Fátima Jorge
Hélia Pinto
Paulo Afonso

APM — Associação de Professores de Matemática

Atas do

XXX Seminário de Investigação em Educação Matemática

Castelo Branco
10–11 de Julho
2019

Henrique Guimarães
Ana Silvestre
Fátima Jorge
Hélia Pinto
Paulo Afonso

Editora:

APM
Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto 27 – A
1500-236 Lisboa

Telef. 21 716 36 90 ou 21 711 03 77
www.apm.pt

isbn: 978-972-8768-71-3

XXX Seminário de Investigação em Educação Matemática

Castelo Branco, 10–11 de Julho, 2019

Comissão Orgamizadora Local

Alzira Santos
Célia Martins
João Belém
Joaquim Faustino
José Monteiro
Nuno Santos

Comissão Científica

Ana Isabel Silvestre
Fátima Regina Jorge
Hélia Pinto
Henrique Manuel Guimarães
Paulo Afonso

Índice

1 Estratégias de estruturação espacial na reprodução de figuras 3D
Joana Conceição e Margarida Rodrigues

25 Processos de raciocínio matemático evidenciados por alunos de 3.º ano de escolaridade na realização de uma sequência de tarefas
Eliane Maria de Oliveira Araman e Maria de Lurdes Serrazina

41 O uso de exemplos na demonstração: Um estudo com alunos do 11.º ano
Rita Caneco e Helena Rocha

57 Estruturar o raciocínio matemático numa aula de 2.º ano de escolaridade
Margarida Rodrigues, Lurdes Serrazina e Ana Caseiro

71 Software Geogebra e formação continuada: uma experiência com professores das séries finais do Ensino Fundamental I
Ivete Cevallos e Josimar de Sousa

85 Desenvolver o conhecimento de futuros professores sobre as características das tarefas e o papel que a tecnologia pode assumir nestas
Helena Rocha

99 Estratégias avaliativas reguladoras para a aprendizagem com tarefas que usam tecnologia: Que contributo para uma prática reguladora do ensino?
Elvira Lázaro Santos e Leonor Santos

111 Um aparente pêndulo duplo — A aula de Matemática face às Aprendizagens Essenciais e ao Perfil dos Alunos na visão dos professores
Nélia Amado, Susana Carreira, António Júlio Aroeira, Carla Duarte, Elsa Morais, Justina Romano, Mónica Valadão e Raquel Faria

125 Situações autênticas de sala de aula na promoção de reflexões sobre o ensino da Estatística: Uma experiência de formação
Bruna Rodrigues e João Pedro da Ponte

137 Partilhas de Professores de Matemática num Círculo de Estudos
António Guerreiro

149 Uma Investigação ao redor das institucionalizações das expertises para ensinar aritmética no Brasil nas primeiras décadas do século XX
Robert Rene Michel Junior

Estratégias de estruturação espacial na reprodução de figuras 3D

Joana Conceição

Instituto de Educação
Universidade de Lisboa
conceicaoj@campus.ul.pt

Margarida Rodrigues

Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa & UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
margaridar@eselx.ipl.pt

Resumo

O presente artigo foca-se na análise de estratégias de reprodução de uma figura tridimensional, por alunos do 1.º ano do Ensino Básico, tendo como objetivo aprofundar a compreensão dos processos de estruturação espacial dos alunos, nomeadamente no tipo de relações que estabelecem e como usam essas relações para reproduzir a figura. Os dados apresentados foram recolhidos durante o trabalho autónomo e discussão de uma tarefa integrada na terceira sequência de tarefas do Ciclo 1 de uma investigação baseada em design, em curso, onde os alunos tinham de reproduzir uma construção 3D. Os resultados mostram que os alunos são capazes de utilizar diferentes estratégias de reprodução de figuras 3D, recorrendo a diferentes tipos de relações como a simetria, por camadas, por arestas e por faces. Estas estratégias constituem evidências de que os alunos estabelecem relações entre componentes e entre componentes, compostos e o todo, assumindo a coordenação entre diferentes vistas da figura.

Abstract

This paper is focused on the analysis of 1st grade students' strategies for reproducing a 3D figure, having the purpose of deepen the understanding of students' spatial structuring processes, namely que type of established relationships and how these relationships are used to reproduce the figure. The presented data was collected during the autonomous work and discussion of a task from the third sequence of tasks of cycle 1 of an ongoing design-based research, where students had to reproduce a 3D construction. Results show that students use different strategies, imbedded in different kinds of relationships, like symmetry, by layers, by edges and by faces. These strategies constitute evidences of students' establishment of relationships among components and between components, composites and the whole, assuming the coordination between different figure's views.

Palavras-chave: Estruturação espacial; tridimensional; coordenação; primeiros anos; investigação baseada em design.

Introdução

O NCTM (2007) propõe um trabalho, em Geometria, ao longo da escolaridade, em que os alunos trabalhem sobre as figuras geométricas e suas estruturas, analisando as suas características e relações. De facto, a compreensão da estrutura de uma figura é um aspeto fundamental e, por isso, Battista (2012) refere que a estruturação espacial é o processo basilar.

A estruturação espacial consiste na formação de um esquema mental que represente uma forma de organização para um objeto ou conjunto de objetos, através do estabelecimento de relações entre as diferentes partes desse(s) objeto(s). Assim a estruturação espacial passa pela identificação de unidades, pelo estabelecimento de relações entre essas unidades, formando compostos e por estabelecer relações entre unidades, compostos e o todo.

Num estudo desenvolvido por Battista e Clements (1996, 1998), com arranjos ortogonais tridimensionais, os autores referem que a falta de coordenação de diferentes perspetivas leva a que muitos alunos, de 3.º e 5.º anos de escolaridade, não consigam compreender a estrutura desses arranjos de cubos. De acordo com estes autores, a coordenação de diferentes vistas, em figuras tridimensionais, não é fácil. A falta de coordenação poderá estar relacionada com a ausência de modelos mentais que representem a estrutura desses objetos, nomeadamente interrelacionando as diferentes partes.

Embora o trabalho de Battista e Clements (1996) esteja particularmente associado a modelos retangulares, as relações entre diferentes vistas está presente noutras figuras tridimensionais e é um aspeto que precisa de ser trabalhado. Neste sentido, tarefas com construções, nos primeiros anos, oferecem a oportunidade para os alunos explorarem relações entre diferentes partes das figuras (Van den Heuvel-Panhuizen & Buys, 2005) e contribuem para a formação de imagens mentais representativas dessas relações (Shumway, 2013), assim como de relações dinâmicas, nessas construções.

Até ao momento, a partir dos estudos desenvolvidos por Battista e Clements (1996) e Clements e Sarama (2014), sabemos que os alunos estabelecem relações entre componentes, formando compostos e que são capazes de iterar esses compostos, relacionando-os entre si e mais tarde relacionando componentes, compostos e o todo. No entanto, interessa-nos perceber melhor que tipo de relações os alunos estabelecem. nomeadamente para reproduzirem uma figura, no processo de estruturação espacial. Reproduzir figuras é um aspeto particularmente exigente já que implica que os alunos reconheçam componentes e compostos assim como relações entre eles, na figura modelo (decompondo-o) e que consigam transpor essas relações durante o ato de compor a figura. Tal como referido por Sinclair e Bruce (2015), a decomposição e composição de figuras tridimensionais são aspetos complementares importantes para a compreensão das estruturas das figuras, merecendo por isso um estudo aprofundado.

Também o NCTM (2007) considera a composição e decomposição de figuras bidimensionais e tridimensionais como um aspeto importante a ser trabalhado, nos primeiros anos. No contexto português, o recente documento *Aprendizagens Essenciais*

(ME, 2018) explicita a decomposição de figuras bidimensionais, nos objetivos para o 1.º e 2.º anos: "Compor e decompor figuras planas, a partir de figuras dadas, identificando atributos que se mantêm ou que se alteram nas figuras construídas" (p. 9), mas, nas práticas essenciais refere "Descrever figuras bi e tridimensionais, identificando propriedades e partes componentes dessas figuras" (p. 9). Considerando a importância deste tópico, na aprendizagem da Geometria, procuramos aprofundar a compreensão acerca dos processos de estruturação espacial dos alunos, nomeadamente do tipo de relações que estabelecem e como usam essas relações para reproduzir a figura, analisando as estratégias utilizadas pelos alunos durante a resolução de uma tarefa que envolvia a reprodução de uma figura 3D.

Enquadramento teórico

De acordo com Battista (2012), a estruturação espacial, para constituir um ato mental que constrói uma representação para a estrutura de um objeto, incide na decomposição de um objeto em partes e no estabelecimento de relações entre essas partes. Este processo conduz à criação de um modelo mental que represente esse objeto. As relações estabelecidas para a criação desse modelo mental podem ser depois mobilizadas na análise e estruturação num conjunto mais alargado de outros objetos. Analisar os objetos, refletir sobre eles, manipulá-los e realizar operações sobre eles (Battista, 2012) são processos que definem o raciocínio espacial, por isso, o processo de estruturação espacial está particularmente ligado ao raciocínio espacial. De acordo com Battista (2007), o raciocínio espacial está subjacente ao raciocínio geométrico. Os processos ligados ao raciocínio espacial permitem então aprofundar a compreensão acerca da estrutura de um objeto, contribuindo assim para a estruturação espacial.

A estruturação espacial pode ser local, quando as relações estabelecidas entre componentes ou entre compostos ainda não têm uma relação evidente com o todo. A estruturação espacial passa a ser global quando se estabelecem relações entre componentes, compostos e o todo, num modelo mental coerente (Battista & Clements, 1996). A estruturação global está dependente das operações de coordenação e de integração. A coordenação está associada às relações estabelecidas entre diferentes compostos como pode ser o caso das vistas, nas figuras tridimensionais. Pode estar presente apenas nas relações estabelecidas entre componentes, ou entre compostos, como é o caso da estruturação local, ou ser mais abrangente e estar presente nas relações entre componentes, compostos e o todo. A integração está relacionada com os modelos mentais dos alunos que representam um determinado objeto e permitem a interação mental com esse objeto. Esta operação apenas está presente na estruturação global. Como referem Battista e Clements (1996), a operação de integração implica a coordenação de diferentes partes, sejam unidades simples ou compostas, com o todo, num modelo mental representativo do objeto. Por isso, a operação de integração assume-se como uma operação mais complexa e abstrata do que a coordenação, embora precise dela.

Battista e Clements (1998) referem a questão da coordenação como espacialmente

problemática para os alunos dos 3.º, 4.º e 5.º anos de escolaridade. Na sua investigação, estes autores verificaram que os alunos conseguiram compreender os arranjos retangulares das faces de paralelepípedos, mas mostraram dificuldade na coordenação de diferentes vistas e na compreensão de quais os cubos que servem duas vistas. A forma como os alunos revelaram apropriar-se da estrutura da figura mostrou lacunas na sua estruturação espacial. A forma como os alunos percecionaram os arranjos assentou em: i) identificação de unidades (cubos) sem relação entre si; ii) estabelecimento de relações entre cubos presentes nas faces do sólido sem relação com outras partes ou com o todo; iii) contagem de todos os quadrados presentes nas faces do sólido sem compreensão de que a cada cubo pode corresponder mais do que um quadrado visível; iv) agrupamento de cubos em camadas, horizontais ou verticais, e iteração dessas camadas.

A evolução dos alunos de uma estruturação local, a que se referem as estratégias que estabelecem relações apenas entre algumas partes do objeto, para uma estruturação global, em que se estabelecem relações entre unidades, compostos e o todo, parece depender da capacidade dos alunos em coordenar as unidades em compostos e coordenar os compostos entre si e com o todo. Está também relacionada com a capacidade de integrar modelos mentais que correspondam a essas estruturas.

Dada a importância da composição e decomposição para a estruturação espacial, mobilizamos a trajetória de aprendizagem para a composição de figuras tridimensionais (Quadro 1), proposta por Clements e Sarama (2014). Esta trajetória encontra-se organizada por faixas etárias e mostra uma progressão nos processos utilizados pelas crianças e no tipo de relações que vão estabelecendo.

Quadro 1. Trajetória para a composição de figuras 3D (Clements & Sarama, 2014)

1-1 ano Pré-compositor	Manipula peças individualmente, mas não as combina para compor uma figura maior.
1 ano Empilhador	Usa a relação espacial "sobre", mas a escolha de blocos não é consistente.
1 ano e meio Construtor de linhas	Usa a relação "a seguir a" para construir linhas de blocos.
1 ano Empilhador consistente Juntador de peças	Usa a relação sobre para empilhar blocos congruentes ou outros semelhantes que permitam construir uma linha ou uma coluna. Constrói componentes verticais ou horizontais, mas limitado a uma parede ou chão.
3-4 anos Construtor de figuras	Usa múltiplas relações espaciais, em várias direções e com vários pontos de contacto entre componentes, mostrando flexibilidade em integrar partes da estrutura. Produz arcos, recintos, cantos, cruzes, mas pode usar de forma pouco sistemática a tentativa e erro.
4-5 anos Compositor de formas	Compõe figuras com antecipação concebendo a forma tridimensional que irá ser produzida com a composição de duas ou mais figuras tridimensionais. Constrói de forma sistemática, arcos, esquinas, cruzes com vários blocos de altura.
5-6 anos Compositor de substituição e compositor de formas iterativo (3D)	Substitui uma parte composta por uma parte inteira congruente. Faz construções complexas como pontes com vários arcos, com rampas e escadas, nos extremos.
6-8 anos Compositor de formas com unidades de unidades	Constrói estruturas complexas, envolvendo vários níveis. As construções são semelhantes a construções de adultos.

Esta trajetória evidencia uma iniciação com a manipulação individual de peças, progredindo para o estabelecimento de relações entre peças cada vez mais complexas, passando da construção por tentativa e erro para uma construção com antecipação. Embora sendo referida por Clements e Sarama (2014) como um ponto de foco do currículo (Curriculum Focal Points), a decomposição de figuras tridimensionais não é contemplada, nesta trajetória, ao contrário do que acontece na trajetória sugerida pelos mesmos autores para figuras bidimensionais.

As peças utilizadas nesta trajetória parecem limitar-se ao uso de blocos unitários, nomeadamente prismas triangulares e paralelepípedos, onde cada peça corresponde a uma parte da construção. Neste caso, dado que cada peça corresponde a uma parte, a coordenação de peças poderá ser mais fácil do que no estudo de Battista e Clements (1996) em que são usados cubos.

Metodologia

O trabalho apresentado, neste artigo, insere-se numa investigação mais ampla, no âmbito de um doutoramento, em curso. Trata-se de uma investigação qualitativa que segue a modalidade de investigação baseada em design, onde se pretende aprofundar uma teoria cerca do processo de aprendizagem da estruturação espacial, relacionando-a com os meios pedagógicos desenhados que suportam essa aprendizagem (Gravemeijer & Cobb, 2006). A recolha de dados foi feita numa turma do 1.º ano do Ensino Básico (6-7 anos de idade) com 24 alunos, de uma escola de um concelho da área metropolitana de Lisboa. Destes 24 alunos foram selecionados quatro, Gil, Raquel, Maria e Dalila (nomes fictícios), para uma análise mais aprofundada, durante o trabalho autónomo, com o critério de serem alunos que têm facilidade em descrever os seus raciocínios. O trabalho destes alunos foi videogravado durante a resolução das tarefas, assim como de outros alunos, em momentos de discussão coletiva. As sessões foram estruturadas em três momentos: apresentação da tarefa, trabalho autónomo dos alunos, a pares ou individualmente, e discussão final coletiva. A investigadora selecionou e construiu as tarefas e colaborou com a professora da turma, na preparação da implementação, nos momentos de trabalho autónomo e nos momentos de discussão coletiva, embora fosse a professora quem conduzia o trabalho da turma.

Figura 1. Modelo de construção apresentado aos alunos.

Os dados apresentados, neste artigo, foram recolhidos durante a realização da tarefa 1 da terceira e última sequência de tarefas do ciclo 1 de investigação. A primeira sequência era incidente nas relações entre componentes e a segunda sequência nas relações entre o todo e os componentes. Esta terceira sequência procurava incidir nas relações entre componentes, compostos e o todo. A tarefa propunha aos alunos a reprodução de uma construção tridimensional com cubos a partir de um modelo tridimensional com cubos de encaixe, como a que está representada na Figura 1, que os alunos podiam manipular sem desmontar.

Selecionámos esta tarefa por considerarmos que esta oferece o potencial de levar os alunos a colocar em ação processos cognitivos complexos, no âmbito da estruturação

espacial, nomeadamente a coordenação de componentes, compostos e o todo e a integração de modelos mentais já construídos pelos alunos. São estes processos que nos interessam, neste estudo.

Para o quadro de análise (Quadro 2), organizámos o tipo de relações estabelecidas de acordo com a proposta de Battista e Clements (1996), associando-os à estruturação local ou à estruturação global, onde entendemos a identificação de unidades, estabelecimento de relações em compostos e estabelecimento de relações entre unidades, compostos e o todo como subníveis de progressão. Embora Battista e Clements (1996) não refiram a apreensão global, parece-nos que este quadro de análise deve contemplar este nível por reconhecermos que, inicialmente, as crianças reconhecem figuras pelo seu aspeto global. Por outro lado, a referência à construção por tentativa e erro ou por antecipação de Clements e Sarama (2014) parece-nos importante para completar o nosso quadro. Na trajetória destes autores, revemos também a progressão referente à estruturação espacial. Para um melhor entendimento dos processos associados aos subníveis, incluímos aspetos emergentes da própria análise dos dados que denominamos como Indicadores/estratégias.

Esta investigação respeita, entre outros critérios éticos, a confidencialidade e o consentimento informado dos participantes.

Quadro 2. Quadro de análise para os níveis de estruturação espacial.

Níveis	Subníveis	Indicadores/estratégias
Apreensão global	E0- Reconhecer pelo aspeto global	Considerar congruentes construções diferentes que apresentam um aspeto global semelhante.
Estruturação local	E1- Reconhecer componentes	Reconhecer componentes, mas sem estabelecimento de relações entre esses componentes.
		Construir utilizando unidades simples.
	E2- Estabelecer relações entre componentes	Descrever semelhanças entre partes da mesma figura ou entre figuras.
		Manter uma unidade composta e manipular apenas algumas partes da construção, por tentativa e erro.
		Manter uma unidade composta e manipular apenas algumas partes da construção, por antecipação.
	E3- Estabelecer relações entre compostos	Utilizar os movimentos de deslizar, rodar, e inverter com recurso a materiais manipuláveis para determinar a congruência entre duas construções.
		Coordenar diversas unidades compostas.
Estruturação global	E4- Estabelecer relações entre componentes, compostos e o todo por coordenação	Coordenar a posição e orientação de componentes e compostos para formar o todo.
	E5- Estabelecer relações entre componentes, compostos e o todo por integração	Rodar e refletir mentalmente construções. Construir por antecipação.

Resultados

Nesta secção, analisamos as estratégias utilizadas por Gil, Raquel e Dalila para reproduzir a figura, durante o trabalho autónomo e a estratégia de Gaspar e Frederico, apresentada durante a discussão final coletiva. Em cada subsecção, apresentamos e discutimos um tipo de estratégia diferente, considerando os processos associados a essa estratégia.

Construção a partir da extremidade e emergência de unidades compostas

Na Figura 2 vemos o percurso de Raquel que começa a reprodução da figura por uma das extremidades e vai progredindo na construção em escada até chegar ao centro, continuando em movimento descendente até à outra extremidade. A sua estratégia de construção parece basear-se, na fase inicial, no reconhecimento das relações entre os componentes (cubos) em que cada coluna adjacente apresenta mais um cubo do que a anterior.

Raquel mostra conseguir coordenar as diferentes vistas da construção. Nesta estratégia, a aluna parece seguir um caminho associado a uma escada já que vai construindo cada torre com mais um cubo que a torre anterior, conseguindo compreender em que ponto deve mudar a direção da construção iniciando depois o caminho descendente. Possivelmente, Raquel reconhece a simetria entre a parte ascendente e a parte descendente da construção. A coordenação de diferentes vistas e a contagem correta do número de cubos necessários evidenciam que Raquel é já capaz de coordenar componentes ou compostos.

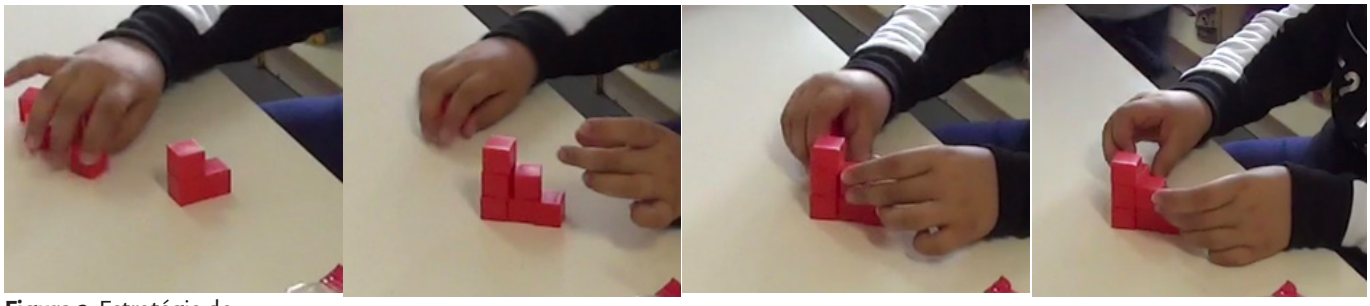


Figura 2. Estratégia de construção utilizada por Raquel.

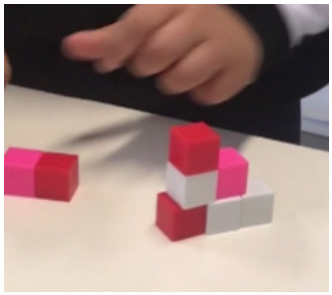


Figura 3. Estratégia apresentada por Raquel, não finalizada.

Durante a discussão coletiva, quando vai mostrar como pensou, Raquel parece apresentar uma estratégia diferente com base em três compostos: a torre central, o composto em ângulo reto da direita e outro composto igual à esquerda, que não consegue terminar, como se vê na Figura 3.

Nesta estratégia, Raquel indica a formação de três compostos que depois junta para formar a construção-modelo,

Raquel – Eu fiz primeiro esta. (*Mostra o composto do lado direito*). Depois fiz esta (*Coluna central que junta ao primeiro composto*) E depois fiz aquela igual à outra. (*Composto do lado esquerdo*).

Raquel não chega a concluir a construção do terceiro composto, como vemos na Figura 4, talvez por ter surgido alguma dúvida. Desmancha toda a construção e volta a construir com um percurso diferente, como é apresentado na Figura 4.

[1]Embora aresta seja um objeto matemático de dimensão linear, decidimos usar este termo para designar cada uma das partes tridimensionais que delimitam a estrutura da construção para sugerir a conceptualização do esqueleto da construção, por parte dos alunos, como se eles imaginassem essas partes como linhas estruturantes.

Desta vez, Raquel constrói as 'arestas'[1] da construção, colocando, por fim, os dois cubos para formar a escada. Depois de ter construído desta forma, Raquel consegue reconhecer os compostos que pretendia usar na primeira parte da estratégia. Neste momento, separa então o composto que não tinha conseguido formar e usa-o para terminar a explicação (Figura 5).

Embora, no início da tarefa, Raquel não pareça ter antecipado estes compostos e a relação entre eles, ao longo da exploração da tarefa, parece ser evidente que Raquel vai tomando consciência da estruturação da construção em três compostos já que inicia a sua intervenção na discussão fazendo uma referência explícita a esses compostos. A manipulação dos materiais e as relações que foi estabelecendo durante essa manipulação, nomeadamente a simetria entre as duas partes da construção, podem ter contribuído para que Raquel criasse uma forma de organização mental mais consistente para aquela construção. Ao longo da sua apresentação, Raquel parece ter sempre presente a forma de organização apresentada por si e visível na figura 5. Tal como a aluna conclui, no final da construção, quando mostra os três compostos separados que pretendia mostrar no início da sua explicação:

Raquel – Depois fiz a outra igual (*separa o composto, mostrando-o aos colegas*).

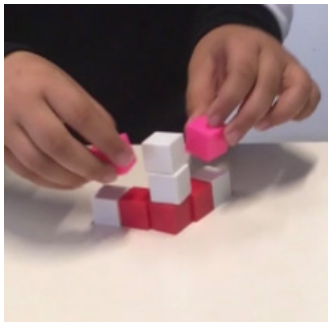


Figura 4. Estratégia apresentada por Raquel, em discussão coletiva (parte II).

Raquel parece assim iniciar a exploração da tarefa com uma estruturação local, em que relaciona os componentes (E2), mas as relações que vai estabelecendo a partir da manipulação dos materiais, levam-na a progredir para um nível que evidencia o estabelecimento de relações entre compostos (reconhecendo a congruência entre dois deles) e entre os compostos e o todo (E4).

Construção com rotação de um composto

A Figura 6 mostra a estratégia seguida por Dalila. Esta aluna começa por formar uma coluna correspondente à parte central da figura, construindo depois cada um dos lados, em disposição simétrica. Inicialmente, a aluna revela alguma hesitação na colocação dos cubos para formar o ângulo reto e, talvez por esse motivo, opte por, num primeiro momento, organizar a construção em linha reta.

Depois de ter concluído a colocação de todos os cubos, Dalila roda uma parte da construção para o centro de modo a que as duas partes da construção formem um ângulo reto.

Embora inicialmente Dalila não consiga coordenar as duas partes da construção para formar o ângulo reto, mesmo estabelecendo relações entre elas (E3), a aluna utiliza uma estratégia que envolve rodar um dos compostos. Com este movimento, Dalila evidencia coordenar os dois compostos da figura correspondentes às vistas (E4). Maria segue a mesma estratégia de Dalila.

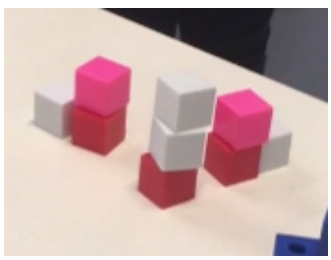


Figura 5. Decomposição apresentada por Raquel, em discussão coletiva.

Construção por faces

Gaspar e Frederico, no momento de discussão coletiva, apresentam aos colegas a sua estratégia de construção, mostrando que começaram por construir as 'arestas' de uma das partes da construção, completando-a e incluindo o composto central (Figura 7).

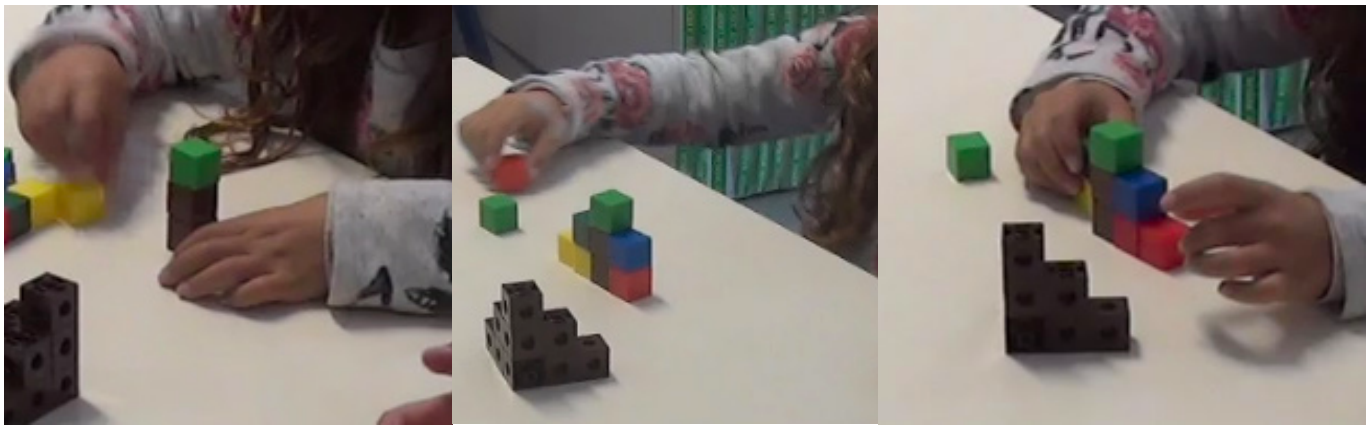


Figura 6. Estratégia utilizada por Dalila.

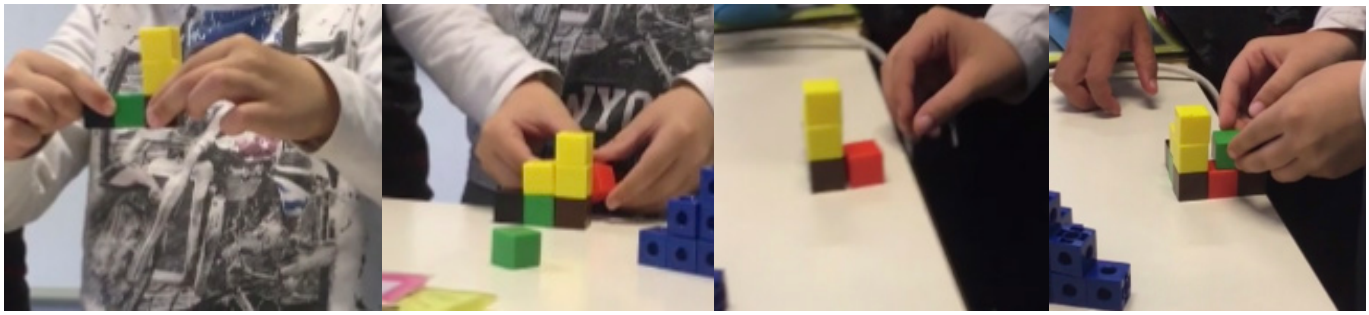


Figura 7. Estratégia apresentada por Gaspar e Frederico, em discussão coletiva.

Depois de concluída a construção desse lado, passaram para a construção do outro lado, respeitando o ângulo reto formado pelos dois compostos da construção.

Estes dois alunos parecem conseguir "ver", na figura, os limites da construção e, ao mesmo tempo, estruturar a figura em dois compostos correspondentes a duas vistas diferentes da construção. Embora não tenham conhecimento acerca dos tipos de ângulos, os alunos conseguem estabelecer uma relação entre os compostos correspondentes ao ângulo reto. Desta forma, os alunos parecem conseguir coordenar estas duas vistas, compreendendo que há uma parte comum aos dois lados, o composto central (E4).

Construção por camadas

A Figura 8 apresenta o percurso de Gil na reprodução da construção. O aluno começa por tirar oito cubos da caixa. Constrói a primeira camada colocando dois cubos que se tocam apenas por uma aresta. Gil parece identificar a presença de um ângulo formado pelas duas partes da construção e usa-o para iniciar a sua construção. De seguida coloca um cubo no canto, formando o ângulo reto com os dois cubos anteriores. Por fim, coloca os dois cubos das extremidades. Passa então para a construção da segunda camada usando o mesmo processo. No final, apercebe-se de que necessita de mais um cubo para a última camada e acrescenta-o.

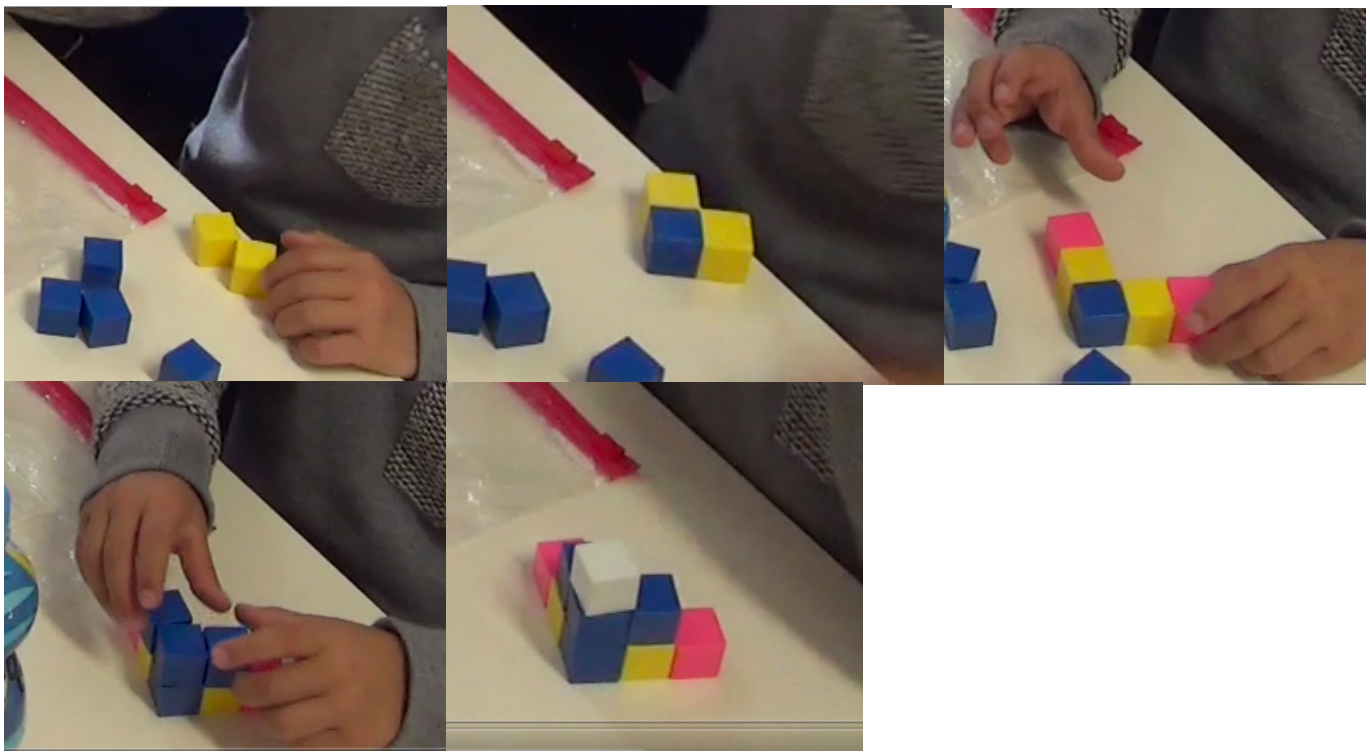


Figura 8. Estratégia de construção utilizada por Gil.

Gil evidencia uma estruturação global da construção, recorrendo às camadas como unidade composta. O aluno revela também uma boa coordenação das diferentes vistas da construção, o que é especialmente importante e necessário para construir o modelo assim como parece ter previamente um modelo mental que representa aquela construção (E5).

Conclusões

Podemos verificar que os alunos estabeleceram diferentes relações entre componentes, compostos e o todo, mas que nem sempre houve uma antecipação inicial. Ao longo da análise dos dados, percebemos que, embora as relações estabelecidas não tivessem todas o mesmo nível de sofisticação, os alunos utilizaram diferentes estratégias para reproduzir a figura apresentada, correspondendo a diferentes formas e níveis de estruturação.

Os alunos parecem reconhecer o cubo como unidade de construção, utilizando essa referência para determinar o número de cubos necessários. Nos casos apresentados, os alunos estabeleceram relações entre unidades, formando compostos entre os quais também foram sendo estabelecidas diferentes relações, nomeadamente construção por

camadas, combinação de compostos, por simetria, por rotação de um composto em função de outro e ainda por faces. Embora recorrendo a diferentes compostos e diferentes relações entre compostos, os alunos foram capazes de coordenar as diferentes vistas da construção, formando um ângulo reto, percebendo que a parte central é comum às duas vistas da construção. Em um dos casos é evidente a presença de um modelo mental prévio que integra os diferentes compostos. Estas estratégias evidenciam níveis de estruturação elevados respeitantes à estruturação global, tal como referido por Battista e Clements (1996).

O ato de refletir sobre a sua construção, no caso de Raquel, durante a manipulação dos materiais parece ter contribuído para a progressão entre níveis de estruturação espacial. Permitiu também o estabelecimento de relações dinâmicas entre compostos, nomeadamente ao rodar um composto em relação a outro composto. Permitiu ainda aos alunos a decomposição física da construção com base na antecipação mental e a sua recomposição, aprofundando a sua compreensão acerca desta construção, como foi o caso de Raquel.

Este trabalho vem assim acrescentar alguma informação relativamente à forma como os alunos decompõem figuras tridimensionais para depois as recomporem, aspeto omisso na trajetória de Clements e Sarama (2014), carecendo, no entanto, de uma investigação mais aprofundada.

Embora este artigo apresente como limitação a incidência na reprodução de apenas uma construção, é interessante perceber que alunos do 1.º ano do Ensino Básico foram capazes de evidenciar diferentes estratégias e também de coordenar diferentes vistas, associadas a compostos. Estes resultados mostram que um trabalho focado na estruturação espacial pode trazer resultados significativos na forma como os alunos compreendem as figuras tridimensionais, formando assim uma base para a compreensão de figuras mais complexas e, mais tarde, para noções como o volume, por exemplo.

De forma a aprofundar a investigação sobre as estratégias utilizadas pelos alunos na estruturação de figuras tridimensionais, pode ser interessante perceber de que forma varia o nível de estruturação dos alunos consoante o tipo de construção apresentada (nomeadamente se é ou não simétrica), como diferentes construções influenciam o tipo de estratégias usadas pelos alunos, e que aspetos considerar no tipo de construções apresentadas aos alunos.

Agradecimentos

Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia, através de uma bolsa concedida à primeira autora (SFRH/BD/130505/2017).

Referências bibliográficas

Battista, M. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. Lester (Ed), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843–909). Reston, VA: NCTM.

Battista, M. T. (2008). Development of the shape makers' geometry microworld. In G. W. Blume & M. K. Heid (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Cases and perspectives* (vol. *2*, pp. 131–156). Charlotte: Information Age.

Battista, M. T. (2012). *Cognition-based assessment & teaching of geometric shapes: Building on students' reasoning*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Battista, M.T., & Clements, D. (1996). Students' understanding of three-dimensional rectangular arrays of cubes. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(3), 258–292.

Battista, M., & Clements, D. H. (1998). Finding the number of cubes in rectangular cube buildings, *Teaching Children Mathematics*, *5*(1), 258–264.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2014). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. New York and London: Routledge.

Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). Design research from the learning design perspective. In T. Plomp & N. Nieveen (Eds.), *Educational design research* (pp. 72–113). Enschede, The Netherlands: Netherlands Institute for Curriculum Development (SLO).

Ministério da Educação (2018). *Aprendizagens essenciais. Matemática, 1.º ano*. Lisboa: DGE.

National Council of Teachers of Mathematics (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar* (2.ª ed.). Lisboa: Associação de Professores de Matemática. (Obra original em inglês publicada em 2000)

Shumway, J. F. (2013). Building bridges to Spatial Reasoning. *Teaching Children Mathematics*, *20*(1), 44–51.

Sinclair, N., & Bruce, C.D. (2015). New opportunities in geometry education at the primary school. *ZDM*, *47*(3), 319–329.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Buys, K. (2005). *Young Children Learn Measurement and Geometry*. TAL Project, Freudhental Institute, Utrecht University, National Institute for Curriculum Development.

Os aspetos emocionais e as causas atribuidas ao insucesso em matemática na perspetiva do aluno da educação técnica

Lucy Alcântara
IFMT
Universidade de Lisboa
lucy.alcantara@pdl.ifmt.edu.br

Susana Carreira
Universidade do ALgarve e UIDF, Instituto de Educação - Universidade de Lisboa
spcarreira@ualg.pt

Nélia Amado
Universidade do ALgarve e UIDF, Instituto de Educação - Universidade de Lisboa
namado@ualg.pt

Resumo.

O presente artigo apresenta alguns resultados prévios de um estudo exploratório qualitativo sobre as emoções e as atribuições causais do insucesso na disciplina de matemática na educação técnica. O objetivo da pesquisa consiste em compreender como as emoções expressas pelos alunos em situação de insucesso estão relacionadas com as causas que eles atribuem a essa situação. A pesquisa envolve alunos do 10.º ano em risco de insucesso que frequentam os cursos técnicos integrados no Instituto Federal do Mato Grosso, Brasil. Os dados foram obtidos através das vozes dos alunos, mediante a sua participação numa entrevista semiestruturada. Neste trabalho apresentamos a voz de um aluno que constitui um dos casos de estudo. A teoria da atribuição causal é inter-relacionada com o desenvolvimento de abordagens teóricas ao estudo das emoções no campo da educação matemática e permite analisar como os alunos explicam as suas situações de sucesso e insucesso escolar na perspetiva emocional e motivacional. Os resultados preliminares sinalizam a importância a dar a um conhecimento tão completo quanto possível do indivíduo e da forma como ele justifica e interpreta as causas dos seus fracassos, no intuito de identificar e prevenir situações geradoras de emoções negativas que acabam por reforçar o insucesso dos jovens em situação de risco.

Abstract.

This article presents some previous results of a qualitative exploratory study about the emotions and causal attributions of failure in the subject of mathematics in technical education. The aim of the research is to understand how the emotions expressed by the students in a situation of failure are related to the causes that they attribute to that situation. The research involves 10th grade students at risk of failure attending the technical integrated school in the Federal Institute of Mato Grosso, Brazil. The data were obtained through the voices of the students, by means of a semi-structured interview. In this work we present the voice of a student who is one of the case studies. The theory of causal attribution is interrelated with the development of theoretical approaches to the study of emotions in the field of mathematics education and allows us to analyse how students explain their success and failure situations from an emotional and motivational perspective. Preliminary results indicate the importance of getting a thorough knowledge of the student and of the way in which he justifies and interprets the causes of his failures in order to identify and prevent situations that generate negative emotions, which reinforce the failure of young people at risk.

Palavras-chave: Insucesso; matemática; atribuições causais; emoções; ensino técnico.

Introdução

A investigação mais recente em Educação Matemática tem vindo a privilegiar uma abordagem qualitativa ao estudo do insucesso, buscando, além da dimensão cognitiva, eleger a dimensão afetiva para tratar o problema do insucesso em Matemática (Amado & Carreira, 2018; Hernandez-Martinez & Pampaka, 2017; Evans, Morgan & Tsatsaroni, 2006). Para uma melhor compreensão do insucesso escolar é considerado fundamental caracterizar os sujeitos que vivenciam esse processo e delimitar os fatores que contribuem para explicar e prever o fenómeno (Miguel, Rijo & Lima, 2012). Quando focamos a atenção nos alunos, é claro que nem todos reagem da mesma maneira às situações que lhes são colocadas; alguns desenvolvem disfunções que limitam o seu aproveitamento escolar e em casos mais extremos adotam comportamentos de recusa total à escola (Mendonça, 2006). Daí a importância de dar atenção especial aos aspetos afetivos na aprendizagem da Matemática, já que alunos com dificuldades não apresentam, regra geral, motivação para a aprendizagem e/ou não se sentem capazes de aprender.

Contextualização e questões de pesquisa

A presente pesquisa desenvolve-se com alunos da educação técnica, no Brasil. Os Institutos Federais (IFs) oferecem aos jovens uma formação com a duração de três anos, que lhes permite obter uma qualificação profissional e, simultaneamente, concluir o ensino secundário e prosseguir estudos. A matriz curricular anual dos cursos técnicos é constituída, em média, por dezassete disciplinas, sendo doze da base nacional comum e cinco da base técnica, totalizando, em média, 36 aulas semanais. Nestes cursos, a disciplina de Matemática apresenta elevado insucesso no primeiro ano tendo como consequências a reprovação e o abandono. Com o objetivo de ajudar os alunos, a instituição disponibiliza três tipos de apoio: o nivelamento, em que a partir de um diagnóstico é desenvolvido um trabalho para preencher lacunas de conhecimentos matemáticos fundamentais; o horário de apoio do professor que permite um trabalho de reforço dos conteúdos desenvolvidos em sala de aula; e, ainda, a monitoria que é um programa que envolve alunos bolsistas com afinidade e/ou facilidade na disciplina, os quais auxiliam os alunos com dificuldades, em paralelo às aulas.

Com o objetivo de buscar formas de aumentar os índices de permanência e sucesso dos alunos nos IFs, a identificação dos alunos em risco de reprovação tornou-se uma prioridade. Isso implica saber mais sobre eles, não apenas no nível cognitivo, mas também no afetivo, particularmente no que diz respeito à matemática. Compreender o modo como os alunos se sentem e as emoções que experimentam em relação ao seu insucesso na educação técnica torna-se imprescindível para um conhecimento mais profundo e amplo do aluno em situação de risco, que permita obter pistas para novas abordagens de combate ao insucesso. Assim, este estudo tem como objetivo compreender como as emoções expressas pelos alunos em situação de insucesso em matemática estão relacionadas com as causas que eles atribuem a essa situação.

Quadro Teórico

Nas duas últimas décadas, na área da Educação Matemática, tem havido um crescimento significativo na quantidade de estudos empíricos que abordam uma gama de fenómenos emocionais, principalmente com foco em contextos educativos (Eligio, 2017). Mais precisamente, "há estudos que ligam emoções, como ansiedade e bloqueio, ao desempenho ou realização académica na disciplina de Matemática" (Cerda, Ruiz, Casas, del Rey & Pérez, 2016, p. 54).

Quando se procura compreender o insucesso na perspetiva do aluno, os traços pessoais são merecedores de particular atenção (Miguel, Rijo & Lima, 2012). Para tal, torna-se fundamental possibilitar aos alunos que falem sobre aquilo que para eles tenha sido marcante, em termos positivos ou negativos, como se relacionam com a disciplina e quais as causas que atribuem ao seu insucesso. Nessa lógica, evidenciamos a teoria da atribuição de causalidade como uma das abordagens de destaque no estudo das causas que o indivíduo atribui ao insucesso escolar (Weiner, 1979, 1985). A generalidade dos estudos conduzidos sob esta perspetiva assume que os alunos são capazes de produzir um quadro conceitual que lhes permite explicar as causas dos seus resultados e, em particular, dos seus fracassos na escola, do ponto de vista emocional e motivacional.

As atribuições causais do insucesso na perspetiva dos alunos

De acordo com a teoria da atribuição de Weiner (1979; 1985), um indivíduo empenha-se na busca causal após eventos de sucesso e insucesso, com o insucesso provocando geralmente uma maior busca das causas por parte do indivíduo. Relativamente às causas atribuídas pelos alunos para a ocorrência do insucesso, segundo Forsyth, Story, Kelley e McMillan (2009), estas parecem decorrer de um pensamento de natureza prática dos indivíduos e que pode resumir-se a duas grandes categorias de fatores: facilitadores e inibidores de sucesso. Assim, existe a possibilidade de colocar as causas do insucesso predominantemente em termos unidimensionais, sendo que as polaridades bom-mau ou elevado-fraco parecem enquadrar-se no leque de variação formado por fatores facilitadores e fatores inibidores. O esquema da Figura 1 ilustra esta forma de condensação das atribuições causais, além de indicar que as diversas atribuições não podem ser vistas como estando exclusivamente num dos pratos da balança.

Portanto, o pensamento atribucional pode "ser considerado um caso especial de um esquema organizado hierarquicamente, com um pequeno número de fatores ou dimensões globais que contêm um número relativamente maior de fatores causais mais específicos". Para os autores, "muitos desses fatores , como esforço, motivação e sorte, são influentes tanto na inibição quanto na facilitação do sucesso" (Forsyth, Story, Kelley & McMillan, 2009, p. 171).

O modelo proposto por Weiner (1979, 1985) para a classificação das causas do sucesso e insucesso apresenta três dimensões causais centrais: *locus*, estabilidade e controle. Em relação a eventuais causas de insucesso, os indivíduos podem acreditar que os resultados acontecem de uma de duas das formas: independente ou dependente de como eles se comportam. Isso está relacionado à dimensão da internalidade-externalidade

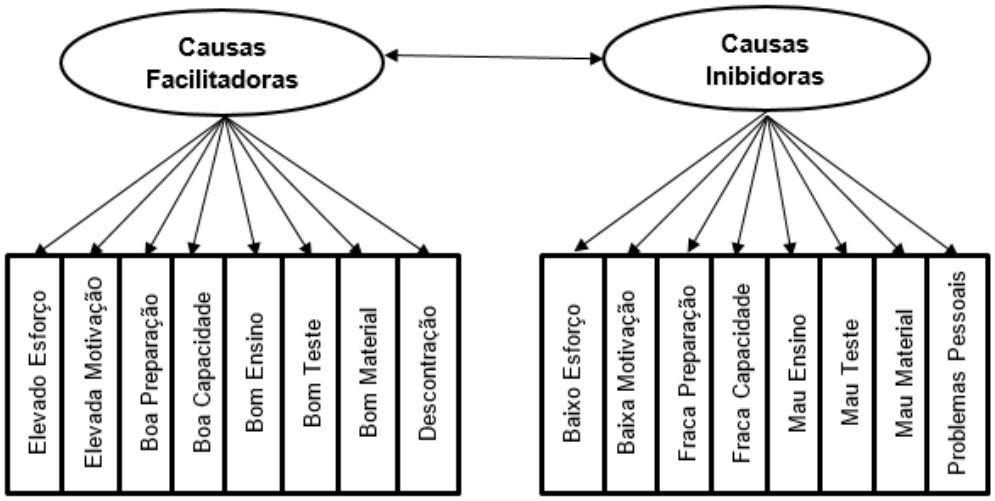


Figura 1. Modelo de atribuições causais (adaptado de Forsyth, Story, Kelley & McMillan, 2009)

das atribuições causais e é chamado de *locus* de causalidade (Weiner, 1985). Do ponto de vista do aluno, as causas pessoais ou internas incluem capacidade, esforço, humor, maturidade e saúde, enquanto as fontes externas de causalidade incluem professor, tarefa e família (Weiner, 1979).

Entre as causas internas, algumas flutuam, enquanto outras permanecem relativamente constantes. Weiner (1985) exemplificou a habilidade (ou aptidão) percebida como uma dimensão de causalidade constante; em contraste, outros fatores causais, incluindo esforço e humor, são percebidos como mais variáveis. Assim, a dimensão de estabilidade define as causas atribuídas em um *continuum* entre o estável e o instável (Weiner, 1979).

A dimensão de controle (ou controlabilidade) distingue se a atribuição é controlável ou incontrolável, seja pessoalmente ou externamente. Um indivíduo pode controlar seu esforço em uma tarefa; portanto, o esforço é uma causa controlável.

As dimensões discutidas por Weiner (1979, 1985) desempenham um papel crítico e mediador na determinação das consequências dos pensamentos causais, incluindo reações afetivas e emocionais, mudanças nas expetativas e no comportamento.

As emoções na perspetiva dos alunos sobre o insucesso

Weiner (1985) analisa algumas emoções e relaciona-as com as dimensões causais: a emoção do orgulho e os sentimentos de autoestima estão ligados à dimensão do locus; sentimentos de desesperança estão associados à dimensão da estabilidade; e raiva, gratidão, culpa, compaixão e vergonha estão todas ligadas à dimensão de controlabilidade.

As emoções de orgulho e autoestima positiva são experimentadas como uma consequência de atribuir um resultado positivo a si próprio, enquanto a autoestima negativa é vivenciada quando o sujeito atribuí a si mesmo um resultado negativo.

A culpa e a raiva são provocadas por causas controláveis, mas a culpa é dirigida para

dentro, enquanto a raiva é tipicamente (mas não necessariamente) dirigida para fora. Tanto a vergonha quanto a culpa envolvem auto avaliações negativas. Weiner (1985) relata alguns estudos que testam associações de vergonha-incontrolabilidade e controlabilidade-culpa. Na primeira associação, o insucesso é explicado em função de uma fraca capacidade, enquanto na segunda, o insucesso é atribuído à falta de esforço. Também foi documentado que as emoções relacionadas à vergonha provocam o aumento da inibição motivacional.

Para Weiner (1985), a desesperança e a resignação são provocadas perante a atribuição de um resultado negativo a causas estáveis. Ou seja, se o futuro é previsto permanecer tão ruim quanto o passado, então a desesperança é experimentada.

Ainda, no tocante às emoções, Neves e Carvalho (2006, p. 206) elencam as que podem ser consideradas desfavoráveis e favoráveis à aprendizagem. As desfavoráveis são "o medo e a confusão persistentes, o pressentimento, a resignação, a incerteza prolongada, a falta de autoconfiança (que leva à desistência e ao afastamento) e o aborrecimento". As favoráveis à aprendizagem são: "experiências de conforto, bom humor, sensação de divertimento e prazer, em articulação com o sentimento de desafio e persistência, estados de aceitação e ambição, mistério e curiosidade". Para as autoras a aversão dos alunos para com a matemática é, muitas vezes, resultado de "experiências infelizes precoces pois, como se sabe, as situações, pensamentos e ações de um indivíduo, que originam estados positivos, tendem a ser procurados e repetidos, enquanto que aqueles que geram estados negativos serão evitados" (p. 208).

O modo como as emoções podem refletir o insucesso escolar e, ao mesmo tempo, explicar esse insucesso parece ser um assunto ainda pouco explorado na investigação em torno da aprendizagem da matemática, mas podemos depreender que as emoções carregam a capacidade de mudar aspetos da vida mental do indivíduo, como a sua conceção e disposição (Hernandez-Martinez & Pampaka, 2017). Por isso, a pertinência em indagar como as emoções vivenciadas pelos alunos em insucesso nessa disciplina, se articulam com as atribuições causais inibidoras ou facilitadoras de sucesso e repercutem no seu comportamento, nos vários planos da sua realização.

Aspetos metodológicos

Neste trabalho apresentamos alguns resultados preliminares de uma pesquisa em desenvolvimento no âmbito do trabalho de doutoramento da primeira autora deste artigo. A investigação tem como participantes alunos matriculados no primeiro ano dos cursos técnicos integrados ao nível médio (10.º ano), no Campus Primavera do Leste do IFMT.

Considerando o objetivo do estudo, o trabalho desenvolvido apresenta-se como uma investigação de natureza qualitativa e desenvolve-se por meio de estudos de caso centrados em alunos que se encontram em situação de risco de reprovação na disciplina de Matemática.

Neste texto trazemos os dados relativos à primeira entrevista semiestruturada que teve como objetivos: i) estabelecer uma trajetória pessoal do aluno em relação à mate-

mática, desde o ensino fundamental até ao presente; ii) perceber a relação/adaptação com o curso técnico e a influência da matemática nessa relação; iii) e a relação pessoal com a matemática. A entrevista foi gravada em áudio e transcrita na íntegra.

Apresentamos o caso de um aluno, aqui referido como Filipe, com fraco rendimento escolar e em risco de reprovação na disciplina de Matemática, que revelou fortes emoções ao longo do período inicial de recolha de dados. Foi solicitada a autorização dos pais e da direção do campus para a participação e realização da investigação. Tendo presentes as normas éticas de proteção do anonimato, foi atribuído um nome fictício a este aluno.

A análise dos dados seguiu um processo indutivo, apoiado em quatro temas amplos, designadamente: i) o percurso escolar, ii) as emoções reveladas pelo aluno, iii) a sua participação na aula de matemática, e iv) a explicação do seu insucesso. Foram identificadas e confrontadas, em cada um dos temas, as emoções emergentes e as atribuições causais de insucesso.

O caso de Filipe

Filipe é um jovem franzino de 15 anos, muito educado, sorridente e prestativo. É um jovem tímido e de poucas palavras, manifestando uma gaguez moderada. Raramente frequenta os apoios à disciplina de Matemática, disponibilizados pela instituição (nivelamento, monitoria e apoio do professor).

Filipe descreve o seu percurso escolar

Filipe confessou que apesar das ligeiras dificuldades em matemática que foi sentindo no início da escolaridade, gostava desta disciplina no ensino fundamental. Demarca o sexto ano como o momento em que percebeu que o seu esforço era insuficiente para conseguir acompanhar a disciplina de Matemática, pois ele transitou abreviadamente para o sexto ano quando estava no início do quinto ano, em função do desfasamento entre a idade e a série que deveria estar frequentando. Filipe considera que esta situação foi prejudicial para si porque ficaram lacunas em conteúdos matemáticos trabalhados no quinto ano, agravando ainda mais as suas dificuldades na disciplina.

> No terceiro ano do fundamental eu tinha um pouquinho de dificuldade, passando o tempo eu fui gostando de matemática, (...), mas quando chegou no sexto ano começou a complicar, aí veio divisão, veio letras no meio das contas, ficou difícil! Mas mesmo assim eu fui tentando e cada vez foi ficando mais difícil, aí eu já tive que começar a me esforçar, mas até agora não está bom.

Filipe descreve-se como um aluno tímido que evita colocar dúvidas na aula de Matemática. Quando lhe foi pedido para relatar um acontecimento positivo na disciplina de Matemática no ensino fundamental, relatou:

> No quinto ano eu tive uma professora ótima que me ajudou muito. Com que eu mais entrosei. Eu sou um pouco tímido ... Aí, essa professora, eu fiquei muito aberto com ela. Acho que é falta de abertura, quando eu me abri com ela parece que a matemática fluiu.

Do mesmo modo, relatou uma experiência negativa que envolveu a professora do quarto ano.

Isso aí eu lembro muito! Foi quando a professora gritou comigo e falou que eu não conseguia entender nada e que eu era burro! Ela disse que eu nunca ia aprender matemática! Muitas vezes a professora ficava brava comigo, por isso eu me fechei mais um pouco com as professoras. Até hoje eu fico pensando: Será que eu sou burro mesmo? Será que eu nunca vou conseguir aprender?

As situações descritas por Filipe parecem ter afetado a sua relação com a disciplina de Matemática. Do ponto de vista emocional, a experiência negativa com a professora do quarto ano pode ter abalado a sua autoconfiança e talvez tenha sido o gatilho para instalar a dúvida sobre a sua capacidade de aprender matemática. Também o avanço acelerado para o sexto ano pode ter dificultado a aprendizagem de alguns conceitos matemáticos básicos que geraram complicações adicionais. Ambas as situações o afetam até ao presente e configuram-se como causas externas incontroláveis e inibidoras do seu sucesso. A experiência positiva com a professora do quinto ano facilitou pontualmente a sua relação com a matemática, mas não perdurou. Para Filipe, esta experiência aparece como algo que precisa ser resgatado, mas a sua timidez torna-se um fator impeditivo.

Filipe expressa suas emoções

Apesar da experiência positiva no 5.º ano, Filipe alega que posteriormente àquela professora continuou com dificuldades em comunicar-se com os demais professores. Expressa que tem medo e vergonha de falar alguma coisa errada em função do seu problema de gaguez. Ao manifestar a emoção da vergonha de perguntar, quando não entende, teme a censura dos colegas e/ou do professor e sugere um sentimento de inferioridade por ser visto como alguém que tem fraca capacidade. A vergonha e o medo são emoções que conduzem ao aumento da inibição motivacional.

Continuei tímido. Mesmo assim, eu ia de vez em quando falar com a professora algumas coisas que ela falava e eu me interessava. Depois disso, eu não falei mais nada.

Eu tenho um probleminha de gaguejar, eu tinha muita vergonha de errar, das pessoas rirem, algumas vezes eu tive grandes traumas de errar, e eu ficava com medo de errar.

Num tom de confidência, Filipe expressou a sua perceção em relação ao quanto a sua timidez o atrapalha e o quanto ele precisa de atenção e ajuda do professor. No seu discurso não se colocou na posição do sujeito da situação, pois usou a terceira pessoa na sua declaração, no entanto, fica claro o seu recado no que concerne às suas necessidades individuais que ele julga importantes para que se possa desenvolver na aprendizagem da disciplina. No seu entendimento, a sua timidez pode ser interpretada pelo professor como desinteresse. No caso de Filipe, a timidez pode ser considerada como uma causa interna e inibidora do sucesso, ao passo que a atenção especial do professor parece ser uma causa externa, incontrolável, mas facilitadora da sua aprendizagem matemática.

Mas o que eu quero falar para a professora é que quando você vir um aluno tímido, se foque nele, porque ele pode ter algum problema. Quando você vê uma pessoa tímida, ela fica sentada

e não conversa com as outras pessoas, ela tem algum problema. Tem alguns que não têm interesse mesmo! Mas às vezes algumas pessoas falam que é falta de interesse, mas na realidade elas se escondem.

Diante das situações adversas vivenciadas, no que se refere à sua aprendizagem em matemática, e dada a importância que atribui à disciplina, tanto para se desenvolver no curso quanto para o seu futuro, Filipe acaba por rejeitar a disciplina e demonstra no seu discurso emoções fortes de ódio e medo relativamente à matemática. A emoção do ódio está ligada à dimensão da controlabilidade. Esta emoção é manifestada quando ele percebe que não compreender a matemática poderá ser um fator impeditivo para a realização dos seus objetivos atuais e no futuro.

Acho, assim, que quando eu falo que eu odeio a matemática, é meio não querer odiar muito, mas eu odeio ainda! Porque a matemática é muito difícil e eu fico pensando: porque sempre tem que ter matemática? Uma coisa que me dificulta e muito! Por isso tem horas que eu falo assim: que é muito ruim a matemática e que eu odeio. Eu fico pensando: não só agora, mas no futuro também, como que eu vou crescer na vida se eu não sei matemática.

Na sua relação com a disciplina de matemática, Filipe manifesta um conjunto de emoções, como a timidez, o medo, a insegurança e o ódio. Estas emoções exercem um impacto negativo importante nos processos de envolvimento com a disciplina e configuram-se como inibidoras para a sua aprendizagem matemática.

Filipe na aula de matemática

Nas aulas de matemática, relativamente à resolução das atividades, Filipe relata que raramente consegue resolvê-las. Quando precisa da ajuda dos colegas na resolução, afirma que não se sente bem com essa situação. Conseguir resolver as atividades com a ajuda dos colegas não altera a sua sensação de incapacidade, já que fica convencido de que não as conseguiria fazer sozinho.

Quando eu olho na atividade eu vejo que é só um que eu sei fazer (risos). Algumas horas eu espero o professor corrigir ou peço ajuda para os meus colegas, e assim vai. Mas acho ruim, porque eu não consegui fazer sozinho.

Uma outra situação que envolve a resolução de tarefas são os trabalhos de casa. Filipe sente-se muito desanimado diante da sua resolução, pois considera que não tem capacidade para os resolver, o que o leva a ignorá-los. Esta atitude pode ser um claro indicador de desmotivação diante da disciplina.

Eu olho e penso: Acho que não vou dar conta de fazer, não. Aí eu tento fazer, (...) tem hora que eu esqueço de fazer, porque o professor passa e depois na outra semana tem outra atividade e eu penso que preciso fazer e esqueço. Aí, ele vai passando e eu vou esquecendo, isso que me deixa com raiva. Aí, eu me sinto muito ruim porque eu não consegui fazer, podia ter pelo menos tentado (...). Por isso é que eu falo que eu sou ruim em matemática.

Além disso, o fato de se esquecer de realizar os trabalhos pedidos provoca a culpa e a raiva por não ter tentado. A culpa e a raiva são provocadas por causas controláveis e envolvem autoavaliações negativas. Nesse caso, o insucesso é atribuído pelo aluno à sua própria falta de esforço.

Em relação aos comentários dos colegas da turma, acerca das suas dificuldades, Fi-

lipe declara-se ressentido e magoado. A alta censura dos colegas reforça a sua baixa segurança emocional no ambiente de sala de aula.

Falam assim: não sei para que você vem ainda para a escola, você já vai reprovar mesmo! Você é um reprovado, é burro e não aprende nada! Eu já estou acostumado com isso... todo mundo fala isso para mim. Mas eu penso: Poxa, cara, se eu reprovar ... eu não reprovei ainda, eu vou tentar, vai que eu consigo.

No entanto, reconhece que nem todos os colegas têm este tipo de comportamentos reprovadores. Filipe também conta com um grupo de amigos que o tentam apoiar e estimular através de encorajamento e incentivo.

Tem o nosso grupinho. Tipo assim só o nosso pessoal, são nossos amigos mesmo, sérios e falam: Moço, você não liga para isso, não, ainda tem a prova final e você consegue!

Em relação ao ambiente da sala de aula, Filipe revela sentir vergonha de se expor, de colocar as suas dúvidas, expressando algumas emoções negativas, como a vergonha, o desânimo, a culpa e a raiva. Essas emoções surgem como o reflexo de situações marcadas, em especial, pela circunstância de não conseguir envolver-se nas tarefas de aprendizagem. Neste ambiente, sente-se desmotivado e com fraca capacidade. A censura dos seus colegas parece, por seu turno, reforçar a sua baixa segurança emocional.

Filipe explica o seu insucesso

Para Filipe, as suas dificuldades na disciplina de Matemática, expressas através dos resultados negativos das notas obtidas no decorrer do curso, repercutem-se emocionalmente de modo negativo, geram descontentamento e frustração e refletem o seu insucesso.

Acho que foram os resultados das provas. O professor mandava eu justificar e eu não sabia como justificar, eu sabia fazer as contas, mas não sabia justificar. Aí, eu pensava: Vige! E agora? Aí, os resultados sempre me deixavam descontente.

Além dos obstáculos que resultam da dificuldade em compreender os conteúdos matemáticos, e concretamente o não saber explicar os cálculos que é capaz de executar, Filipe aponta também a dificuldade em concentrar-se devido ao barulho que existe na sala de aula. Estas causas que encontra para o seu insucesso são claramente externas pois Filipe parece não ter qualquer controlo sobre as mesmas.

Concentrar é um problema, né? Porque a minha sala é muito barulhenta e também, mesmo eu me concentrando, não consigo, assim, fluir a matemática na cabeça, parece que é mais difícil, sei lá, não entra!

Filipe considera que podia empenhar-se mais na disciplina de matemática, nomeadamente dedicando mais tempo ao estudo, embora reconheça que o tempo dedicado a esta disciplina é superior ao que gasta nas demais. Apesar de reconhecer a importância do conhecimento matemático, Filipe não se sente motivado para estudar matemática. Esta falta de motivação e de empenhamento para a aprendizagem da matemática é uma causa interna ao próprio aluno e sobre a qual ele pode exercer algum controlo, ainda que mostre que tal controlo não é total, pois outras exigências escolares competem

com a necessidade de se esforçar em matemática.

> O meu esforço é um pouco mediano, eu vejo que não consigo me esforçar muito, porque tem as outras disciplinas que eu tenho que me esforçar também. Eu dou a metade [do tempo] para a matemática (...) porque eu vejo que sem ela não dá. Mesmo me dedicando, o resultado é ruim.

Filipe atribui o seu insucesso em matemática a causas bastante diversas, algumas internas e controláveis, como a timidez e o esforço reduzido, outras externas e incontroláveis, como o resultado negativo das suas classificações na disciplina, em função da exigência dos conteúdos, e a falta de concentração na aula por causa do barulho dos colegas. Claramente, todas estas situações reforçam em Filipe a perceção da sua elevada dificuldade, fraca motivação e fraca capacidade.

Resultados e conclusões

Relativamente ao objetivo do estudo, com base na teoria atribucional e na sua relação com o conceito de emoção, através da voz de Filipe, buscamos as emoções reveladas e a relação com as causas por ele atribuídas, que se configuram em causas inibidoras ou facilitadoras do seu insucesso. Quando analisadas em conjunto, os resultados apontam que as causas facilitadoras utilizadas por Filipe para explicar o seu sucesso, podem ser percebidas como externas e incontroláveis e promotoras de emoções positivas. Do mesmo modo, as causas inibidoras, na sua maioria, podem ser externas e incontroláveis, mas geradoras de emoções negativas. Em relação à dimensão da controlabilidade, as causas atribuídas para o seu insucesso, podem ser consideradas incontroláveis, com exceção da "falta de concentração" e do "esforço reduzido". Quanto à dimensão da estabilidade, a maioria pode ser considerada como estável. De acordo com a teoria de Weiner (1979, 1985), as dimensões presentes nas causas são as maiores responsáveis pelos aspetos motivacionais. Elas acabam gerando consequências importantes em dois aspetos psicológicos da motivação do aluno: expetativas e emoções. Ao relacionar as causas com as emoções, influenciadas pelas dimensões causais, é possível perceber de que modo elas influenciam o envolvimento e o comportamento de Filipe (Ver quadro 1). A quantidade de causas inibidoras supera claramente as facilitadoras, denotando, no caso em estudo, um quadro conducente ao insucesso.

A partir desses resultados prévios e observando as relações estabelecidas entre as atribuições causais e as emoções, destacamos a importância a dar a um conhecimento tão completo quanto possível do indivíduo e da forma como ele justifica e interpreta os motivos dos seus fracassos, de modo a identificar e prevenir sensações e situações geradoras de emoções negativas que acabam por reforçar o insucesso dos jovens em situação de risco.

Causas Facilitadoras (CF)	Emoções (E)	Relação entre (CF) e (E)
Professora do 5º ano	Experiência de conforto e satisfação	Melhorou a aprendizagem
Apoio dos colegas	Experiência de conforto, prazer e esperança	Sente-se apoiado e motivado
Causas Inibidoras (CI)	**Emoções (E)**	**Relação entre (CI) e (E)**
Professora do 4º ano	Medo e ansiedade	Baixa autoconfiança e fraca capacidade
Passagem abreviada para o sexto ano	Insegurança e confusão persistente	Fraca preparação e fraca capacidade
Gaguez	Vergonha e medo	Baixa segurança emocional
Falta da atenção do professor	Vergonha, medo, incerteza prolongada, insegurança	Fraca preparação e sensação de ficar perdido
A importância da matemática	Ódio, medo e mau pressentimento	Dificuldade elevada e incertezas quanto ao futuro
Complexidade dos conteúdos	Ansiedade, confusão persistente, insegurança e medo	Elevada dificuldade e fraca preparação
Falta de concentração	Ansiedade, insegurança e desesperança	Mesmo se concentrando não consegue assimilar o conteúdo
Sala de aula tumultuada	Confusão persistente e raiva	O barulho ajuda a reforçar a sua dificuldade
Esforço reduzido	Culpa, confusão persistente, desânimo e raiva	Não se sente motivado para estudar
Precisar da ajuda dos colegas	Incerteza, aborrecimento e desmotivação	Percebe a sua fraca preparação e baixa competência
Censura dos colegas	Resignação, vergonha, mágoa e desânimo	Sente-se inferior, com baixa capacidade, baixa segurança e aumento da inibição motivacional

Quadro 1. Síntese da relação entre as causas atribuídas do insucesso e as emoções emergentes na voz de Filipe

Referências

Amado, N. & Carreira, S. (2018). Students' attitudes in a mathematical problem solving competition. In N. Amado, S. Carreira, & K. Jones (Eds.), B*roadening the Scope of Research on Mathematical Problem Solving — A Focus on Technology, Creativity and Affect.* (Research in Mathematics Education). Cham: Springer.

Cerda, G., Ruiz, R. O., Casas, J. A., del Rey, R. & Pérez, C. (2016). Predisposición desfavorable hacia el aprendizaje de las Matemáticas: uma propuesta para su medición. *Estudios Pedagógicos XLII* (1), 53–63.

Eligio, U. X. (2017). An overview of the growth and trends of current research on emotions and mathematics. In U. X. Eligio (Ed.). *Understanding Emotions in Mathematical Thinking and Learning*. (pp. 3–41). India: Elsevier.

Evans, J., Morgan, C., & Tsatsaroni, A. (2006). Discursive positioning and emotion in school mathematics practices. *Educational Studies in Mathematics*, 63(2). pp. 209–226.

Forsyth, D., Story, P, Kelley, K., & McMillan, J. (2009). What causes failures and success? Students' perceptions of their academic outcomes. *Social Psychology Education*, 12, 157–174.

Hernandez-Martinez, P., & Pampaka, M. (2017). "I did use to like maths …": emotional Changes toward mathematics during secondary school education. In U. X. Eligio (Ed.). *Understanding Emotions in Mathematical Thinking and Learning.* (pp. 3–41). India: Elsevier.

Miguel, R. R., Rijo, D. & Lima, L. N. (2012). Fatores de risco para o insucesso escolar: A relevância das variáveis psicológicas e comportamentais dos alunos. *Revista Portuguesa de Pedagogia*, 46(1), 127–143.

Mendonça, A. M. F. (2006). *A problemática do insucesso escolar: A escolaridade obrigatória no Arquipélago da Madeira em Finais do Século XX (1994–2000)*. (Tese de Doutoramento). Universidade da Madeira, Portugal.

Neves, M. C. & Carvalho, C. (2006). A importância da afectividade na aprendizagem da matemática em contexto escolar: um estudo de caso com alunos do 8º ano. *Análise Psicológica*, 2, 201–215.

Weiner, B. (1979). A theory of motivation for some classroom experiences. *Journal of Educational Psychology*, 71(1), 3–25.

Weiner, B. (1985). An attributional theory of achievement, motivation and emotion. *Psychological Review*, 92(4), 548–573.

Processos de raciocínio matemático evidenciados por alunos de 3.º ano de escolaridade na realização de uma sequência de tarefas

Eliane Maria de Oliveira Araman

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
eliane.araman@gmail.com

Maria de Lurdes Serrazina

Escola Superior de Educação de Lisboa, UIDEF,
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
lurdess@eselx.ipl.pt

Resumo.

Este artigo tem como objetivo analisar processos de raciocínio matemático evidenciados por dois pares de alunos do 3.º ano de escolaridade de uma escola pública da periferia de Lisboa ao resolverem uma sequência de três tarefas exploratórias. O estudo insere-se num projeto mais amplo que utiliza uma metodologia de investigação baseada em design. Os dados foram recolhidos por observação participante apoiada por gravação em vídeo dos pares ao realizarem as tarefas, bem como dos registos escritos dos alunos da resolução das tarefas. O processo de análise evidenciou indícios de raciocínio matemático sustentado pelos processos de formular conjeturas, generalizar, validar e justificar.

Abstract.

This paper aims to analyze processes of mathematical reasoning evidenced by two pairs of third grade students of a public school in the periphery of Lisbon when solving a sequence of three exploratory tasks. The study is part of a larger project that uses design research. The data were collected by participant observation supported by video recording of the pairs when they performed the tasks and the students' written records of the tasks solving. The analysis process showed evidence of mathematical reasoning supported by the processes of formulating conjectures, generalizing, validating and justifying.

Palavras-chave: Raciocínio matemático; processos de raciocínio; 3º ano.

Introdução

O desenvolvimento do raciocínio matemático é considerado um dos grandes objetivos do ensino da Matemática, tanto em termos nacionais (Mata-Pereira & Ponte, 2018), como internacionais (Jeannotte & Kieran, 2017; Stylianides, 2009). As orientações curriculares internacionais assim o preconizam (NCTM, 2017). Justifica-se assim a pertinência deste estudo centrado no desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos.

Este artigo, que se insere em um projeto mais amplo, tem como objetivo analisar processos de raciocínio matemático evidenciados por dois pares de alunos do 3º ano de escolaridade ao resolverem uma sequência de três tarefas exploratórias, inseridas numa cadeia de tarefas.

Raciocínio Matemático

Apesar de haver consenso entre os pesquisadores sobre a importância do raciocínio matemático, o mesmo não ocorre em relação à caracterização do mesmo. "O raciocínio matemático é reconhecido como fundamental por numerosos autores, que sublinham uma variedade de aspectos" (Ponte, Mata-Pereira & Henriques, 2012, p. 357). Jeannotte e Kieran (2017) comentam que, na comunidade de pesquisadores, o discurso sobre o raciocínio matemático é constituído de múltiplas visões, que confrontam umas às outras. De acordo com estas autoras, tal polissemia dificulta comparações não apenas das diversas abordagens e caracterizações do raciocínio matemático, mas também dos resultados dos estudos sobre ele. Definem raciocínio matemático "como um processo de comunicação com outros ou consigo mesmo que permite inferir enunciados matemáticos a partir de outros enunciados matemáticos" (Jeannotte & Kieran, 2017, p. 7). Esta definição converge com a de Stylianides (2009) que considera o processo de inferência como o que utiliza informação matemática já conhecida para obter novo conhecimento ou novas conclusões.

Uma definição semelhante é encontrada em Mata-Pereira e Ponte (2018), que assumem raciocinar matematicamente como fazer inferências justificadas, ou seja, "utilizar informação já conhecida para obter, justificadamente, novas conclusões" (Mata-Pereira & Ponte; 2018, p. 782). Em outro trabalho, indicam que "os processos de raciocínio matemático incluem formular questões e estratégias de resolução, formular e testar generalizações e outras conjeturas e justificá-las" (Mata-Pereira & Ponte, 2017, p. 2). Lannin, Ellis e Elliot (2011) compreendem o raciocínio matemático como o processo conjunto de conjeturar, generalizar, investigar porquê, argumentar e refutar se necessário.

Jeannotte e Kieran (2017), por sua vez, identificaram também dois aspectos do raciocínio matemático: o estrutural e o de processo. As formas mais citadas do aspecto estrutural são a dedução, a indução e a abdução, enquanto no aspecto de processo identificaram nove processos distintos que emergiram da literatura, dentre os quais

Tabela 1. Processos de raciocínio e respetivos indicadores (baseado em Mata-Pereira & Ponte, 2017, 2018; Jeannotte & Kieran, 2017; Morais et al., 2018)

Processos de Raciocínio	Indicadores
Generalizar	Identifica semelhanças entre os casos e aplica um conhecimento ou procedimento que satisfaz todos os casos semelhantes.
Conjeturar	Elabora uma estratégia de resolução definindo um procedimento a ser usado que tem o valor epistêmico de provável ou possível.
Validar	Recorre a dados ou informações que permitem conferir se um procedimento é válido ou não, permitindo sua aceitação ou refutação.
Justificar	Além de apresentar um procedimento, apresenta motivos para alterar o valor epistêmico de uma narrativa, justificando por que de ser válido ou não.

estão generalizar, conjecturar, justificar e provar (Jeannotte & Kieran, 2017). Segundo as autoras, os aspectos estrutural e de processo são dois modos de olhar para o raciocínio matemático, mas que se relacionam, já que as "estruturas são parte do aspecto de processo do raciocínio matemático e os processos contribuem para a construção dessas estruturas" (p. 7). O raciocínio dedutivo, por exemplo, relaciona-se com os processos de justificação, prova e prova formal, diferença que discutiremos adiante. O raciocínio indutivo está ligado ao processo de generalização, enquanto o raciocínio abdutivo relaciona-se, principalmente, com os processos de generalizar e conjecturar.

De acordo com Ponte et al. (2012), o raciocínio indutivo é aquele por meio do qual se elaboram conjeturas a serem verificadas posteriormente. Diferentemente do raciocínio dedutivo, o indutivo não conduz necessariamente a conclusões válidas, mas é importante para a criação de novo conhecimento. Já o abdutivo consiste em formular hipóteses razoáveis sobre determinado fenómeno. O raciocínio abdutivo, assim como o indutivo, não conduz necessariamente a uma afirmação válida (Mata-Pereira & Ponte, 2018). Assim, raciocinar matematicamente não se limita apenas ao raciocínio lógico e dedutivo, mas envolve também processos intuitivos, formulação de ideias e validação de afirmações (Jeannotte & Kieran, 2017).

Tendo em consideração as especificidades no desenvolvimento do raciocínio neste nível de escolaridade, bem como as definições dos processos de raciocínio apresentadas pelos vários autores, apresentamos na tabela 1 uma síntese do que levamos em consideração nas resoluções e diálogos dos alunos que nos permitiu identificar a presença das ações de generalizar, conjeturar, justificar e validar.

Metodologia

Esta investigação segue uma abordagem qualitativa com caráter interpretativo. Insere-se num projeto mais amplo que utiliza uma metodologia de investigação baseada em design (Ponte, Carvalho, Mata-Pereira & Quaresma, 2016).

O presente estudo analisou os processos de raciocínio evidenciados por dois pares de alunos do 3º ano de escolaridade ao realizarem uma sequência de três tarefas matemáticas, inseridas numa cadeia composta por sete tarefas cujo objetivo era o de desenvolver a flexibilidade de cálculo em problemas de multiplicação. Os alunos foram escolhidos, por indicação da professora, dada a sua capacidade de comunicação, nomeadamente de expressar o seu pensamento durante o trabalho autónomo. A aula analisada foi realizada em janeiro de 2016 numa turma de uma escola pública da periferia de Lisboa, composta por 26 alunos, cujos nomes foram alterados para garantir a confidencialidade. Os dados foram recolhidos através da observação participante das investigadoras, apoiada pelas gravações áudio/vídeo, que foram posteriormente transcritas. Foram também áudio-gravadas as interações entre os dois pares de alunos durante o trabalho autónomo. Foram ainda recolhidos os registos escritos dos alunos. A sequência de três tarefas desenvolvida na aula denominada *Mais do que Dez vezes Dois e Dez vezes Cinco* apresenta características exploratórias. Os alunos estavam organizados a pares o que permitiu a interação entre eles e cuja análise é o foco do presente artigo. Analisamos os processos de raciocínio evidenciados pelos pares Marta e Agnaldo e Mónica e Bento, durante o trabalho autónomo, tendo em conta os processos de raciocínio indicados na Tabela 1.

Resultados

Os resultados estão organizados de acordo com a sequência de tarefas (Tarefa 1, Tarefa 2 e Tarefa 3[1]).

[1] Do lado esquerdo registo da Mónica, do lado direito do Bento.

Tarefa 1

Na introdução desta tarefa (Figura1), após ter sido distribuída aos alunos, a professora pede a um deles para a ler em voz alta e faz uma breve explicação, destacando seu objetivo, estabelecer maneiras (estratégias) de resolução. Em seguida, os alunos começam a fazer a tarefa.

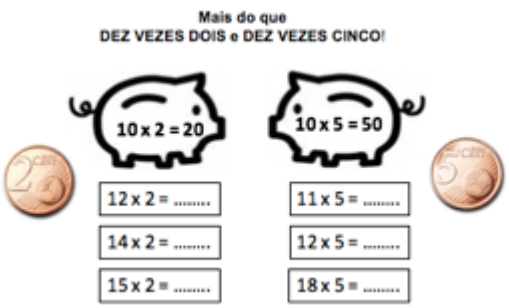


Figura 1. Tarefa Mais do que dez vezes dois e dez vezes cinco.

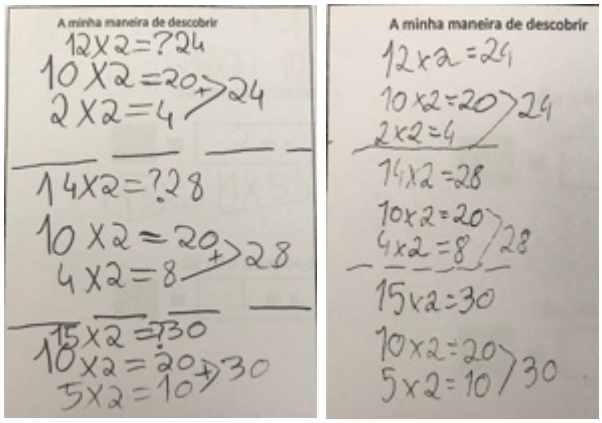


Figura 2: Registos de Marta e Agnaldo[2] - 1ª parte tarefa 1.

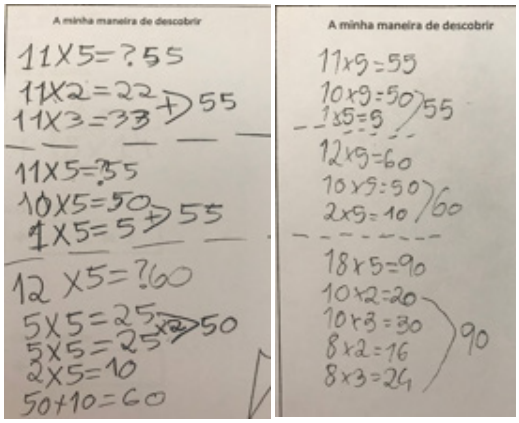


Figura 3. Registos de Marta e Agnaldo – 2ª parte tarefa1.

2 Do lado esquerdo registo da Marta, do lado direito do Agnaldo.

Par 1

Marta dirige-se a Agnaldo, afirmando que já tem uma estratégia.

Marta: 12 vezes 2 é fácil. Vamos olhar minha estratégia. 10 vezes 2, 2 vezes 2 [regista o resultado 24]. 10 vezes 2 igual a 20, 4 vezes 2 igual a 8, igual a 28.

Marta utiliza conhecimentos que já possui, no caso, a decomposição dos números nas ordens no multiplicando. Segue esta estratégia para obter os demais resultados. Além disso, Marta descreve o procedimento que utilizou. Agnaldo faz os três produtos seguindo este mesmo procedimento (Figura 2).

Ambos continuam a resolução (Figura 3). Agnaldo regista $10 \times 5 = 50$, $1 \times 5 = 5$, cuja soma dá 55, ainda com a mesma estratégia. Marta opta por uma estratégia diferente, decompondo o multiplicador (ambos utilizam a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição).

Marta: Vou fazer 11 vezes 5. Agnaldo, vou fazer, olha minha estratégia aqui. 11 vezes 2, 11 vezes 3. Tu não fizeste essa estratégia [indica a folha de Agnaldo].

Agnaldo: Vou fazer no 18 vezes 5.

Marta faz o produto 12×5 para a qual utiliza novamente a estratégia de decomposição do multiplicando: $5 \times 5 = 25$; $5 \times 5 = 25$; $2 \times 5 = 10$; $25 + 25 = 50$; $50 + 10 = 60$. Agnaldo faz a resolução para o 18 vezes 5, adotando também a estratégia da decomposição, só que a aplica tanto no multiplicando quanto no multiplicador, evidenciando recorrer a conhecimentos anteriores.

Agnaldo: Olha minha estratégia, olha. [mostra a folha para Marta com o seguinte registo: $10 \times 2 = 20$; $10 \times 3 = 30$; $8 \times 2 = 16$; $8 \times 3 = 24$, cuja soma assinala como 90].

Par 2

Mónica e Bento recorrem à decomposição, optando Mónica por decompor o multiplicando e Bento, o multiplicador (Figura 4).

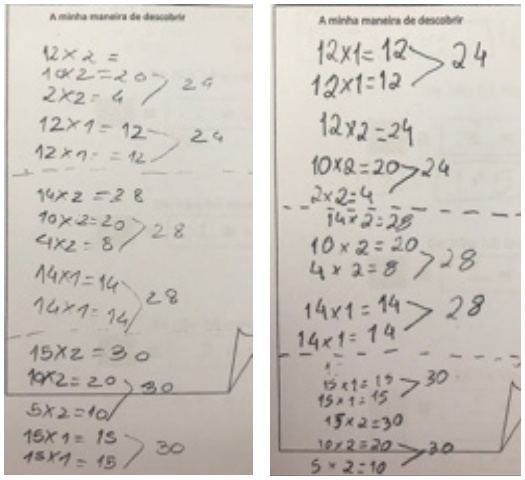


Figura 4. Registos de Mónica e Bento[3] – 1ª parte tarefa 1.

[3] Do lado esquerdo registo da Mónica, do lado direito do Bento.

Mónica: Vamos começar então. 12 vezes 2; 10 vezes 2 igual a 20, 2 vezes 2 igual a 4. Vamos olhar minha estratégia. 24 [regista na folha].

Bento: Minha estratégia é 12 vezes 1 igual a 12; 12 vezes 1 igual a 12 [regista na folha com a soma 24].

Mónica: Vamos fazer essas duas. Deixa eu ver essa.

[Cada um regista a estratégia feita pelo outro].

Seguem para o segundo produto, novamente recorrendo à estratégia da decomposição do multiplicando ou do multiplicador.

Mónica: A primeira já fizemos, vamos à segunda. 14 vezes 2. 10 vezes o 2 é igual a 20; 4 vezes 2 é igual a 8 que é igual a 28 [faz o registo enquanto fala]. Já está. Agora vamos fazer a próxima conta, que é 14 vezes o 1 que é igual a 14; 14 vezes o 1 que é igual a catorze [regista o resultado 28].

Bento regista as mesmas estratégias.

Mónica: Agora vamos fazer o 30 [referindo-se ao resultado de 15×2]. Tu também tens que fazer a do 15 [indica a folha de Bento] que é igual a 30.

Bento: Espera aí [ele está a finalizar alguns registos]. Pronto! 15 vezes 1 é igual a 15; 15 vezes 1 que é igual a 15, é igual a 30 [regista enquanto fala].

Marta: 30. Já fiz. [regista $10 \times 2 = 20$; $5 \times 2 = 10$, indicando a soma 30].

Iniciam as multiplicações por 5. As estratégias usadas por eles continuam as mesmas, só que agora apenas decompõem o multiplicando.

Ambos os pares identificaram semelhanças entre os casos, ou seja, todas as operações envolviam a multiplicação de um número composto por dezenas e unidades por outro composto apenas por unidades. Diante disso, escolhem um procedimento que, ao ser utilizado com sucesso em uma das operações, é estendido às demais, num processo de generalização.

Figura 5. Tarefa 13 cêntimos com moedas de 1 cent, 2 cents e 5 cents.

Tarefa 2:

A professora solicita que um aluno leia a tarefa. Em seguida faz uma breve explicação, salientando que o objetivo da Tarefa 2 (Figura 5) é descobrir as maneiras diferentes de se formar os 13 cêntimos. Nesse momento, um dos alunos questiona se podem sobrar cêntimos, a professora esclarece que não. Os alunos começam a resolver.

Par 1

Tendo como referência a tarefa anterior, Marta e Agnaldo resolvem rapidamente, sem muitos questionamentos (Figura 6).

Marta: Então 10 [indicando 2×5]; 12 [indicando $1 \times 2 = 2$ que somado ao 10, dá 12]; então aqui também é 1. 1, 1 e 2 [faz o registo].

Começam a tentar a segunda maneira de obter 13 cêntimos.

Marta: 5 vezes 2 igual a 10. 1 vezes 5?

Agnaldo: 1 vezes 5 [ambos registam]. Faltam 8. 2 vezes 2...

Marta: 4 [ambos anotam 2 x 2 na folha].

Agnaldo: Então temos 4, então 1 X 4 [fazem o registo].

Marta: Acho que tem uma terceira maneira [e começa a anotar $1 \times 5 + 3 \times 2 + 2 \times 1$]. Também dá.

Agnaldo: Como?

Marta: 5 mais 6, 11, com 2, 13 [indica com o lápis cada operação para Agnaldo]. Esse exercício dá de três maneiras.

Agnaldo anota em sua folha.

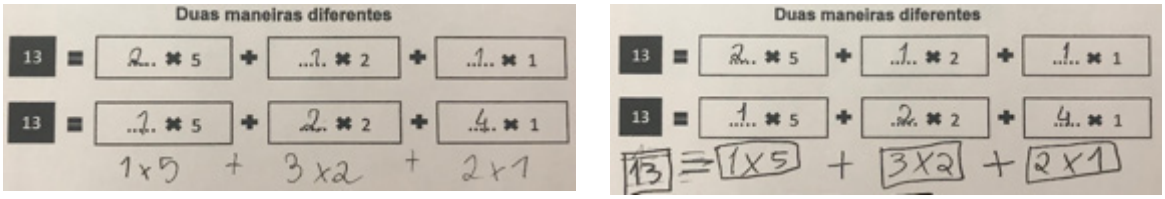


Figura 6. Registos de Marta e Agnaldo 1ª parte tarefa 2.

Após estabelecer a primeira maneira, Marta percebe que a opção de duas moedas de 2 cêntimos (2×5) não é mais válida, então indaga Agnaldo da possibilidade de iniciar com 1 moeda de 1 cêntimo (1 vezes 5?). Agnaldo concorda. Optam por iniciar por 1×5, que, para atingir 13, "Faltam 8". Identificam facilmente que precisam distribuir o 8 nas duas multiplicações ($2 \times 2 + 4 \times 1$). Essa estratégia possibilita a Marta perceber que há outra maneira de obter os 13 cêntimos.

Continuam a resolução da tarefa (Figura 7).

Agnaldo: Eu já sei [regista $2 \times 5 + 3 \times 1$]. Pronto! [mostra sua folha para Marta]. 2 vezes 5 mais 3 vezes 1.

Marta anota rapidamente.

Agnaldo: Agora faltam moedas de 1 cêntimo. 2 vezes 5 [anota na folha].

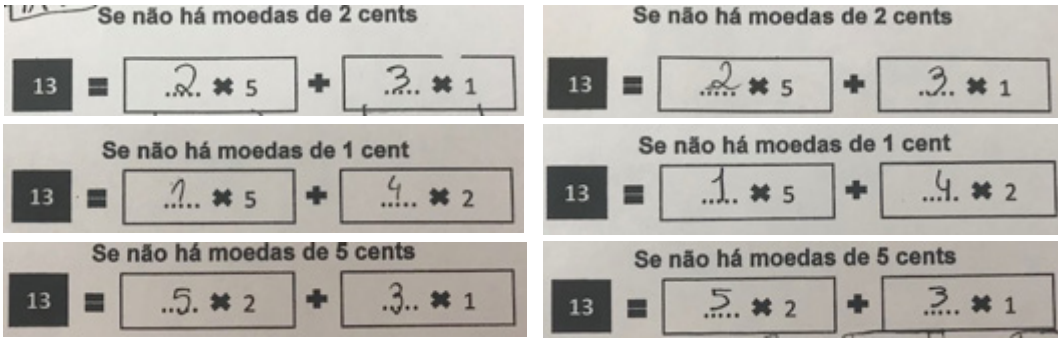


Figura 7. Registos de Marta e Agnaldo – 2ª parte tarefa 2.

Marta: Não pode ser! Não pode ser vezes 2 tem que ser vezes 1.

Agnaldo apaga o 2 e escreve o 1.

Agnaldo: 1 vezes 5, 5.

Marta: Agora já temos 5, então 4 vezes o 2 [ambos anotam].

Fazem o último sem comentários.

Novamente Marta entende que não pode usar, quando não há moedas de 1 cêntimo, a multiplicação 2×5, pois, já tendo 10 cêntimos, ao multiplicar 1 X 2 terá 12 cêntimos, e ao multiplicar 2×2 terá 14 cêntimos, o que, em nenhum dos casos, atende à exigência da tarefa. Embora ela não explicite oralmente essa ideia, ela está subjacente à resposta que dá ao colega "Não pode ser! Não pode ser vezes 2 tem que ser vezes 1".

Ao terminarem, a professora aproxima-se e pede para eles explicarem o que fizeram.

Marta: Fizemos 2 vezes 5 que era 10, mais 1 vezes 2 que já era 12, depois 1 vezes 1, mais um era 13. Depois aqui fizemos 1 vezes 5 é 5, depois...

Agnaldo: 2 vezes 2 é 4, que daí já era 9, mais 4.

Professora: Sim, e as outras? Não tem moedas de 2 cêntimos?

Marta: 2 vezes 5 é 10, depois 3 vezes 1 é 3, então é 13.

Agnaldo: 1 vezes 5 é igual a 5, mais 4 vezes 2 que é 8. E agora [indicando a última questão] 5 vezes 2 mais 3 vezes 1.

Marta: Essas aqui estão inversas [indica $2 \times 5 + 3 \times 1$ e $5 \times 2 + 3 \times 1$], uma parte está inversa e a outra está igual. Pois dá na mesma.

Marta e Agnaldo relatam passo a passo o que fizeram, apresentando, em alguns momentos, justificações para suas escolhas ("2 vezes 5 é 10, depois 3 vezes 1 é 3, então é 13"). Marta indica conhecer e aplicar a propriedade comutativa da multiplicação ao afirmar que 2×5 e 5×2 dão o mesmo resultado. Esta propriedade já tinha sido usada por Agnaldo na resolução da primeira parte da tarefa, quando fez $13 = 1 \times 5 + 2 \times 2 + 4 \times 1$, sua fala foi "Então temos 4, então 1 vezes 4", embora use o registo 4×1, atendendo ao exigido pela tarefa.

Par 2

Mónica e Bento não tiveram dúvidas e iniciaram prontamente a tarefa.

Mónica: Quando fazes vezes 1 é o número que se tem vezes o 1... Oh Bento, já sei! Esses dois números têm que dar 12 [indica as multiplicações por 5 e por 2].

Bento anota 2×5 em sua folha. Em seguida o 1×2 e 1×1.

Mónica: 2 vezes 5, 1 vezes 2 e... 1 vezes 1 é 1 [anota em sua folha].

Bento já fez de outra maneira e mostra Mónica.

Bento: 2 vezes o 5 é 10, 1 vezes o 2 é dois, faz 12, mais 1. 13.

Mónica: Duas maneiras diferentes, são duas maneiras diferentes. Tu fizeste igual.

Bento apaga a segunda maneira.

Neste trecho é possível perceber a intencionalidade de Mónica em usar a multiplicação por 1 como elemento neutro, sobrando 12 para serem distribuídos entre moedas de 5 e de 2. Tal estratégia os auxilia a fazer a primeira maneira. Bento, sem perceber, repete o mesmo procedimento ao fazer a segunda maneira e é corrigido por Mónica. Prosseguem na tarefa.

Bento: Aqui dá 5 [anota $5 \times 5 + 3 \times 2 + 2 \times 1$ e mostra para Mónica].

Mónica: Isso dá 25 [indica 5×5]. 5 vezes 5 dá 25.

Bento apaga e anota o 1×5.

Bento: Agora 5 vezes 1 igual a 5, depois 3 vezes 2 igual a 6, depois 2 vezes 1.

Mónica: Agora fica calmo que eu vou fazer. Não, não, agora eu tenho que fazer aqui o 3 (3×1), aqui fica 2 (2×2) e aqui fica 1 (1×5).

Bento: Não, aqui fica o 2 (2×1), aqui fica o 3 (3×2) e aqui fica o 1 (1×5).

Mónica: Deixa eu ver, 5 mais 3 são 8 .... hum... pois não dá [apaga].

Bento: Aqui dá 2, mais 5 igual a 7, mais 6 igual a 13 [mostra sua folha a Mónica].

Mónica: Pois então eu estava a pensar mal [corrige sua folha].

Bento: Olha aqui, 1 vezes 5 igual a 5, depois 2 vezes 2 igual a 4. 5 mais 4 dá quanto?

Mónica: 9.

Bento: 9 [regista 4×1]. Já fizemos outra. Há 3 maneiras, aqui na parte de duas maneiras diferentes.

Mónica: Quais são? [olha a folha de Bento e faz o mesmo registo]. 5, 5 mais 4, 9 mais 4, 13 [diz enquanto indica cada um dos produtos].

Bento inicia a resolução apresentando um cálculo equivocado (5×5) e é alertado por Mónica, que apresenta como justificação que o resultado é 25, portanto maior do que o exigido pela tarefa. Após fazer a adequação, apresenta sua resolução a Mónica. Ao fazer sua tentativa, Mónica também apresenta um cálculo equivocado e é corrigida por Bento. Entretanto, Bento apenas relata as operações que fez, o que conduz Mónica a verificar se está correto ou não ("Deixa eu ver, 5 mais 3 são 8 .... hum... pois não dá"), indicando um processo de validação. Na sequência, Bento apresenta a justificação do seu procedimento ("Aqui dá 2, mais 5 igual a 7, mais 6 igual a 13"). Bento encontra outra maneira de se obter 13 cêntimos e compartilha-a com Mónica, evidenciando justificações de que esta maneira também é correta ("Olha aqui, 1 vezes 5 igual a 5, depois

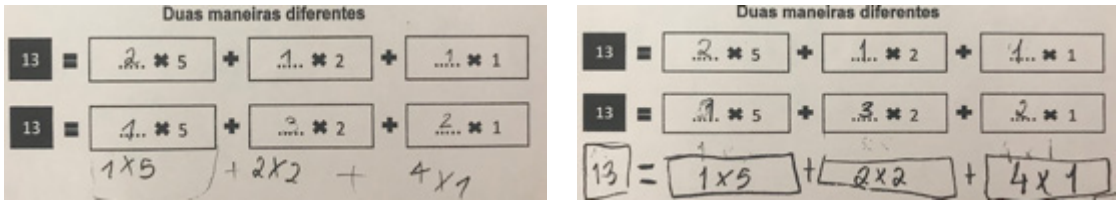


Figura 8. Registos de Mónica e Bento – 1ª parte tarefa 2.

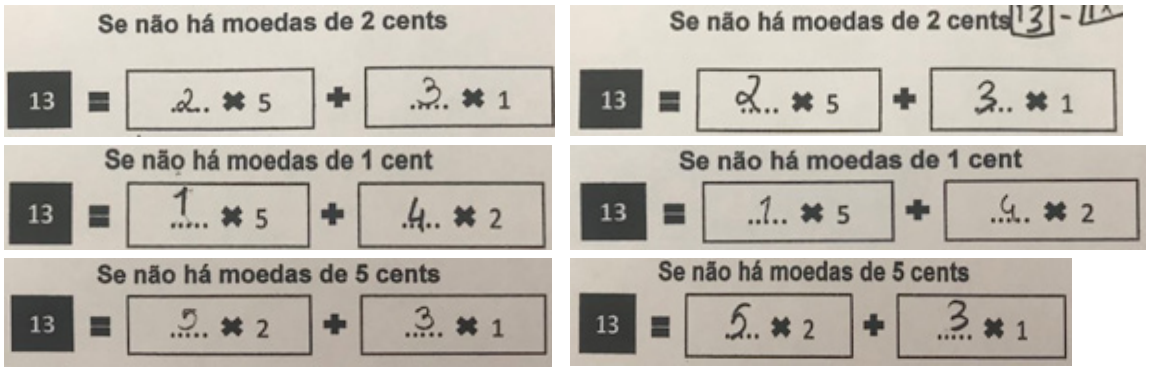


Figura 9. Registos de Mónica e Bento – 2ª parte tarefa 2.

2 vezes 2 igual a 4. 5 mais 4 dá quanto?"). Na sequência anota 4 × 1, que, somado ao 9, totaliza 13 cêntimos (Figura 8).

Passam para a resolução da tarefa quando não há moedas de 1, 2 e 5 cêntimos (Figura 9).

Mónica: Não pode ser 5 vezes 5 que passa, dá 25 [anota 2 × 5 + 3 × 1]. Pronto, este é fácil.
Bento olha e anota na sua folha.
Mónica: Eu vou tentar fazer esta.
Mónica anota 1 × 5 e fica pensativa um momento.
Bento: Se não há moedas de 1 cêntimo não é difícil.
Mónica: 1 × 5, 5 ... encontramos 8 [regista 4 × 2 na folha]. Quanto é 5 + 8? [pergunta a Bento]. É 13 não sabes?
Bento: Tens razão [regista em sua folha].
Mónica: E a debaixo?
Bento: 5 [ambos registam 5 × 2 + 3 × 1].

Neste trecho Mónica percebe, tendo como referência a parte anterior da tarefa, que o 5 × 5 não é uma opção adequada ("Não pode ser 5 vezes 5 que passa, dá 25"), portanto, considera fácil a resolução. Ao mostrar sua estratégia a Bento (1 × 5 + 4 × 2), apresenta uma justificação ("Quanto é 5 + 8? É 13 não sabes?). Ao concordar com ela, Bento faz o mesmo registo.

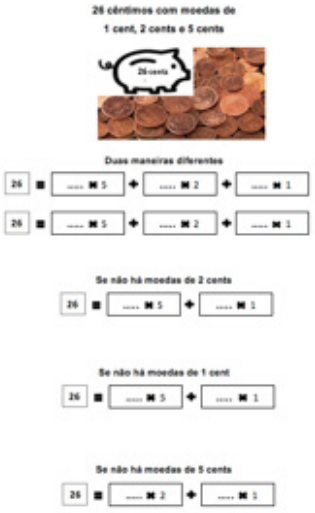


Figura 10. Tarefa 26 cêntimos com moedas de 1 cent, 2 cents e 5 cents.

Tarefa 3:

Na Tarefa 3 (Figura 10), semelhante à Tarefa 2, os alunos precisam encontrar maneiras diferentes para compor 26 cêntimos com moedas de 1, 2 e 5 cêntimos. A professora deu continuidade ao modo de introduzir a tarefa. Os alunos não tiveram dificuldade na compreensão e, um deles, identificou um erro de impressão, que foi corrigido por todos e não causou problemas.

Par 1

Como já haviam feito a Tarefa 2, não tiveram dúvidas em começar. Vão preenchendo sem conversar, num primeiro momento.

Agnaldo: Já fiz [mostra sua folha a Marta com o registo $4 \times 5 + 2 \times 2 + 2 \times 1$].

Marta faz o mesmo registo na sua folha e, em seguida inicia o registo da outra maneira.

Marta: Eu fiz outra 2, 5, 6 [cujo registo é $2 \times 5 + 5 \times 2 + 6 \times 1$. Depois olha para Agnaldo que ainda está fazendo].

Agnaldo: Vai dar 3 vezes 5, 15, 21, então 5. [regista $3 \times 5 + 3 \times 2 + 5 \times 1$].

Marta: Já fiz tudo.

Agnaldo: Ainda falta mais uma estratégia [Marta regista a estratégia feita por Agnaldo, que por sua vez regista a feita por ela].

Marta e Agnaldo encontram, rapidamente, três maneiras diferentes para compor 26 cêntimos (Figura 11). Este trecho não apresenta indícios de processos de raciocínio, apenas a descrição dos procedimentos feitos por eles, tendo como referência o que fizeram na tarefa anterior. Era esperado que os alunos estabelecessem alguma relação entre o 13 e o 26 (dobro ou metade) e estendessem essa relação ao efetuar o cálculo ($13 = 2 \times 5 + 1 \times 2 + 1 \times 1$ e $26 = 4 \times 5 + 2 \times 2 + 2 \times 1$), mas isso não ocorreu, pelo menos de forma explícita.

Marta e Agnaldo prosseguem para a próxima parte da tarefa.

Marta: 5 vezes 5...

Agnaldo: Olha, 5 vezes 5, 1 vezes 1 [regista $5 \times 5 + 1 \times 1$].

Marta regista a mesma estratégia de Agnaldo.

Marta: Espera, quero fazer outro. 4 vezes 5 mais 6 vezes 1.

Agnaldo regista essa estratégia em sua folha.

Agnaldo: Agora sem moedas de 1 cêntimo.

Marta: Não há moedas de 1 cêntimo. Então 5 vezes 4 e depois é 3 vezes 2. [regista enquanto fala].

Agnaldo: Deixa eu ver, 20 e 6. E agora 26 [faz o mesmo registo].

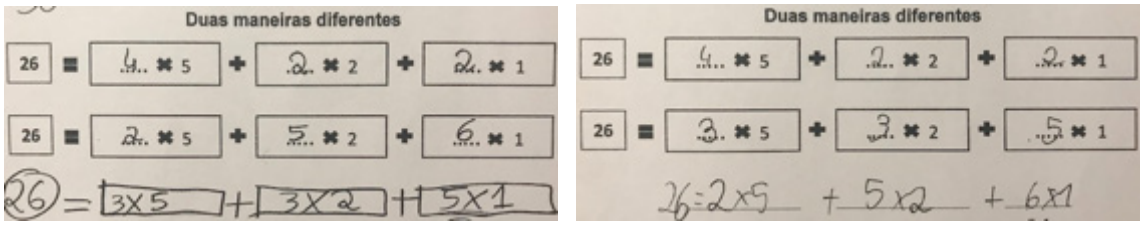


Figura 11. Registos de Marta e Agnaldo – 1ª parte tarefa 3.

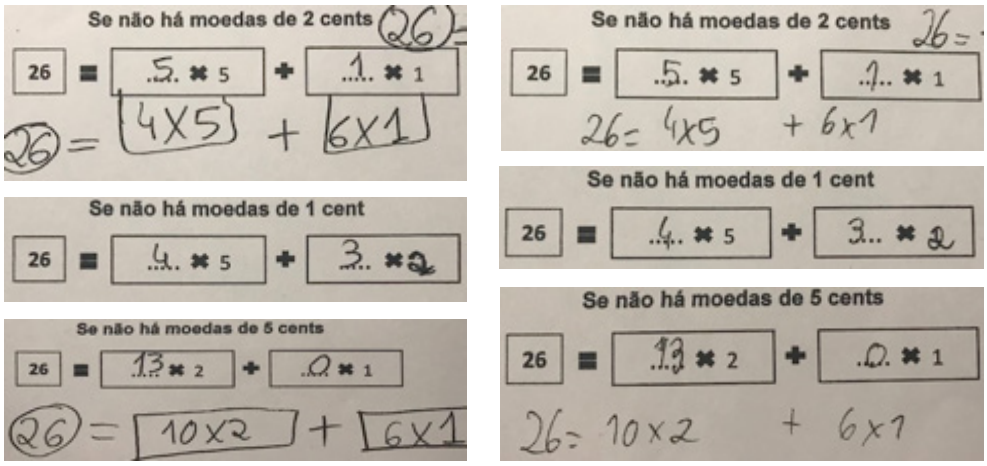


Figura 12. Registos de Marta e Agnaldo – 2ª parte tarefa 3.

Marta: 13 e 0, olha aqui, 13 e 0. [regista $13 \times 2 + 0 \times 1$]
Agnaldo faz esse registo em sua folha.
Agnaldo: Vamos fazer outras estratégias.
Marta: Ó, ó, ó, 10 vezes 2 mais 6 vezes 1.
Agnaldo: Acabamos! E fizemos muitas estratégias.

Num primeiro momento, Marta e Agnaldo concordam com as resoluções um do outro sem questionamentos. Entretanto, quando Marta apresenta a opção $5 \times 4 + 3 \times 2$, Agnaldo sente a necessidade de analisar se a conjetura apresentada é válida ("Deixa eu ver, 20 e 6. E agora 26"). Só depois é que faz o registo. Portanto, houve um processo de validação feito por Agnaldo, considerando correto o procedimento apresentado pela colega. Na sequência, Marta recorre a um conhecimento anterior, no caso a propriedade de elemento nulo da multiplicação, para encontrar uma maneira de compor os 26 cêntimos ("13 e 0, olha aqui, 13 e 0"), onde parece haver indícios de raciocínio matemático (Figura 12).

Par 2

Mónica e Bento iniciam a tarefa pela parte "se não há moedas de 2, 1 e 5 cêntimos". Bento regista $4 \times 5 + 3 \times 2$. Em seguida faz sem moedas de 5 cêntimos e mostra a Mónica ($8 \times 2 + 10 \times 1$). E faz sem moedas de 2 cêntimos ($5 \times 5 + 1 \times 1$). Mónica faz seus registos iguais aos de Bento. Não há discussão nesse momento. Seguem para a primeira parte da tarefa.

Bento: Já fiz tudo. [$5 \times 5 + 0 \times 2 + 1 \times 1$ e $4 \times 5 + 3 \times 2 + 0 \times 1$]
Mónica: Não, não, ainda não acabei. Não se pode usar o zero.
Bento: Pode sim, se se quiser.
Mónica: E por que é que queres usar o zero?

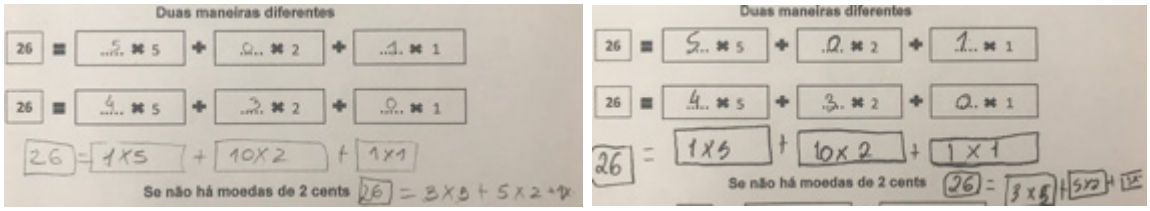


Figura 13. Registos de Mónica e Bento – 1ª parte tarefa 3.

Bento: Para ser mais fácil.

Mónica: 5 vezes 5, 0 vezes 2, 1 vezes 1. Eu também usei o zero.

Bento tenta uma nova estratégia.

Bento: 1 vezes 5, aqui é 10 vezes o 2, vai dar certo! E 1 × 1. [mostra sua folha para Mónica].

Mónica: Deixa eu confirmar essa coisa. Então 5, 20, 25... [já constatou que o resultado era 26 e registou em sua folha].

Bento: Professora, já fizemos tudo.

Mónica: Vamos fazer mais aqui. Não consegues mais nenhuma? [faz o registo de 5 × 3 + 5 × 2 + 1 × 1].

Bento olha o registo de Mónica.

Bento: 5 vezes 3 não há.

Mónica: É ao contrário [apaga e regista 3 × 5].

Mónica e Bento também não estabelecem, explicitamente, uma relação com a Tarefa 2 (dobro ou metade). Bento recorre ao conhecimento que possui sobre o elemento nulo da multiplicação e usa-o em duas situações. Ao ser questionado por Mónica, ele afirma que usa o zero "Para ser mais fácil", o que prontamente é aceite por Mónica que recorre a este conhecimento para fazer a tarefa ("Eu também usei o zero"). Bento apresenta outra maneira de fazer e, ao mostrar para Mónica, ela opta por validar tal resolução ("Deixa eu confirmar essa coisa. Então 5, 20, 25..."). Mónica revela conhecer a propriedade comutativa da multiplicação, pois realiza o registo de 5 × 3, que prontamente é corrigido por Bento, e, ao perceber o equívoco, afirma "É ao contrário" e regista corretamente 3 X 5 (Figura 13).

Discussão e conclusão

A análise do trabalho feito pelos alunos e de alguns diálogos sugerem indícios de raciocínio matemático tomando como base a definição de Jeannotte e Kieran (2017). Para desenvolver suas estratégias de resolução, os alunos basearam-se em conhecimentos anteriores, particularmente, na decomposição de números e no entendimento das estruturas aditivas e multiplicativas e em algumas propriedades da multiplicação, como comutativa, distributiva, elemento neutro e elemento nulo. Além disso, comunicaram com os pares suas resoluções, algumas vezes apenas relatando o procedimento adotado, mas em outras apresentando uma justificação, por exemplo, "15 vezes 1 é igual a 15; 15 vezes 1 que é igual a 15, é igual a 30".

Em relação aos processos de raciocínio utilizados, ao elaborar uma estratégia, os

alunos formularam conjeturas, mesmo que de forma inconsciente, pois, ao definir um procedimento a ser usado por exemplo, a decomposição do multiplicando, julgaram que este caminho os conduziria a um resultado. Para Jeannotte e Kieran (2017), este processo leva à formulação de narrativas que têm um valor epistémico de provável ou possível. No início da tarefa, Marta fez a seguinte afirmação "10 vezes 2 igual a 20, 4 vezes 2 igual a 8, igual a 28". Ao perceber que sua estratégia a conduzia a um resultado correto, utiliza-a em todas as demais multiplicações.

Marta faz uma nova conjetura, de acordo com Morais et al. (2018), ao perceber que pode decompor também o multiplicador. Embora ela não a enuncie, tal conjetura tem como base o conhecimento de que, ao multiplicar um número por 2, depois multiplicar esse mesmo número por 3 e somar os resultados obtém o mesmo resultado do que multiplicar o número por 5, que corresponde à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Além disso, os alunos parecem generalizar a ideia matemática de que, ao decomporem os números nas ordens (por exemplo, em 10 + 2) fazendo a multiplicação a partir da decomposição, obtém-se o mesmo resultado, tratando-se, portanto, de uma estratégia válida, usando de modo não explícito a propriedade distributiva. E como expressão dessa generalização, resolvem todas as multiplicações seguindo esta ideia, o que corresponde à ideia de generalizar defendida por Jeannotte e Kieran (2017) ou ainda por Lannin et al. (2011). Entretanto, os alunos não apresentam uma justificação para a generalização.

Em alguns trechos, foi possível observar o processo de justificar, de acordo com Jeannotte e Kieran (2017), como por exemplo, na Tarefa 2, quando Mónica justifica a Bento que aquela resolução não é pertinente ("Não pode de 5 vezes 5 que passa, dá 25"). Em outro trecho, Marta apresenta a justificação da sua resolução para Agnaldo ("2 vezes 5 é 10, depois 3 vezes 1 é 3, então é 13"). Ou ainda, a justificação apresentada por Bento quando Mónica contesta sua resolução ("Aqui dá 2, mais 5 igual a 7, mais 6 igual a 13").

Alguns trechos sugerem que os alunos recorreram ao processo de validação, ao conferir se o procedimento apresentado era válido ou não, o que vai de encontro ao definido por Jeannotte e Kieran (2017), como sendo o processo de validar. Por exemplo, na Tarefa 3, Agnaldo valida a estratégia utilizada por Marta ("Deixa eu ver, 20 e 6. E agora 26") ou quando Mónica valida a resolução de Bento ("Deixa eu confirmar essa coisa. Então 5, 20, 25..."). Somente após a validação é que ambos aceitam anotar em suas folhas.

De salientar que as tarefas, elaboradas numa perspetiva exploratória, bem como o seu desenvolvimento em pares, apoiaram o raciocínio matemático. Os processos explicitados conduziram os alunos a uma atividade intelectual rica, pois recorreram a conhecimentos anteriores para apresentar estratégias diferentes de resolução, sem recorrer a uma autoridade externa, como livros ou a professora.

Agradecimentos

Agradecemos à Capes pelo apoio recebido pela primeira autora na realização desta pesquisa, por meio do Programa PVEX (Programa de Professor Visitante no Exterior)/ Processo nº 88881.170306/2018-01.

Referências bibliográficas

Jeannotte, D., & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 96(1), 1–16. DOI: 10.1007/s10649-017-9761-8.

Lannin, J., Ellis, A. B. & Elliot, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematics reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade 8*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2017). Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: teacher actions facilitating generalization and justification. *Educational Studies in Mathematics*, 96(2), 1–18. DOI: 10.1007/s10649-017-9773-4.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2018). Promover o Raciocínio Matemático dos Alunos: uma investigação baseada em design. *Bolema*, 32(62), 781–801. DOI: 10.1590/1980-4415v32n62a02.

Morais, C., Serrazina, L., & Ponte, J. P. (2018). Mathematical Reasoning Fostered by (Fostering) Transformations of Rational Number Representations. *Acta Scientiae*, 20(4), 552–570. DOI: 10.17648/acta.scientiae.v20iss4id3892.

National Council of Teachers of Mathematics (2017). *Princípios para a ação: Assegurar a todos o sucesso em Matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática. (Obra original em inglês publicada em 2014).

Ponte, J. P.; Carvalho, R.; Mata-Pereira, J.; Quaresma, M. (2016). Investigação baseada em design para compreender e melhorar as práticas educativas. *Quadrante, XXV*(2), 77–98.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Henriques, A. (2012). O raciocínio matemático nos alunos do Ensino Básico e do Ensino Superior. *Práxis Educativa*, 7(2), 355–377. DOI: 10.5212/PraxEduc.v7i2.0003.

Stylianides, G. (2009). Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. *Mathematical Thinking and Learning*, 11(4), 258–288. DOI: 10.1080/10986060903253954.

O uso de exemplos na demonstração: Um estudo com alunos do 11.º ano

Rita Caneco

Faculdade de Ciências e Tecnologia-
Universidade NOVA de Lisboa
r.caneco@campus.fct.unl.pt

Helena Rocha

UIED, Faculdade de Ciências e Tecnologia-
Universidade NOVA de Lisboa
hcr@fct.unl.pt

Resumo.

Este artigo analisa a escolha e o uso de exemplos realizado por alunos de 11.º ano no âmbito do estudo da veracidade de dadas afirmações, dando igualmente atenção às representações de sucessão e funções usadas. Os resultados têm por base um estudo de natureza qualitativa, tendo os dados sido recolhidos através de entrevistas e recolha documental. As conclusões sugerem que os alunos utilizaram frequentemente exemplos conhecidos das aulas, mas apresentaram um uso de exemplos bastante variado em termos de propósito, nomeadamente, para compreender a conjetura, demonstrar a falsidade ou veracidade da afirmação e transmitir um argumento geral. Em termos de representações, realizaram uma articulação satisfatória entre os vários tipos de representações mas recorrendo fortemente ao gráfico cartesiano.

Abstract.

This article focuses the choice and use of examples by two students of the 11th grade to prove or refute a set of statements. The use of representations of sequences and functions is also considered. The study adopts a qualitative approach and data were collected by interviews and documental gathering. The conclusions suggest most of the examples used were well-known sequences or functions. However, the students sought different purposes for the use of examples, such as understanding the conjecture, demonstrate the falsity or truthfulness of the statement and conveying a general argument. The students made a satisfactory articulation between the various types of representations but relied mostly in the cartesian graph.

Palavras-chave: Demonstração; Uso de exemplos; Sucessões e Funções.

Introdução

A demonstração tem um papel central na matemática, nomeadamente no seu desenvolvimento, na validação dos resultados e na comunicação do conhecimento matemático, contudo tende a ser-lhe atribuído um papel secundário no ensino (Rocha, 2019).

A utilização de exemplos pode ser uma ferramenta útil no âmbito da demonstração matemática, podendo motivar a generalização empírica ou estrutural (Watson & Chick, 2011), auxiliar a demonstração da afirmação (Ellis, et al., 2019), ajudar a compreender os limites da conjetura (Ellis, et al., 2019), permitir encontrar um contraexemplo para uma afirmação (Sanderfur, Mason, & Watson, 2013), entre outros benefícios.

Segundo Knuth, Zaslavsy e Ellis (2019), os exemplos são fundamentais para os matemáticos no trabalho de demonstração pois "o tempo gasto a pensar e analisar os exemplos pode fornecer não só uma compreensão mais profunda de uma conjetura, mas também uma visão do desenvolvimento de uma prova" (p. 2). Existe, no entanto, um grande contraste com o caso da escola básica e secundária, pois os alunos raramente aprendem a construir e usar estrategicamente exemplos (Knuth, Zaslavsy, & Ellis, 2019).

De acordo com o NCTM (2000), "muito do poder da matemática vem de ser capaz de ver e operar objetos de diferentes perspetivas" (p. 361). Ao estudar cada tema os alunos entram em contacto com diferentes representações e surge, portanto, a necessidade de saber utilizar diferentes representações e passar de uma para outra.

Neste estudo pretende-se analisar o uso de exemplos, no âmbito da demonstração matemática, por alunos do 11.º ano de escolaridade, incidindo nos temas Sucessões e Funções. Concretamente pretende-se compreender:

i) Quais os critérios ou estratégias usados pelos alunos na escolha dos exemplos?

ii) Qual o propósito dos alunos no momento da criação de exemplos?

iii) Como é que a criação de exemplos e os tipos de exemplo procurados se relacionam com o sucesso da demonstração?

iv) De que forma os alunos expressam as suas ideias numa demonstração e como é que isso contribui para o sucesso da mesma?

Revisão de Literatura

A demonstração

Não existe nenhuma definição previamente estabelecida e consensual para a demonstração matemática, mas existem quatro características base: é um argumento matemático, é geral, estabelece o valor de verdade de uma afirmação e baseia-se em factos aceites ou previamente demonstrados (Steele & Rogers, 2012). Boavida (2001) refere que "mais importante do que o formato final de uma demonstração é a atividade de a produzir (…), é a comunicação clara e correta das ideias matemáticas em jogo" (p. 11).

Tabela 1. Critérios de escolha de um exemplo (Ellis et al., 2019, p. 267)

Critérios	
Simples	De forma a facilitar o processo
Caso mínimo	Porque é o exemplo mais pequeno que verifica a condição inicial
Aleatório	Intencionalmente aleatório para testar a veracidade da conjetura
Caso limite	Porque é um extremo ou um caso especial
Típico	Exemplo comum ou de que muitos se lembram
Primeira ideia	Porque foi o primeiro que lhes ocorreu
Familiar	Exemplo com propriedades conhecidas
Favorito	Com base nas suas preferências de número, forma, etc.

No ensino da matemática, a demonstração ou é esquecida ou é utilizada apenas para obter certeza (De Villiers, 1990). Contudo, vários autores sublinham a importância da demonstração no ensino da matemática, por exemplo, Schoenfeld (1994, p. 76) defende que "a prova não é um objeto separado da matemática, como aparece no nosso currículo, é uma componente essencial no fazer, na comunicação e no registo da matemática". Fonseca (2004, p. 82) refere que a demonstração deve "ser utilizada por crianças desde que começam a aprender matemática", havendo, contudo, o cuidado de não envolver formalismo nem formas de raciocínio abstrato nos primeiros anos.

Esta importância atribuída à demonstração vale também para os contraexemplos, pois estes têm um papel significativo na matemática e juntos, as demonstrações e os contraexemplos, permitem que os alunos "compreendam os significados por trás dos resultados, ajudando-os a entender porque é que estes são verdadeiros ou falsos" (Rocha, 2019, p. 3).

O uso de exemplos na demonstração

A definição de exemplos adotada é a desenvolvida por Sandefur, Mason e Watson (2013) e perspetiva os exemplos como objetos matemáticos usados para instanciar as propriedades envolvidas num exercício de demonstração.

Ellis et al. (2019) categorizaram os critérios, benefícios, propósitos e estratégias envolvidos na criação e uso de exemplos na demonstração, com o intuito de analisar e estruturar o modo como os alunos escolhem os exemplos (critérios e propósitos), como os usam (propósitos), como o fazem tendo em conta uma estratégia e o que aprendem/assimilam com esses exemplos (benefícios).

Estes autores começam por definir os critérios usados na escolha de um exemplo (ver tabela 1). Enquanto que alguns critérios não possuem grande peso lógico (como a primeira ideia ou favorito), outros revelam uma estratégia (como o caso mínimo ou caso limite). Esta categorização não é exclusiva, podendo um mesmo exemplo ser de vários tipos.

Estes autores referem também os vários benefícios que podem surgir da escolha de um dado exemplo: *ganhar uma visão sobre a proposição, generalizar, suportar uma conje-*

Tabela 2. Propósitos no uso de um exemplo (Ellis et al., 2019, pp. 270-271)

Propósitos	
Compreender	Para compreender como é que a conjetura funciona
Testar a veracidade	Para tentar testar o valor de verdade da conjetura
Confirmar a sua ideia	Para confirmar se a sua alegação de veracidade está correta
Explorar o domínio de verdade	Para testar para que exemplos é que a conjetura é verdadeira
Refutar	Para tentar refutar a proposição (contraexemplo)
Reivindicação	Como uma ilustração da sua ideia de que a conjetura é verdadeira (ou falsa, no caso de um contraexemplo)
Compreender porquê	Para tentar compreender porque é que a proposição é falsa ou verdadeira
Transmitir um argumento geral	Para transmitir um argumento que sustente sua afirmação. O argumento é geral. O exemplo é usado como um *exemplo genérico* (*exemplo geral*)
Representação	Para explorar a representação e de que forma esta se relaciona com a conjetura
Desenvolver conjeturas	Com o objetivo de desenvolver uma conjetura
Responder ao entrevistador	Para responder à intervenção do entrevistador

tura, auxiliar a justificação/demonstração e compreender as limitações do uso de exemplos.

Na tabela 2, encontram-se os propósitos do uso de um certo exemplo, ou seja, o que os alunos pretendem fazer com o exemplo escolhido. A diferença entre os benefícios e os propósitos do uso de um exemplo está na intenção, os propósitos revelam a intenção do aluno enquanto que os benefícios podem não ter sido previamente planeados. Ao utilizar exemplos para tentar demonstrar a veracidade ou falsidade de uma afirmação podem ser usadas várias estratégias, que podem ser referentes à escolha e criação desses exemplos ou à sua aplicação. Neste trabalho apenas foram consideradas as do primeiro tipo, que se encontram especificadas na tabela 3.

Sucessões, funções e suas representações

As Sucessões, do 11.º ano, aparecem no seguimento das *Funções, Sequências e Sucessões*, do 3.º ciclo, e as Funções reais de variável real, do 11.º ano, fazem a ligação entre as *Funções reais de variável real*, do 10.º ano, e *Sucessões*, do 11.º ano. Estas ligações são claras considerando que as sucessões são funções de variável natural e contradomínio $\mathbb{R}$ e as sequências correspondem ao conjunto de chegada das sucessões.

> Tornando-se cada vez mais conscientes das conexões entre diversos tópicos estudados no ensino básico e diferentes áreas, os estudantes desenvolvem a capacidade de aplicar os conhecimentos sobre as sequências no estudo das sucessões, olhando para a matemática como um todo integrado. (Paradinha & Leuca, 2010, p. 28).

Aspinwall e Shaw (2002) defendem que o uso de diferentes representações para exprimir ideias é benéfico, promovendo a fluência entre várias representações e um desenvolvimento da compreensão matemática.

Tabela 3. Estratégias na escolha de exemplos (Ellis et al., 2019, p. 271)

Estratégias na escolha de exemplos	
Diversidade	Testar a diversidade dos exemplos
Variação sistemática	Escolher um primeiro conjunto de exemplos e depois fazer variar sistematicamente a natureza desses exemplos
Propriedades	Escolher exemplos que verifiquem uma certa propriedade ou um conjunto de propriedades

Tabela 4. Representações de sucessão e de função

Sucessão	**Função**
Termo geral	Expressão algébrica
Termo geral escrito por ramos	Expressão algébrica escrita por ramos
Termo geral dado por recorrência	Gráfico cartesiano
Gráfico cartesiano	Tabela
	Diagrama de setas

As representações de sucessão e de função consideradas foram as identificadas nos manuais adotados para o 10.º e 11.º ano (ver tabela 4).

Krutetskii (1976) define três métodos principais de processamento matemático: o analítico, em que o aluno privilegia o processamento verbal-lógico; o geométrico, em que o aluno se baseia no processamento visual-pictórico; e o harmónico, onde ambas as representações são utilizadas.

Metodologia

Tendo em consideração o tipo de dados recolhidos, este trata-se de um estudo de natureza qualitativa, em sintonia com a definição de Bogdan e Biklen (1994). Trata-se também de um estudo de caso, de acordo com Yin (2001). A recolha de dados baseou-se na realização de duas tarefas, uma sobre Sucessões e outra sobre Funções, e em duas entrevistas, realizadas cerca de uma semana depois de cada tarefa.

Dez alunos, da mesma turma, participaram neste estudo. Estes alunos foram caracterizados tendo em conta a sua classificação e evolução ao longo do ano nos vários momentos de avaliação da disciplina de Matemática A e o seu nível de extroversão, definido através da observação das aulas desta turma. Os alunos foram emparelhados de maneira a cada par ser homogéneo entre si. Destes cinco pares foi escolhido o par formado por Sofia e Nuno para apresentar neste artigo por ser o único par que, desde a primeira tarefa, adotou um método de processamento matemático geométrico.

Neste estudo foram consideradas afirmações universais (i.e., do tipo "$\forall x\ p(x)$") e

Tabela 5. Afirmações analisadas e o seu tipo

Alínea	Afirmação	Valor de verdade	Tipo
1.1	Uma sucessão crescente e minorada é limitada.	F	1
1.2	Uma progressão aritmética de razão natural é sempre monótona.	V	2
1.3	Algumas progressões aritméticas são limitadas.	V	1
1.4	Uma progressão geométrica é sempre monótona.	F	1
1.5	Nem todas as sucessões crescentes tendem para infinito.	V	1
1.6	Se uma sucessão é convergente então é monótona.	F	1
1.7	Se uma sucessão é convergente então é limitada.	V	2
1.8	Se uma sucessão é limitada então é convergente.	F	1
1.9	Existe uma sucessão com dois limites diferentes.	F	2
1.10	A soma de um infinitésimo com uma sucessão infinitamente grande é infinitamente grande.	V	2
1.11	O produto de uma sucessão limitada com uma sucessão convergente é uma sucessão convergente.	F	1
2.1	Nem todas as funções admitem inversa.	V	1
2.2	Uma função pode ser simultaneamente par e ímpar.	V	1
2.3	Uma função pode não ser par nem ser ímpar.	V	1
2.4	Se uma função de domínio $\mathbb{R}^+$ é crescente em sentido lato então a reflexão de eixo Ox da representação do gráfico dessa função é também crescente em sentido lato.	F	1
2.5	Se uma função de domínio $\mathbb{R}^+$ é crescente em sentido lato então a reflexão de eixo Oy da representação do gráfico dessa função é decrescente em sentido lato.	V	2
2.6	Um extremo relativo de uma função é sempre um extremo absoluto.	F	1
2.7	Existe pelo menos uma função do tipo $f(x)=\lvert x-a\rvert+b$ com $a,b\in\mathbb{R}$ e domínio $\mathbb{R}$ que é monótona.	F	2
2.8	A função inversa de uma função afim é uma função afim.	V	2
2.9	Algumas funções polinomiais não têm zeros.	V	1
2.10	Se uma função é crescente em sentido lato então não admite um máximo absoluto.	F	1
2.11	Uma função do tipo $f(x)=(x-a)^{1/2}+b$ com $a,b\in\mathbb{R}$ e domínio $[a,+\infty[$ é sempre monótona.	V	2

existenciais (i.e., do tipo "$\exists x\ p(x)$"). Foram definidos dois tipos de afirmações, de acordo com a admissão ou não de uma demonstração através de um exemplo, sendo as de tipo 1 as que admitem uma demonstração a partir de exibição de um exemplo e as de tipo 2 aquelas em que tal não é possível. Como se pretendia analisar o uso de exemplos escolheram-se maioritariamente afirmações do tipo 1.

As tarefas analisadas (ver tabela 5) tiveram a duração de noventa minutos cada e consistiram numa lista de onze afirmações para as quais os alunos deveriam indicar, justificando, o valor de verdade. A primeira tarefa foi realizada numa sala apenas com os alunos participantes no estudo e a segunda tarefa foi realizada por toda a turma numa aula. Uma das investigadoras vigiou a resolução e respondeu às questões colocadas pelos alunos não relacionadas com os conteúdos matemáticos envolvidos na tarefa.

Os alunos foram informados de que não era esperado que resolvessem todas as alí-

Tabela 6. Análise das alíneas respondidas em termos dos tipos 1 e 2

Tipo de alínea	Universal ou existencial	Valor de verdade	Valor de verdade indicado	Número de ocorrências
Tipo 1	universal	Falso	Correto	4
			Incorreto	3
			Não respondido	1
	existencial	Verdadeiro	Correto	3
			Incorreto	2
			Não respondido	1
Tipo 2	universal	Verdadeiro	Correto	4
			Incorreto	0
			Não respondido	2
	existencial	Falso	Correto	1
			Incorreto	0
			Não respondido	1

neas e que deveriam justificar cada afirmação o melhor que conseguissem, recorrendo, se necessário, a esquemas, texto, desenhos ou diferentes representações.

Apresentação de resultados

O par estudado neste trabalho é constituído por Sofia, com nota de caracterização 16, e Nuno, com nota de caracterização 17. Nuno é bastante extrovertido, enquanto que Sofia não tanto.

Este par respondeu a dezassete das vinte e duas alíneas existentes nas tarefas, tendo respondido a todas as perguntas da primeira tarefa e a seis da segunda. Das cinco alíneas não respondidas: duas são universais verdadeiras, uma universal falsa, uma existencial verdadeira e uma existencial falsa.

Na tabela 6 é possível observar que aparentam rejeitar com maior frequência as alíneas do tipo 2 (que não podem ser demonstradas através da exibição de um exemplo), contudo responderam corretamente a todas as alíneas deste tipo que não deixaram em branco. Além disso, não parece existir uma relação entre o facto de a afirmação ser do tipo universal ou existencial e o sucesso na atribuição do valor de verdade.

Quando questionados sobre as alíneas a que decidiram responder, Sofia referiu que "nós estávamos atrasados então nós olhávamos e escolhíamos as que achávamos mais fáceis de responder".

Afirmações do tipo 1 para as quais os alunos indicaram o valor de verdade correto

Os alunos identificaram corretamente o valor lógico das alíneas 1.1, 1.5, 1.6, 2.1, 2.6, 2.9 e 2.10 e, apesar de todas estas admitirem uma demonstração através da exibição de um exemplo, apenas o fizeram nas alíneas 1.6, 2.1, 2.9 e 2.10.

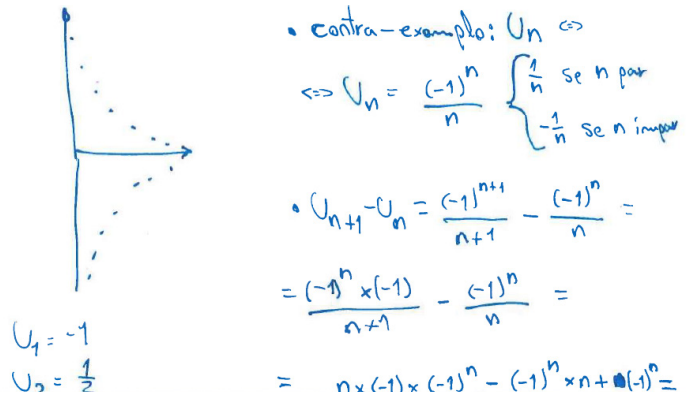


Figura 1. Excerto da resolução da alínea 1.6

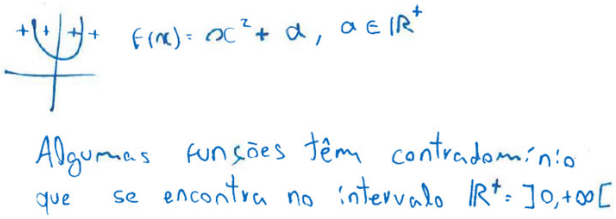


Figura 2. Resolução da alínea 2.9

Nas alíneas 1.6 e 2.1, recorrem a um *exemplo típico* para demonstrar o pretendido. Na afirmação 1.6 (Se uma sucessão é convergente então é monótona), que é universal falsa, estão conscientes que apresentam um contraexemplo e indicam-no explicitamente na sua resolução (ver figura 1).

Por outro lado, nas alíneas 2.9 e 2.10, apresentam um *exemplo genérico*, o que sugere que não é claro para os alunos quando um exemplo é suficiente ou não. Na alínea 2.9 (Algumas funções polinomiais não têm zeros), optam por basear a sua resposta numa família de funções (ver figura 2).

Quando questionados sobre esta atitude, responderam que pretendiam apresentar um argumento geral, o que sugere que consideram que esta será uma justificação mais adequada do que a apresentação de apenas um exemplo:

> Então porque eu lembrei-me desta função assim, que não tinha... não passava no eixo dos x e, pronto, escrevi-a assim, para ser mais absoluto, em vez de usar um exemplo. Quer dizer, isto foi um exemplo, mas era mais uma fórmula geral para as funções quadráticas positivas sem zeros.

Nas alíneas 1.1 e 2.6 apresentam uma justificação escrita válida que podia ser substituída por um exemplo. Na alínea 2.6 (Um extremo relativo de uma função é sempre um extremo absoluto) os alunos apresentam uma definição incorreta de extremo relativo e absoluto, pois só consideram o caso do máximo, e utilizam apenas esta definição como fundamentação do valor lógico indicado (ver figura 3).

Permanece a questão se considerarão esta resposta melhor do que a apresentação de um exemplo.

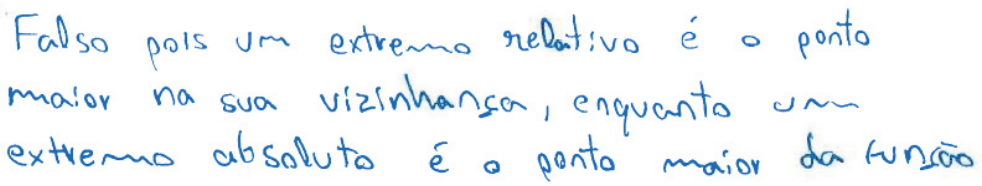


Figura 3. Resolução da alínea 2.6

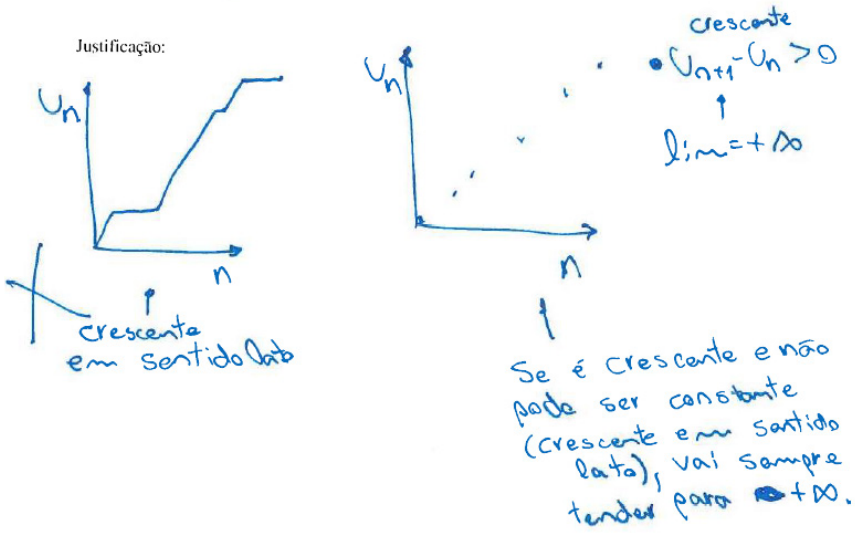


Figura 4. Resolução da alínea 1.5

Afirmações do tipo 2 para as quais os aluno indicaram o valor de verdade correto

Os alunos identificaram corretamente o valor de verdade das afirmações do tipo 2 das alíneas 1.2, 1.7, 1.9, 1.10 e 2.8. Estas afirmações não admitem uma demonstração através da exibição de um exemplo, apesar disso os alunos utilizam exemplos em todas menos duas (1.9 e 1.10).

Na alínea 1.5 (Nem todas as sucessões crescentes tendem para infinito), identificam a afirmação como verdadeira, mas a conclusão a que chegam na demonstração é que é falsa (ver Figura 4). Nesta justificação apresentam dois gráficos genéricos, um de uma sucessão crescente em sentido lato , representado através de uma linha contínua, e um de uma sucessão crescente.

Durante a resolução da tarefa perguntaram à investigadora se a afirmação se referia apenas às sucessões estritamente crescentes ou também incluía as sucessões crescentes em sentido lato. Esta questão pode estar relacionada com as mudanças na definição de sucessão crescente, motivadas pela mudança de programa (ver Tabela 7).

Nesta entrevista os alunos foram confrontados com a afirmação "Todas as sucessões crescentes tendem para infinito" e foi possível perceber que estes consideram que se uma sucessão crescente tende para um ponto real então é crescente em sentido lato.

I Então e a sucessão $(1+n^2)/n$ [referida na resolução da alínea 1.7].
N Mas essa é crescente em sentido lato.
I É estritamente crescente.
N Não, é em sentido lato porque depois há um ponto em que já está constante.

Tabela 7. Alterações na definição de sucessão crescente

Definições do programa de Matemática A de 2002		Definições do programa de Matemática A de 2012	
Crescente	$u_{n+1}-u_n\geq 0$	Crescente	$u_{n+1}-u_n>0$
Absolutamente crescente	$u_{n+1}-u_n>0$	Crescente em sentido lato	$u_{n+1}-u_n\geq 0$

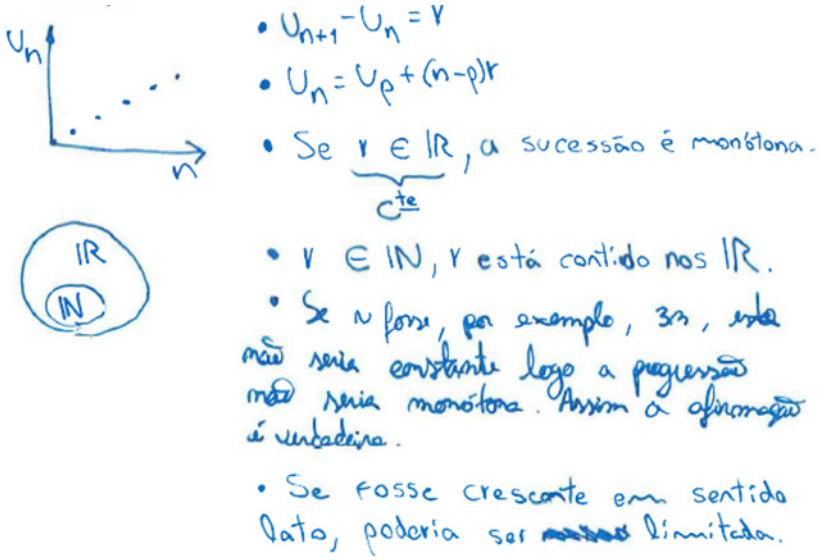


Figura 5. Resolução da alínea 1.2

Na alínea 1.2 (Uma progressão aritmética de razão natural é sempre monótona), apresentam uma justificação ilustrada por um esquema representativo da relação e um gráfico que pretende representar uma progressão aritmética qualquer e escolhida de forma propositadamente *aleatória* (ver figura 5). Apesar da apresentação do gráfico como exemplo, Nuno afirmou que "este gráfico acho que não ajudou muito, o mais importante era esta coisa aqui [a justificação escrita]".

Sofia e Nuno afirmam que a sucessão é monótona quando a diferença entre dois termos consecutivos é constante, o que não está correto mas não afeta a resolução desta alínea.

I Quando é que uma sucessão é monótona?

N Quando é monótona é quando este valor [$u_{n+1} - u_n$]…

S Quando é crescente ou quando é decrescente ou pode ser crescente em sentido lato ou decrescente em sentido lato, não podem oscilar os valores.

N A diferença entre dois [termos] consecutivos é sempre a mesma, não é... é um número real, não é um número tipo com *n*.

Tanto na alínea 1.7 como na alínea 2.8 apresentam alguns exemplos que verificam a tese e a hipótese da afirmação. Contudo, estão conscientes que ao estudar estes casos não demonstram a conjetura e parecem pouco confiantes na sua capacidade de o fazer.

Na alínea 2.8 (A função inversa de uma função afim é uma função afim), estudam o comportamento de duas funções afim e verificam que a função inversa se trata de uma função afim por isso concluem que a afirmação é verdadeira. Reconhecem, contudo, que não conseguiram efetivamente demonstrar o resultado, uma vez que não verificaram todos os casos, como ilustra o seguinte diálogo:

I O que é que fizeram nesta demonstração?

S Pronto, arranjei uma função afim, tipo dei um exemplo e depois fiz a função inversa da que tinha arranjado e... pronto deu igual (...) Verifiquei que a inversa da afim era uma afim.

(...)

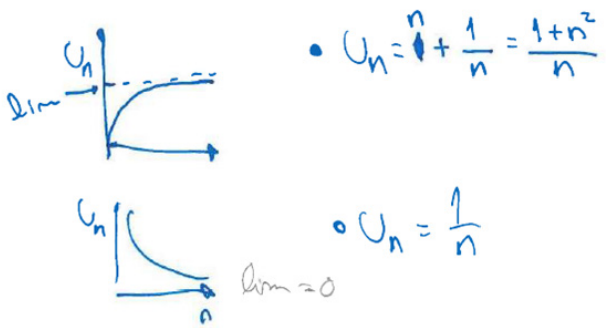


Figura 6. Resolução da alínea 1.7

I Porque é que só fizeram uma?

S Porque não tínhamos muito tempo e já estava quase na hora de ir embora.

N E acho que também mesmo que tivéssemos tempo não íamos calcular todas as funções afim.

Na entrevista acabam por conseguir demonstrar o resultado.

Na alínea 1.7 (Se uma sucessão é convergente então é limitada), os alunos apresentam duas sucessões convergentes, uma crescente e outra decrescente (ver figura 6). Na entrevista referem que pensaram primeiro nos gráficos e só depois no termo geral de cada sucessão (Sofia: "nós fazemos sempre os gráficos primeiro") e que com estas sucessões pretendiam representar todos os tipos de sucessões convergentes e mostrar que em todos os casos as sucessões vão ser limitadas. Para a primeira sucessão o gráfico representado não corresponde à expressão geral indicada ao lado (que nem corresponde a uma sucessão convergente).

Nesta alínea o critério de escolha dos exemplos foi a *primeira ideia* e a estratégia usada foi a *propriedades*. No momento da entrevista apercebem-se que se esqueceram do caso em que a sucessão não é monótona e admitem que não sabem se estes são os únicos tipos de sucessões convergentes.

I Vocês escolheram duas sucessões convergentes, certo?

N Sim, supostamente acho que faltava só aquela [sucessão $(-1)^n/n$ que é convergente, mas não monótona] que não usámos como exemplo, mas também é convergente. Mas sim, nós pensámos em exemplos de sucessões convergentes e eram limitadas.

I E a justificação é que como funciona para esses exemplos funciona para todos?

N Sim, porque nós lembramos-mos destes tipos, por isso assumimos que eram os únicos que havia... mas não sei se está bem.

Afirmações do tipo 1 para as quais os alunos indicaram o valor de verdade incorreto

Os alunos enganaram-se no valor de verdade nas alíneas 1.3, 1.4, 1.8, 1.11 e 2.3, o que resultou numa conjetura que não permite uma demonstração através de um exemplo. Consideremos a alínea 1.3 (Algumas progressões aritméticas são limitadas), que é verdadeira e pode ser demonstrada através da exibição de uma progressão aritmética com razão nula. Os alunos indicaram que a afirmação é falsa, por isso teriam de demonstrar que nenhuma progressão aritmética é limitada, o que não permite uma demonstração através de um exemplo. Na sequência da atribuição de um valor lógico de verdade errado ficaram perante circunstâncias diferentes das inicialmente pretendidas.

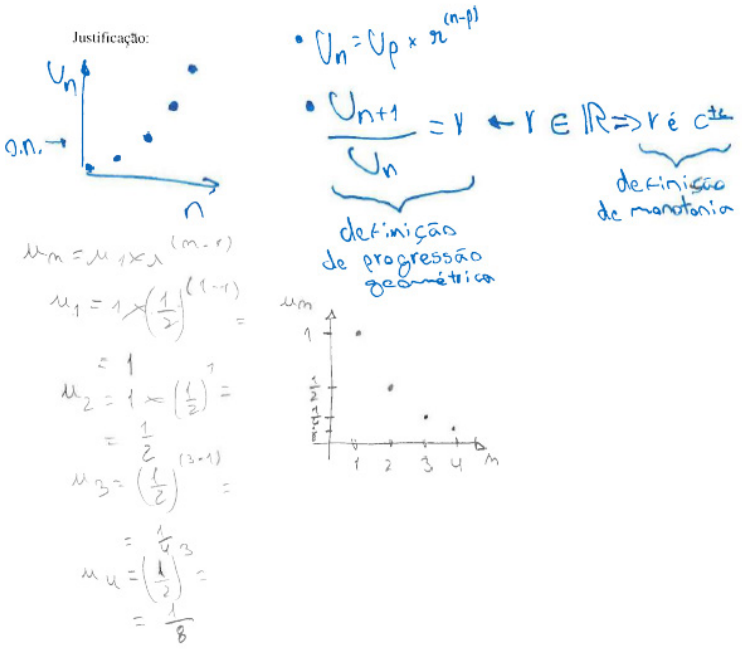


Figura 7. Resolução da alínea 1.4

Ainda assim, utilizam exemplos em todas as alíneas exceto na 1.8 (Se uma sucessão é limitada então é convergente), em que apresentam uma justificação incompleta e incoerente. Nas restantes alíneas exploram alguns casos, mas não conseguiram encontrar nenhum exemplo que permita demonstrar (um contraexemplo no caso da afirmação universal ou um exemplo que verifique a afirmação no caso de esta ser existencial) e terminam a alínea sem apresentar uma justificação coerente.

Na alínea 1.4 (ver figura 7), apresentam uma justificação utilizando a expressão geral das progressões geométricas e um exemplo concreto e *aleatório*, tomando $u_1=1$ e $r=1/2$. Este exemplo é acompanhado de uma representação gráfica da sucessão.

Afirmam então que como a razão de uma progressão geométrica é constante, a sucessão é monótona, uma ideia que talvez derive da prova ser assim para as progressões aritméticas.

Na alínea 1.3 (Algumas progressões aritméticas são limitadas), além do gráfico apresentam um exemplo particular (ver figura 8). Esta justificação estaria correta se considerássemos o caso da razão diferente de zero. Nas alíneas 1.11 (O produto de uma sucessão limitada com uma sucessão convergente é uma sucessão convergente) e 2.3 (Uma função pode não ser par nem ser ímpar) a demonstração consiste na exibição de alguns casos e não está completa.

Na alínea 1.11 os alunos testam dois pares de sucessões de modo a analisar se o produto era uma sucessão convergente ou não (ver figura 9). Ambos os testes utilizam a sucessão de termo geral $v_n=1/n$ como sucessão convergente. Para a sucessão limitada utilizam primeiro a sucessão de termo geral $u_n=1/n$ e depois a sucessão de termo geral $w_n=(-1)^n$. A sucessão $1/n$ é um exemplo *simples*, pois facilita as contas do cálculo do produto das sucessões e é um exemplo *típico* de uma sucessão convergente

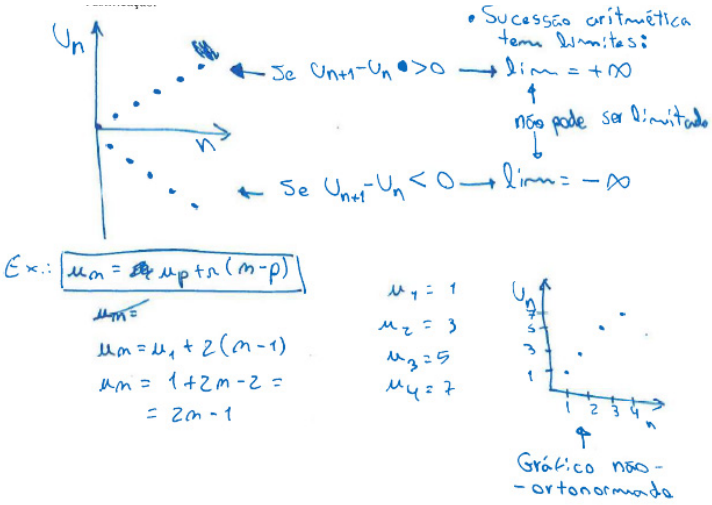


Figura 8. Resolução da alínea 1.3

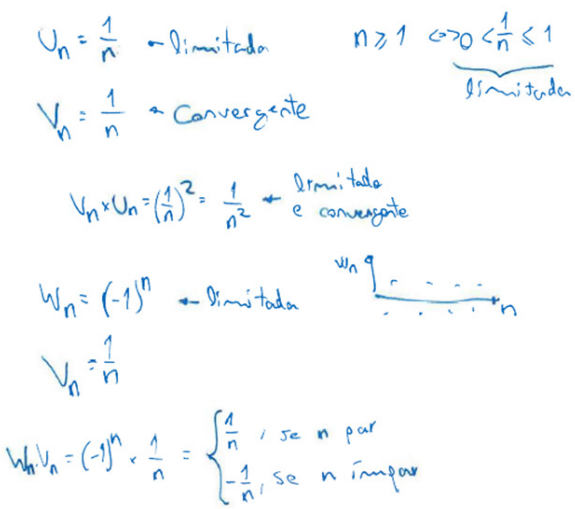


Figura 9. Resolução da alínea 1.11

e limitada, tendo sido várias vezes utilizada nas aulas.

Trata-se de uma *variação sistemática*, alterando apenas uma das sucessões, contudo, não conseguiram chegar a nenhum contraexemplo. Indicam que a afirmação é verdadeira sem fundamentar para além dos exemplos, mas estavam conscientes que estes não eram suficientes para demonstrar o pretendido.

Representações de sucessão e de função

Este par utilizou diferentes representações para expor o seu pensamento. Na primeira tarefa utilizam o gráfico em todas as alíneas menos três e fazem-no como auxiliar da demonstração, com a função de ilustrar ou ajudar a perceber o comportamento das sucessões. Utilizam também o termo geral da sucessão em várias alíneas, sendo que em duas delas escrevem também o termo geral da sucessão por ramos.

Na alínea 1.6 (ver figura 1) é possível perceber como o par articulou as diferentes representações: o gráfico para compreender e ilustrar o comportamento da sucessão e o termo geral para provar que esta não é monótona.

Na resolução da primeira tarefa apresentam doze gráficos, dos quais oito recorriam a pontos e quatro a uma linha continua. Estes últimos aparecem nas alíneas 1.1, 1.5 e 1.7 (ver figura 10) e todos associados à monotonia da sucessão. Em 1.1 o par pretende representar uma sucessão crescente, em 1.5 uma sucessão crescente em sentido lato e em 1.7 fazem uma tentativa de representar todos os tipos de sucessões convergentes.

Na tarefa 2 utilizam a representação gráfica da função em todas as alíneas a que responderam, sendo que na primeira alínea recorreram também ao diagrama de setas (ver figura 11).

Durante a resolução, lembravam-se primeiro do gráfico que lhes daria jeito e depois procuravam a expressão algébrica da função. Em todas as alíneas onde apresentam

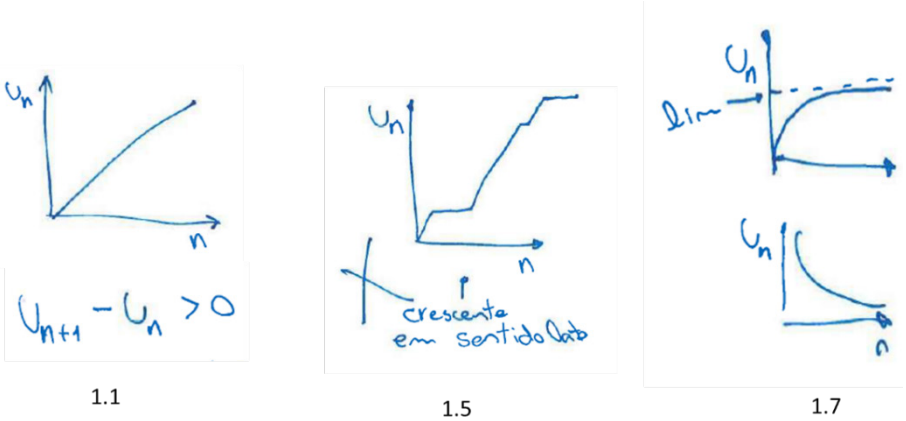


Figura 10. Gráficos das sucessões representadas através de uma linha contínua

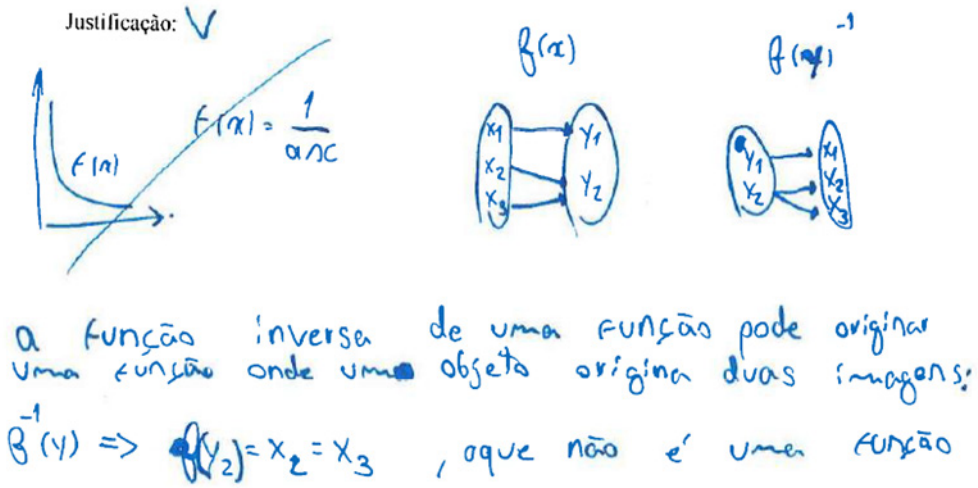


Figura 11. Resolução da alínea 2.1

um gráfico indicam também a expressão algébrica, exceto na alínea 2.10 em que não o fazem por achar que "não valia a pena" e "era complicado".
Constata-se assim que este par valorizou bastante os gráficos na resolução das duas tarefas, tanto para justificar como para ajudar a pensar ou ilustrar a demonstração.

Conclusão

De acordo com Knuth, Zaslavsky e Ellis (2019), os alunos apresentam um uso de exemplos muito diferente dos matemáticos, pois raramente recebem instruções explícitas sobre como pensar, usar e analisar exemplos estrategicamente. Estas dificuldades foram percetíveis nos pares participantes no estudo, tanto na escolha como no uso de exemplos.

Relativamente aos critérios ou estratégias usados na escolha dos exemplos, constatou-se que os alunos recorrem principalmente a exemplos *típicos* ou que representam a sua *primeira ideia*. No caso deste par, utilizaram o critério de escolha *exemplo típico* nas alíneas 1.6, 1.11, 2.1 e 2.10 e *primeira ideia* nas alíneas 1.7, 2.3 e 2.9.

Em geral, raramente recorrem a mais do que um exemplo e quando o fazem nem sempre é possível identificar uma estratégia na escolha. Estes alunos apresentaram algumas estratégias, como a estratégia *propriedades* (alínea 1.7), *variação sistemática* (alínea 1.11) e diversidade (na alínea 2.8), mas também apresentam alguns exemplos sem nenhuma estratégia identificável, recorrendo a uma justificação geral e a um exemplo particular para ilustrar o que pretendiam demonstrar (alíneas 1.3 e 1.4).

No que respeita ao propósito no momento da criação de exemplo, apresentam diversos propósitos no uso de exemplos, como *compreender como a conjetura funciona* (alínea 1.11), *transmitir um argumento geral* (alínea 1.5), *refutar a afirmação* (alínea 1.1) ou *reivindicar* (alínea 2.9).

Quanto à forma como a criação de exemplos e os tipos de exemplo procurados se relacionam com o sucesso da demonstração, observou-se um maior à vontade com as afirmações do tipo 1 (que admitem uma demonstração através de um exemplo) do que com as do tipo 2.

Quando os alunos tinham a ideia de que a afirmação admitia uma demonstração através de um exemplo, procuravam um que permitisse demonstrar o pretendido e normalmente conseguiam fazê-lo. Mesmo quando a *primeira ideia* não pretendia demonstrar o pretendido, conseguiam encontrar um exemplo adequado.

Por outro lado, quando achavam que tinham que realizar uma demonstração sem ser por exaustão ou apresentação de contraexemplo, frequentemente não respondiam ou apresentavam apenas um ou dois casos. No entanto, Sofia e Nuno estavam cientes de que não tinham demonstrado o pretendido, mas indicavam o valor de verdade na mesma.

Em relação à forma como os alunos expressam as suas ideias numa demonstração e como é que isso contribui para o sucesso da mesma, verificou-se que os alunos beneficiaram bastante do uso da representação gráfica de sucessão e de função. No entanto, nem sempre conseguiam passar de uma representação para outra de forma correta (ver alínea 1.7 e figura 6).

As conclusões deste estudo vêm assim contribuir para o reconhecimento da importância do trabalho em torno do uso de exemplos em relação com a demonstração matemática. Sugerem ainda a importância que a utilização e a fluência com diferentes representações podem ter sobre o grau de sucesso que os alunos conseguem alcançar no âmbito da demonstração matemática.

Referências bibliográficas

Aspinwall, L., & Shaw, K. L. (2002). Representations in calculus: two contrasting cases. *The Mathematics Teacher*, *95*, 434–439.

Boavida, A. M. (2001). Um olhar sobre o ensino da demonstração em Matemática. *Educação e Matemática*, *63*, 11–15.

Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

De Villiers, M. D. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras*, *24*(24), 17–24.

Ellis, A., Ozgur, Z., Vinsonhaler, R., Dogan, M.; Carolan, T., Lockwood, E., Lynche, A..Sabouri, P., Knuth, E., Zaslavsky, O. (2019). Student thinking with examples: The criteria-affordances-purposes-strategies framework. *Journal of Mathematical Behavior*, *53*, 263–283.

Fonseca, L. (2004). *Formação inicial de professores de Matemática: A demonstração em geometria*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Knuth, E., Zaslavsy, O., & Ellis, A. (2019). The role and use of examples in learning to prove. *Journal of Mathematical Behavior*, *53*, 256–262.

Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in School-Children*. Chicago: University of Chicago Press.

NCTM (2000). *Principles and Standards*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Paradinha, H., & Leuca, T. (2010). Um olhar sobre a construção de conexões matemáticas. *Educação e Matemática*, *110*, 27–32.

Rocha, H. (2019). Mathematical proof: from mathematics to school mathematics. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, *377*(2140), 1–12.

Sanderfur, J., Mason, J., & Watson, A. (2013). Generating and using examples in the proving process. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(3), 323–340.

Schoenfeld, A. H. (1994). What do we know about mathematics curricula?. *Journal of Mathematical Behaviour*, *13*, 55–80.

Steele, M. D., & Rogers, K. C. (2012). Relationships between mathematical knowledge for teaching and teaching practice: the case of proof. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *15*(2), 159–180.

Watson, A., & Chick, H. (2011). Qualities of examples in learning and teaching. *ZDM*, *43*(2), 283–294.

Yin, R. (2001). *Estudo de caso. Planejamento e Métodos* (2 ed.). Porto Alegre: Bookman.

Estruturar o raciocínio matemático numa aula de 2.º ano de escolaridade

Margarida Rodrigues

CIED, ESELx-Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa & UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

margaridar@eselx.ipl.pt

Lurdes Serrazina

CIED, ESELx-Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa & UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

lurdess@eselx.ipl.pt

Ana Caseiro

CIED, ESELx-Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa

anac@eselx.ipl.pt

Resumo.

Este artigo tem como objetivo analisar a interação entre uma professora do 2.º ano de escolaridade e os seus alunos focando a estruturação do raciocínio matemático. O estudo segue uma metodologia qualitativa de caráter interpretativo e centra-se na resolução de uma tarefa, integrada numa sequência de tarefas, numa turma de 25 alunos de uma escola da periferia de Lisboa. Os dados foram recolhidos através da observação participante, apoiada por gravações áudio e vídeo e dos documentos escritos dos alunos. A análise foi realizada através da análise de conteúdo, focada nas ações da professora que promovem o desenvolvimento do raciocínio dos alunos. Os resultados mostram que a professora através das suas ações levou os alunos a validar uma conjetura estabelecendo generalizações e respetivas justificações

Abstract.

This article aims to analyse the interaction between a second grade teacher and her students focusing on the structuring of mathematical reasoning. The study follows a qualitative methodology of interpretative nature and focuses on the resolution of a task, integrated in a sequence of tasks, in a class of 25 students from a school in the periphery of Lisbon. Data were collected through participant observation, supported by audio-video recordings and students' written documents. The analysis was carried out through content analysis, focused on the actions of the teacher that promote the development of students' reasoning. The results show that the teacher through her actions led the students to validate a conjecture establishing generalizations and their justifications.

Palavras-chave: raciocínio matemático; ações do professor; processos de raciocínio dos alunos.

Introdução

A importância de desenvolver o raciocínio matemático constitui um aspeto consensual no seio da comunidade de educação matemática, tanto em termos nacionais (Mata-Pereira & Ponte, 2018; Rodrigues, 2012) como internacionais (De Villiers, 2004; Harel & Sowder, 2007; Jeannotte & Kieran, 2017; Stylianides, 2009). As orientações curriculares internacionais convergem igualmente nesse sentido (NCTM, 2017). Também o documento curricular *Aprendizagens Essenciais* (ME, 2018), recentemente publicado em Portugal, sublinha esta importância no contexto escolar, em todos os temas matemáticos. Neste documento, é referido que a ação do professor no 1.º ciclo deve ser orientada por forma a que "os alunos desenvolvam a capacidade de raciocinar matematicamente, bem como a capacidade de analisar os raciocínios de outros" (ME, 2018, p. 4). Justifica-se, assim, a pertinência deste estudo centrado no raciocínio matemático dos alunos e em como pode o professor promover nos alunos esse raciocínio.

O presente artigo tem como objetivo analisar a interação entre uma professora de 2.º ano de escolaridade e os seus alunos focando a estruturação do raciocínio matemático.

Como promover o raciocínio matemático dos alunos

Muita da literatura mobiliza o constructo de raciocínio matemático sem, contudo, o definir de forma clara, tal como é salientado por Jeannotte e Kieran (2017). Passamos a apresentar as definições deste conceito por autores que se preocupam em clarificar o significado do mesmo. Jeannotte e Kieran (2017) colocam a tónica na comunicação e definem o "raciocínio matemático como um processo de comunicação com outros e consigo próprio que permite inferir afirmações matemáticas a partir de outras afirmações matemáticas " (p. 7). Sumpter (2013) assume uma definição muito diferente, definindo raciocínio matemático como uma "linha de pensamento adotada para produzir afirmações e chegar a conclusões na resolução de tarefas" (p. 1120), propondo dois tipos de raciocínio: criativo e imitativo, sendo que este último contempla o que a autora designa por raciocínio memorizado e raciocínio algorítmico. Stylianides (2009), por sua vez, associa o raciocínio à prova, encarando-os de um modo integral como a atividade envolvida no processo de dar sentido e de estabelecer conhecimento matemático. No presente artigo, assumimos a definição de Jeannotte e Kieran (2017), que consideramos convergente com a de Stylianides (2009), entendendo o processo de inferência como o processo de utilizar informação matemática já conhecida para obter novo conhecimento ou novas conclusões. Assim, nesta aceção não consideramos aspetos imitativos como sendo raciocínio.

Embora se possam considerar dois aspetos no raciocínio matemático, o estrutural e o processual, de acordo com Jeannotte e Kieran (2017), ambos deverão ser encarados de um modo dialético já que um e outro contribuem para uma construção mútua. Assim, as autoras rejeitam uma visão dualista ou dicotómica destes dois aspetos. O as-

peto estrutural tem uma natureza estática e compreende os vários tipos de raciocínio: a dedução, a indução e a abdução. O aspeto processual tem uma natureza dinâmica e temporal e compreende diferentes processos que as autoras dividem em duas grandes categorias: os relacionados com a procura de semelhanças e diferenças e os relacionados com a validação. Os processos da primeira categoria compreendem generalizar, conjeturar, identificar um padrão, comparar e classificar. Os processos da segunda categoria compreendem validar, justificar, provar e provar formalmente. Também Stylianides (2009), numa abordagem similar, e focando-se no aspeto processual, distingue duas grandes categorias, o processo de generalizar e o processo de fundamentar as afirmações matemáticas.

No que se refere ao processo de generalizar, Stylianides (2009) inclui no mesmo os processos de identificar um padrão e de formular uma conjetura, distinguindo-os, tal como Jeannotte e Kieran (2017), pelo facto de a associação de um valor epistémico de provável ou talvez estar apenas presente no processo de formular uma conjetura. Assim, segundo Stylianides (2009), o processo de identificar um padrão envolve identificar uma relação geral num determinado conjunto de dados enquanto o processo de conjeturar envolve formular uma hipótese acerca de uma relação matemática geral baseada numa evidência incompleta. O autor assume o ponto de vista dos alunos, na mesma linha de Harel e Sowder (2007), afirmando que os alunos estarão a conjeturar se estes formularem uma hipótese da qual não estão certos se é verdadeira ou falsa, requerendo, pois, que a mesma seja testada ou examinada. Assumimos, tal como Stylianides (2009), uma abordagem inclusiva, considerando que quando os alunos identificam um padrão ou conjeturam, também estão simultaneamente a generalizar, contrariamente a Jeannotte e Kieran (2017) que estabelecem uma distinção entre o processo de generalizar e os restantes processos relacionados com a procura de semelhanças e diferenças.

Os processos de validação, segundo Jeannotte e Kieran (2017), visam mudar o valor epistémico das afirmações matemáticas para verdade, falso ou mais provável, incluindo justificar e provar. Por sua vez, o processo de provar pode ser realizado através de um exemplo genérico ou de uma demonstração (Stylianides, 2009). O exemplo genérico usa um caso particular como representativo do caso geral.

No que respeita às ações do professor para promover o raciocínio matemático, Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013) propõem um quadro de análise articulando vários tipos de raciocínio como a generalização (associada ao raciocínio indutivo e abdutivo) e a justificação (associada ao raciocínio dedutivo). Nesse quadro, as ações de *Convidar* levam os alunos a um contato inicial com o que está sendo ou será discutido, e as outras ações apoiam as discussões matemáticas. Através de perguntas ou outros tipos de intervenção, as ações de *Guiar/Apoiar* conduzem os alunos, de forma discreta ou explícita, a continuar a participar na resolução de um problema já iniciado. Nas ações de *Informar/Sugerir* a responsabilidade do discurso matemático fica a cargo do professor que "assume o papel de introduzir informação, proporcionar argumentos, ou validar respostas dos alunos" (Ponte et al., 2013, p. 59). Já em *Desafiar*, o professor "coloca o aluno na situação de ser ele próprio a avançar em terreno novo, seja em termos de representações, da interpretação de enunciados, do estabelecimento de conexões, ou de

raciocinar, argumentar ou avaliar" (Ponte et al., 2013, p. 59).

Para Ellis, Özgür e Reiten (2018), "as discussões em sala de aula devem concentrar-se tanto em ideias matemáticas importantes quanto no desenvolvimento de significados matemáticos por meio de processos comunicativos (p. 2). Nesse processo, o papel desempenhado pelo professor é fundamental e vai desde selecionar tarefas apropriadas, a definir quando e como estimular o pensamento dos alunos, até incentivar que estes assumam a responsabilidade intelectual de construir e defender as suas ideias matemáticas. Estas autoras propõem um modelo de organização das ações dos professores em quatro categorias (elicitando, respondendo, facilitando e ampliando), de acordo com o seu potencial para apoiar o raciocínio dos alunos.

As ações incluídas na categoria *Elicitando o raciocínio dos alunos* são aquelas nas quais os professores pretendem extrair, identificar, esclarecer e entender as ideias dos alunos, que permitem os professores avaliar o pensamento dos alunos enquanto participam da discussão. A categoria *Respondendo ao raciocínio dos alunos* corresponde à forma como o professor reage ao pensamento dos alunos, como "valida as respostas dos alunos, corrige raciocínios ou estratégias de solução incompletos ou imprecisos ou encoraja os alunos a assumirem esses papéis" (Ellis et al., 2018, p. 12), contemplando também o redizer as afirmações dos alunos. Quando os professores respondem às ideias dos alunos, "desenvolvendo o seu pensamento, fornecendo informações, explicações ou estratégias alternativas de solução, ou incentivando os alunos a desenvolver soluções diferentes" (Ellis et al., 2018, p. 14), realizam ações que se enquadram na categoria *Facilitando o raciocínio dos alunos*. Assim, esta categoria subdivide-se em duas subcategorias: *guiar* e *fornecer*. *Ampliando o raciocínio dos alunos* diz respeito às ações que "aumentam as oportunidades dos alunos de ampliar o seu raciocínio matemático, particularmente em termos de generalizar as suas estratégias ou ideias e desenvolver justificações matematicamente apropriadas" (Ellis et al., 2018, p. 18). Esta categoria corresponde à categoria de *desafiar* proposta por Ponte et al. (2013) e abarca as ações que têm a intenção de promover um raciocínio matemático mais sofisticado, desta forma está no extremo de um *continuum* para o desenvolvimento do raciocínio matemático.

Metodologia

Este estudo segue uma metodologia qualitativa de caráter interpretativo. O projeto, onde se insere, utiliza uma metodologia de investigação baseada em design, visando produzir teorias locais de ensino que possam constituir materiais de trabalho para o professor (Gravemeijer & Cobb, 2013).

Os dados aqui apresentados foram recolhidos numa turma do 2.º ano com 25 alunos de uma escola pública de um bairro da periferia de Lisboa. A professora da turma é uma professora experiente, empenhada no seu desenvolvimento profissional, e com uma boa relação com a matemática.

A tarefa aqui analisada (Figura 1) foi concebida por Jean Marie Kraemer, membro da equipa do projeto, e resolvida na turma em 2 de dezembro de 2015. Propõe-se a cada

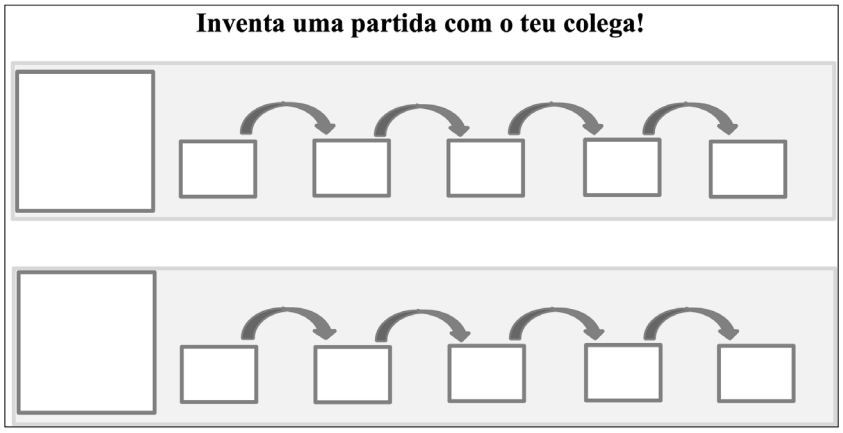


Figura 1. Tarefa explorada pelos alunos.

par de alunos que, assumindo o papel de rapaz ou de rapariga respetivamente, invente uma partida de berlindes e conclua o que acontece. A tarefa tem associado um raciocínio inversivo pois os alunos sabem que, em cada uma das jogadas, se um jogador ganha, o outro perde a mesma quantidade. Foi a sexta de uma sequência de oito tarefas que pretendiam desenvolver o raciocínio quantitativo aditivo e a flexibilidade de cálculo. Algumas das tarefas anteriores envolveram ganhos e perdas em tarefas com o contexto de jogo de berlindes. Na fase de resolução da tarefa, os alunos trabalharam a pares ou trios, tendo a atividade de dois pares (Paulo e João, Luís e Lúcia) sido videogravada, bem como a discussão coletiva com toda a turma. Estes pares foram selecionados por indicação da professora pela sua facilidade de comunicação e de expressão dos seus raciocínios. Neste artigo, focamo-nos apenas no trabalho realizado pelo par Luís e Lúcia, bem como na discussão coletiva.

Os dados foram recolhidos através de recolha documental (trabalhos escritos dos alunos) e da observação participante, complementada pelas transcrições das gravações. A análise de dados foi realizada através da análise de conteúdo tendo presente o quadro teórico apresentado antes.

Resultados

A emergência de uma conjetura

Na apresentação da tarefa, a professora começa por dar a palavra a um aluno que explica:

Aluno — Quando a rapariga ganha, o rapaz perde os berlindes que a rapariga ganhou. E quando o rapaz ganha, a rapariga é que perde.

Com base nas tarefas anteriormente exploradas, este aluno verbaliza a inversão presente num jogo de berlindes. Seguidamente, a professora apoia a intervenção do aluno, chamando a atenção da turma para a necessidade de se respeitar esta regra na invenção

da partida. A professora foca ainda o registo simbólico, já usado anteriormente, em que os alunos usam "+" para indicar os ganhos e "–" para indicar as perdas de berlindes.

Os alunos exploram a tarefa sem dificuldades, respeitando a regra enunciada antes. Alguns pares iniciam a partida com um número diferente para rapaz e rapariga; outros partem com o mesmo número. Todos eles chegam a números finais diferentes.

O par Luís e Lúcia inicia a partida com 12 berlindes para ambos, registando para a rapariga −5, +5; −4 e o inverso para o rapaz. Ao verificar que nesse momento, a rapariga tinha 8 berlindes e estava a perder em relação ao rapaz, Luís inverte a última jogada para +4 para a rapariga e −4 para o rapaz. Depois, conclui com −1 para a rapariga e +1 para o rapaz. Interpela a colega, personificando o rapaz e a rapariga como se fossem eles próprios:

Luís — Queres ganhar? Podemos empatar!

A partir deste momento, Luís e Lúcia apagam os últimos dois saltos, fazendo tentativas de novos números de ganhos e perdas para empatarem. Quando a professora se aproxima, Luís dá conta dessa intenção: "Professora, nós estamos a tentar empatar".

Como não conseguem chegar ao mesmo número final, Luís decide apagar tudo, secundado por Lúcia. Começam então pelo número 10 para ambos os jogadores e registam para a rapariga −5, +6 e o inverso para o rapaz. Entretanto, Luís vai ficando com algum desalento e comenta para as investigadoras quando estas se aproximam: "Nós não conseguimos empatar!...". Seguidamente, Luís regista −1 para a rapariga (e o inverso), e vendo que obtém 10 para ambos os jogadores, apaga e regista para o penúltimo salto −4 (e +4) para que o 10 seja o último e não o penúltimo número. Toma algum entusiasmo perante a possibilidade de empate e diz para a Lúcia: "Tentamos os dois chegar ao 10 e pronto!". Nesta sua afirmação, há já uma ideia de que para empatar, teria de obter como número final o mesmo com que iniciou para ambos os jogadores. Volta a trocar as jogadas, apagando desde o início e fazendo novos registos: +5, −6, +4 e o inverso para o rapaz. Registam 7 no penúltimo quadrado da linha do rapaz (como resultado de 11 – 4) mas não chegam a registar no quadrado correspondente da linha da rapariga (Figura 2) pois a professora inicia a discussão coletiva e ambos os alunos prestam atenção.

Provavelmente, Luís decidiu apagar e trocar os ganhos e perdas anteriormente registados para que Lúcia ficasse mais satisfeita ao chegar quase ao término das jogadas com mais berlindes, uma vez que esta, por várias vezes, verbalizava a vontade de ganhar, ao que Luís reagia dizendo que ela já tinha ganho nas partidas anteriores (numa outra tarefa explorada antes noutro dia).

Verifica-se, assim, que o par Luís e Lúcia confere uma nova complexidade à tarefa, acrescendo-lhe o desafio da pretensão do empate, a que atribuem o significado de terminarem com o mesmo número de berlindes. Durante a exploração, emerge, pois, a conjetura *É possível empatar* da qual não estão certos acerca da sua veracidade, pois não conseguiram concretizar o seu intento, após várias tentativas, e face ao facto de terem interrompido a exploração com a discussão da tarefa em turma. No entanto, no momento da discussão, Luís sente alguma confiança na sua veracidade, tal como veremos a seguir.

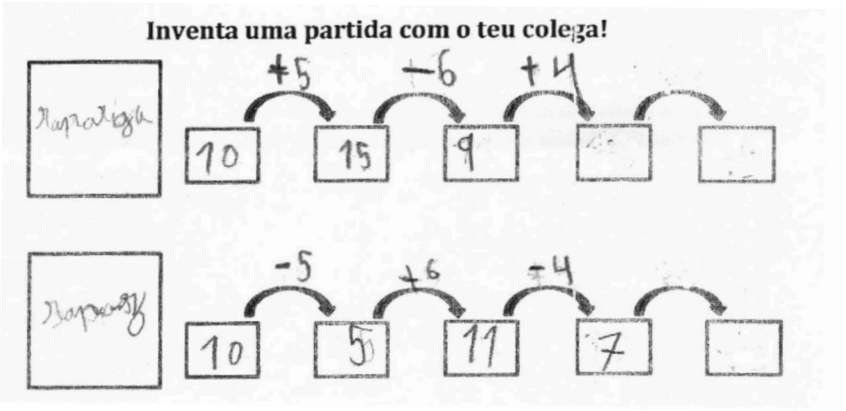


Figura 2. Tarefa explorada por Luís e Lúcia.

Discussão coletiva: As ações da professora e os processos de generalizar e justificar

A professora inicia a discussão, chamando um par para registar no quadro a sua invenção de partida. Foca a comparação entre o total de ganhos e de perdas ao longo de todo o jogo bem como o respetivo registo simbólico. Em seguida, e com a resolução feita pelo par anterior registada no quadro, interpela o par Luís e Lúcia sobre a sua intenção de empate. Apresentamos o extrato do diálogo que se seguiu:

Professora — Este grupo, o Luís e a Lúcia, lembraram-se de (…) tentar arranjar maneira de chegar ao final empatados. Mas empatados em quê? O que é empatados?

Aluno — Empatados com o mesmo número de...

Professora — São eles a falar. Luís, vocês querem que eles empatem?

Luís — Sim.

Professora — Empatem como? Acabem com o mesmo número aqui (*aponta para os dois quadrados finais*) ou que ganhem o mesmo (*aponta para o meio*)?

Luís — Eu acho que é acabar com o mesmo número, não sei.

Como podemos verificar pelo extrato, a professora começa por tentar compreender o pensamento dos alunos, questionando acerca do que consideram como "empatados", questão que repetiu diversas vezes (ação de *elicitar*).

Seguidamente, a professora tenta ampliar o raciocínio dos alunos, introduzindo a situação de os jogadores poderem ou não empatar em cada uma das jogadas. Dessa forma, segue-se o seguinte diálogo:

Professora — Agora a pergunta é: eles podem terminar empatados? Podem empatar aqui nas jogadas?

Turma — Não.

Professora — Nas jogadas podem empatar? Porquê?

Luís — Porque cada vez que o rapaz ganha a rapariga perde.

Professora — Então aqui nos saltos nós não conseguimos fazer isso, ou conseguimos?

Luís — Não. Foi isso que eu percebi.

Professora — Não. Como é que eles vão empatar aqui nos saltos? Mas vocês estão a tentar que eles terminem?

Turma — No mesmo número.

Nesta situação, a professora, através das questões que coloca, *encoraja os alunos a refletirem* sobre a possibilidade de empate em cada uma das jogadas. Simultaneamente, questiona pelo porquê, *solicitando uma justificação*. Interpelado pela professora, Luís *justifica* a razão de ser impossível empatar em cada uma das jogadas: "Porque cada vez que o rapaz ganha a rapariga perde". Esta justificação acaba por corresponder à regra enunciada na fase da apresentação da tarefa e que todos aplicaram na invenção da partida, mas que agora assume um novo cariz, já que serve o propósito de validar uma generalização, ou seja, a de que é sempre impossível empatar em cada uma das jogadas.

A discussão prossegue:

Professora — Para eles terminarem com o mesmo número, o que temos de pensar? Começam com o mesmo?

Luís — Começam. Começam com o 10.

A professora agora *encoraja os alunos a raciocinar* sobre as condições para terminar com o mesmo número, avançando com uma hipótese: "Começam com o mesmo?". Luís responde afirmativamente, indicando o número concreto com que iniciaram a partida.

Professora — Mas agora a pergunta é: para no final terminarem com o mesmo número, podem começar com o mesmo número?

Luís — Acho que sim.

(...)

Luís — Nós dantes quase que isso dava.

Professora - Então vamos lá ver se isso dava.

Luís - Mas ainda não acabámos.

Professora - Os colegas vão ajudar. Sim, mas nós ajudamos. Luís e Lúcia, agora são vocês.

Luís expressa que, com o trabalho autónomo, quase alcançou a pretensão de empatar, isto é, de iniciar e terminar com o mesmo número ("Nós dantes quase que isso dava"), manifestando, assim, a sua confiança na veracidade da conjetura. Em seguida, a professora *convida* o par Luís e Lúcia a apresentar a sua resolução, como forma de confirmar essa possibilidade.

Lúcia inicia o registo da sua resolução. A professora, entretanto, aproxima-se das investigadoras e comenta: "Eu não experimentei. Não estava à espera desta!". O facto de a professora não ter pensado previamente nesta situação fez com que a questão do empate fosse também desafiante para si própria. Luís dá um pulo de contentamento, exclamando "Ah! Já sei!" pois acaba de descobrir os últimos saltos para empatar, ao olhar para a sua folha inacabada. E regista no quadro "-3" e "+3". Os registos são apagados e rescritos de novo pois estavam trocados já que a ordem no quadro das linhas do rapaz e da rapariga era inversa à que o par registara na sua folha. Depois de Lúcia concluir o registo dos números até à penúltima jogada, Luís explica a partida, apontando para os números:

Luís — Eu comecei com 10. A Lúcia com 10. Eu, menos 5.

Professora — Perdeste 5.

Luís — Ela, mais 5.

Professora — Ela ganhou 5.

Luís — Depois o rapaz...

Professora — Ganhaste 6.

Luís — E a rapariga perdeu 6.

Professora — Sim.

Luís — Depois o rapaz perdeu 4 e a rapariga ganhou 4. Já sei como empatar! (*pula de contentamento*) Eu sei como empatar! Mais 3, menos 3!

Professora — Calma. Então e agora?

Aluno — Mais 3 para o rapaz, fica 10, e menos 3 para a rapariga, dá 10 também. Olha, começaram em 10 e acabaram em 10. Por isso, os dois ganharam zero.

Professora — Então dá para empatar, ou não, no final?

Turma — Dá.

A professora acompanha a explicação de Luís *redizendo*, por vezes, por outras palavras, o que ele refere, com a preocupação de ir dando sentido contextual de ganhos e perdas às expressões simbólicas registadas no quadro. Uma vez que não concluíra o trabalho no momento de exploração autónoma, Luís termina-o durante a apresentação, manifestando o seu entusiasmo ao obter o empate pretendido: "Já sei como empatar!".

Após chegarem à conclusão da possibilidade de empate no final do jogo, e de modo a auxiliar os alunos a refletirem sobre o que aconteceu ao longo das jogadas para que tal acontecimento fosse possível, a professora pede aos alunos para, através do exemplo apresentado, tentarem mostrar essa possibilidade (ação de *ampliar o raciocínio*). O extrato do diálogo seguinte ilustra essa situação:

Professora — Olha, vamos ver. É uma questão de pensar. Começaram em 10, o rapaz e a rapariga, e acabaram em...?

Turma — 10.

(...)

Professora — Vamos ver. Diz, Maria. A Maria queria falar. Maria?

Maria vai ao quadro explicar.

Maria — Eu sei porque é que eles empataram.

Professora — Porquê?

Maria — Porque 3+6 (aponta para +3 e +6) dá 9 e 4+5 (aponta para −4 e −5) também dá 9.

Professora — Então vá. Quanto é que deu aqui? (aponta para a linha do rapaz)

Maria — 9.

Professora — Mas como é que isso se escreve? Ganharam?

Maria — Mais 9.

Professora — E como é que eu escrevo o que perdeu?

Maria — Menos 9.

Professora — Que dá?

Maria — 0.

A professora vai registando $+9-9=0$.

Professora — Esta partida, tal como começou acabou. E este? (*aponta para a linha da rapariga*) Começa com? Aliás, quanto é que ganhou?

Maria — Mais 5.

Professora — E mais?

Luís — 4.

Professora — Dá mais quanto?

Maria e Luís — 9.

Professora — E depois, perdeu quanto? Perdeu 6 e perdeu?

Maria — 3.

Professora — Dá quanto?

Maria — Menos 9.

A professora vai registando +9 −9 = 0.

Professora — Anulam-se.

Como podemos verificar pelo extrato, a professora começa por *encorajar os alunos a raciocinar* sobre a situação. Verificando que uma aluna, Maria, se encontrava a raciocinar corretamente ("Porque 3+6 dá 9 e 4+5 também dá 9"), a professora foi *guiando* a sua explicação, de forma a garantir que todos os alunos da turma a compreendessem, começando por auxiliá-la a focalizar em aspetos específicos e fornecendo, através das questões que colocava, constantes orientações ao longo da discussão. Assim, Maria apresenta uma justificação que constitui uma forma de validação da conjetura através de um exemplo genérico. Quando Maria se apoia no exemplo da resolução de Luís e Lúcia para *justificar* a possibilidade de empate, fá-lo mostrando que as somas dos ganhos e das perdas de berlindes é igual e implicitamente *prova* que existirá empate para quaisquer partidas em que tal se verifique, generalizando, assim, para todos os casos nessas condições. No entanto, a forma como verbaliza a justificação é bastante económica e é a ação de *guiar* da professora que leva a uma explicitação do significado contextual das referidas somas, ganhos ou perdas, e que o facto de as mesmas serem iguais leva ao seu anulamento, resultando no final em 0 ganhos ou perdas. Assim, a professora *fornece* ela própria uma *explicação que sintetiza* a justificação de Maria para o caso da rapariga ("Esta partida, tal como começou acabou") que se aplica igualmente para o caso do rapaz, dada a natureza inversiva do jogo, em que o anulamento se verifica por se inverter os ganhos e perdas, mantendo-se os mesmos valores numéricos. Para o caso do rapaz, a professora segue o mesmo processo de focalização no balanço entre os ganhos e perdas, registando simbolicamente o anulamento das somas iguais.

A professora passa à síntese da discussão:

Professora — Olhem, vou fazer a pergunta outra vez. É possível empatar nos saltos?

Turma — Sim!

Professora — É possível empatar no final, a terminar com o mesmo número, que era o que eles queriam saber?

Turma — Sim.

Professora — É possível empatar no fim, quer dizer, terminar com o mesmo número e é possível empatar nos saltos desde que comece com o mesmo...

Turma — Número.

(...)

Professora (*olhando para Luís*) — Conseguiram tirar as vossas conclusões? (*olhando para a turma*) É possível terminar com o mesmo número, é possível empatar nos saltos desde que se

comece...
Turma — com o mesmo número.
Professora — com o mesmo número.

Na síntese da discussão, a professora *desafia os alunos a estabelecerem generalizações*, considerando o empate de terminar com o mesmo número, e simultaneamente, o empate nos saltos, encarados, não jogada a jogada, mas como balanço global de todo o jogo, em que o ganho de berlindes é nulo para ambos os jogadores, condição esta simultânea que só se verificará se ambos os jogadores começarem com o mesmo número. As generalizações, embora apoiadas pelo caso concreto da partida inventada por Luís e Lúcia, e expressas pela professora, são entendidas pelos alunos para quaisquer números. As outras variantes destas generalizações (acabar com o mesmo número, mas partindo de números diferentes sem empate no jogo global; empate no jogo global com ganhos nulos, mas partindo de números diferentes) não foram abordadas.

Conclusão

A forma como a professora foi interagindo com os alunos durante o trabalho autónomo levou-a a perceber que o par Luís e Lúcia tinha introduzido uma condição na tarefa, não prevista inicialmente, mas que a tornava mais complexa — acabar o jogo com os dois jogadores empatados. Condição essa que lhes tinha dificultado a conclusão da tarefa durante o trabalho autónomo. O empate foi procurado persistentemente pelos dois alunos talvez por razões emocionais, para que nenhum dos dois terminasse a tarefa a ganhar ou a perder. A possibilidade de empate foi assumida pelos alunos como uma conjetura acerca da qual não estavam certos da sua veracidade (Jeannotte & Kieran, 2017; Stylianides, 2009), embora tivessem alguma confiança na mesma. Assim, foi através da tentativa e erro que os alunos abordaram a condição pretendida, registando e apagando sucessivamente sempre que a quantidade de berlindes final não era a mesma para rapaz e rapariga.

Na discussão coletiva, a professora convidou (Ponte et al., 2013) o par a explicar à turma o que pretendia, questionando-o de modo a clarificar a ideia de empate no contexto do jogo, e assim, através da ação de elicitar, compreender o pensamento dos alunos (Ellis et al., 2018). Apesar de se ter deparado com uma situação não prevista por ela, a professora, através da ação de guiar (Ellis et al., 2018; Ponte et al., 2013), conduziu o diálogo com os alunos, de modo a levá-los a confirmar a sua conjetura naquele caso particular. Conseguiu, assim, ampliar o raciocínio dos alunos, desafiando-os (Ellis et al., 2018; Ponte et al., 2013) a mostrarem como a sua conjetura era válida e justificando porque era válida através de um exemplo genérico (Stylianides, 2009). Neste processo, a ação da professora foi a de facilitar o raciocínio dos alunos, fornecendo explicações (Ellis et al., 2018) que ajudaram a clarificar a ideia que tinha sido expressa pelos alunos. Para além disso, a professora desafiou os alunos a estabelecerem generalizações, procurando fazer uma síntese sobre o que globalmente acontecia aos ganhos e perdas

na situação em que os jogadores iniciavam e terminavam o jogo com o mesmo número. Deste modo, os alunos avançaram na estruturação do seu raciocínio. As ações da professora foram aqui cruciais, primeiro levando o par de alunos a clarificar o seu pensamento de modo a perceberem o que significava "empatar" naquele caso, posteriormente partilhando a situação com toda a turma de modo a envolver todos no processo, garantindo que o fundamento matemático da possibilidade de empate tinha sido compreendido por todos.

Referências bibliográficas

De Villiers, M. (2004). The role and function of quasi-empirical methods in mathematics. *Canadian Journal of Science*, *4*(3), 397–418.

Ellis, A., Özgür, Z., & Reiten, L. (2019). Teacher moves for supporting student reasoning. *Mathematics Education Research Journal*, *31*(2), 107–132. DOI: 10.1007/s13394-018-0246-6

Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2013). Design research from the learning design perspective. In T. Plomp, & N. Nieveen (Eds.), *Educational design research* (pp. 72–113). Enschede, The Netherlands: Netherlands Institute for Curriculum Development (SLO).

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805–842). Charlotte: Information Age Publishing Inc., & NCTM.

Jeannotte, D., & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(1), 1–16. DOI: 10.1007/s10649-017-9761-8

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2018). Promover o raciocínio matemático dos alunos: Uma investigação baseada em design. *Bolema*, *32*(62), 781–801. DOI: 10.1590/1980-4415v32n62a02

Ministério da Educação (2018). *Aprendizagens essenciais. Matemática, 2.º ano*. Lisboa: DGE. Consultado a 17 de maio de 2019, em http://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais-ensino-basico.

National Council of Teachers of Mathematics (2017). *Princípios para a ação: Assegurar a todos o sucesso em Matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática. (Obra original em inglês publicada em 2014)

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante*, *22*(2), 55–81.

Rodrigues, M. (2012). A integração curricular da demonstração. *Da Investigação às Práticas: Estudos de Natureza Educacional*, *2*(2), 53–77. DOI: 10.25757/invep.v2i2.50

Stylianides, G. (2009). Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. *Mathematical Thinking and Learning*, *11*(4), 258–288. DOI: 10.1080/10986060903253954

Sumpter, L. (2013). Themes and interplay of beliefs in mathematical reasoning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *11*, 1115–1135.

Software Geogebra e formação continuada: uma experiência com professores das séries finais do Ensino Fundamental I

Ivete Cevallos

Universidade do Estado de Mato Grosso - Brasil
ive.cevallos@gmail.com

Josimar de Sousa

Universidade do Estado de Mato Grosso - Brasil
Jsousa.mt@unemat

Resumo

Este estudo, qualitativo, busca compreender as contribuições do software Geogebra como recurso didático para professores das séries finais do Ensino Fundamental I em formação continuada por de uma oficina e intervenção pedagógica na construção de quadriláteros notáveis. Foram sujeitos da pesquisa dois professores de uma escola pública da cidade de Cáceres-Brasil. A análise dos dados pautou-se pelas narrativas produzidas em seis encontros. Os professores revelaram-se motivados com o resultado da intervenção, no entanto, ressaltam a ausência na formação continuada do conteúdo de Matemática utilizando tal ferramenta. Constatou-se nos encontros e nas narrativas que os professores apresentaram enormes dificuldades sobre o conhecimento matemático, mais especificamente do saber da geometria, que se constituíram como obstáculo para a apropriação pedagógica de tal recurso. Esse fato revela o complexo processo da formação matemática nos cursos superiores de pedagogia.

Abstract.

Palavras chave: Geogebra; Quadriláteros notáveis; Formação Continuada.

Introdução

As pesquisas em Educação têm se avolumado de forma significativa nas últimas décadas. Dos temas mais estudados, destaca-se a formação de professores em articulação com o contexto de sala de aula, o processo ensino e aprendizagem e o uso de novas metodologias. A Educação Matemática também tem se destacado, enquanto campo profissional e científico, evidenciando a diversidade de possibilidades quanto às tendências temáticas e metodológicas, dentre esses estudos destacamos Ponte, 2000; Nacarato, 2013; Borba e Penteado, 2007; Fiorentini e Lorenzato, 2006.

No entanto, essas pesquisas não têm repercutido em mudanças significativas da prática profissional do professor em sala de aula, ou seja: há um descompasso entre o que se tem produzido sobre as melhores práticas do professor de matemática e a forma como as aulas, ainda hoje, são desenvolvidas nas escolas. Este descompasso se acentua quando nos reportamos ao curso de Licenciatura em Pedagogia, visto que os professores passam por uma formação generalista e mesmo cursando disciplinas com conteúdos específicos e metodologias para o ensino da matemática a carga didática é bastante reduzida, e não há tempo suficiente conforme ressalta Nacarato (2013,) "para a constituição de um grande repertório de saberes conceituais, epistemológicos e pedagógicos sobre essa área do conhecimento" (p, 30).

A continuação dessa situação causa estranhamento no sentido de que durante a formação inicial ao futuro professor é disponibilizado acesso às novas tecnologias por diversos meios e ações como elaboração e execução de plano para ensino de matemática por meio dos computadores, cursos de extensão sobre o uso de *soft*, ao exemplo do Geogebra, para o futuro professor ir incorporando as suas práticas para a sala de aula. Há que tomar em conta a escola e suas condições como espaço de trabalho e de práticas do futuro professor como uma realidade que pode limitar o trabalho de quem chega.

A compressão de tal fato implica necessariamente em repensar a formação continuada visando a atender as lacunas da formação inicial, as necessidades da escola que necessita de profissionais mais competentes e melhores formados como professor. De nada adianta que o processo da formação continuada que não leve em conta a demanda da escola e do professor. De outro modo, pouca mudança em termos didáticos ocorrerá na escola.

Tais demandas impostas pela sociedade em transformação de hábitos e cultura e, como preconizado pelos documentos oficiais sobre educação no Brasil, as novas tecnologias não tem garantido um lugar consistente à universidade como espaço de formação profissional, o quê pode comprometer as mudanças tanto na formação inicial quanto o processo de formação continuada do professor e, por conseguinte, põe em xeque a qualidade das práticas profissionais do professor na sala de aula.

Esse fato vem se confirmar como enunciado por Amado e Carreira (2008, p. 287) ao ressaltarem que "a utilização do computador na sala de aula está longe de ser uma prática comum. A mudança do papel do professor e do aluno na aula com tecnologia constitui uma das maiores resistências à sua utilização."

Diante disso, o presente estudo busca compreender a concepção dos professores, das séries finais do Ensino fundamental I que lecionam matemática, ao utilizarem o *Software* Geogebra como instrumento de intervenção pedagógica em sua prática profissional a partir da realização de uma oficina envolvendo a construção, a nomenclatura, a caracterização e propriedades dos quadriláteros notáveis.

Essa busca foi motivada pela seguinte questão: Quais as contribuições do *Software* Geogebra como recurso didático/metodológico para o ensino geometria (quadriláteros notáveis) nas séries finais do Ensino Fundamental ?

A TECNOLOGIA COMO RECURSO DIDÁTICO/METODOLÓGICO: O PAPEL DO PROFESSOR E DO ALUNO COMO PROTAGONISTAS

Muitas são as questões que envolvem a utilização de recursos tecnológicos em sala de aula, como já mencionado há um forte discurso que as tecnologias podem motivar os alunos tornando-os mais participativos, estimulando a descoberta e, por conseguinte, um aprendizado mais significativo.

Nessa perspectiva de ensino Ponte (2000) ressalta que o professor e o aluno trabalham em conjunto na elaboração do conhecimento. As aulas que predominam em uma esfera bem definida de conhecimento de natureza disciplinar, passam a assumir uma função educativa mais motivadora e com maior envolvimento dos alunos.

Para tal, é necessário que o professor mude a sua forma predominante de agir, isto é: "de (re)transmissores de conteúdo, passam a co-aprendentes com os seus alunos, com os seus colegas, com outros actores educativos e com elementos da comunidade em geral" (Ponte, 2000, p.77).

A ideia de professor como alguém que teve uma formação superior em determinado momento e que se admitia como suficiente ao longo da vida profissional, parece não fazer mais sentido. E, não basta que tenha conhecimento das novidades tecnológicas,

> [...] ele precisa também de aprender a selecionar as mais adequadas às suas aulas. Em suma, o professor tem de estar atento às mudanças que surgem, tem de aprender a perceber o que é mais adequado às suas práticas e encontrar formas produtivas e viáveis de integrar novos recursos no processo de ensino/aprendizagem da matemática. Tem de estar preparado para aprender continuamente e, muitas vezes, com os seus alunos. (Amado & Carreira, 2008, p. 288)

Nessa perspectiva coadunamos com estes autores, por entender que assumir essa postura de educador implica em sair da "zona de conforto", ou seja, deve haver deslocamento nas ações educativas: de transmissão dos saberes para (co)aprendizagem permanente, conforme enfatiza Ponte (2000, p.77) "é uma das consequências fundamentais da nova ordem social potencializadas pelas TICs e constitui uma revolução educativa de grande alcance".

Os professores sentem-se incomodados e entendem que é preciso mudar sua prática de atuação pautada em um modelo instrucionista, por outro lado apontam muitas razões e dificuldades que os impedem de sair desse estado de "inércia". Nesse sentido, Borba e Penteado (2007, p. 56) ressaltam que

> Muitos reconhecem que a forma como estão atuando não favorece a aprendizagem dos alunos e possuem um discurso que indica que gostariam que fosse diferente. Porém, no nível da prática, não conseguem se movimentar para mudar aquilo que não agrada. Acabam cristalizando sua prática numa zona dessa natureza e nunca buscam caminhos que podem gerar a incertezas e imprevisibilidade.

Esse modelo de prática onde tudo é previsível é de certa forma um porto seguro para o professor tornando-se um impasse para o "movimentar-se" em direção ao próprio desenvolvimento profissional – que poderia resultar em uma prática profissional em que o aluno seja o protagonista de sua aprendizagem e o professor, mediador desse processo com vistas a construção do conhecimento matemático por das tecnologias.

Tomando isso em conta, questionamos: Em quais circunstâncias os professores conseguem lançar-se aos desafios para superarem tais modelos de práticas que os desagradam?

Diante de tais questionamentos, como já enunciado por Amado e Carreira (2008), a perspectiva de superação das práticas cristalizadas implica ao que Borba e Penteado (2008) denominam de *zona de risco* e como advoga Ponte (2007), o professor deve ser:

> [...] um explorador capaz de perceber o que lhe possa interessar, e de aprender, por si só ou em conjunto com os colegas mais próximos, a tirar partido das respectivas potencialidades. Tal como o aluno, o professor acaba por ter de estar sempre a aprender. Desse modo, aproxima-se dos seus alunos. Deixa de ser a autoridade incontestada do saber para passar a ser, muitas vezes, aquele que menos sabe (o que está longe de constituir uma modificação menor do seu papel profissional) (Ponte, 2007, p. 77)

Nesse sentido, dois aspectos que merecem atenção são: um trata sobre a forma como os professores podem vir a fazer uso das novas tecnologias, visto que a inserção desses recursos não necessariamente é garantia de uma aula inovadora/exploratória com a participação ativa dos alunos na elaboração de seu próprio conhecimento. As novas tecnologias podem ser utilizadas como meio de "passar" a informação mantendo a abordagem pedagógica vigente, como já afirmado por Valente (1995, p. 41): "informatizando o processo instrucional e, portanto, conformando a escola com a tradição instrucionista que ela já tem".

Nessa perspectiva de aula, que é o segundo aspecto de atenção, cabe aos alunos o papel de meros espectadores, muito embora possa se considerar que a aula se tornou moderna com alguns adereços "novidadeiros" que extrapola o modelo de ensino tradicional. Para o professor de matemática melhorar suas ações letivas, faz-se necessário melhorar também seus conhecimentos para usar as novas tecnologias, saber o conteúdo e como unir um ao outro para melhorar as práticas na sala de aula e que também a formação continuada incorpore os potenciais de uso do Geogebra e do computador e com isso, o professor, segundo Sena (2014), possa "compreender melhor seu papel na sala de aula e o papel que o computador representa na construção do conhecimento matemático".

A tecnologia por si só pouco pode contribuir com a formação do professor e com desenvolvimento de suas práticas. O acompanhamento sistemático e criterioso do

professor em suas ações letivas pode sortir outro efeito. Os estudos de Amado (2015) afirma que o *Mentoring* é uma estratégia que, quando adotada contribui significativamente na implementação das tecnologias nas práticas do professor em formação inicial. Compartilhando dessa afirmação, considera-se também que o mesmo poderá acontecer com a professor em formação continuada.

Formação continuada e as tecnologias como recurso pedagógico: impasses e desafios

O conhecimento profissional do professor em termos de conteúdo e de como ensinar é de suma importância para o professor poder conduzir a sua prática letiva ao ensinar matemática na educação básica. No contexto do saber ensinar, o uso da tecnologia já se presente nas ações de formações do professor de matemática e também está presente na sala de aula faz tempo. A formação continuada precisa promover ações didático-pedagógicas neste sentido.

As primeiras ações visando estimular e promover a implementação do uso da tecnologia informática como ferramenta pedagógica no Brasil ocorreu em 1981 com a realização do I Seminário Nacional de Informática Educativa, na Universidade de Brasília (UnB), promovido por uma equipe intersetorial, representada por integrantes da Secretaria Especial de Informática (SEI), do Ministério da Educação e Cultura (MEC), do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e da financiadora de Estudos e projetos (Finep)

Este evento culminou em três projetos sendo eles: Educom, - cujo objetivo era criar centros pilotos em universidades brasileiras para o desenvolvimento de pesquisas sobre a diversas aplicações do computador na educação; Formar I e II – buscavam formar recursos humanos para o trabalho na área de informática educativa- respetivamente nos anos de 1987 e 1989. Em 1986, os centros piloto do Projeto Educom e suas ações foram avaliadas. O relatório de avaliação revelou que as atividades propostas estavam sendo desenvolvidas e que tinham possibilidades de atingir suas metas, mesmo enfrentando financeiras e repasses de bolsas de estudos.

Borba e Penteado (2007) enfatizam que a experiência acumulada com esses projetos serviu de base para outro programa do governo. Trata-se do Programa Nacional de Tecnologia Educacional (PROINFO) – lançado em 1997 pela Secretaria de Educação à Distância (Seed/MEC) cujo objetivo era estimular e dar suporte para a introdução de tecnologia informática nas escolas do Ensino Fundamental e Médio em todo o país. Foram equipadas mais de 2000 escolas e foi investido na formação de mais de 20 mil professores por meio de 244 Núcleos de Tecnologia Educacional (NTE) instalados em diversas partes do país.

O princípio adotado na formação do professor era de multiplicadores, formados em cursos especialmente para promover atividades de formação em suas bases com os colegas que atuam nas escolas de sua cidade.

Se considerarmos a partir da implementação do ProInfo — Programa de Formação voltado para formação de professores, já decorreram 20 anos e ainda hoje a resistência dos professores em inserir novas tecnologias nas aulas perduram, apesar das evidências de que os alunos se motivam diante de atividades que envolvem tais recursos, o professor continua inseguro para gerir suas aulas.

Em face do exposto surgem algumas questões inquiridoras: Como vem, atualmente, ocorrendo o suporte ao professor no que diz respeito a formação para a inserção das novas tecnologias como um recurso didático/metodológico? Os cursos de formação continuada mais especificamente para professores do Ensino Fundamental I têm atendido às necessidades formativas do professor quanto à utilização dos recursos tecnológicos? Sobre disso, mais o MEC investiu na implantação de laboratórios de informática pelo país por meio de uma proposta de Ensino Médio Integrado à Educação Profissional, expressa pelo Programa Nacional de Acesso ao Ensino Técnico e Emprego (Pronatec), criado através do Decreto nº 6.302 em 2007. No entanto a renovação das práticas dos professores para ensinar matemática continuava apoiadas na tradição instrucionista, com já afirmado por Valente (1995) Isto pode significar que pouco mudará enquanto os cursos de formação não tiverem como foco as reais necessidades formativas dos professores e também estabelecer espaços para a reflexão e constante auto avaliação sobre o que aqueles cursos fazem com fins de tomada de consciência e construção de autonomia profissional docente ainda no curso de formação inicial.

Em se tratando da formação continuada com foco nas novas tecnologias como recurso didáticos/metodológicos, nos dias atuais, pouco se tem feito em termos de ações nas especificidades das respectivas disciplinas que compõem a matriz curricular da escola. E, quando o assunto é a disciplina de matemática mais especificamente sobre os softwares educativos, são raros os cursos de formação que se voltam para atender as demandas formativas desse público.

Vale ressaltar que o Estado de Mato Grosso conta com o Centro de formação para professores (CEFAPRO) – instituído e legitimado pela Secretaria de Estado de Educação (SEDUC/MT) busca, por meio do Projeto Sala de Educador, promover formação continuada aos professores da Educação básica fundamentada nos princípios da pesquisa colaborativa e da pesquisa ação, cujo objetivo é de criar espaço de formação; reflexão; inovação, sendo que as ações formativas se definem pelo processo colaborativo.

No entanto, as ações formativas do CEFAPRO ações não vêm atendendo as demandas da formação continuada, como o aprendizado didático/metodológico das novas tecnologias para o ensino/aprendizagem da matemática na sala de aula. Entende-se, dessa forma, que deve haver, também, o acompanhamento em sala de aula com a presença de um formador; desde o planejamento conjunto e posterior experimentação das atividades e que todo esse processo seja acompanhado de reflexão escrita/oral conjunta que resultará em um processo de retroalimentação para ambos.

Um contexto favorável para a reflexão da prática são as narrativas, visto que esse processo auxilia na tomada de consciência da aprendizagem do professor. Recomenda-se, também, após a escrita, reflexões em grupo cujos objetivos primordiais são:

> [...] descontruir as relações verticalizadas e fomentar entre adultos mais autonomia de modo que o acompanhamento se realize em processos de trocas horizontais entre os participantes, convidando, nesse sentido, as novas aprendizagem sobre si mesmo e sobre o outro como partícipes autônomos e responsáveis no seio de uma ação coletiva. (Passegi & Gaspar, p. 67)

Em se tratando de formação continuada, o processo de reflexão mediado por um professor formador em um ambiente que favoreça a discussão e partilha de significados é fundamental para os professores desenvolverem a capacidade de reflexão sobre a prática, com o intuito de melhorarem suas habilidades profissionais.

Em face do exposto é pertinente ressaltar que é muito provável que não haverá mudanças de postura dos professores frentes às suas práticas enquanto esta pautar-se pelo isolamento profissional. Nesse sentido, Nacarato (2013, p.26) ressalta que "Refletir é inerente ao ser humano, mas a reflexão enquanto prática transformadora não ocorre individualmente. A presença do outro é fundamental" Para a autora, este espaço de formação não pode se limitar a um espaço de encontros e conversas entre professores,

> […] essas conversas precisam ser mais amplas e devem possibilitar a construção conjunta de conhecimentos. Elas precisam pautar-se em descrições densas e problemáticas vividas em sala de aula, que ao serem discutidas, problematizadas e refletidas, conduzem a aprendizagens significativas. (Nacarato, 2013, p.26)

O enunciado pela autora reforça a ideia da importância de aproximação entre escola, universidade e CEFAPRO, com o objetivo de promover ações que possibilitem ao professor avançar em seus conhecimentos profissionais, com destaque ao uso de tecnologia para o professor desenvolver suas práticas na sala de aula ao ensinar conteúdos de matemática, uma vez que a falta de aperfeiçoamento da maioria dos professores em termos de uso da tecnologia compromete a melhoria e a efetivação de propostas de aulas por um ensino de matemática inovador (Quartieril & Cruz, 2015; Araújo e Santos, 2015).

A aproximação escola-cefapro-universidade precisa, então, promover uma formação continuada de modo que os professores vivenciem positivamente acréscimos didáticos-pedagógicos ao seu conhecimento profissional e, portanto, as suas praticas na sala de aula. Como o profissional deve se preparar para novos desafios na sala de aula, os grupos colaborativos têm se revelado uma ação positiva no sentido de contribuir para o professor construir conhecimento matemática, promovendo a reflexão das experiências vivenciadas durante a formação do professor, tornando, portanto, uma via de mão dupla no sentido de fomentar e retroalimentar as discussões sobre a adequação do currículo do curso e, desta maneira, encontro e conversas entre professores serão lançados ao patamar de momentos e oportunidades de construção de conhecimento sobre as práticas de sala de aula, sobre a formação continuada, sobre a docência etc.

Metodologia

A presente pesquisa, de cunho qualitativo, foi desenvolvida com dois professores Pe-

dagogos que lecionam Matemática nas séries finais do Ensino Fundamental I de uma escola pública da cidade de Cáceres — Estado de Mato Grosso — Brasil, no período, outubro de 2016 a janeiro 2017. Os dados coletados se pautaram pela compreensão, por meio das narrativas, sobre as contribuições do *Software* Geogebra como recurso didático/metodológico para aqueles professores das séries acima mencionados e que participarem de uma oficina composta por seis encontros, e de uma intervenção pedagógica em sala de aula envolvendo os quadriláteros notáveis para o processo de ensino e aprendizagem.

As oficinas formaram o momento de imersão didático-pedagógico para, além de, saber lidar com o soft Geogebra, aprendessem também a trabalhar com tal ferramenta para ensinar para ensinar geometria. Inicialmente, os participantes das oficinas conheceram o funcionamento do Geogebra, de seguida vieram as orientações de como esta ferramenta pode ser usada para construção de figuras geométricas, para por fim, construir os poliedros notáveis. Ao final, os participantes foram avaliados por escrita sobre o aprendizado do conteúdo. Para compreender melhor suas dificuldades e desafios que enfrentaram com o uso do computador, o *soft* Geogebra e uso desses dois na construção do conteúdo geométrico, produziram suas narrativas, de onde vieram os dados para analisados aqui e já indicados acima. As oficinas representaram um momento singular para o professor de matemática lidar com as tecnologias como ferramenta para o ensino de geometria, compondo, assim, um caminho de ação para a condução do ensino de conteúdos geométricos.

Apoiam a escolha metodológica do estudo: Passeggi (2013) que entende as narrativas como um gênero acadêmico de pesquisa, que se constitui na arte de tecer publicamente a figura de si, incluindo aspectos escolar e profissional; e Nóvoa e Finger (2010) que consideram que as narrativas são vias passíveis de produzir conhecimentos, favorecem o aprofundamento teórico sobre a formação do humano e, enquanto prática de formação conduz o diálogo de modo mais proveitoso consigo mesmo, com o outro e com a vida.

Os dados coletados serão analisados tendo como base os seguinte eixos:

— Concepções sobre a utilização da tecnologia como recurso didático

— Impasses e desafios na utilização do *Software* Geogebra em sala de aula

Análise dos dados

Os professores sujeitos da presente pesquisa têm 27 e 10 anos de docência, respectivamente, são pedagogos, e atuam na rede pública estadual. Para manter o anonimato os denominaremos por PA e PB.

Em se tratando da formação universitária no que se refere à preparação para a utilização dos recursos tecnológicos como metodologia de ensino/aprendizagem, o relato de PA evidencia que a graduação não proporcionou tais vivências.

Os cursos que participei não foram na graduação. Aparecerem alguns cursos, na escola, da própria universidade para mexer com o Linux. Não tinha muita noção de como mexer. (PA, 2017)

O que se denota é que à época em que PA cursou Pedagogia, as questões que envolvem recursos tecnológicos eram muito incipientes. Como forma de minimizar essa lacuna, caberia a universidade em parceria com o CEFRAPO promover formação continuada para atender tais demandas.

O mesmo ocorre com o professor PB que participou como aluno bolsista de iniciação científica e, portanto, teve mais proximidade com as ferramentas tecnológicas, mas não faz referência a uma determinada disciplina que proporcionasse tais vivências, como narra a seguir:

Eu tive na universidade quando estava no projeto de Iniciação científica. Trabalhamos com o Windows. Lá tinha muita estrutura e quando vou para a escola utilizava mimeografo. (professor PB)

Como se pode depreender do relato PB é que o curso não proporcionou no âmbito da prática pedagógica, vivências; discussões e reflexões sobre as novas metodologias, mais precisamente sobre a utilização de recursos tecnológicos. Por um lado, vale ressaltar que PB formou-se quando as escolas já estavam equipadas com laboratórios e, dessa forma, acaba por ser até contraditório um curso que não contempla tais discussões e vivências tecnológicas aos seus licenciandos. Por outro lado PB se aproxima das novas tecnologia ainda enquanto licencianda não como uma componente da matriz curricular e também não tinha como propósito uma reflexão didático/metodológica, por sua vez à época ao ingressar na carreira docente a escola em que foi lecionar oferecia apenas o mimeografo como recurso tecnológico ao professor.

As práticas do professor PB com a utilização de computadores, antes da participação da oficina, revelaram-se limitadas - somente como forma de fixação de um conteúdo, sem intenção didática para elaboração de um conceito, como pode-se depreender no excerto abaixo:

A escola tinha laboratório. Tal dia da semana tinha que ir para lá. Então preparava atividades para os alunos trabalharem e tinha pouco alunos. 10 alunos — trabalhava com *site* de matemática continha de subtração e adição (professor PB)

Os professores, ao serem questionados se haviam utilizado em algum momento o *Software* Geogebra direcionado para o ensino da matemática com os seus alunos, tanto PA como PB foram categóricos em afirmar que não utilizaram esta ferramenta em suas aulas.

Tive conhecimento deste *software* e a forma como é possível trabalhar com os alunos a construção dos quadriláteros notáveis a partir dessa oficina. (professor PA)

Só agora, com esta oficina, que conhecemos a forma como trabalhar utilizando o *software*. Eu não sabia que tinha um programinha que fazia até cálculo. Porque a gente trabalha só no papel. (professor PB)

Os excertos revelam um fato preocupante, tendo em vista que o Estado de Mato Grosso conta com o Centro de formação – CEFAPRO para professores da Educação Bá-

sica há quase três décadas e, no entanto, o que se denota é que a formação continuada recebida pelos professores durante esses anos não têm promovido mudanças significativas nas práticas de sala de aula quando se trata do ensinar matemática utilizando recursos tecnológicos O que se evidencia pelas narrativas esses sujeitos não vivenciaram sua formação inicial com o foco das tecnologias para os professores do Ensino Fundamental I.

Após a realização da oficina e da intervenção em sala de aula, buscou-se compreender as concepções dos professores sobre a utilização do computador como recurso didático/metodológico. Acerca disso, o professor PB demonstrou ver esse instrumento como "um auxiliar mais agradável e motivador" para a construção dos quadriláteros.

> O que eu acho de bom é que a figura não está só no livro didático e que tem um programinha e pode arrastar e construir a figura – eles (os alunos) perceberam com o uso da tecnologia uma outra possibilidade. Os alunos falavam que era muito difícil quando trabalhava com o livro. Eu vejo assim: tiveram a oportunidade ver que existe muito mais coisas do que a gente mostrava para eles.

No entanto, olhar o computador apenas nesta perspectiva, parece limitar o campo de ação do seu uso como recurso didático. O professor PB limita às possibilidade em termos de construção de figuras, e faz um paralelo com o livro didático colocando-os no mesmo nível de potencialidades de recursos didáticos.

O professor PA considera o. recurso tecnológico como um facilitador da aprendizagem e, no entanto, ressalta a importância de se trabalhar com a régua na construção dos quadriláteros. A seguir, o depoimento de PA

> Acho que a aprendizagem fica mais fácil com o computador. Mas eu não posso abandonar ... não vou deixar de usar régua.

Vale destacar que ambas as ferramentas requerem o domínio de diferentes habilidades que somadas podem proporcionar melhor aprendizado, ao conceber o recurso tecnológico como recurso didático/metodológico.

Ao serem questionados sobre a possiblidade de incorporar tais recursos tecnológicos em suas práticas de sala de aula, no excerto a seguir PA elenca um entrave:

> Se der melhor acesso e condições de funcionamento dos computadores para trabalhar eu quero sim. Se não melhorar... ai é muito complicado.

O professor PB, complementando o referenciado por PA, argumenta que as verbas que chegam à escola são escassas e com isso os computadores ficam sem condições de funcionamento.

> Quanto aos computadores, a verba vem pouco. O que eu acho que deveria haver um programa do governo para trocar ou dar manutenção adequadas e mais máquinas para o professor trabalhar melhor.

À ênfase dada aos problemas relativos aos computadores se fizeram presente sempre que era mencionado sua utilização em sala de aula. No entanto, as atividades propostas para os professores durante a oficina foram desenvolvidas utilizando os computadores disponíveis na escola. O número de máquinas não dificultou o desenvolvimento das

atividades. A questão central deveria ater-se na qualidade das atividades, com práticas inovadoras visando o ensino e aprendizagem de qualidade. No entanto, as narrativas revelaram uma dificuldade por parte dos professores em trabalhar com conceitos de geometria e recursos tecnológicos por conta mesmo das lacunas da formação inicial e por conseguinte na formação continuada.

Considerações finais

Os dados apontam que as modalidades de formação com características mais empiristas — que valorizam os referentes da prática de trabalho do professor no seu tempo/espaço de carreira e desenvolvimento profissional — tendem a impactar de modo mais positivo sobre a percepção e expressão de suas necessidades formativas. A consciência registrada nas narrativas sobre as necessidades formativas inicia os professores a um processo de busca que muitas vezes depende mais de um percurso de autonomia individual do que de políticas públicas para os sistemas educativos — evidenciando que docentes e o próprio sistema educacional requerem melhorias em seus processos de apuração, compreensão e atenção às necessidades formativas genuínas das salas de aula. Há que incluir aqui a avaliação sistemática do plano de formação continuada.

Os dados ainda apontam para a necessidade de articulação no âmbito da escola para provimento de acesso aos laboratórios de informática Isto é percebido na fala de PA, sujeito da pesquisa: "Se der melhor acesso e condições de funcionamento dos computadores para trabalhar, eu quero sim. Se não melhorar... ai é muito complicado". Isso torna difícil ao professor promover ações didáticas que possibilitem a melhoria no processo de construção do saber matemático.

O *software* Geogebra se mostra com potencial para inovar o ensino da Matemática para aqueles, porém a formação para o uso deste recurso faz-se primordial aos docentes e mais atenção à proposta de formação, como dito acima, bem como a disponibilidade no curso de formação inicial e na escola de espaços destinados ao aprendizado didático-pedagógico de tal recurso, ampliando assim, as possibilidades do professor vir a melhorar a qualidade de seu ensino e das práticas ao ensinar matemática.

A descoberta do potencial do Geogebra por um professor trouxe outra visão sobre o ensino da matemática, como se percebe em sua fala: "Só agora, com esta oficina, que conhecemos a forma como trabalhar utilizando o *software*. Eu não sabia que tinha um programinha que fazia até cálculo. Porque a gente trabalha só no papel". (professor PB) Por fim, não conhecer o Geogebra limita a prática do ensino de geometria ao usa da régua . Conhecer e usar o *soft* Geogebra mostrou potencial desse para inovar o ensino da geometria, como é percebido na fala de outro colaborador da pesquisa: "Acho que a aprendizagem fica mais fácil com o computador. Mas eu não posso abandonar ... não vou deixar de usar régua" (PB). As tecnologias inovam a forma de ensinar de matemática, mas o professor carece de mais vivencia para mudar suas práticas de ensino na construção do saber matemático.

Referências bibliográficas

Amado, N., & Carreira, S (2008). Utilização pedagógica do computador por professores estagiários de matemática: diferenças na pratica de sala de aula. In. Canavarro, A. P; Moreira, D., & Rocha, M.I. (orgs). *Tecnologias e Educação Matemática*. Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. Batalha, Portugal: Gráfica da Batalha.

Amado, N. (2015). Tecnologia na formação do professor de matemática: *Mentoring uma estratégia na formação de professores*. Educação Matemática Pesquisa, v.1, n. 5 (15).

Araújo, A. J. S.; & Santos, R. S. (2015). O uso de tecnologias digitais no ensino da matemática. Trabalho de conclusão de curso. Licenciatura em Matemática. UFRN. 2015

Alcântara, L. A. (2015). trajetória de desenvolvimento do professor na utilização de tecnologias nas aulas de matemática em um contexto de formação continuada. 2015. 178 f. Dissertação (Mestrado em Ensino) — Centro Universitário UNIVATES, Lajeado.

Borba, M.V., & Penteado (2007), M.G (2007). Informática e Educação Matemática. Belo Horizonte, MG: Autêntica.

Fiorentini, D., & Lorenzato, S.(2006) Investigação em educação matemática: *percursos teóricos e metodológicos*. Campinas, SP: Autores Associados — (coleção formação de professores)

Nacarato, A. M. (2013) O grupo como espaço para aprendizaem docente e compartilhamento de práticas de ensino de matemática. In: Nacarato, A. M. (org) *Práticas docentes em Educação Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental*. Curitiba,SP: Appris.

Nóvoa, A. (2014). A formação tem que passar por aqui: as histórias de vida no Projeto Prosalus. In. Nóvoa, A., & Finger, M. (orgs). *O método (auto)biográfico e a formação*. Natal, RN: EDUFRN.

Passeggi, M. C (2013). Acompanhamento e dispositivos de medição biográfica: memorial de formação, grupos reflexivos e diário de acompanhamento. In: Passeggi, M. C.; VicentinI, P. P., & Souza, E.C. (orgs), *Pesquisa (auto)biográfica: narrativas de si e formação*. Curitiba, PR: CRV.

Ponte, J. P. (2000), Tecnologias de informação e comunicação na formação de professores: que desafios? *Revista Ibero Americana de Educación*, (24), 63–90.

Quartieril, M. T.; & Cruz, R. P. Novas tecnologias no ensino da matemática. *Ensino e Tecnologia em Revista*. Londrina, v. 2, n. 1, p. 56–70, jan./jun. 2018.

Sena, R. M. Darsie, M. M. P. (2014). Aprendizagem de professore: uso de recursos digitais na matemática. In: A formação, os saberes e os desafios do professor que ensina matemática. Curitiba, PR: CRV, p. 129–146.

Valente, A. J. (1995). Informática na educação: conformar ou transformar a escola. *Perspectiva. Florianópolis*, SC: UFSC/CED, NUP, (24), 21–49.

Desenvolver o conhecimento de futuros professores sobre as características das tarefas e o papel que a tecnologia pode assumir nestas

Helena Rocha

UIED, Faculdade de Ciências e Tecnologia — Universidade Nova de LIsboa
hcr@fct.unl.pt

Resumo

O principal objetivo deste trabalho é caracterizar como evolui o conhecimento dos futuros professores relativamente às características das tarefas e ao papel que nestas é atribuído à tecnologia. Tendo por base o estudo de caso realizado em torno de um par de futuras professoras, as principais conclusões apontam para o contributo da reflexão em torno de um conjunto de seis tarefas sobre Funções selecionadas pelas próprias. A este nível foi importante a análise do papel que a tecnologia pode assumir nas tarefas, os comentários efetuados pelos colegas às suas tarefas e as experiências vividas em torno de algumas tarefas de modelação e de investigação. Estes elementos proporcionaram o desenvolvimento de uma maior consciência relativamente a aspetos como o nível de estruturação da tarefa e o seu grau de desafio, determinantes para uma apropriação das diferentes características das tarefas.

Abstract

The main goal of this work is to characterize how the knowledge of pre-service teachers about the characteristics of the tasks and the role of technology evolves. Based on a case study carried out around a pair of pre-service teachers, the main conclusions point to the contribution of the reflection around a set of six tasks on Functions selected by the pre-service teachers. Central to this reflection was an analyze of the role technology can play in tasks, the comments made by the colleagues to their tasks and some experiences on modeling and open-ended tasks. These elements provided the development of a greater awareness regarding aspects such as the level of structuring of the task and its degree of challenge. And this was determinant for an appropriation of the different characteristics of the tasks and to the development of the pre-service teachers' knowledge.

Palavras-chave: tarefas; tecnologia; futuros professores; Matemática.
Key-words: tasks: technology; pre-service teachers; Mathematics.

Introdução

As tarefas são consideradas como um elemento central do trabalho do professor, sendo diversas as dimensões em torno das quais diferentes autores se apoiam para desenvolver classificações que caracterizem as tarefas que é possível considerar (Shimizu, Kaur, Huang, & Clarke, 2010). O potencial da tecnologia para a aprendizagem da Matemática está igualmente associado ao tipo de trabalho que estas potenciam (Dunham, 2000) e, consequentemente, às características das tarefas em que esta é utilizada e à exploração que é feita das novas abordagens que se tornam disponíveis (Laborde, 2001).

O trabalho que aqui se apresenta apoia-se nas características das tarefas e no papel que nestas é atribuído à tecnologia, como elemento do *Conhecimento para Ensinar Matemática com a Tecnologia* — CEMT (Rocha, 2013), para identificar aspetos ao nível do conhecimento de futuros professores de Matemática. O principal objetivo é assim caracterizar como evolui o conhecimento dos futuros professores relativamente às características das tarefas e ao papel que nestas é atribuído à tecnologia, no decurso da sua frequência de uma unidade curricular no âmbito da didática da matemática que integra o mestrado de formação inicial de professores do 3.º ciclo e do ensino secundário.

Concretamente pretende-se compreender:

- Quais os aspetos que são centrais nas reflexões que os futuros professores fazem sobre as tarefas.
- Qual o impacto das reflexões realizadas pelos futuros professores sobre as características das tarefas selecionadas.

Revisão de literatura

A integração da calculadora gráfica no ensino da Matemática propicia a adoção de todo um conjunto de propostas de trabalho (Goos & Bennison, 2008). De entre os diferentes tipos de tarefas que um professor pode propor, Ponte (2005) destaca os problemas, os exercícios, as investigações, os projetos e as tarefas de modelação. Este autor associa à noção de problema uma certa dificuldade, realçando o carácter relativo desta classificação, uma vez que o que é um problema para determinado aluno poderá não passar de um simples exercício para outro. Problemas e exercícios serão assim tarefas com algumas semelhanças, em que é claro o que se pretende, sendo a distinção entre estas marcada pelo facto do aluno conhecer ou não um processo para a resolver. Exercícios e problemas podem ainda envolver um contexto da realidade ou, pelo contrário, situarem-se num campo estritamente matemático.

As investigações constituem um outro tipo de tarefas. Neste caso, embora sejam geralmente colocadas questões, é deixado ao aluno a definição das estratégias de resolução que irá adotar, assim como algum trabalho ao nível da formulação das questões específicas a resolver (Rocha, 1996). Tal como nos tipos de tarefas anteriores, também aqui poderemos ter investigações num contexto real ou num contexto estritamente

matemático. Ponte (2005) considera também a existência de explorações. Tarefas que são bastante semelhantes às investigações, portanto tarefas mais abertas e menos estruturadas, mas onde o nível de desafio é inferior.

Os projetos envolvem resolução de problemas mas, segundo Abrantes (1994), caracterizam-se pela complexidade, pela autenticidade que têm para os alunos envolvidos, pela responsabilidade e autonomia que exigem e pelo seu carácter prolongado e faseado. Os projetos são ainda marcados por um objetivo e pela intenção de alcançar determinado produto final, neste sentido o contexto é claramente relevante.

O contexto é igualmente determinante nas tarefas de modelação, que Matos e Carreira (1996) enquadram no âmbito da aplicação da Matemática a situações da realidade. Estas tarefas requerem a construção de um modelo matemático e exigem "a formulação de questões pertinentes acerca da situação, bem como a seleção dos fatores considerados mais relevantes nessa situação, a identificação das variáveis que lhe estão associadas, a experimentação e a análise da adequação do modelo matemático à situação" (Matos e Carreira, 1996, p.7). Consoante sejam mais ou menos estruturadas, estas tarefas aproximam-se respetivamente da resolução de problemas ou das investigações.

As características das tarefas a que o professor recorre e o papel que assume na sua condução são determinantes no ensino que protagoniza (Gimeno, 2000). E se, como refere Farrel (1996), a tecnologia interfere com as tarefas a que o professor recorre e com a frequência com que o faz, a forma como esta é usada é igualmente influente.

Simmt (1997), partindo da análise da prática de seis professores, identifica seis utilizações diferentes que podem ser feitas da calculadora gráfica:

- para confirmar resultados (gráficos ou cálculos),
- para traçar gráficos de funções,
- para encontrar soluções gráficas para problemas de maximização,
- para compreender problemas de palavras,
- para explorar para além do conceito em estudo,
- para mostrar.

Destas, as duas primeiras são claramente as utilizações mais comuns, uma vez que todas as restantes apenas foram identificadas num máximo de dois dos participantes no estudo. Importa ainda referir que foi identificada uma utilização para investigar o efeito da variação de determinado parâmetro da função sobre o seu gráfico, mas como esta tem sempre por base a possibilidade de traçar muitos gráficos, a autora acaba por não a considerar separadamente.

Por seu turno Banker (2001), inspirando-se no trabalho de Simmt, refere sete utilizações distintas que identificou num conjunto de professores:

- para confirmar o trabalho realizado,
- para encontrar soluções graficamente,
- para explorar ideias matemáticas em maior profundidade,
- para obter soluções alternativas,

- para simular fenómenos reais,
- para visualizar,
- para motivar.

Num estudo com professores pouco familiarizados com a calculadora gráfica, Cavanagh e Mitchelmore (2003) identificaram apenas três utilizações diferentes:

- para confirmar gráficos traçados sem tecnologia,
- para obter rapidamente inúmeros gráficos,
- para desenvolver a capacidade de prever o aspeto de um gráfico antes de o traçar.

Doerr e Zangor (2000) mencionam igualmente diferentes utilizações da calculadora gráfica, referindo-se-lhes como ferramenta:

- de cálculo,
- transformativa (transformando tarefas de cálculo em tarefas interpretativas),
- de recolha e análise de dados,
- de visualização (para resolver equações, para associar a representação ao fenómeno físico, para determinar as principais características da função, para desenvolver estratégias para encontrar a equação que melhor se adequa a um conjunto de dados),
- de confirmação de conjeturas.

Das utilizações identificadas pelos diferentes autores parecem destacar-se as que se encontram associadas ao cálculo e à confirmação de resultados, assim como à rápida obtenção de gráficos. Para além destas, parece ser reconhecido o potencial desta tecnologia para a realização de investigações e para a exploração de situações articulando diferentes abordagens ou representações.

Laborde (2001) considera as tarefas num contexto de utilização da tecnologia e classifica-as em: (1) tarefas que são facilitadas pela tecnologia, mas que não são modificadas por esta; (2) tarefas onde a tecnologia facilita a exploração e a análise; (3) tarefas que podem ser realizadas com papel e lápis, mas onde a tecnologia vem permitir novas abordagens; (4) tarefas que não podem ser realizadas sem a tecnologia. E a autora organiza estes tipos em dois grupos, consoante as tarefas são facilitadas pela tecnologia, mas poderiam continuar a ser implementadas sem o recurso a esta; ou modificadas por esta, como sucede nas tarefas em que são modelados fenómenos reais ou efetuadas deduções a partir de um conjunto de observações.

Neste trabalho consideraremos a caracterização de tarefas assumida por Ponte (2005) e, no que respeita à integração da tecnologia, a caracterização desenvolvida por Laborde (2001).

Metodologia

Atendendo aos objetivos desta investigação, e tendo em conta as características avança-

das por Yin (2003), este estudo adota uma metodologia qualitativa, tendo sido realizados estudos de caso incidindo em pares de futuros professores a frequentar uma unidade curricular no âmbito da didática da Matemática no seio da sua formação inicial. Aqui é apresentado o caso de um desses pares de alunos.

Os dados foram recolhidos em aula, através da recolha das produções escritas efetuadas pelos participantes, bem como através dos registos das discussões ocorridas no seio do par e das discussões ocorridas entre todo o grupo de alunos, futuros professores de Matemática ao nível do 3.º ciclo e do ensino secundário. Aqui apresentam-se os elementos relativos às etapas 1 e 4, conforme o explicitado de seguida.

Foi pedido aos futuros professores que, organizados em pares, selecionassem um conjunto de seis tarefas adequadas para alunos do 10.º ano no âmbito do estudo do tema Funções e onde a utilização da tecnologia fosse um elemento importante.

Uma vez escolhidas as tarefas, foi pedido aos futuros professores que, para cada uma delas, fizessem uma apreciação relativamente ao tipo de tarefa e ao uso que em cada uma estava previsto para a tecnologia (etapa 1). Posteriormente, foram discutidas com todo o grupo diferentes características que uma tarefa poderia ter e diferentes formas como a tecnologia poderia integrar o trabalho proposto aos alunos. Seguiu-se a exploração de tarefas matemáticas (propostas pela professora responsável pela formação dos futuros professores) onde a tecnologia assumia um papel importante e posteriormente a análise de relatórios escritos elaborados por alunos do 10.º ano no decorrer da realização dessas mesmas tarefas (alunos reais que realizaram a mesma tarefa que os futuros professores tinham acabado de explorar, mas com que os futuros professores não tiveram qualquer contacto) (etapa 2). A etapa seguinte consistiu na apreciação do conjunto de tarefas proposto por um outro par de futuros professores e na análise que alguém tinha feito sobre a sua proposta de tarefas (etapa 3). O ciclo de trabalho terminou com uma reformulação das tarefas escolhidas e da respetiva apreciação (etapa 4).

A análise de dados centrou-se nas discussões e nos documentos escritos produzidos pelos futuros professores, tendo as características das tarefas e os diferentes tipos de utilização da tecnologia (tal como definidos no quadro teórico), assim como os momentos vividos ao longo da experiência (referência à exploração de tarefas, aos comentários de colegas às suas tarefas, etc.), constituído os elementos que permitiram identificar os episódios que foram depois objeto de análise tendo em vista identificar as opções assumidas e os fatores que as motivaram.

O par que aqui se apresenta é constituído por Ana e Bruna. Estas são duas alunas que se encontram a iniciar o mestrado de formação de professores, que inicialmente obtiveram formação na área da engenharia, mas que fruto de diferentes fatores decidiram reorientar a sua vida profissional e tornar-se professoras de Matemática.

Resultados

Neste ponto apresentam-se de forma sintética as tarefas escolhidas pelo par de futuras professoras, tendo os respetivos enunciados sido simplificados ou até parcialmente

truncados, por questões de espaço. As futuras professoras eram livres de escolher tarefas a partir das fontes que entendessem mas, com a intenção de ajudar esta fase inicial do trabalho, foram disponibilizados materiais onde poderiam encontrar tarefas, como livros e revistas, e em particular alguns livros editados pela APM, bem como links de sites na internet.

Etapa 1

Este par escolheu seis tarefas, uma primeira a focar-se na função afim, três a abordar a função quadrática, uma dedicada à função módulo e a última a incidir sobre uma função polinomial do terceiro grau (ver tabela 1).

Relativamente ao tipo de tarefa, o par de futuras professoras refere-se à primeira e à última ("O lucro" e "A caixa") como exercícios, à segunda ("Uma família de funções") como uma exploração, à quarta ("A ponte") como um problema e às restantes ("O vértice da parábola" e "Função módulo") como investigações. No que respeita à tecnologia, diz a propósito de todas as tarefas que esta deve ser utilizada, não sendo acrescentada qualquer outra informação.

A terminologia utilizada mostra, contudo, que existe alguma inconsistência relativamente ao significado atribuído a certos termos. Por exemplo, a segunda tarefa ("Uma família de funções") é extremamente semelhante à quinta ("Função módulo"), no entanto, a primeira destas é considerada uma exploração e a última uma investigação. De modo análogo, a sexta tarefa ("A caixa") que na apreciação escrita é referida como um exercício, é igualmente considerada, noutro momento, como uma tarefa exploratória com alguns exercícios formais. E a quarta tarefa, que o par de futuras professoras afirma ser um exercício, é também mencionada noutro momento como um problema. Esta é ainda assim uma situação que pode ser considerada natural, uma vez que as futuras professoras muito provavelmente ouviram alguns destes termos pela primeira vez quando lhes foi lançado este desafio de trabalho. Não estarão portanto muito familiarizadas com todos os termos, nem tiveram ainda muito tempo para refletir sobre eles.

Etapa 4

Nesta nova versão (ver tabela 2), o par introduz alterações em algumas tarefas, substituindo por completo outras. A razão para estas alterações parece prender-se com a experiência vivida relativamente a cada um dos tipos de tarefas e também com o papel que a tecnologia pode assumir nas tarefas. Os comentários recebidos relativamente às tarefas são outra influência identificável.

As futuras professoras começam por se apoiar nos comentários que foram feitos à sua proposta de tarefas e por refletir no uso que é feito da tecnologia, considerando que, tal como lhes é apontado, as suas tarefas nem sempre fazem uma utilização da tecnologia que efetivamente explore as suas potencialidades.

B: Um dos comentários que nos fizeram tem a ver com o uso que fazemos da tecnologia. E eu acho que aí têm alguma razão.

A: Sim, concordo contigo. Em particular relativamente à tarefa 1. Têm razão quando dizem que pode ser feita com papel e lápis.

Tabela 1. Tarefas selecionadas inicialmente pelo par de futuras professoras

Tarefa 1 O lucro	O lucro L de uma empresa quando x artigos são vendidos é dado, em milhares de euros, por $L(x)=0{,}53x-100$, para $x \in [0, 1000]$. 1. Representa graficamente a função. 2. Quantos artigos têm de ser vendidos para que a empresa não tenha prejuízo? 3. Para que a empresa tenha um lucro de 30000 euros, quantos artigos terão de ser vendidos. (adaptado de Neves et al., 2010, p.58)
Tarefa 2 Uma família de funções	Vamos estudar o efeito do parâmetro a em funções do tipo f(x) =ax2, usando a calculadora gráfica. 1. Estuda as funções indicadas e faz um esboço do gráfico no referencial. O que acontece ao gráfico quando se altera o parâmetro a? $f(x)=x^2$, $f(x)=2x^2$, $f(x)=3x^2$, $f(x)=-x^2$, $f(x)=-2x^2$, $f(x)=1/2x^2$. Observação: As questões seguintes pedem um estudo semelhante para $g(x)=(x-b)^2$ e $h(x)=x^2+c$
Tarefa 3 O vértice da parábola	1. Considera as funções definidas por $f(x)=x^2-2x+3$ $g(x)=-2x^2-4x+1$ $h(x)=2x^2+5x+2$ e escreve-as na forma $a(x-h)^2+k$. De seguida representa-as graficamente e indica o seu contradomínio e as coordenadas do vértice. 2. Indica as coordenadas do vértice no caso geral de uma função da forma $f(x)=a(x-h)^2+k$ 3. Mostra que toda a função da forma $f(x)=ax^2+bx+c$ (com $a\neq 0$) pode ser escrita na forma $f(x)=a(x-h)^2+k$
Tarefa 4 A ponte	O arco parabólico colocado sobre o tabuleiro de uma ponte é suportado por dois pilares com 25m de altura acima do tabuleiro, que distam 120m um do outro. O ponto mais baixo deste arco parabólico fica a 4m do tabuleiro da ponte. Considerando um referencial adequado, escreve uma expressão analítica para a função cujo gráfico possa ser o arco representado na figura. (adaptado de Neves et al., 2010, p.84)
Tarefa 5 Função módulo	Vamos estudar o efeito dos parâmetros a e b em funções do tipo $f(x)=\|x-a\|+b$, usando a calculadora gráfica. 1. Estuda as funções indicadas e faz um esboço do gráfico no referencial. O que acontece ao gráfico quando se altera o parâmetro a? $f(x)=\|x\|$, $f(x)=\|x-1\|$, $f(x)=\|x-2\|$, $f(x)=\|x+2\|$, $f(x)=\|x+3\|$. 2. Estuda as funções indicadas e faz um esboço do gráfico no referencial. O que acontece ao gráfico quando se altera o parâmetro b? $g(x)=\|x\|$, $g(x)=\|x\|-1$, $g(x)=\|x\|-2$, $g(x)=\|x\|+2$, $g(x)=\|x\|+3$. 3. Depois do estudo que fizeste, descreve como seria o gráfico de $f(x)=\|x-a\|+b$ por comparação com o gráfico de $g(x)=\|x\|$. (adaptado de Freitas, 2001, pp.51-52)
Tarefa 6 A caixa	Com uma folha de cartão de 90cm por 30cm pretende-se construir uma caixa cortando nos quatro cantos um quadrado de lado x cm e efetuando os cortes e as dobragens indicados na figura. 1. Verifica que o volume da caixa é, em função de x, dado por $V(x)=8x^3-300x^2+2700x$ 2. Entre que valores varia x? Justifica a resposta. 3. Qual deve ser a medida do lado do quadrado cortado para que o volume da caixa seja de 5000cm3 e nenhuma das dimensões da caixa ultrapasse os 50cm? 4. Qual deve ser a medida do lado do quadrado cortado para que o volume da caixa seja máximo? (adaptado de Neves et al., 2010, p.159)

Tabela 2. Tarefas revistas pelo par de futuras professoras

Tarefa 1 Uma família de funções	Vamos estudar o efeito do parâmetro a em funções do tipo $f(x)=ax^2$, usando a calculadora gráfica. 1. Atribui valores ao parâmetro a e estuda o impacto da sua variação sobre o aspeto do gráfico. Elabora um relatório com as conclusões a que chegares onde incluas um registo das funções que estudaste e dos respetivos gráficos. *Observação*: As questões seguintes pedem um estudo semelhante para $g(x)=(x-b)^2$ e $h(x)=x^2+c$
Tarefa 2 A ponte	O arco parabólico colocado sobre o tabuleiro de uma ponte é suportado por dois pilares com 25m de altura acima do tabuleiro, que distam 120m um do outro. O ponto mais baixo deste arco parabólico fica a 4m do tabuleiro da ponte. Considerando um referencial adequado, escreve uma expressão analítica para a função cujo gráfico possa ser o arco representado na figura. (adaptado de Neves et al., 2010, p.84)
Tarefa 3 Transformando a parábola	Considera a função *h* cujo gráfico se apresenta. Indica qual a expressão da função apresentada em cada um dos gráficos, sabendo que resultou de uma transformação da função *h*. (adaptado de Silva et al., 2010, p.58)
Tarefa 4 O vértice da parábola	1. Considera as funções definidas por $f(x)=x^2-2x+3$, $g(x)=-2x^2-4x+1$ e mais algumas à tua escolha. Escreve-as na forma $a(x-h)^2+k$. De seguida representa-as graficamente e indica o seu contradomínio e as coordenadas do vértice. 2. Indica as coordenadas do vértice no caso geral de uma função da forma $f(x)=a(x-h)^2+k$ 3. Mostra que toda a função da forma f(x)= ax2+bx+c (com a≠0) pode ser escrita na forma $f(x)=a(x-h)^2+k$
Tarefa 5 A ponte	O arco parabólico colocado sobre o tabuleiro de uma ponte é suportado por dois pilares com 25m de altura acima do tabuleiro, que distam 120m um do outro. O ponto mais baixo deste arco parabólico fica a 4m do tabuleiro da ponte. Considerando um referencial adequado, escreve uma expressão analítica para a função cujo gráfico possa ser o arco representado na figura. (adaptado de Neves et al., 2010, p.84)
Tarefa 6 A bola saltitante	Recolhe os dados da altura dos saltos de uma bola deixada cair ao chão num plano horizontal. Seleciona apenas uma parte do gráfico, correspondente ao "movimento" da bola traduzido por uma parábola. Descobre uma função que descreva a altura da bola em função do tempo. (adaptado de Precatado, 2001, pp.59-60)

B: Mas na função afim acaba por ser sempre um bocado assim.

A: Podíamos arranjar algo que usasse mais a tecnologia.

B: Mas acaba por ir dar sempre ao mesmo. Quer dizer, como o gráfico é uma reta é sempre possível fazer com papel e lápis.

A: Bem, isso é verdade. É fácil fazer o gráfico sem tecnologia.

A discussão entre as futuras professoras prossegue com o foco agora a ser colocado no tipo de tarefa:

A: Acho que também devíamos olhar para o tipo de tarefas que temos. Temos fundamentalmente exercícios e explorações, acho que seria bom se diversificássemos um pouco mais.

B: Tipo uma tarefa de cada?

A: Uhm, não necessariamente. Mas gostava de ter uma com sensores. O que dizes?

B: Sim, mas pomos o quê?

A: Não sei. Mas gosto de poderes recolher os dados e depois tentares usar a matemática com os teus dados. Gostava de ter feito isso nas minhas aulas de Matemática.

Decidem então procurar entre o material que têm à disposição e optam pela tarefa "A bola saltitante", que adaptam e transformam no que consideram uma tarefa de modela-

ção adequada para o trabalho em torno da função quadrática. Sendo o uso de sensores algo com que nunca tinham contactado anteriormente, esta é uma abordagem nova que permite implementar o que consideram uma das utilizações mais fortes da tecnologia e um tipo de trabalho difícil de concretizar quando esta não está disponível:

A: Pronto. Portanto, temos uma tarefa de modelação, onde os alunos têm de recolher e analisar os dados em busca de um modelo matemático… que vai ser uma função quadrática e onde a tecnologia é fundamental para a realização da tarefa. De acordo?

Abordam de seguida a tarefa 2 que tinham escolhido, "Uma família de funções", e procuram transformá-la um pouco, com a intenção de a tornar menos guiada e de a converter de uma exploração numa investigação, onde a tecnologia seja um elemento importante:

B: Aqui a tarefa 2, a ideia é que os alunos possam usar a calculadora e experimentar diferentes gráficos de funções. Na diferença entre as explorações e investigações, estás a ver aqui no esquema…

A: Sim, as investigações têm um nível de desafio mais alto.

B: Então, podíamos pôr uns exemplos e depois deixar para eles escolherem os outros.

A: Não sei se isso muda muito o nível de desafio.

B: Pois. Mas tanto as explorações como as investigações devem ser tarefas mais abertas. Portanto não podes ter tudo definido, tens de deixar espaço aos alunos para decidir. Não é? Como naquela investigação dos polinómios que fizemos. Tu é que decidias como é que organizavas e para onde é que olhavas. Só te diziam para estudar polinómios de um determinado grau.

A: Exato. Acho que aí era muito mais difícil saberes o que fazer.

Apesar de a sua discussão mostrar que procuram atender a certas características, como o grau de abertura da tarefa ou o seu nível de estruturação, é possível perceber que a distinção entre exploração e investigação não é simples e, talvez por isso, as duas futuras professoras parecem não estar completamente de acordo quanto à classificação a atribuir à tarefa ou de como a modificar para conseguir uma tarefa do tipo pretendido. Ainda assim, as experiências vividas e a discussão em torno do que caracteriza este tipo de tarefas parecem ser determinantes na forma como pretendem modificar o enunciado da tarefa que selecionaram inicialmente. Conseguir uma maior integração da tecnologia é o aspeto que no primeiro momento parece ser o ponto de partida para avançar com a intenção de introduzir mudanças na versão inicial da tarefa.

Focam-se então na tarefa "A ponte", partindo dos comentários feitos pelos colegas à tarefa:

A: Ora bem, dizem que é um exercício que pode ser resolvido sem qualquer utilização da tecnologia.

B: Uhm, eu gosto desta tarefa. É um exemplo de uma situação real onde podes encontrar parábolas.

A: Pois eles acham que é uma situação onde a realidade surge de uma forma forçada.

B: A sério? Deixa ver. (lê) *Uma tarefa onde é pedida a expressão de uma função sem que exista qualquer utilidade em sabê-la*. Bem… a função representa o cabo da ponte… se soubermos a expressão podemos saber o comprimento do cabo, por exemplo. É um integral… de linha ou assim…

A: Um integral? Mas os alunos não dão integrais.

B: Não dão no 10.º ano, mas não é por isso que não serve para nada saber a expressão.

Começam por discutir o contexto da tarefa, sendo visível que as duas futuras professoras não o veem exatamente da mesma forma. Mas o uso da tecnologia acaba por ser o ponto de partida para aprofundar a discussão e a reflexão em torno da tarefa:

A: A verdade é que realmente não precisamos da tecnologia para resolver a tarefa. Sabemos as coordenadas do vértice, portanto é só substituir e depois é só calcular o a. É um exercício simples.

B: Sim… depende. Quer dizer… O que eu acho interessante aqui é que tu é que tens de decidir onde vais pôr o referencial.

A: Não acho que isso seja nada de especial. Vais pôr o eixo dos yy no primeiro pilar e o dos xx no tabuleiro da ponte. Não vejo aí nada de difícil.

B: Não digo que seja difícil, mas a verdade é que podes pôr o referencial noutro sítio qualquer. E isso faz com que possas ter funções diferentes porque a expressão vai depender do referencial. E esta coisa de pôr o referencial tem tudo a ver com a realidade. Quer dizer, nas situações reais não tens a ponte logo com o referencial.

A: Mas o sítio onde pões o referencial muda a expressão, porque muda as coordenadas do vértice da parábola, mas não muda o que fazes. O processo de resolução é o mesmo.

B: Não sei se é… Se puseres a origem do referencial no vértice da parábola, só vais ter de pensar no a… na abertura da parábola. E podes fazer antes de estudar o vértice. Uhm, podia ser interessante pensar nisso.

A: Sim. Se fosse antes de estudarem o vértice, teriam de usar as transformações de funções e já não seria um exercício… seria mais uma investigação… e a tecnologia seria um elemento mais importante na resolução.

B: E se fizéssemos antes e depois de estudar o vértice?

A: Como se fossem duas tarefas?... Íamos ter duas formas de resolver diferentes consoante fosse feito antes ou depois. Pode ser uma boa ideia.

B: Depois ia ser um exercício e antes acho que é um problema… porque aqui queremos uma função específica, portanto é uma tarefa fechada… então é um problema. Não é? Fechada e desafio mais elevado. E não sei se não seria de acrescentar algo a pedir para fazer com o referencial em diferentes sítios, o que achas?

As futuras professoras acabam assim por se envolver numa discussão entre as características da tarefa que escolheram, que as leva a refletir sobre a classificação de tarefas mas, mais do que isso, a aperceberem-se que aspetos da implementação da tarefa são elementos importantes e, no caso concreto, o trabalho feito até então pelos alunos pode fazer com que uma mesma tarefa acabe por ser diferente para os alunos. Nestas circunstâncias as futuras professoras decidem realizar duas vezes a mesma tarefa, mas em momentos diferentes da aprendizagem dos alunos.

Neste ponto da reflexão e reformulação em torno das tarefas inicialmente escolhidas, as futuras professoras têm já selecionadas cinco das seis tarefas pedidas. Decidem então focar o conjunto de tarefas no estudo da função quadrática e excluem assim as tarefas "Função módulo" e "A caixa". Optam por manter a tarefa focada no estudo do vértice que reformulam ligeiramente para a tornar mais exploratória e reforçar o uso da tecnologia.

No sumário que fazem relativamente ao foco das alterações introduzidas as futuras

professoras apontam a tecnologia e a intensão de tirar mais partido das suas potencialidades como o ponto de partida, referem depois a intenção de terem tarefas de tipos diversificados. Destacam ainda o que consideram a originalidade do seu trabalho, o facto de terem uma tarefa que classificam com duas tipologias diferentes em função do momento previsto para realização pelos alunos.

Conclusão

As reflexões que os futuros professores fazem sobre as tarefas partem da tecnologia e do papel que esta assume na tarefa, a que contrapõem o que pode ser feito de igual modo apenas com papel e lápis. Os comentários dos colegas às suas tarefas são igualmente um motor para a reflexão, que as leva a discutir as característica do contexto real de uma tarefa, as trás de volta ao papel da tecnologia e acaba por conduzir a uma discussão em torno das características da tarefa onde o momento específico da aprendizagem em que os alunos se encontram quando a realizam é reconhecido como algo extremamente relevante.

As experiências que entretanto têm, seja ao nível da utilização de sensores, seja ao nível das características de um tipo de trabalho mais investigativo e que até então não tinham tido oportunidade de vivenciar, assumem igualmente grande importância e acabam por constituir um elemento importante na transformação de tarefas, como a tarefa "Uma família de funções", que procuram tornar um pouco mais aberta e com um cunho mais investigativo. Ainda assim é ainda visível alguma dificuldade relativamente a como conseguir a desejada transformação.

A multiplicidade de abordagens possíveis para uma tarefa é assumida como um elemento enriquecedor da aprendizagem, o mesmo acontecendo com estruturas mais abertas que obrigam à tomada de decisões (como onde colocar o referencial) e que é assumido como um sinal de proximidade com a forma como os problemas efetivamente surgem na realidade. As reflexões em torno das características de cada um dos tipos de tarefas acaba por ser também um elemento importante na forma como procuram reformular as suas tarefas, algo a que as discussões em torno do nível de abertura ou estruturação e do grau de desafio das tarefas não deixa de trazer mais um contributo.

Globalmente, é visível a consciencialização crescente dos alunos relativamente às diferentes características dos diversos tipos de tarefas e do papel que a tecnologia pode assumir na aprendizagem matemática, que naturalmente se traduz num desenvolvimento do conhecimento profissional dos futuros professores.

Agradecimentos

Este trabalho foi apoiado por fundos nacionais através da FCT — Fundação para a Ciência e a Tecnologia, I. P., no âmbito do projeto UID/CED/02861/2019.

Referências bibliográficas

Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a Matemática — a experiência do projecto Mat789*. Lisboa: APM.

Banker, T. (2001). *Preservice secondary mathematics teachers' beliefs and practice regarding the use of graphing calculators in mathematics instruction*. PhD dissertation, University of Georgia (unpublished document).

Cavanagh, M., & Mitchelmore, M. (2003). Graphics calculators in the learning of mathematics: teacher understandings and classroom practices. *Mathematics Teacher Education and Development*, *5*, 3–18.

Doer, H., & Zangor, R. (2000). Creating meaning for and with the graphing calculator. *Educational Studies in Mathematics*, *41*, 143–163.

Dunham, P. (2000). Hand-held calculators in mathematics education: a research perspective. In E. Laughbaum (Ed.), *Hand-held technology in mathematics and science education: a collection of papers* (pp. 39–47). Columbus, OH: The Ohio State University.

Farrell, A. (1996). *Roles and behaviours in technology-integrated precalculus classrooms*. Journal of Mathematical Behavior, *15*, 35–53.

Gimeno, J. (2000). *O currículo: uma reflexão sobre a prática*. Porto Alegre: ArtMed.

Goos, M., & Bennison, A. (2008). Surveying the technology landscape: teachers' use of technology in secondary mathematics classrooms. *Mathematics Education Research Journal*, *20*(3), 102–130.

Laborde, C. (2001). Integration of technology in design of geometry tasks with Cabri-geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *6*, 283–317.

Matos, J., & Carreira, S. (1996). *Modelação e aplicações no ensino da Matemática: situações e problemas*. Lisboa: IIE.

Neves, M., Guerreiro, L., Leite, A., & Silva, J. (2010). *Matemática A — 10.º ano*. Porto: Porto Editora.

Ponte, J. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI – Grupo de Trabalho de Investigação (Eds.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). Lisboa: APM.

Precatado, A. (2001). A bola saltitante. In A. Precatado & H. Guimaráes (org.), *Materiais para a aula de Matemática* (pp. 59–60). Lisboa: APM.

Rocha, H. (1996). Investigando com a Calculadora Gráfica. In P. Abrantes, L. Leal & J. Ponte (Eds.), *Investigar para Aprender Matemática* (pp. 183–192). Lisboa: APM.

Rocha, H. (2013). Knowledge for teaching mathematics with technology — a new framework of teacher knowledge. In Lindmeier, A. & Heinze, A. (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education — PME37* (vol. 4, pp. 105–112). Kiel, Germany: PME.

Shimizu, Y., Kaur, B., Huang, R., & Clarke, D. (2010). The role of mathematical tasks in different cultures. In Y. Shimizu, B. Kaur, R. Huang & D. Clarke (Eds.), *Mathematical Tasks in Classrooms around the World* (pp. 1–14). Rotterdam: Sense Publishers.

Silva, J., Pinto, J., & Machado, V. (2010). *Aleph 10*. Lisoba: Asa.

Simmt, E. (1997). Graphing calculators in high school mathematics. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, *16* (2/3), 269–289.

Yin, R. (2003). *Case study research — design and methods*. Thousand Oaks: Sage Publications.

Estratégias avaliativas reguladoras para a aprendizagem com tarefas que usam tecnologia: Que contributo para uma prática reguladora do ensino?

Elvira Lázaro Santos

UIDEF, Instituto de Educação de Lisboa
elvira.santos@campus.ul.pt

Leonor Santos

Instituto de Educação de Lisboa
mlsantos@ie.ul.pt

Resumo

Com este texto pretende-se dar a conhecer como uma professora de Matemática ao desenvolver práticas avaliativas reguladoras com tarefas que utilizam tecnologia interpreta o efeito das estratégias na aprendizagem dos alunos e mobiliza esse conhecimento no aperfeiçoamento do processo de ensino. O estudo é de natureza interpretativa e a modalidade é de estudo de caso. Num contexto de trabalho colaborativo entre a investigadora e dois professores de Matemática a lecionar o 5.º ano conceberam-se estratégias avaliativas concretizadas em sala de aula, procurando integrar as informações recolhidas na planificação seguinte. Os dados apresentados foram recolhidos por observação, com registo áudio, das sessões de trabalho colaborativo, entrevista final e nas produções escritas dos alunos. A análise de dados segue a análise de conteúdo. Os resultados indicam que, por um lado, a utilização de práticas avaliativas reguladoras influenciou na forma como se olhou e identificou as diferentes etapas da utilização de tarefas com tecnologia. Por outro, a utilização da tecnologia permitiu tornar mais clara a utilização da avaliação reguladora, nomeadamente a utilização dos critérios de avaliação e do feedback. Concluímos que a utilização de estratégias avaliativas reguladoras com tarefas que usam tecnologia permitiram à docente ajustar a sua prática contribuindo, assim, para uma prática reguladora do ensino.

Abstract

This paper aims to know how a teacher of mathematics when developing formative assessment strategies with tasks that use technology interprets the impact on student learning and mobilizes this knowledge in the improvement of the teaching process. The study followed an interpretive approach and the case study design. In a context of collaborative work the researcher and two Mathematics teachers conceived formative assessment strategies. These strategies were implemented in the 5th grade classroom and the information gathered was integrated in the next planning. Observation with audio recording of the collaborative work sessions and teachers' classroom collected the data. The results point out that the use of formative assessment strategies with tasks that use technology created a set that allowed to realize that the role of one of them contributed to enhance the role of the other in the students' learning process. The use of formative assessment strategies with tasks that use technology allowed making visible evidence of difficulties and knowledge to the actors involved in the process. Therefore, it allowed the teacher to adjust their practice thus contributing to regulate teaching practices.

Palavras-chave: avaliação reguladora para a aprendizagem; tecnologia; geometria; critérios de avaliação; prática reguladora do ensino.

Introdução

Uma boa aprendizagem da Geometria e Medida são imprescindíveis para posicionar os alunos nos campos da Ciência, Matemática e Engenharia e as dificuldades que estes apresentam nesta área revelam que não se relacionam bem com as propriedades das figuras em estudo como por exemplo a confusão dos alunos relativamente à noção de área e de perímetro (Steele, 2012). O ensino da Matemática deve centrar-se, portanto, cada vez mais, na criação de oportunidades da construção ativa do conhecimento que possam suportar uma compreensão dos assuntos que contribuam para uma aprendizagem duradoura (Mestrinho & Oliveira, 2012). Assim, a utilização de ferramentas tecnológicas, que produzem respostas matemáticas baseadas na ação dos seus utilizadores e denominadas como "tecnologias para a ação matemática", permite "aos alunos explorarem ideias matemáticas, elaborarem e testarem conjeturas sobre relações matemáticas" (NCTM, 2014, p. 79), e pode criar condições para a aprendizagem relacionando propriedades e, ainda, fornecer aos professores informações que podem ajudar a tomar decisões sobre o ensino.

Com este texto pretende-se dar a conhecer como uma professora do 2.º ciclo de Matemática ao desenvolver, num contexto de trabalho colaborativo, práticas avaliativas reguladoras com tarefas que utilizam tecnologia interpreta o efeito das estratégias avaliativas na aprendizagem dos alunos e mobiliza esse conhecimento no aperfeiçoamento do seu processo de ensino.

Avaliação reguladora para a aprendizagem e tarefas que usam tecnologia

A avaliação reguladora para a aprendizagem engloba todas as atividades realizadas pelos professores e/ou pelos seus alunos, que fornecem informações a serem usadas como *feedback* para melhorar a atividade de ensino e de aprendizagem. Deste modo, a recolha destas evidências sobre o desempenho do aluno, a sua interpretação e uso para tomar decisões sobre os próximos passos na instrução caracteriza uma prática de avaliação reguladora para o ensino (Black & Wiliam, 2009; 2018). Assim, a constituição de um dispositivo de avaliação reguladora passa pela necessidade de constituir sequências de aprendizagem que assegurem aos alunos ter acesso aos conteúdos das disciplinas, aos objetivos das tarefas e aos critérios de avaliação, atribuindo ao erro uma dinâmica própria de aprendizagem de caráter positivo (Nunziati, 1990). Critérios de avaliação que enunciam o que é importante em cada momento e que se constituem como lentes através das quais é possível analisar os trabalhos dos alunos e perceber se estes adquiriram um certo conhecimento ou desenvolveram uma certa capacidade (Nunziati, 1990; Santos & Cai, 2016; Vial, 2001).

A construção de tarefas com o objetivo de serem utilizadas no processo de avaliação reguladora revelam-se, assim, de grande importância no sentido de proporcionar

condições para a recolha de evidências. Estas tarefas devem considerar o ambiente de trabalho da sala de aula, o objetivo da avaliação reguladora a que se propõem e, ainda, permitir observar como o aluno progride e quais os próximos passos a dar. Deste modo, para se construírem tarefas com o propósito de servirem a intenção de uma avaliação reguladora é necessário combinar questões relativas a uma atividade em que se pretende que o aluno aprenda algo, com questões que possam contribuir para o conhecimento sobre o que ocorreu durante a aprendizagem constituindo, assim, uma janela para o professor conhecer como o processo ocorreu mas também com indicações sobre onde se pretende ir (Smith & Smith, 2014). Para se construírem tarefas para uma avaliação reguladora deve ter-se em consideração: (i) O *contexto* que deve ser familiar aos alunos e que consiga envolvê-los no processo; (ii) O *material* que "pode ser manipulável ou conceptual, no entanto, deve permitir ao aluno a sua exploração" (Smith & Smith, 2014, p. 131); (iii) O *desafio* para que o aluno possa fazer a sua exploração; (iv) A exigência da tarefa e o que ela permite; (v) A *possibilidade de escolha* permitindo emergir a individualidade do aluno relativamente ao que se pretende fazer dando-lhe um cunho pessoal, nomeadamente quando descreve experiências realizadas ou as conclusões obtidas; (vi) A *reflexão/comunicação* sobre o que se vai aprender com as respostas dos alunos às referidas tarefas e, ainda, como se vai fomentar a comunicação entre aluno e professor (Smith & Smith, 2014). Dias e Santos (2008) também referem que as tarefas que privilegiam a utilização de *feedback* são aquelas que permitem ao aluno dar o seu cunho pessoal às produções e que a forma como as tarefas são estruturadas pode contribuir para ajudar o professor na dificuldade que sente em dar *feedback*. No sentido de implementar um dispositivo de avaliação reguladora existe, assim, a necessidade de proporcionar ao aluno envolvimento e por isso torná-lo ativo na sua própria aprendizagem.

A utilização de *software* com potencial transformador para a aprendizagem matemática e pela interação que o aluno estabelece com ele, permite essa atividade do aluno e obter ideias das suas conceções e práticas já que torna visível o seu pensamento e oferece aos observadores uma janela sobre o significado matemático em construção. O contraste existente entre a representação em papel e lápis e a representação no écran de uma classe de figuras, através da utilização da função de "arrasto", permite ao aluno não só construir uma estratégia, mas possibilita, também, desenvolver um conjunto de soluções para problemas mais abertos (Hoyles & Noss, 2003). Quando o movimento de arrastar é interiorizado, pelos utilizadores de ambientes de geometria dinâmica (AGD), então ocorre a fase de conjetura e leva à descoberta de propriedades que de outra forma não eram reconhecidas (Baccaglini-Frank & Antonini, 2016). Essa atividade do aluno numa aula com recurso a AGD faz com que o questionamento oral do professor tenha um papel preponderante para levar os alunos a prosseguirem as suas produções e questionarem o resultado das suas interações com o *software*. Assim, o questionamento oral contribui para incentivar a análise, a reflexão, a explicação de raciocínios, em que as respostas dos alunos constituem evidências sobre aquilo que efetivamente sabem (Reinhart, 2000). Mas também as tarefas que fazem recurso a AGD podem

facilitar a exploração e análise dos alunos se lhes proporcionarem: a identificação de relações de uma figura através da capacidade de arrastamento do rato; a utilização de transformações geométricas ou com recurso à soma de vetores; a reconstrução de um diagrama através da experimentação e da identificação das suas propriedades (Laborde, Kynigos, Hollebrands, & Strässer, 2006).

No sentido de o professor utilizar uma prática de avaliação reguladora para a aprendizagem e mobilizar esse conhecimento no aperfeiçoamento do seu processo de ensino vai depender de um envolvimento num ciclo de questionamento e de construção do conhecimento. Assim, o professor Planifica estratégias avaliativas reguladoras para a aprendizagem; Coloca em prática na sala de aula onde envolve os alunos nas estratégias avaliativas planificadas; Interpreta o efeito dessas estratégias na aprendizagem dos alunos; E, Reflete sobre o ensino (Butler, 2005; Timperley, 2014).

Opções metodológicas e contexto

O estudo é de natureza interpretativa, numa modalidade de estudo de caso. Este estudo é informado por uma abordagem colaborativa pois é feito com pessoas que, em colaboração com outras, partilham das mesmas preocupações e interesses, examinam cuidadosamente a sua própria experiência e ação, entrelaçando a ação com a reflexão (Heron & Reason, 2001).

Participaram neste estudo dois professores de Matemática do 2.º ciclo do ensino básico, João e Ana. Estes professores foram convidados a participar por reconhecerem importância à utilização da avaliação formativa no processo ensino e aprendizagem e possuírem familiaridade com a utilização das tecnologias.

Ao longo de um ano letivo, num contexto de trabalho colaborativo entre investigadora, primeira autora, e João e Ana conceberam-se estratégias avaliativas, concretizadas em sala de aula, em trabalho de grupo com tarefas que usam tecnologia, e procuraram integrar as informações recolhidas na planificação seguinte. Na primeira estratégia, referida no texto como EA2, os alunos estudaram a classificação de triângulos quanto aos lados e quanto aos ângulos, através de um aplicativo construído em GeoGebra e reformularam as suas produções tendo em consideração o *feedback* do professor. A organização desta tarefa prevê a utilização dos critérios de avaliação pela primeira vez durante o processo de realização da tarefa. Os alunos devem realizar experiências com o ficheiro e registar dados e conclusões na ficha de trabalho; Na segunda estratégia, referida no texto como EA3, os alunos construíram polígonos no GeoGebra e estudaram a área do paralelogramo, reformularam as suas produções tendo em consideração o *feedback* produzido pelos colegas (coavaliação).

Neste texto focar-nos-emos em Ana, professora com uma licenciatura em variante Matemática-Ciências, de uma Escola Superior de Educação Portuguesa. O estudo realizou-se numa sua turma de 5.º ano de escolaridade, sendo os nomes dos intervenientes fictícios.

A recolha de dados foi feita através da observação de três sessões de trabalho colaborativo e entrevista final (referida como E2) registadas em áudio. E, ainda, a recolha documental dos materiais produzidos no âmbito da prática de ensino, das produções dos alunos, numa fase inicial e após a intervenção da avaliação entre pares, que constituíram fontes de recolha de evidências relativamente às aprendizagens realizadas pelos alunos. As sessões de trabalho colaborativo (referidas como S12, S13 e S15) entre os dois professores e a investigadora, dizem respeito à reflexão sobre o trabalho desenvolvido.

A análise de dados seguiu a análise de conteúdo (Bardin, 2011). As categorias de análise foram constituídas tomando por foco de atenção a dimensão "Interpretar o efeito das estratégias avaliativas na aprendizagem dos alunos com tarefas que usam tecnologia" (Butler, 2005; Timperley, 2014).

À organização da tarefa de natureza exploratória, com utilização do GeoGebra, esteve associada uma prática de avaliação reguladora, nomeadamente a utilização de critérios de avaliação pelos alunos e a avaliação entre pares, coavaliação. Os critérios de avaliação, propostos pela professora, fizeram parte do trabalho em sala de aula ao longo do ano letivo, mas a utilização do GeoGebra era a primeira vez para estes alunos.

As tarefas constituídas por um ficheiro digital e por um conjunto de questões, apresentadas em suporte papel, foram planeadas em sessões de trabalho colaborativo e finalizadas em trabalho individual. As tarefas foram desenvolvidas tendo em consideração a necessidade de: Informar os alunos dos procedimentos necessários para utilizar o AGD; Apelar à realização de experiências e proporcionar os seus registos para observação de regularidades, resultantes da utilização da função de arrastar; Descrever e explicar o processo desenvolvido; Formular conjeturas sobre a classificação de triângulos e da área do paralelogramo.

Interpretar o efeito das estratégias avaliativas com tarefas que usam tecnologia

No sentido de interpretar o efeito das estratégias para a aprendizagem dos alunos, Ana, após a aula de classificação de triângulos quanto aos lados e quanto aos ângulos, menciona que, durante a aula, percepcionou a forma como os alunos desenvolveram a tarefa: "Acho que correu bem. Eles perceberam bem a tarefa" (EA2_S12).

O mesmo acontece com o trabalho da área do paralelogramo. Ana percebe, durante o trabalho de sala de aula, que os alunos mobilizam o conceito de equivalência de figuras:

> Os meus [alunos] trabalharam sempre só com a área porque quando eu andava a passar [a acompanhar o trabalho] ouvia os comentários "São iguais! A área vai ser igual.", até falaram que eram figuras equivalentes. (EA3_S15)

Mas durante o desenvolvimento da atividade EA2, a professora percebe que os alunos ficam presos à interatividade provocada pelo *software* não atribuindo importância aos registos da atividade. Assim, intervém no sentido de os alunos registarem os dados

relativos às suas explorações e criar condições para que possam analisá-los e encontrar regularidades:

Professora: Vá lá, agora registam o que aconteceu.
Vasco: O que aconteceu?
Professora: Não aconteceu nada?
Vasco: Os lados ficaram maiores.
Professora: Ah! Maiores como? Têm que por lá as medidas e olhar para elas.
Fausto: Vamos escrever [na tabela] as medidas que estão ali?
Professora: Claro. (EA2_A1)

Ao longo do desenvolvimento da tarefa EA3, a professora acompanha o trabalho desenvolvido pelos alunos após análise dos dados recolhidos e intervém para apoiar as dificuldades que surgem. Através do questionamento oral ajuda o desenvolvimento do raciocínio matemático para percorrerem um caminho próprio de construção da sua aprendizagem:

Professora: E aqui o que vamos escrever?

Paulo: Aumentámos e diminuímos a largura e o comprimento do paralelogramo com o painel de controlo.

Professora: E verificaram?

Paulo: Que o comprimento e a largura do paralelogramo foi mudando.

Professora: Foi mudando?

Paulo: Os comprimentos e as larguras variavam, mas eram iguais nos dois.

Professora: Os comprimentos e as larguras iam variando mas o que é que afinal nunca variava, em cada um das situações?

Susana: A área. (EA3_A1)

Na fase da descrição das experiências Ana percebe, ainda, que os alunos têm tendência para se centrarem nas últimas ações realizadas esquecendo, portanto, as primeiras construções. Ana questiona os alunos de modo a que consigam reconstruir todo o processo:

Professora: Essa descrição que estão a fazer está relacionada com o quê?

Mara: Com as tabelas.

Professora: Com as tabelas. E antes das tabelas não fizeram nenhuma experiência?

Ivo: É para descrever o oito?

Professora: É para descrever todas as experiências que fizeram. O que é que diz aqui? Todas.

Ivo: Ah!

Professora: E antes de andar a trabalhar com o painel de controlo o que é que fizeram? (EA3_A1)

Para Ana a utilização do computador foi importante como facilitador da aprendizagem, mas não foi o mais importante na sala de aula. Ana refere que a combinação das questões colocadas na tarefa e a tecnologia veio atribuir importância aos registos resultantes das experiências do seu trabalho para depois analisar. Deste modo, considera que sentiu que este trabalho teve o efeito nos alunos de os centrar no seu próprio trabalho e, assim, perceberem a diferença entre realizar experiências, recolher dados e descrever o que tinham feito:

Eles iam lá [ao computador] faziam a sua experimentação mas preocupados em ter que refletir sobre aquilo que estava a acontecer. E a registar, a registar, isso foi a parte mais importante que foi eles conseguirem registar aquilo que estavam a fazer e o que tinham visto. Acho que isso foi mesmo o mais importante. (E2)

Ana refere que, durante a aula, verificou que os alunos se apropriam dos critérios de avaliação. Usaram este guia durante o seu trabalho e que, na estratégia avaliativa para a classificação de triângulos, os alunos nunca recorreram ao critério sobre a utilização de uma estratégia, pois não era necessário uma estratégia para ser concluída a atividade proposta, o que revelava a sua apropriação:

Ana: Eles nunca usaram os critérios da estratégia. Eles nunca olharam para aí.

Investigadora: Temos sempre receio que seja uma linguagem que eles não se apropriem bem, mas realmente ali era só explorar. Não havia uma estratégia.

Ana: Exatamente. (EA2_S12)

Mas Ana percebeu também que os alunos usavam o patamar mais completo, dos descritores, para verificar os registos das suas produções, revelando uma apropriação dos critérios que agradou à professora: "Iam sempre para o 3 [nível máximo do descritor de cada critério]" (Ana, EA2_S12).

Na análise das produções e das pistas atribuídas pelos grupos da estratégia avaliativa EA3, Ana menciona que os seus alunos utilizaram sempre só um critério por cada questão que observaram e deram uma pista correspondente à forma como pensaram que as produções tinham conseguido atingir o respetivo descritor. Ana menciona que considera que os alunos revelaram estar a compreender a essência dos critérios de avaliação e dos seus descritores pois estabeleceram a ligação mais plausível entre a questão e o critério para o qual foi elaborada:

Investigadora: Há alguns que colocaram vários [critérios] no mesmo [questão]?

Ana: Os meus centraram-se só num. Quase todos têm a descrição na [questão] 8, toda a gente. Depois na 9 e usar a informação ou descrição ou recurso e estratégias, que é onde fazem o desenho. E na e na 10 também descrição ou recurso e estratégia ou linguagem matemática.

Investigadora: A descrição aparece mais?

Ana: Na [questão] 8 todos viram [do ponto de vista] a descrição.

Investigadora: Mas na verdade a 8 seria a mais propícia à descrição, ou não?

Ana: Sim, era. Ninguém teve dúvidas. (EA3_S15)

Ana lê e analisa, em momento pós-aula, as produções dos grupos para ajudar na tarefa de providenciar *feedback*. Os alunos, de uma maneira geral, revelam ter conseguido compreender o que era pretendido, tanto acerca da tarefa para a classificação dos triângulos, como com a elaboração dos registos da sua atividade. Mas a professora procura o melhor *feedback* no sentido de levar os alunos a melhorar a sua linguagem matemática e consequentemente o entendimento dos conceitos matemáticos envolvidos:

Ana: "Têm sempre os lados todos iguais". Os lados todos iguais ... aqui seria o comprimento dos lados, até porque aqui na tabela [os alunos registaram esses comprimentos].

Investigadora: Para escrever isso teriam que os sobrepor.

Ana: Pois, exatamente. Então, "Verifiquem a informação que está na tabela". Será que assim eles

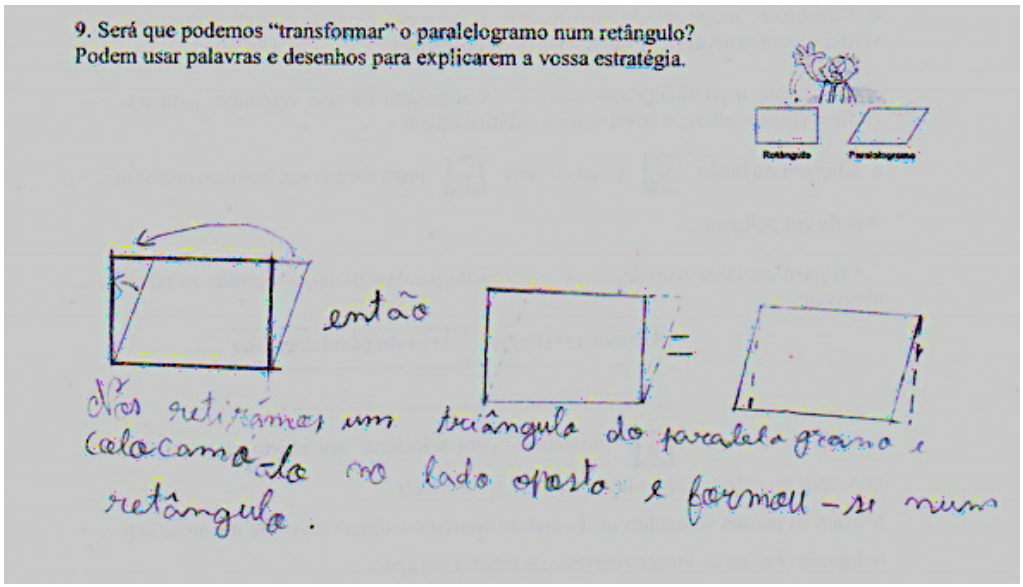


Figura 1. Trabalho do grupo sobre a equivalência da área de dois polígonos

vão lá ver isto?

Investigadora: "E usa-a para melhorar o texto". Assim ajuda a perceber o que é que lhes é pedido, não é? (EA2_S12)

Contudo, Ana considera que os seus alunos já revelam ter melhorado significativamente a linguagem matemática, mas a dificuldade que a maioria dos grupos apresenta é nas descrições das experiências realizadas, por isso, há que continuar a trabalhar nessa vertente:

Eu acho (...) que a luta vai ser continuar a descreverem as coisas como deve de ser porque em termos de linguagem matemática mais ou menos fazem os ajustes [necessários]. Mas em termos da descrição é de facto o que é mais difícil. (EA2_S12)

Mas ao observar e analisar as produções dos alunos traz um conhecimento de outra natureza sobre as suas aprendizagens. Ana seleciona um trabalho dos alunos, da EA3, para exemplificar como estes registaram a equivalência dos polígonos retângulo e paralelogramo que revela a evolução do seu trabalho. Estes alunos representaram, esquematicamente, essa equivalência mantendo o pormenor do comprimento do lado que serve de base a cada um dos polígonos ter o mesmo comprimento (Figura 1).

Neste fica bem visível, até fazem assim. E como este [triângulo] já cá não está, fica ali e pronto. (...) E dizem: Nós tirámos um triângulo do paralelogramo e colocámo-lo no lado oposto e formou-se um retângulo. (EA3_S15)

Ana revela que comparou as ultimas produções com as primeiras que os alunos realizaram e que nota uma grande evolução nomeadamente no que diz respeito às descrições que é necessário realizar:

Eu tinha ficado com uma ficha de cada grupo e via-se a maneira como eles apresentavam. Por

exemplo na parte da descrição como eles descreveram pela primeira vez e como descreveram já no fim. Quer dizer, não tinha nada a ver, notou-se uma evolução. (E2)

Ana afirma mesmo que considera que a utilização da tecnologia potenciou a atividade de avaliação reguladora pois criou condições, através das suas experiências para refletir sobre a descrição das experiências ou sobre o que conjeturavam. Ou seja, Ana considera que ficou mais claro para os alunos as etapas do trabalho com a tecnologia quando foi incluída a avaliação reguladora e a interatividade passou a ter um sentido mais específico para a aprendizagem. O processo de utilizar os critérios de avaliação tornou a atividade de reflexão sobre o que estavam a fazer a tarefa principal:

Acho pelo facto de estarmos a trabalhar com a tecnologia e a avaliação reguladora, a tecnologia potenciou a avaliação reguladora porque o facto de os alunos terem critérios e terem de refletir sobre aquilo que estava escrito eu acho que (...) a tecnologia em si deixou de ser tão importante. O mais importante era a consciência do que estava a aprender e como é que que podia utilizar coisas que já sabia anteriormente. (E2)

Ana ao fazer o balanço da atividade que desenvolveu refere que considera importante trabalhar com critérios de avaliação e faz essa ressalva tanto ao nível dos alunos como do seu próprio trabalho. Ana menciona que o trabalho desenvolvido nesta experiência contribuiu para desenvolver um outro tipo de preocupação sobre o trabalho a realizar nas restantes tarefas de sala de aula.

Eu acho que este tipo de trabalho com os critérios [de avaliação] é de facto importante para os miúdos saberem o que é que estão a fazer. E pessoalmente também me ajudou a olhar mais para aquilo que programo, para trabalhar com os miúdos de outra maneira. Mesmo outras tarefas que eu fazia na aula já tinha mais aquele cuidado de dizer o que é que eu queria que eles atingissem, embora não indicasse para irem ver aos critérios. E também já olhava para a tarefa de outra maneira, coisa que antes deste tipo de trabalho não fazia. (E2)

No entanto, Ana considera que os alunos foram melhorando as suas produções à medida que o trabalho foi avançando e atribui isso ao facto de no final de cada experiência ter adquirido conhecimentos que ajudaram a decidir o que fazer na planificação seguinte e assim ajustar o trabalho a desenvolver com os alunos:

Eu acho que as produções dos alunos foram melhorando de aula para aula porque nós também tomámos consciência de que como tínhamos planificado anteriormente não era tão eficaz. Decidimos fazer as coisas mais faseadas que tinham mais sentido. (E2)

Discussão e conclusões

As evidências revelam que durante a aula, através da sua atividade com o AGD, a professora identifica aprendizagens e competências dos alunos, o que aprendem ou como mobilizam conceitos matemáticos. Assim, é atribuída importância ao número de experiências que cada aluno pode realizar para identificar regularidades ou propriedades entre objetos matemáticos dando, assim, uma autonomia no trabalho que de outra forma não seria possível. Ou seja, a interação do aluno com o AGD permitiu, à professora, entrar em contacto com o pensamento do aluno como se de uma janela se tratasse (Baccaglini-Frank & Antonini, 2016; Hoyles & Noss, 2003; Smith & Smith, 2014). As

evidências revelam, também, a importância do questionamento oral realizado pela professora no sentido de incentivar a análise, a reflexão e a explicação de raciocínios que levaram à descoberta de propriedades (Reinhart, 2000).

Contudo, é com a atividade de análise das produções dos alunos que a professora entra em contacto com as conquistas e/ou dificuldades que os alunos manifestam. Durante esta fase de trabalho, as evidências revelam que os alunos ainda manifestavam algumas dificuldades com a descrição do processo de experimentação, não identificando a diferença entre realizar experiências e passar imediatamente para a elaboração de conclusões. No sentido de interligar uma prática de avaliação reguladora e a utilização da tecnologia as tarefas propostas aos alunos foram elaboradas para dar visibilidades às diferentes etapas do processo de recolha de dados e da sua análise, permitindo recolher evidências do trabalho desenvolvido ao longo da aprendizagem e ressaltando a individualidade dos alunos (Dias & Santos, 2008; Laborde, et al., 2006; Nunziati, 1990; Smith & Smith, 2014). As tarefas revelaram, assim, proporcionar condições para que os alunos se centrassem mais na sua aprendizagem do que na interação com o AGD, sem desviarem a sua atenção da generalização e elaboração de conjeturas.

Com a utilização de *feedback* e a utilização dos critérios de avaliação para reformular as suas produções, os alunos foram gradualmente percebendo a diferença entre fazer as experiências suficientes para recolherem dados, a sua descrição e elaborar uma conjetura, contribuindo para o desenvolvimento do espírito científico (Steele, 2012). Foi o trabalho de análise e reformulação das produções que Ana considera a mais valia de todo o processo criando condições para, através do conhecimento da reação dos alunos às tarefas propostas e do seu processo evolutivo, contribuir para o aperfeiçoamento do processo de ensino (Nunziati, 1990; Santos & Cai, 2016; Smith & Smith, 2014). Também com a utilização dos critérios de avaliação as evidências revelam que a professora conhece a forma como decorre a sua apropriação através da sua utilização durante o desenvolvimento da tarefa e, ainda, durante o processo de reformulação das produções escritas decorrentes do *feedback* realizado pela professora ou pelos colegas (Black & Wiliam, 2009; 2018; Vial, 2001).

Assim, a utilização de práticas avaliativas reguladoras com tarefas que usam tecnologia criou inter-relação em que a utilização de avaliação reguladora influenciou na forma como olhar e identificar as diferentes etapas da utilização de tarefas com tecnologia. E, a utilização da tecnologia permitiu tornar mais claro a utilização da avaliação reguladora, nomeadamente a utilização dos critérios de avaliação e do *feedback*. Concluímos que a utilização de estratégias avaliativas reguladoras com tarefas que usam tecnologia permitiram condições, aos alunos e professora, que tornaram notórias as evidências das dificuldades e dos conhecimentos adquiridos e permitiram à docente ajustar a sua prática contribuindo, assim, para uma prática reguladora do ensino.

Referências

Baccaglini-Frank, A., & Antonini, S. (2016). From conjecture generation by maintaining dragging to proof. In: C. Csikos, A. Rausch, & J. Szitányi (Eds.), *Proceedings of the 40th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 43–50). Szegeg, Hungary: PME.

Bardin, L. (2011). *Análise de conteúdo*. Coimbra: Edições 70, Grupo Almedina. (obra original em francês, publicada em 1977).

Black, P., & Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. *Educational Assessment, Evaluation and Accountability (formerly: Journal of Personnel Evaluation in Education)*, *21*(1), 5–31.

Black, P., & Wiliam, D. (2018). Classroom assessment and pedagogy. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice*, *25*(6), 551–575.

Butler, D. L. (2005). L'autorégulation de l'apprentissage et la collaboration dans le développement professionnel des enseignants. *Revue des sciences de l'éducation*, *31*(1), 55–78.

Dias, S. & Santos, L. (2008). Por que razão é importante identificar e analisar os erros e dificuldades dos alunos? O feedback regulador. In: L. Menezes, L. Santos, H. Gomes & C. Rodrigues (Org), *Avaliação em Matemática: problemas e desafios* (pp. 133–143). Viseu: SPCE.

Heron, J., & Reason, P. (2001). The practice of co-operative inquiry: Research 'with'rather than 'on'people. In P. Reason, & H. Bradbury (Eds), *Handbook of action research: Participative inquiry and practice* (pp. 179–188). London: Sage.

Hoyles, C., & Noss, R. (2003). What can digital technologies take from and bring to research in mathematics education? In: A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education* (vol 10, pp. 323–349). Dordrecht: Springer.

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K. & Strässer, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. In: A. Guitiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 275–304). Rotterdam. SensePublishers.

Mestrinho, N. & Oliveira, H. (2012). A integração do tangram na aula de Geometria – Uma primeira abordagem ao conceito de área na formação inicial de professors dos primeiros anos. In: A. Canavarro, L. Santos, A. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes, & S. Carreira (Orgs), *Investigação em Educação Matemática 2012: Práticas de ensino da Matemática* (pp. 530–240). Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática: Portalegre, Portugal.

NCTM (2014). *Principles to Actions: Ensuring Mathematical Success For All*. Reston, VA: NCTM.

Nunziati, G. (1990). Pour construire un dispositif d'évaluation formatrice. *Cahiers Pedagogiques*, *280*, 47–62.

Reinhart, S. C. (2000). Never say anything a kid can say! *Mathematics teaching in the middle school*, 5, 478–483.

Santos, L., & Cai, J. (2016). Curriculum and assessment. In: A. Gutiérrez, G. Leder, & P. Boero (Eds.), *The Second Handbook in the Psychology of Mathematics Education* (pp. 153–185). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.

Smith, J. K., & Smith, L. F. (2014). Developing Assessment Tasks. In: C. Wyatt-Smith, V. Klenowski, & P. Colbert (Eds.), *Designing Assessment for Quality Learning* (pp. 123–136). London, UK: Springer.

Steele, M. (2012). Exploring the mathematical knowledge for teaching geometry and measurement through the design and use of rich assessment tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*(4), 245–268.

Timperley, H. (2014). Using assessment information for professional learning. In: C. Wyatt-Smith, V. Klenowski, & P. Colbert (Eds.), *Designing Assessment for Quality Learning. The Enabling Power of Assessment* (vol 1, pp. 137–149). Dordrecht: Springer.

Vial, M. (2001). *Se former pour évaluer. Pédagogies en développement*. Bruxelles. De boeck Université.

Um aparente pêndulo duplo — A aula de Matemática face às Aprendizagens Essenciais e ao Perfil dos Alunos na visão dos professores

Nélia Amado
Universidade do Algarve e UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
namado@ualg.pt

Susana Carreira
Universidade do Algarve e UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
scarrei@ualg.pt

António Júlio Aroeira
EBS da MAdalena e DRE Açores: Equipa PFAPDEB
antonio.jc.aroeira@edu.azores.gov.pt

Carla Duarte
Escola Secundária Vitorino Nemésio e DRE Açores: Equipa PFAPDEB
carla.mb.duarte@edu.azores.gov.pt

Elsa Morais
Escola Secundária Antero de Quental e DRE Açores: Equipa PFAPDEB
elsa.mfc.morais@edu.azores.gov.pt

Justina Romano
Escola de São Roque do Pico e DRE Açores: Equipa PFAPDEB
justina.mbn.romano@edu.azores.gov.pt

Mónica Valadão
EBS Tomás de Borba e DRE Açores: Equipa PFAPDEB
monica.ar.valadao@edu.azores.gov.pt

Raquel Faria
Escola Secundária da Ribeira Grande e DRE Açores: Equipa PFAPDEB
raquel.ma.faria@edu.azores.gov.pt

Resumo

São bem conhecidos os movimentos pendulares que ao longo das últimas décadas têm marcado as mudanças curriculares na Educação Matemática. Vivemos atualmente em Portugal uma situação peculiar em que coexistem documentos e orientações dissonantes. As formas como os professores gerem esta situação ainda não são totalmente claras. Sabe-se, porém, que as suas conceções acerca do ensino e da aprendizagem da matemática têm um carácter duradouro e são decisivas no sucesso das reformas curriculares. No contexto de um programa de formação e acompanhamento de professores de matemática do 3.º ciclo do ensino básico, em curso nos Açores, procurou-se perceber o que valorizam numa boa aula de matemática e como isso se compatibiliza com as recentes orientações curriculares. Neste artigo, apresentamos os resultados de um estudo inicial baseado na realização de entrevistas. Foi identificada uma valorização das aprendizagens e competências dos alunos a par de uma clara atenção à necessidade de fomentar o gosto e a motivação na aula de matemática. Verificou-se ainda um foco sobre as formas de organização do ambiente de aprendizagem, mas uma menor preocupação com práticas de aprendizagem que envolvam capacidades de ordem superior.

Abstract

Over the last decades, pendulum movements have marked the curricular changes in Mathematics Education. In Portugal, a peculiar situation is currently taking place where dissonant documents and guidelines coexist. The ways in which teachers manage this situation are still not entirely clear. It is known, however, that teachers' beliefs about teaching and learning mathematics have a lasting character and are decisive in the success of curricular reforms. In the context of a professional development program for middle school mathematics teachers currently under way in the Azores, we sought to understand what they value in a good mathematics class and how this is compatible with recent curricular guidelines. In this article, we present the results of an initial study based on interviews. It was identified an appreciation of students' learning and skills achievement along with a clear attention to the need to foster enjoyment and motivation in the mathematics class. There was also a focus on the ways of organizing the learning environment, but less concerns with learning practices involving higher order skills.

Palavras-chave: Aula de Matemática, Aprendizagens Essenciais, Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória, Orientações Curriculares, Práticas de Ensino e Aprendizagem.

Introdução

As reformas e mudanças curriculares, nomeadamente na disciplina de Matemática, parecem ser hoje um processo de carácter globalizante, que não está dissociado de diretrizes mundiais e da ação e inspiração de organizações transnacionais, como a OCDE, a UNESCO, ou o ICMI. Alguns autores falam mesmo da possibilidade de se entrever um currículo global em termos de um discurso comum e consonante, isto é, um currículo global "de facto" (Sparapani, Callejo, Gould, Hillman, & Clark, 2014). Muito desse discurso concertado está relacionado com a crescente preocupação de competitividade económica a nível internacional; uma das suas possíveis manifestações consiste na resposta global dada por diversos países aos resultados de programas de avaliação internacionais, como o PISA e o TIMMS (Sparapani et al., 2014). Pese embora essa aparente unanimidade (UNESCO, 2016), há ainda claras evidências de que os sistemas educativos continuam a debater-se com dificuldades em transpor para a prática as estratégias e os meios que permitam concretizar as mudanças desejadas. Entre os fatores que podem justificar a dificuldade de traduzir diretrizes globais em práticas efetivas estão as conhecidas oscilações pendulares, verificadas periodicamente em diversos locais do mundo, que levam ao alinhamento alternado dos programas curriculares e orientações oficiais com perspetivas educacionais distintas e visivelmente antagónicas. Exemplos dessa discussão, no que diz respeito à educação matemática, podem encontrar-se em English & Sriraman (2010) e Van den Heuvel-Panhuizen (2010).

Em Portugal, vive-se no presente uma circunstância algo peculiar quanto a orientações curriculares. Uma possível metáfora para ilustrar esta situação seria a de um pêndulo duplo que constitui um bom exemplo de um sistema que exibe comportamento caótico, caraterizado por grande sensibilidade às condições iniciais. De facto, as normas curriculares encontram-se fragmentadas e dispersas, bem como desconectadas, além de que refletem perspetivas educacionais dissentâneas — Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória (Perfil dos Alunos) e Aprendizagens Essenciais *versus* Programas e Metas Curriculares. Neste cenário, é provável que o sistema reaja sensivelmente a diversas condições iniciais, das quais consideramos relevantes: as visões dos professores sobre as mudanças preconizadas, as suas práticas de sala de aula e a forma como interpretam e realizam processos de inovação curricular. Assim, é nosso propósito levar a cabo um estudo exploratório, cujos objetivos estão circunscritos a um contexto de formação, no âmbito de um projeto de acompanhamento de professores de Matemática do 3.º ciclo do ensino básico (CEB), em curso na Região Autónoma dos Açores. Neste artigo, definimos como duplo objetivo de investigação conhecer os aspetos que os professores destacam ao caraterizarem uma boa aula de Matemática e perceber de que forma essa caraterização se compatibiliza com as recentes orientações curriculares, em particular, com as Aprendizagens Essenciais e o Perfil dos Alunos.

Contexto do estudo

Com o intuito de melhorar a qualidade das aprendizagens dos alunos, a Região Autónoma dos Açores concebeu o ProSucesso — Plano Integrado de Promoção do Sucesso Escolar (http://prosucesso.azores.gov.pt/). No ano letivo 2018/2019, o Programa de Formação e Acompanhamento Pedagógico de Docentes da Educação Básica (PFAPDEB) de Matemática alargou-se ao 3.º CEB, dando seguimento a um processo iniciado em 2013/2014, no 1.º CEB, que prosseguiu depois para o 2.º CEB. A equipa do PFAPDEB aposta na diversificação de práticas letivas e no trabalho colaborativo entre professores. Atendendo à situação geográfica dos Açores, região insular repartida por nove ilhas, foram constituídos três núcleos, sob coordenação comum.

A equipa do PFAPDEB implementou uma Oficina de Formação, intitulada "O ensino e a aprendizagem da Matemática numa escola para todos", destinada, prioritariamente, aos docentes envolvidos no projeto de autonomia e flexibilidade curricular e que lecionam o sétimo ano. De entre os objetivos da Oficina, destacam-se: i) analisar e integrar as orientações curriculares em vigor; ii) promover mudanças nas práticas profissionais dos professores; iii) partilhar boas práticas e iv) refletir sobre as práticas de avaliação.

Nas sessões presenciais, foi privilegiado o trabalho em pequeno grupo para análise e discussão de tarefas de carácter exploratório, incluindo resolução de problemas, tendo como referência as Aprendizagens Essenciais e o Perfil dos Alunos. Foi ainda promovida a construção e adaptação de materiais pedagógicos e a reflexão sobre as dinâmicas de sala de aula. Os momentos destinados à apresentação de trabalhos realizados com alunos, a par da reflexão sobre a implementação de tarefas em sala de aula, têm sido uma constante em todas as sessões.

Quadro teórico

A partir de diversos quadros de referência, podem-se estabelecer algumas premissas representativas dos aspetos centrais de uma "boa" aula de Matemática. O modelo que iremos adotar tem em conta, não apenas estas premissas, mas resulta ainda de uma construção feita a partir das formas como os próprios professores percecionam uma aula de Matemática bem-sucedida, no contexto da sua prática.

Elevar a qualidade do ensino da Matemática é considerado um objetivo prioritário que tem implicações sobre a formação e o desenvolvimento profissional dos professores de Matemática. Diversos autores no campo da investigação em Educação Matemática têm vindo a desenvolver quadros de referência para caraterizar um ensino de Matemática de qualidade (eg. Macnab, 2000; Protheroe, 2007; Schoenfeld, 2014). Assim, alguns indicadores genéricos centram-se nas ações do professor e no ambiente que emerge na aula de Matemática. A capacidade de promover e gerir um bom ambiente de sala de aula, especialmente visando um ensino diferenciado, a capacidade de

envolver ativamente os alunos durante a aula e o uso eficiente do tempo são algumas das competências do professor consideradas cruciais para alcançar um ensino de elevada qualidade (Protheroe, 2007). Assim, na concretização de uma aula de Matemática eficaz e produtiva, o professor realiza ações como as seguintes (Protheroe, 2007):

i) aceita as ideias dos alunos e desafia-os a ir mais longe na resolução de problemas e na explicação das suas resoluções;

ii) coloca questões desafiantes e interessantes e encoraja os alunos a confiarem em si próprios e nos seus colegas para encontrarem soluções;

iii) demonstra entusiasmo e confiança nos seus alunos para fazerem Matemática nas aulas;

iv) estabelece conexões entre a Matemática e outras áreas e promove a interdisciplinaridade;

v) fomenta a discussão de ideias e usa essa discussão para clarificar e desafia as ideias dos alunos.

Por seu turno, em função destas ações, os alunos:

i) tomam a iniciativa e envolvem-se ativamente nas tarefas;

ii) resolvem problemas desafiantes, incluindo problemas do mundo real;

iii) trabalham de forma colaborativa e partilham as suas ideias, em pares ou em pequenos grupos;

iv) comunicam as suas ideias e usam diferentes formas de representação;

v) utilizam diversos materiais e recursos, garantindo a participação ativa de todos.

Macnab (2000) defende que o principal fator de um ensino de qualidade está em assegurar que todos os alunos se envolvam ativamente em propostas que os levarão a adquirir e aplicar conceitos e processos matemáticos. Assim, a palavra de ordem é o envolvimento cognitivo dos alunos com os materiais de aprendizagem. Contudo, o autor não ignora, os aspetos emocionais associados a um clima positivo na aula de Matemática, dado que nem todos os alunos são auto motivados (Macnab, 2000; Fajet, Bello, Leftwich, Mesler, & Shaver, 2005; Laine, Ahtee & Näveri, 2019). A motivação e o gosto pela Matemática são marcantes nos países com melhores resultados no TIMMS, sendo a ausência destes fatores considerada como um significativo entrave à aprendizagem e ao desenvolvimento de relações interpessoais favoráveis (Macnab, 2000).

Schoenfeld (2013, 2014) apresenta um esquema de análise (TRU Math Rubric) que permite identificar, quer na perspetiva do professor quer na perspetiva do investigador, os elementos e caraterísticas essenciais de uma aula de matemática "poderosa". Esse esquema, alicerçado em diversas revisões de literatura, procurou minimizar o número de dimensões a considerar, uma vez que um dos objetivos era poder aplicá-lo à observação de aulas. Assim, o esquema baseia-se: i) na forma de abordar a matemática, ii) na exigência cognitiva, iii) no acesso ao conteúdo matemático, iv) na agência, autoridade e identidade e v) no uso da avaliação para a aprendizagem.

Parece, portanto, existir um claro consenso em torno da ideia de que uma aula de Matemática produtiva, poderosa, ou de elevada qualidade se reveste de um conjunto

de atributos que a investigação tem vindo progressivamente a elencar. Vários destes atributos estão ligados ao modo como os alunos se envolvem ativamente nas propostas e atividades e às suas atitudes face à Matemática, entre as quais, o gosto, o interesse e a vontade de participar na resolução de tarefas desafiantes; ao mesmo tempo, outros atributos parecem nitidamente decorrer das ações dos professores e do modo como eles contribuem para um ambiente estimulante, sugerindo tarefas intelectualmente interessantes, promovendo a discussão e a partilha de ideias e incentivando a comunicação e a argumentação matemática.

Recentemente, a investigação tem-se interessado pelos aspetos emocionais que estão presentes (ainda que mais ou menos visíveis) na aula de Matemática, tanto no que diz respeito aos alunos como aos professores. Um estudo de Jacob, Frenzel e Stephens (2017) propôs-se compreender como os próprios professores de Matemática definem uma "boa aula" ou um ensino de Matemática de qualidade. Este trabalho dá continuidade a outras investigações (Frenzel, Goetz, Stephens & Jacob, 2009), segundo as quais um "bom ensino" está repleto de emoções positivas, em particular para o professor. As experiências e as interpretações subjetivas de sucesso ou fracasso na atividade letiva são os fatores chave que estão na base das emoções positivas ou negativas dos professores. As emoções dos professores são provocadas pela sua sensação de alinhamento entre os objetivos das suas aulas e a apreciação que eles fazem dos comportamentos dos seus alunos. Os autores distinguem duas perspetivas que podem adotar-se para analisar os critérios que os professores usam para avaliar o êxito das suas aulas: a perspetiva orientada para o *input* e a perspetiva orientada para o *output*. No primeiro caso, os professores definem o alinhamento por meio das *ações e comportamentos do professor* que devem ocorrer para que os alunos aprendam e tenham sucesso; no segundo caso, os professores definem o alinhamento em termos dos *resultados e comportamentos dos alunos* que desejam que estes revelem. Em síntese, os professores poderão definir o seu ensino como bem-sucedido mediante duas razões principais: porque os alunos exibiram certos comportamentos ou porque eles próprios realizaram certas ações no decurso da aula.

No estudo que efetuaram, envolvendo 307 professores de Matemática, verificaram que o seu modelo inicial foi particularizado em seis critérios usados pelos professores, dos quais três correspondem a uma perspetiva orientada para o *output*, dois correspondem a uma perspetiva orientada para o *input* e um terceiro parece inserir-se numa outra perspetiva que seria a do reconhecimento ou validação externa. Nos critérios orientados para o output, surgiram os seguintes: i) *aprendizagens dos alunos*, ii) *envolvimento dos alunos* e iii) *interações sociais na aula*. Nos critérios orientados para o input, aparecem: i) *ativação cognitiva e materiais da aula* e ii) *organização do ambiente de aprendizagem*. Por fim, o critério do *reconhecimento e validação* que está associado ao feedback proveniente dos resultados de testes e exames, mas também dos pais, dos alunos e dos colegas.

Este estudo mostrou que a aprendizagem dos alunos surge como o critério mais frequente, seguido do envolvimento dos alunos. O critério das interações e relações interpessoais surgiu com menor frequência. Os critérios orientados para o *input* fo-

ram menos frequentes do que os critérios voltados para o *output*. Além disso, surgiu como resultado inesperado uma considerável frequência de respostas pertencentes ao critério do reconhecimento e validação, com referências claras a princípios e padrões de sucesso externos usualmente entendidos como o sucesso dos alunos em testes e exames.

A investigação tem demonstrado que as conceções dos professores sobre a Matemática e sobre o ensino e aprendizagem da disciplina são duradouras e que não existe uma relação causal entre as conceções e as práticas dos professores. Os progressos feitos no sentido de compreender melhor a interação entre conceções e práticas dos professores de Matemática permitem, contudo, algumas conclusões. Sabe-se que existem duas grandes categorias de conceções dos professores de Matemática sobre os objetivos do ensino da disciplina, consoante valorizam a aquisição de conhecimentos ou o desenvolvimento de capacidades e atitudes (Menezes, 1995). Além disso, as conceções dos professores sobre o ambiente de sala de aula, o uso de materiais e as tarefas propostas tendem a ser convergentes com as duas distinções anteriores. Assim, parece plausível que os professores, ao caraterizarem ou descreverem uma boa aula de Matemática, se dividam entre a valorização da aprendizagem e das capacidades e a valorização do envolvimento e das atitudes dos alunos.

Handal e Herrington (2003) afirmam que as crenças dos professores sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática são fundamentais para determinar o ritmo com que avança a implementação de uma reforma curricular. Defendem que a mudança em educação é um processo complexo no qual os professores mantêm fortes crenças sobre a qualidade dos processos de inovação. A introdução de um novo currículo tende a gerar desconforto e sobretudo desconfiança, já que o sucesso de muitas reformas parece não ter ficado demonstrado ao longo das últimas décadas. Em suma, se as conceções dos professores de Matemática não são congruentes com as visões subjacentes a uma reforma educacional, então é de supor que tal incompatibilidade afetará o grau de sucesso da inovação, bem como a disposição dos professores para implementar mais inovações.

Abordagem metodológica

Neste estudo optou-se por uma metodologia qualitativa de natureza interpretativa, dado o propósito de conhecer a forma como os professores caracterizam através das suas palavras uma boa aula de matemática. Para a recolha de dados, foi realizada uma entrevista a sete professores que participaram na Oficina de Formação referida. A escolha dos participantes teve em consideração os três núcleos de formação — S. Miguel, Pico e Terceira e o seu envolvimento moderado a elevado nas atividades e nas sessões realizadas no âmbito da Oficina de Formação. Na tabela 1, apresenta-se uma breve caracterização dos participantes relativamente à sua formação académica e experiência profissional.

A entrevista, de natureza semiestruturada, desenvolveu-se em quatro temas, um dos

Tabela 1. Caracterização dos participantes

Sexo	Formação académica	Idade	Tempo serviço	Experiencia profissional relevante
P1 Fem.	Licenciatura em Matemática (ensino)	41	20	Diretora de turma; Coordenadora do departamento; Acompanhamento do programa de matemática do ensino secundário; Projeto ProSucesso e Fénix.
P2 Fem.	Licenciatura em Matemática (ensino)	40	18	Diretora de Turma; Coordenadora de departamento; Projetos de escola ou regionais
P3 Fem.	Licenciatura em Matemática (ensino)	38	15	Diretora de Turma; Coordenadora dos diretores de turma: Professora acompanhante do NPMEB
P4 Masc.	Licenciatura em Matemática (ensino)	54	30	Diretor de Turma; Coordenador de departamento, Projetos Erasmus+; membro da comissão da avaliação da escola
P5 Masc.	Licenciatura em Matemática (ensino)	40	13	Acompanhamento do programa de matemática do ensino secundário, Projeto Fénix
P6 Fem.	Licenciatura em Matemática (ensino) Pós-graduação em Matemática Aplicada Mestrado em Ciências da Educação (Tecnologias em Educação)	50	25	Orientadora de estágio; Formadora; Projetos de escola ou regionais; Projeto ProSucesso
P7 Masc.	Licenciatura em Matemática (ensino)	43	20	Projetos CAME e CONTENT; Projeto Login; Formador; Organização e dinamização das Olimpíadas Matemáticas e SuperT.

quais será aqui objeto de análise: caraterizar uma boa aula de matemática e perceber se isso é conciliável com as atuais orientações curriculares expressas nas Aprendizagens Essenciais e no Perfil dos Alunos.

As entrevistas tiveram uma duração média de 45 minutos e foram conduzidas por vários dos autores que se organizaram em pares. A todos os professores foi dado conhecimento dos objetivos da entrevista e garantida a confidencialidade da informação bem como o seu anonimato.

As entrevistas foram integralmente transcritas e sujeitas a análise de conteúdo (Elo & Kyngäs, 2008; Silva & Fossá, 2015). O processo seguido na análise de conteúdo corresponde a uma abordagem essencialmente dedutiva, partindo de um quadro de categorias que se baseou nos critérios identificados por Jacob, Frenzel e Stephens (2017). Essas categorias foram progressivamente refinadas a partir de um confronto entre os critérios referidos e a leitura dos dados. Esse trabalho incluiu a criação de um conjunto de descritores, visando estabelecer as fronteiras de cada categoria. Assim, ficaram estabelecidas cinco categorias e respetivos descritores, três das quais referentes à visão dos professores orientada para os *outputs* e duas orientadas para os *inputs*.

— Envolvimento dos alunos na aula (EA): Informação relativa a emoções, sentimentos e atitudes positivas do aluno face à aula de matemática, por ex. motivação, entusiasmo, gosto, participação, empenho, persistência…

— Aprendizagem e desenvolvimento de competências dos alunos na aula (ACA):

Informação relativa a aspetos da aprendizagem e do desenvolvimento de competências na aula de Matemática, como a construção de conhecimento, aquisição de conceitos e procedimentos, raciocínio matemático, compreensão dos tópicos e das tarefas, assim como capacidades transversais, por ex., sentido crítico, comunicação matemática, resolução de problemas…

— Relações e interações sociais (RA): Informação que carateriza o tipo de interações sociais que ocorrem na aula de Matemática e o modo como os alunos se relacionam, bem como formas de trabalho na sala de aula, como trabalho autónomo, em pares ou em pequenos grupos…

— Organização e ambiente de sala aula (OAP): Informação referente às estratégias utilizadas e à criação de ambientes promotores de aprendizagens, nomeadamente sobre o papel do professor e do aluno na aula de Matemática, a gestão e organização das fases da aula e o acompanhamento do trabalho dos alunos…

— Promoção da aprendizagem e uso de materiais (PAP): Informação relativa à natureza e objetivos das tarefas propostas e dos recursos pedagógicos para a aula de Matemática, por exemplo, tarefas com recurso à utilização das tecnologias, situações da vida real, problemas, tarefas exploratórias…

Para efeitos de codificação, a unidade de análise adotada foi o segmento de frase representativo de uma ideia. Cada uma das transcrições foi codificada individualmente e, no final, dois codificadores trabalharam em conjunto para validar a codificação feita individualmente.

Resultados

A análise dos resultados, mostra que os critérios usados pelos professores entrevistados para a caraterização de uma boa aula de Matemática se dividem nas duas vertentes consideradas, isto é, incluem valorizações orientadas para os *outputs* e valorizações orientadas para os *inputs*.

Há evidência de que todos os participantes consideraram relevantes as ações e comportamentos dos alunos como facetas de uma boa aula de Matemática (ver Tabela 2).

Neste grupo de categorias, predominaram as referências feitas pelos professores às aprendizagens e ao desenvolvimento de competências dos alunos, como ilustra o gráfico da Figura 1.

Parece ressaltar das diversas considerações dos professores uma atenção predominante ao facto de que uma boa aula leva o aluno a aprender "alguma coisa", nomeadamente, consegue construir algum conhecimento, consegue reter e compreender os assuntos tratados. Acrescem ainda algumas ideias relacionadas com o desenvolvimento de competências, como sejam, o sentido crítico, o raciocínio e a descoberta. Também é comum a estes professores a manifesta importância dada ao envolvimento dos alunos na aula. Todos os entrevistados fizeram alusão a aspetos pertencentes a esta categoria, sendo de destacar o relevo que atribuíram a atitudes como a motivação, o gosto, o in-

Tabela 2. Frequências e exemplos descritivos de critérios orientados para output

	Envolvimento dos alunos (ea)	**Aprendizagens e desenvolvimento de competências** (aca)	**Relações interpessoais** (ra)
P1	16	2	2
	Os alunos estão entusiasmados Os alunos não dão pelo tempo passar	Os alunos conseguem lá chegar sozinhos Cada aluno aprende alguma coisa	Os alunos entram em despique
P2	6	12	5
	Os alunos sentem-se envolvidos Os alunos gostam	Os alunos conseguem ser críticos Os alunos resolvem prolemas	Os pares vão-se ajudando Os alunos trabalham cooperativamente
P3	7	13	1
	Os alunos estão interessados e motivados Alunos sentem necessidade de usar a matemática	Os alunos têm iniciativa O aluno explora e descobre	Há diálogo entre os alunos e entre estes e o professor
P4	5	3	0
	Alunos satisfeitos Alunos com um sorriso	Os alunos compreendem o essencial da aula Os alunos sentem que conseguem alguma coisa	
P5	4	6	0
	O aluno fica motivado O aluno sente que o professor não desiste dele	O aluno acima de tudo aprende O aluno constrói o seu raciocínio e desenvolve a sua aprendizagem	
P6	5	12	3
	O aluno tem vontade e confiança O aluno tem uma participação ativa na sala de aula	O aluno tira conclusões, é capaz de falar e escrever sobre as coisas O aluno é capaz de criticar	Há empatia entre o professor e os alunos e entre os próprios alunos
P7	6	12	0
	Os alunos acham piada Eles engrenam bem naquilo	Os alunos conseguem reter e conseguem perceber Os alunos ficam com qualquer coisa lá dentro (...), alguma coisa mexe com eles	

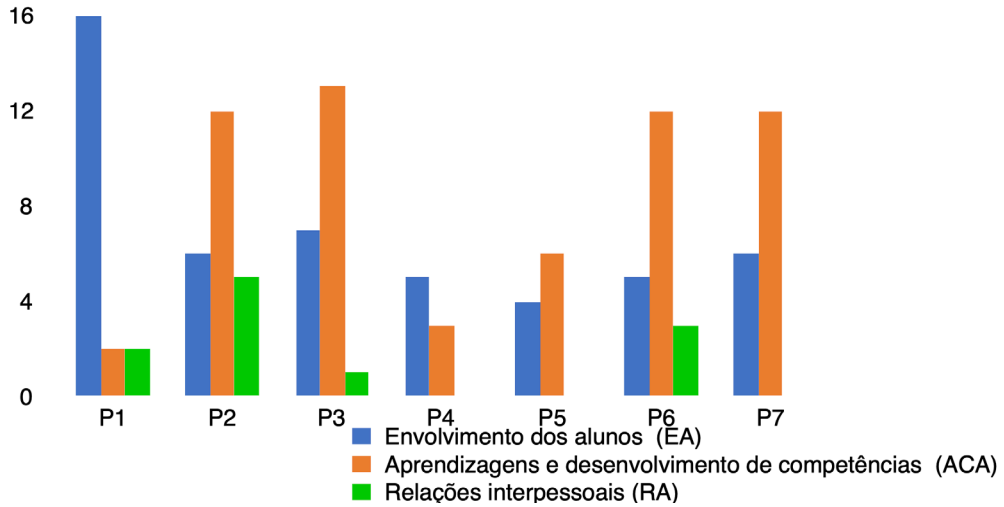


Figura 1. Gráfico das instâncias pertencentes às categorias orientadas para o output

Tabela 3. Frequências e exemplos descritivos de critérios orientados para input

	Organização e ambiente de sala de aula (OAP)	**Promoção da aprendizagem e uso de materiais** (PAP)
P1	23	10
	O professor adapta-se aos alunos O professor orienta O professor promove o trabalho em pares e promove a discussão	O professor propõe diferentes tipos de tarefas O professor cria oportunidades para que cada aluno faça um trabalho diferente
P2	16	5
	Torna a aula mais prática Dá tempo para os alunos trabalharem em pares e em grupo	Usa recursos didáticos de acordo com as tarefas Preocupa-se em criar tarefas
P3	16	9
	Coloca os alunos a trabalhar em grupo Organiza a sala para eles trabalharem em pares Dá tempo para eles lerem, interpretarem e pensarem sozinhos	Diversifica as tarefas; usa tarefas exploratórias para introduzir um conteúdo Eles têm de tentar fazer, experimentando
P4	12	1
	Continua a usar o "método das tarefas" Considera importante incutir nos alunos que eles têm de se empenhar, trabalhar e conseguir.	Dá uma tarefa em que eles vão descobrindo os próprios conceitos e chegam a determinadas conclusões matemáticas
P5	19	0
	Preocupa-se em diversificar as estratégias Considera o trabalho em pares muito proveitoso O professor vai dando dicas	
P6	13	14
	O professor dá feedback aos alunos Promove o bem-estar dos alunos	Procura utilizar exemplos da vida real Coloca os alunos a pesquisar
P7	13	10
	Diversificar talvez seja o mais importante para o professor O professor tem de servir como um guia Considera fundamental utilizar a tecnologia	Trabalha com o GeoGebra Poder utilizar os telemóveis deles é muito bom

teresse e o entusiasmo dos alunos. Em suma, podemos inferir que os professores estão despertos para a relevância de um clima positivo de sala de aula, independentemente da perspetiva de aprendizagem que adotem.

Em termos dos resultados que se referem a critérios orientados para os inputs, é de realçar que, globalmente, os entrevistados explicitaram mais instâncias destas duas categorias (Tabela 3) do que das três categorias anteriores (Tabela 2). Este resultado parece mostrar que os entrevistados colocam grande ênfase nas suas ações e comportamentos como critérios para uma aula bem-sucedida.

Comparando as instâncias que se verificaram nas duas categorias relacionadas com os *inputs* (Figura 2), constata-se que é predominante o foco sobre as ações para organização e criação de um bom ambiente de sala de aula. Assim, os professores parecem valorizar ações que visam a diferenciação pedagógica, a diversificação das aulas, o apoio

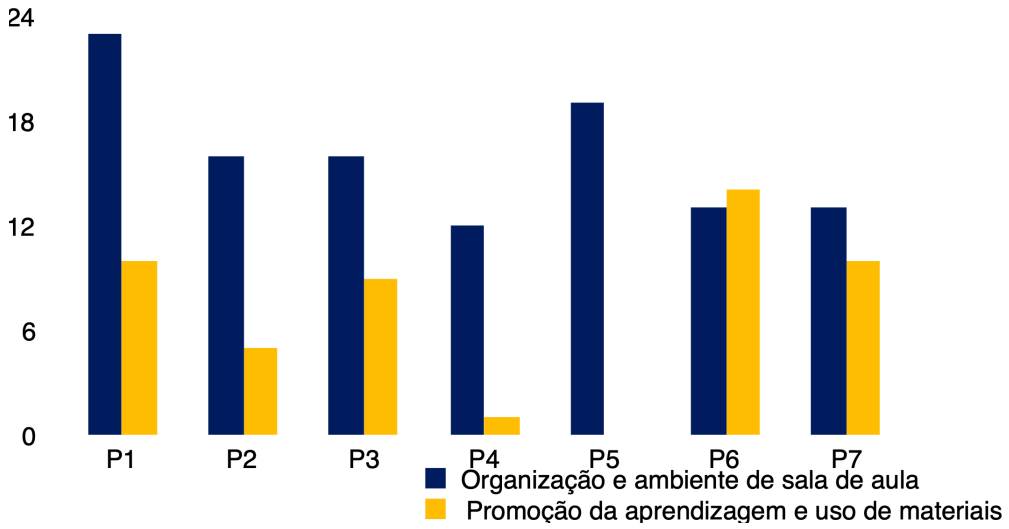


Figura 2. Gráfico das instâncias pertencentes às categorias orientadas para o *intput*

aos alunos e o recurso ao trabalho em pares ou em pequenos grupos. Com menos frequência, na quase totalidade dos casos, surgem os critérios relativos às ações para promoção de aprendizagens e recurso a materiais. Nesta categoria, parecem destacar-se ideias como a utilização de tarefas e exemplos na sala de aula.

Conclusões

Os resultados obtidos devem ser olhados com prudência, nomeadamente porque decorrem apenas do uso de um único instrumento de recolha de dados e também porque foram obtidos no contexto específico de uma oficina de formação. Assim, referiremos algumas das ideias emergentes que poderão ser colocadas como hipóteses de trabalho para posterior aprofundamento.

Os professores parecem dar significativo valor a duas características de uma boa aula de Matemática: i) a aprendizagem e o desenvolvimento de competências dos alunos e ii) a organização e o ambiente da sala de aula. Ambos os critérios parecem estar sintonizados com os princípios expressos nas Aprendizagens Essenciais e no Perfil dos Alunos. Contudo, é de notar que as referências às ações dos professores para a promoção de aprendizagens ocorrem com menor frequência e assumem um caráter abstrato, muito desligados da Matemática, de formas de raciocínio matemático ou do uso de representações matemáticas. Escasseiam nas palavras dos entrevistados ideias e contributos essenciais do campo da Didática da Matemática, como referências a tarefas interessantes que promovem a discussão e incentivam a comunicação matemática (Schoenfeld, 2013, 2014).

Por um lado, assistimos a uma clara manifestação de reconhecimento da importância do gosto pela matemática e da motivação dos alunos para a aprendizagem da

Matemática, o que é consentâneo com alterações curriculares recentes. Por outro lado, parece subjacente uma ideia de aprendizagem ainda um tanto centrada na aquisição de conhecimentos, o que pode ser um reflexo da permanência de normas curriculares contraditórias com as Aprendizagens Essenciais e o Perfil dos Alunos.

Referências bibliográficas

Elo, S. & Kyngäs, H. (2008). The qualitative content analysis process. *Journal of Advanced Nursing*, *62*(1), 107–115. DOI: 10.1111/j.1365-2648.2007.04569.x

English, L. & Sriraman, B. (2010). Problem Solving for the 21st Century. In B. Sriraman, & L. English (Eds.), *Theories of Mathematics Education: Seeking New Frontiers*, (pp. 263–290). Berlin: Springer-Verlag. DOI: 10.1007/978-3-642-00742-2_27

Fajet, W., Bello, M., Leftwich, S. A., Mesler, J. L., & Shaver, A. N. (2005). Preservice teachers' perceptions in beginning education classes. *Teaching and Teacher Education*, *21*, 717–727.

Frenzel A. C., Goetz T., Stephens E. J., & Jacob B. (2009). Antecedents and Effects of Teachers' Emotional Experiences: An Integrated Perspective and Empirical Test. In: P. Schutz & M. Zembylas (Eds.). *Advances in Teacher Emotion Research*, (pp. 129–151). Boston, MA: Springer.

Jacob, B., Frenzel, A. C., & Stephens, E. J. (2017). Good teaching feels good—but what is "good teaching"? – Exploring teachers' definitions of teaching success in mathematics. ZDM — *International Journal of Mathematics Education*, *49*, 461–473. DOI: 10.1007/s11858-017-0848-6.

Laine, A., Ahtee, M., & Näveri, L. (2019). Impact of Teacher's Actions on Emotional Atmosphere in Mathematics Lessons in Primary School. *International Journal of Science and Mathematics Education* (First Online). https://doi.org/10.1007/s10763-018-09948-x

Macnab, D. (2000). Raising Standards in Mathematics Education: Values, Vision, and TIMMS. *Educational Studies in Mathematics*, *42*, 61–80.

Menezes, L. (1995). *Concepções e práticas de professores de matemática: Contributos para o estudo da pergunta*. (Dissertação de Mestrado). Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Lisboa.

Silva, A. H. & Fossá, (2015). Análise de conteúdo: exemplo de aplicação da técnica para análise de dados qualitativos. *Qualitas Revista Eletrônica*, *17*(1), 1–14.

Protheroe, N. (2007). What Does Good Math Instruction Look Like? (Research Report). *Principal*, *87*(1), 51–54. Disponível em: https://www.naesp.org/sites/default/files/ resources/2/Principal/2007/S-Op51.pdf

Schoenfeld, A. H. (2013). Classroom observations in theory and practice. ZDM — *International Journal of Mathematics Education*, *45*, 607–621. DOI 10.1007/s11858-012-0483-1

Schoenfeld, A. H. (2014). What Makes for Powerful Classrooms, and How Can We Support Teachers in Creating Them? A Story of Research and Practice, Productively Intertwined. *Educational Researcher*, *43*(8), 404–412. DOI: 10.3102/0013189X14554450

Sparapani, E. F., Callejo Perez, D., Gould, J., Hillman, S., & Clark, L. (2014). A Global Curriculum? Understanding Teaching and Learning in the United States, Taiwan, India, and Mexico. *SAGE Open*, (April-June), 1–15. DOI: 10.1177/2158244014536406

UNESCO. (2016). Education 2030: *Incheon Declaration and Framework for Action*. Acedido em Maio, 2019, em http://uis.unesco.org/sites/default/files/documents/education-2030-incheon-framework-for-action-implementation-of-sdg4-2016-en_2.pdf.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2010). Reform under attack – Forty years of working on better mathematics education thrown on the scrapheap? No way!. In L. Sparrow, B. Kissane, & C. Hurst (Eds.), *Shaping the future of mathematics education: Proceedings of the 33rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, (pp. 1–25). Fremantle: MERGA.

Situações autênticas de sala de aula na promoção de reflexões sobre o ensino da Estatística: Uma experiência de formação

Bruna Rodrigues
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
brunaa-rodrigues@hotmail.com

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ulisboa.pt

Resumo

O nosso objetivo é investigar os contributos da análise de situações autênticas de sala de aula para o desenvolvimento profissional do professor que ensina Estatística. Para isso, consideramos as reflexões que tiveram lugar numa sessão de uma formação de professores de Matemática inserida num curso de especialização. Nesta sessão, os professores analisaram gravações em vídeo de uma aula realizada com uma turma de 8.º ano do ensino fundamental, no Brasil, abordando representações estatísticas. Analisaram, ainda, a tarefa e as respostas dos alunos. Foi feita uma análise qualitativa de cunho interpretativo das transcrições dos áudios das discussões dos professores na sessão de formação e dos relatórios que eles produziram com base num guião elaborado pela formadora. Os resultados evidenciam que a análise das tarefas e respostas dos alunos e a análise dos vídeos propiciaram aprendizagens sobre o ensino da Estatística, nomeadamente no que respeita as ações do professor mediante o raciocínio e comunicação do aluno.

Abstract

We aim to study the contribution of the analysis of authentic classroom situations for the development of teachers who teach statistics. To achieve this, we consider the reflections that took place in a training session of mathematics teachers inserted in a specialization course. In this session, the teachers analyzed video recordings with a grade 8 class in Brazil, addressing statistical representations. They also analyzed the task and the students' responses. A qualitative and interpretative analysis of the audio transcripts of the teachers' discussions in the training session and of the reports that they produced based on a script prepared by the teacher educator was made. The results show that the analysis of the students' tasks and responses and the analysis of the videos provided learning about the teaching of statistics, namely regarding the actions of the teacher in relation to the students' reasoning and communication.

Palavras-chave: Conhecimento didático; Formação; Ensino da Estatística.

Introdução

As transformações que ocorrem na sociedade atingem diretamente a escola dando à comunidade escolar a tarefa de lidar com desafios e mudanças (Almeida, 2006). Para que o professor consiga lidar com os desafios que se lhe colocam e exercer o seu papel com competência e qualidade, necessita de ter uma formação adequada. Esta formação envolve o estudo de conceitos que vão desde a Matemática à Educação em geral, além de aspectos relacionados com a Didática da Matemática. No entanto, o estudo isolado das teorias destes domínios não é suficiente para o desenvolvimento das capacidades necessárias ao professor como a de comunicar com os alunos e de estimular uma aprendizagem ativa. Na formação do professor de Matemática no Brasil, no que respeita à Estatística, os programas de formação geralmente apresentam uma abordagem genérica dos conceitos estatísticos. Além disso, em muitos casos as disciplinas de Estatística atendem a diferentes cursos (Costa & Nacarato, 2011). Neste caso, além de não haver uma abordagem da didática da Estatística, ocorre um distanciamento das reflexões sobre a realidade de sala de aula, considerando as ações do professor e as interações do aluno.

Na presente comunicação, apresentamos as reflexões e interações dos professores numa experiência de formação, com base numa sessão que consistiu na análise de episódios de uma aula realizada com uma turma de 8.º ano sobre representações estatísticas. Os professores analisaram a tarefa, as respostas dos alunos, bem como uma gravação em vídeo da aula. Deste modo, o nosso objetivo é investigar os contributos da análise de situações autênticas de sala de aula para o desenvolvimento profissional do professor que ensina estatística.

Ensino da Estatística

O foco do ensino da Estatística na educação básica é o desenvolvimento do senso crítico do aluno de maneira a torná-lo capaz de gerir as informações que o rodeia. (Franklin et al., 2015). Neste sentido, destaca-se a necessidade não apenas de ensinar conceitos, representações e procedimentos, mas também desenvolver a literacia estatística dos alunos, que se reporta a um conjunto de princípios, ideias, aptidões e capacidades de comunicação necessárias para tratar, com eficiência, informação que envolva dados de cariz quantitativo que surgem durante a vida e em situações profissionais (Martins & Ponte, 2011; Steen, 2001).

A abordagem da estatística na escola articula diferentes conceitos, recebendo as representações gráficas grande destaque. Com estas representações é possível comunicar, comparar, classificar e interpretar dados (Curcio, 1989). Para Martins (2018), embora leitura de uma representação gráfica envolva conceitos formais da Matemática, é comum que exista uma atenção maior aos aspetos visuais e representacionais da representação.

Apesar da inserção da Estatística nos currículos e programas de Matemática da educação básica, Batanero et al. (2004) referem que a sua abordagem apresenta frequentemente fragilidades no que diz respeito à prática do professor, pois os professores tendem a adaptar as suas concepções sobre o ensino da Estatística aos métodos de resolução de problemas utilizados na Matemática. Segundo Batanero (2001), nem sempre é possível transferir os princípios gerais do Ensino da Matemática para o Ensino da Estatística, pois os princípios como incerteza e aleatoriedade são distintos dos aspectos lógicos e metodológicos da Matemática. Embora existam diferenças entre a Estatística e a Matemática, ambas compartilham um terreno comum, nomeadamente os problemas e situações estatísticas quando fazem uso de conceitos matemáticos. Sendo assim, faz-se necessário reconhecer explicitamente as semelhanças e diferenças entre os conhecimentos estatísticos e matemáticos para o ensino para que as intervenções de formação de professores sejam proveitosas (Groth, 2007).

A consciência de que o ensino da Estatística requer recursos e modos de trabalhos distintos da Matemática é criada a partir de reflexões e interações que devem ser proporcionadas na formação do professor desta disciplina. De acordo com Estevam e Cyrino (2016), frequentemente, os professores não apresentam conhecimento necessário para conduzir o processo de ensino-aprendizagem neste campo mesmo após cursar as disciplinas com conteúdos estatísticos na formação inicial. Como o conhecimento do professor está em constante evolução, no decorrer do seu desenvolvimento profissional ele pode ampliar seus conhecimentos e mudar concepções a partir de suas experiências em processos formais ou informais.

Formação e desenvolvimento profissional do professor

Diversos estudos procuram estabelecer soluções para os dilemas que surgem no âmbito da formação do professor. Ponte (2014) discute a relação entre os conceitos de "formação" e "desenvolvimento profissional". Para o autor:

> A formação atende sobretudo ao que o professor não tem e "deveria ter" e o desenvolvimento profissional dá especial atenção às realizações do professor e ao que ele se revela capaz de fazer. A formação é vista de modo compartimentado, por assuntos ou por disciplinas, enquanto o desenvolvimento implica o professor como um todo nos seus aspectos cognitivos, afetivos e relacionais e contribui para o desenvolvimento da sua identidade profissional. (Ponte, 2014, p. 346)

Sowder (2007), destaca seis objetivos correlacionados para o desenvolvimento profissional de professores que ensinam Matemática, implicando o desenvolvimento de: i) uma visão compartilhada para o ensino e a aprendizagem de Matemática; ii) uma compreensão consistente da Matemática para o nível em que se ensina; iii) uma compreensão da forma em que alunos aprendem Matemática; iv) um acentuado conhecimento pedagógico do conteúdo; v) uma compreensão do papel da equidade na Matemática escolar; e vi) um autoconhecimento como professor de Matemática. Deste modo, a autora defende que o desenvolvimento profissional deve estar associado às reais necessidades do professor.

Day (2001) afirma que o desenvolvimento profissional do professor deve ser estimulado por uma variedade de experiências de aprendizagem que o desafiem a refletir e investigar sobre a sua própria prática. Entretanto, o modelo tradicional de formação do professor não inclui elementos centrados em situações autênticas do contexto escolar no que diz respeito às interações entre o professor e o aluno, sendo necessário integrar maneiras de desenvolver estes aspetos nos processos de formação do professor. Para Smith (2001), a conexão com situações autênticas da sala de aula tem potencial para transformar crenças, hábitos e práticas dos professores de maneira que possam compreender e tomar decisões adequadas. Assim, as "situações de prática autêntica" podem servir como material de estudo na formação de professores, sendo proposto um ambiente de pesquisa e crítica a respeito das diferentes interações, comunicações e pensamentos que emergem do ambiente real da sala de aula.

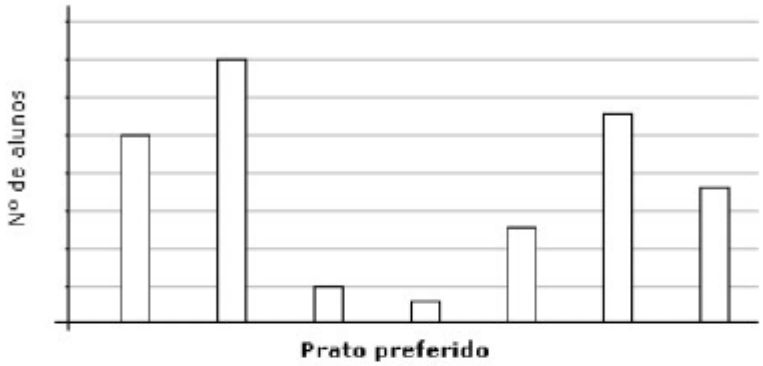
A seleção adequada de tarefas a utilizar em sala de aula é de grande importância, pois é necessário que o professor perceba que cada tipo de tarefa tem um papel específico no processo de ensino-aprendizagem. Assim, Smith (2001) destaca este ponto como uma reflexão a respeito dos objetivos a atingir, bem como sobre os conhecimentos prévios e necessários aos alunos. Nesta mesma linha, a autora ressalta a análise das respostas dos alunos a tarefas, onde estes revelam suas concepções e erros. Nesta atividade, os professores podem refletir sobre os tipos de feedback a fornecer aos alunos e sobre como estimular a reflexão dos alunos sobre seus equívocos e incompreensões, além de construir e reconstruir significados. Para De La Torre (2007), os professores podem analisar as causas do erro a partir de uma atitude compreensiva. Assim, podem promover momentos onde os alunos possam identificar as suas falhas que, de acordo com Spinillo et al. (2016), podem ser de cariz conceitual, procedimental ou linguístico.

Os vídeos de episódios de sala de aula também constituem uma base para tarefas que integram este trabalho. Com este recurso, os professores podem analisar as oportunidades de aprendizagem concedidas naquele ambiente observado, os conhecimentos articulados pelos alunos, as atitudes do professor, as dificuldades inerentes ao processo e refletir sobre as adaptações de abordagem e de tarefas para atingir determinado objetivo (Smith, 2001). Para Van Es e Sherin (2008), a análise de vídeos apresenta potencial para que o professor possa: i) reconhecer os elementos importantes numa situação de ensino; ii) estabelecer relações entre os seus conhecimentos sobre o contexto e a situação de ensino analisada; e iii) promover conexões entre princípios gerais de ensino e aprendizagem e os diferentes elementos presentes na situação analisada.

Metodologia de Investigação

Esta investigação, de natureza qualitativa e interpretativa (Erickson, 1986), tem por base uma experiência de formação realizada em 2018 num curso de especialização para professores de Matemática na Zona Oeste do Rio de Janeiro. O grupo participante desta experiência era composto por 18 professores, que lecionavam, em sua

Na escola, o diretor pretende investigar os pratos preferidos dos alunos e encarrega uma comissão de fazer um inquérito a alguns deles. A metodologia utilizada para selecionar estes alunos, foi a de interrogar os que se dirigiam ao refeitório num dia escolhido ao acaso. A comissão encarregada para o estudo apresentou ao diretor um gráfico e um pequeno relatório com as conclusões:



(Tarefa adaptada de Martins e Ponte, 2011).

Relatório: Os alunos interrogados apontaram 7 pratos distintos. Das respostas, pudemos tirar as seguintes conclusões:

a) O *frango com abóbora* foi o prato mais votado.

b) O número de alunos que escolheu frango com abóbora foi o dobro dos que escolheram *risoto*.

c) Os pratos de *frango com cenoura* receberam menos 4 votos do que o *frango com abóbora*.

d) O *strogonoff* foi o segundo prato mais votado.

e) O *macarrão com ovos* teve mais 4 votos do que o *angu com carne moída*.

f) Houve quem votasse no *peixe cozido*.

g) 5 alunos votaram no *macarrão com ovos*.

O diretor recebeu este pequeno relatório e não ficou satisfeito, pois achou as conclusões muito confusas. Afinal, quantos alunos tinham votado? E quantos votaram em cada prato?

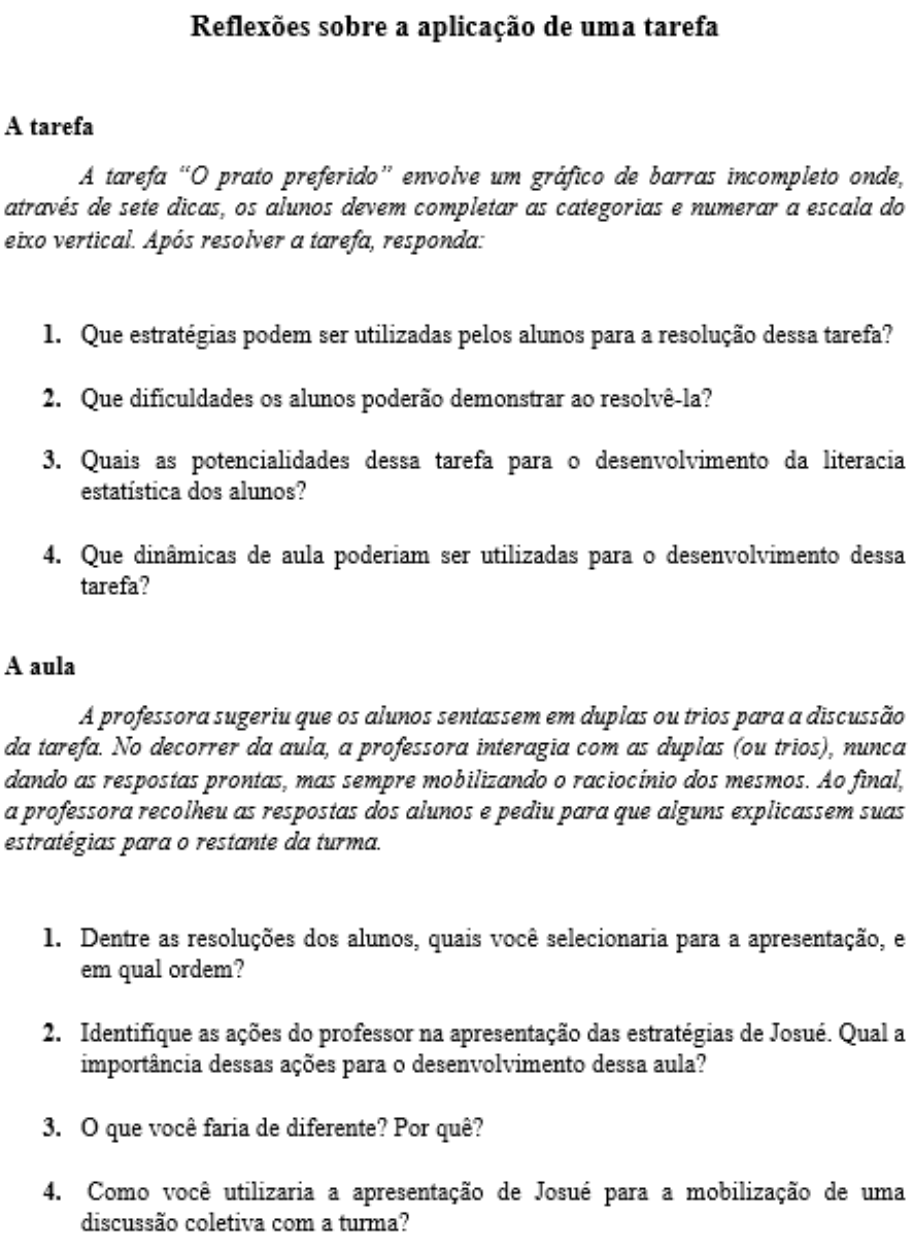
Você poderia ajudar a completar adequadamente o gráfico anterior? (Colocar as categorias e numerar a escala do eixo vertical). **Justifiquem cada passo.**

Figura 1. Tarefa "Prato preferido".

maioria, no ensino fundamental, especialmente no 6.º ao 9.º ano. Todos os participantes referidos neste trabalho têm nomes fictícios. Nesta comunicação, temos como foco as interações e reflexões dos professores numa sessão que consistia na análise de uma aula com alunos do 8.º ano de uma escola da Rede Municipal do Rio de Janeiro. A aula analisada consistiu na resolução da tarefa apresentada na figura 1, que envolve um gráfico de barras com informações incompletas, onde os alunos deveriam seguir uma série de instruções para adequar as informações corretamente. A primeira autora deste artigo assumiu o duplo papel de formadora e investigadora.

Conduzidos pelo guião apresentado na figura 2, os professores analisaram a tarefa proposta, a resposta escrita dos alunos e o vídeo da aula que mostrava as ações do professor e a comunicação dos alunos na explicação dos seus raciocínios.

Os dados foram recolhidos por um diário de bordo, gravação áudio e de vídeo das



Reflexões sobre a aplicação de uma tarefa

A tarefa

A tarefa "O prato preferido" envolve um gráfico de barras incompleto onde, através de sete dicas, os alunos devem completar as categorias e numerar a escala do eixo vertical. Após resolver a tarefa, responda:

1. Que estratégias podem ser utilizadas pelos alunos para a resolução dessa tarefa?
2. Que dificuldades os alunos poderão demonstrar ao resolvê-la?
3. Quais as potencialidades dessa tarefa para o desenvolvimento da literacia estatística dos alunos?
4. Que dinâmicas de aula poderiam ser utilizadas para o desenvolvimento dessa tarefa?

A aula

A professora sugeriu que os alunos sentassem em duplas ou trios para a discussão da tarefa. No decorrer da aula, a professora interagia com as duplas (ou trios), nunca dando as respostas prontas, mas sempre mobilizando o raciocínio dos mesmos. Ao final, a professora recolheu as respostas dos alunos e pediu para que alguns explicassem suas estratégias para o restante da turma.

1. Dentre as resoluções dos alunos, quais você selecionaria para a apresentação, e em qual ordem?
2. Identifique as ações do professor na apresentação das estratégias de Josué. Qual a importância dessas ações para o desenvolvimento dessa aula?
3. O que você faria de diferente? Por quê?
4. Como você utilizaria a apresentação de Josué para a mobilização de uma discussão coletiva com a turma?

Figura 2. Guião de discussão.

sessões e um relatório elaborado pelos professores a respeito da atividade proposta. Com o intuito de perceber os contributos da análise de situações autênticas para o desenvolvimento profissional dos professores, os dados foram analisados de modo a reconhecer no discurso dos participantes as suas percepções acerca da natureza da tarefa, do raciocínio e comunicação dos alunos e das ações do professor no decorrer da aula. Os objetivos do desenvolvimento profissional apresentados por Sowder (2007) constituem importantes elementos analíticos para estudos desta natureza (Estevam & Cyrino, 2016). Assim, procuramos identificar estes objetivos nos conhecimentos e significados

desenvolvidos pelos professores diante do trabalho realizado, com especial atenção às suas intepretações e perspectivas a respeito de uma mesma situação (Cohen, Manion & Morrison, 2001).

Resultados

Nesta secção, apresentamos e analisamos dados de vários episódios ocorridos durante a sessão, que englobam a análise da tarefa, das respostas dos alunos e da gravação em vídeo.

Os professores tiveram a oportunidade de resolver a tarefa individualmente e, em seguida, dividiram-se em trios para discutir sobre a aplicação desta tarefa num ambiente escolar. Puderam pensar sobre as estratégias que os alunos poderiam utilizar na resolução da tarefa e sobre as potencialidades da tarefa para o desenvolvimento da literacia. Realizaram reflexões sobre a forma que os alunos costumam visualizar as tarefas:

Joana: Eu percebo que o adolescente costuma focar em informações de forma separada. Eles seguem a sequência e não costumam ver os problemas de forma global. Acho que isso tem que ser incentivado.

Formadora: Como?

Tiago: Acho que os alunos têm que pensar sozinhos, mas é bom dizer que a ordem das indicações na tarefa não é necessariamente a ordem das descobertas que eles vão fazer. Acho que pode incentivá-los a criar um índice para que não fiquem muito perdidos neste tipo de tarefa.

Joana, uma professora experiente, busca relacionar as possíveis dificuldades dos alunos ao conhecimento que traz da sua prática, pelo que reflete sobre a forma que os alunos geralmente visualizam as instruções contidas numa tarefa. Tiago, por sua vez, afirma a necessidade de fazer com que os alunos construam suas próprias resoluções e enfatiza o papel do professor que precisa mediar o processo de resolução da tarefa, ajudando os alunos a criarem estratégias.

Entretanto, no decorrer da discussão, João não reconhece as potencialidades da tarefa no desenvolvimento da literacia estatística:

João: Acho que a apresentação da tarefa não ajuda a desenvolver a literacia estatística. Pode até complicar.

Formadora: Não há nenhum aspecto relevante para este desenvolvimento?

Rui: Eu acho que a necessidade de criar estratégias de resolução e o fato de não existir uma solução imediata já são fatores que ajudam no desenvolvimento da literacia estatística.

João: Pensando assim, é verdade (...) Sem contar que a tarefa envolve a escrita, que eles não estão muito acostumados. Tem ainda as escalas que não são logo perceptíveis. (…)

Sofia: Essa tarefa faz o movimento inverso: traz a interpretação do gráfico antes do visual.

Formadora: Como assim?

Sofia: É, professora. Como já falaram, eles estão acostumados primeiro com a informação gráfica, visual. Esta atividade dá uma visão global da interpretação de gráficos.

Embora João, inicialmente, tenha associado as possíveis dificuldades dos alunos à ausência do desenvolvimento da literacia estatística, a discussão coletiva propiciou uma

nova perspectiva sobre a tarefa. Os professores, em conjunto, puderam observar as oportunidades para a articulação da comunicação escrita, da visão global do aluno sobre as representações estatísticas e seus elementos. Além disso, associaram o desenvolvimento destas capacidades ao desenvolvimento da literacia estatística. Deste modo, há uma valorização do cunho exploratório da tarefa. Refletem ainda sobre a abordagem habitual do tema no contexto escolar de forma crítica, de modo que reconhecem a importância de tarefas desta natureza para que o aluno desenvolva uma visão mais robusta acerca da interpretação dos gráficos.

Noutro episódio, os professores tiveram acesso às respostas dos alunos na tarefa e ainda puderam observar, através de vídeos, a comunicação e o raciocínio dos alunos, a dinâmica estabelecida na aula e as ações da professora que ministrava a aula. Com base nas respostas escritas e faladas dos alunos, os professores fizeram reflexões sobre a comunicação e o raciocínio dos alunos da resolução da tarefa:

João: A expressão "houve quem votasse em peixe cozido" fez com que muitos pensassem que o menor número de pessoas votou no peixe cozido. É uma expressão que parece diminuir a importância do prato. Acho que isso tem que ser levado pra discussão... Os enunciados, a linguagem.

Sérgio: É. Neste caso, a interpretação da frase teve mais relevância do que as informações estatísticas.

Sofia: Aconteceu também de um aluno escrever que um determinado prato foi mais votado porque era o mais gostoso. Ou seja, existe uma interpretação pessoal.

Os professores discutiram sobre a influência da linguagem e das expressões comuns na construção do raciocínio dos alunos, pelo que procuram interpretar as justificações que os alunos apresentam com base numa visão global da tarefa. Além disso, mostraram-se sensíveis a compreender o motivo dos seus erros. A respeito dos elementos das representações estatísticas contidos nas tarefas, também procuraram compreender as fragilidades contidas nas resoluções dos alunos:

Nuno: O aluno lê e nem sempre consegue entender (...). O visual é mais imediato. Quando o enunciado fala sobre o prato mais votado, eles associam à maior barra, por exemplo. Mas nas outras informações existe uma dificuldade maior porque o visual não é tão imediato.

Rui: Acho que a maior dificuldade foi a de interpretar o problema e perceber as escalas. Tanto que, nas resoluções escritas, só uma aluna consegue chegar à escala certinha.

Sofia: Tem criança que claramente usou a régua e foi fazendo risquinhos (...) Eles usaram o instrumento que eles tinham para responder.

Rui: É, ele tirou a conclusão por causa da opinião pessoal... Mas quando ele tem a oportunidade de refletir, ele volta a prestar atenção nas informações do gráfico.

Catarina: Essa confusão nas escalas me fez pensar que é preciso levar revistas, jornais para a sala de aula. Porque é uma visualização importante para a criança. Além de propor atividades que usem vários tipos de escala... De dois em dois, e por aí vai.

Existe uma busca por entender o processo de construção da solução dos alunos, de modo a identificar quais são as informações que os alunos interpretam com mais dificuldades e o que os leva ao erro. Na verdade, as dificuldades que os professores detectam são as mesmas que já haviam antecipado na análise da tarefa, especialmente no

que diz respeito ao fator que conduz a interpretação do aluno, que é o visual. Com a discussão, os professores avançam em suas aprendizagens sobre a realização de tarefas desta natureza, pelo que referem o uso do erro do aluno para a reflexão. Catarina, ao mesmo tempo em que menciona a inserção de materiais que estão no cotidiano (jornais e revistas) para que os alunos possam aprofundar os seus conhecimentos sobre as representações estatísticas, também refere um trabalho com conceitos matemáticos necessários para a solução de tarefas desta natureza.

A análise dos vídeos promoveu uma discussão global sobre as interações existentes numa aula. Na aula analisada, os alunos apresentaram as suas soluções para a turma, onde a professora fazia a mediação destas apresentações e promovia reflexões diante dos erros. Os professores demonstraram valorizar a comunicação oral dos alunos e tiveram o cuidado de confrontar esta comunicação com as respostas escritas:

Joana: É interessante reparar que na explicação oral do aluno as informações são bem mais ricas do que naquilo que ele escreveu. Isso acontece até com a gente, que é adulto (...). A fala deles nos faz perceber como constroem o raciocínio. A escola é muito centrada em respostas escritas, em explicação correta do professor... Mas precisamos deixar que os alunos se expressem mais.

Rui: O ponto principal da solução do aluno é que ele erra e ele mesmo consegue enxergar sem a professora apontar qual é o erro exatamente (...) É importante que os alunos possam raciocinar. Acho que isso é o que deve ser levado pra ser discutido com a turma: o que faz com que eles errem e qual foi o erro exatamente, porque quando olhamos a solução dos outros alunos, vimos que é um erro recorrente.

Para além da comunicação dos alunos na realização da tarefa, os participantes promoveram discussões acerca das atitudes do professor no decorrer da aula:

Ana: Eu acho que foi muito legal porque a professora não deixou os alunos intimidados. Eu, mesmo sendo adulta, me sentia constrangida em apresentar as minhas ideias para a turma durante a graduação. Me chamou atenção porque eles erraram e a professora não permitiu que eles ficassem constrangidos. O erro gerou um momento para repensar e aprender.

Sofia: Eu reparei que a professora respeitou a forma deles pensarem, dando uma isca para que pudessem "pescar" a ideia certa.

Os professores valorizaram utilização dos erros dos alunos como uma possibilidade de aprendizagem. A gravação em vídeo permitiu que os participantes refletissem sobre outros elementos importantes numa situação de ensino como a confiança, o respeito e a "liberdade para errar". Para além os conhecimentos estatísticos que os alunos apresentam, os professores fazem relações entre a situação de ensino e as suas experiências profissionais e pessoais relacionadas ao contexto da discussão sobre erros.

Conclusão

No que respeita a natureza da tarefa, os professores puderam refletir sobre a necessidade da exploração de uma visão global de uma representação estatística, de modo que os alunos possam ultrapassar o comportamento habitual de valorizar apenas os aspetos visuais presentes nas representações (Martins, 2008). Na verdade, os professores foram

capazes de perceber que habilidades os alunos precisam desenvolver para solucionar tarefas estatísticas de cariz exploratório, evidenciando a comunicação oral e escrita e salientaram que a Matemática e a Estatística compartilham um terreno comum, embora tenham natureza distinta (Groth, 2007). Ao valorizarem habilidades como a comunicação e o raciocínio para a solução da tarefa, ressignificaram a sua compreensão acerca do desenvolvimento da literacia estatística (Martins & Ponte, 2011). Deste modo, os professores desenvolveram *uma compreensão da estatística para o nível que ensinam*. As discussões coletivas propiciaram reflexões sobre as ações do professor para o desenvolvimento do raciocínio e da comunicação do aluno, onde os professores procuraram compreender o que os alunos sentem e pensam. Além disso, puderam *desenvolver uma visão compartilhada do ensino e aprendizagem da estatística* à medida em que ressignificavam suas percepções a partir das discussões.

Ao fazerem uma análise minuciosa das respostas dos alunos, observaram não apenas os erros, mas também os seus raciocínios (De La Torre, 2007). A associação entre as respostas escritas e as respostas explicadas oralmente pelos alunos fez com que os professores valorizassem um ambiente de debate e reflexão conjunta sobre os erros em sala de aula. Assim, os professores puderam aprofundar *suas compreensões acerca do modo em que os alunos aprendem estatística*. À medida em que buscavam perceber o motivo dos erros dos alunos e os cuidados que deveriam ter ao propor uma tarefa, os professores mostraram preocupação em tornar a aprendizagem da Estatística acessível para todos, trazendo a referência à *equidade no contexto escolar*.

A gravação em vídeo, em especial, permitiu que os professores tivessem uma visão integrada das interações que ocorrem em sala de aula, relacionando as atitudes dos alunos às ações do professor (Van Es e Sherin, 2008). Os professores perceberam que os equívocos dos alunos não estão centrados apenas no campo conceitual, mas também nos aspectos linguísticos e procedimentais (Spinillo, 2016). Além disso, construíram uma visão integrada dos diversos elementos de uma situação de ensino, fazendo associações à sua prática (Smith, 2001). Neste sentido, puderam aprofundar aspetos relacionados à identidade profissional do professor, de modo a *desenvolver um autoconhecimento como professor que ensina estatística*.

Percebemos, assim, que esta abordagem na formação do professor cria oportunidades para o seu desenvolvimento profissional, podendo levar os professores a ressignificar a sua prática. Em certa medida, os professores puderam desenvolver determinados conhecimentos didáticos e de conteúdo que constituem *o desenvolvimento do conhecimento pedagógico de conteúdo*. As discussões que os professores realizaram permitem-nos concluir que a utilização de análises de situações autênticas de sala de aula através das respostas escritas dos alunos e da gravação de vídeos de uma aula propiciou aprendizagens sobre as potencialidades de uma tarefa de cunho exploratório em Estatística e sobre as dinâmicas de sala de aula para o desenvolvimento da literacia estatística.

Referências bibliográficas

Almeida, M. I. (2006). *A reconstrução da profissionalidade docente no contexto das reformas educacionais: Vozes de professores na escola ciclada*. Recife: ENDIPE.

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Grupo de Investigación en Educación Estadística, Universidad de Granada, Espanha.

Batanero, C., Godino, J. D., & Roa, R. (2004). Training teachers to teach probability. *Journal of Statistics Education*, *12*(1).

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2001). *Research methods in education*. London: Routledge Falmer.

Costa, A., & Nacarato, A. M. (2011). A estocática na formação do professor de matemática: Percepções de professores e de formadores. *BOLEMA*, *24*(39), 367–386.

Curcio, F. (1989). *Developing graph comprehension: Elementary and middle school activities*. Reston, VA: NCTM.

Day, C. (2001). *Desenvolvimento profissional de professores: Os desafios da aprendizagem permanente*. Porto: Porto Editora.

De LaTorre, S. (2007). *Aprender com os erros: o erro como estratégia de mudança*. São Paulo: Artmed.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of Research on Teaching* (pp. 119–161). New York, NY: Macmillan.

Estevam, E. J. G.; Cyrino, M.C.C.T. (2016). Desenvolvimento Profissional de professores em Educação Estatística. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, 9, 115–150.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., et al. (2005). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education* (GAISE Report). Alexandria, VA: American Statistical Association.

Groth, R. E. (2007). Toward a conceptualization of statistical knowledge for teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(5), 427–437.

Martins, M. E. G., & Ponte, J. P. (2007). *Organização e tratamento de dados*. Lisboa: DGIDC.

Martins, M. N. P. (2018). *Atitudes face à Estatística e escolhas de gráficos por professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental* (Tese de doutoramento, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa).

NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. NCTM: Reston VA.

Ponte, J. P. (2014). Formação do professor de Matemática: Perspetivas atuais. In J. P. Ponte (Ed.), *Práticas profissionais dos professores de Matemática* (pp. 351–368). Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Smith, M. S. (2001). *Practice-based professional development for teachers of mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Sowder, J. (2007). The mathematical education and development of teachers. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 157–223). Charlotte: Information Age Publishing Inc. & NCTM.

Spinillo, A. G., Soares, M. T. C., Moro, M. L. F., & Lautert, S. L. (2016). Como professores e futuros professores interpretam erros de alunos ao resolverem problemas de estrutura multiplicativa. *BOLEMA*, *30*(56), 1188–1206.

Steen, L. (2001). *Mathematics and democracy: The case for quantitative literacy*. Princeton, NJ: NCTM.

van Es, E., & Sherin, M. (2008). Mathematics teachers' "learning to notice" in the context of a videoclub. *Teaching and Teacher Education*, *24*, 244–276.

Partilhas de Professores de Matemática num Círculo de Estudos

António Guerreiro
Universidade do Algarve

Resumo

Nesta comunicação pretendo dar conta das reflexões de professores de matemática sobre as dificuldades encontradas no envolvimento dos alunos na aprendizagem, na diferenciação curricular e na avaliação das aprendizagens. As reflexões decorreram durante o desenvolvimento de um círculo de estudos, com a participação de quinze professores, num dos centros de formação de associação de escolas do distrito de Faro. No decorrer desta ação de formação trabalhou-se o questionamento e a comunicação em sala de aula, a natureza das tarefas matemáticas e a utilização de materiais num contexto de escola inclusiva e a avaliação da e para a aprendizagem. As seis sessões, de três horas cada, foram integralmente gravadas em áudio e os dados foram organizados tendo em vista ilustrar, na voz dos professores, os propósitos de formação, os temas abordados e as reflexões dos docentes sobre as suas inquietações profissionais. Os resultados apontam para a existência de um ensino alicerçado no discurso do professor, em exercícios matemáticos e na utilização de testes predominantemente escritos, em virtude da extensão dos programas de matemática e das avaliações externas dos alunos. Os professores confrontam-se com a necessidade de mudar as suas práticas, em resultado das características atuais dos alunos, apontando como possibilidade de renovação a partilha de conhecimentos entre professores e investigadores em educação matemática.

Abstract

The main aim of this presentation is to show the reflections of math teachers on the difficulties found with the students' involvement in learning, in curricular differentiation and in the assessment of learning. The reflections took place during the development of a circle of studies, with the participation of fifteen teachers, in one of the training centres of a group of schools in the district of Faro. The training action relied on questioning and communication in the classroom, the nature of the mathematical tasks and the use of materials in an inclusive school context and the evaluation of and for learning. The six sessions, of three hours each, were fully recorded in audio and the data was organized to illustrate, in the teachers' voices, the training purposes, the topics addressed and the teachers' reflections on their professional concerns. The results point to the existence of a teaching method based on the teacher's discourse, in mathematical exercises and predominantly in written tests, due to the extension of the math programs and the external evaluations of the students. Teachers are confronted with the need to change their practices as a result of the current characteristics of the students, pointing out as a possibility of renovation the sharing of knowledge between teachers and researchers in maths education.

Palavras-chave: formação de professores; círculo de estudos; matemática; reflexão; partilha.

Introdução

Após duas décadas (Guerreiro & Sousa, 2000) voltei a dinamizar uma ação de formação contínua de professores, destinada aos grupos de docência 230 e 500, na modalidade de círculo de estudos. Fi-lo, por acreditar nas suas potencialidades na identificação de problemas profissionais e na implicação de mudanças nas práticas, decorrente da reflexão e da partilha entre os professores. A liberdade de ação do dinamizador e dos formandos, em função de uma temática geral, ocasiona um outro olhar sobre as preocupações formativas e profissionais dos professores, numa dinâmica de construção de conhecimento, em resultado dos saberes de cada um dos participantes, tendo em vista a mudança de práticas em sala de aula. O propósito desta comunicação é apresentar as reflexões de professores de matemática, no contexto da formação em círculo de estudos, sobre a identificação das dificuldades docentes relativas ao envolvimento na aprendizagem, à diferenciação curricular e ao processo de avaliação.

Círculo de estudos: contextualização e temáticas

O círculo de estudos é uma modalidade de formação que aponta para a autoformação dos intervenientes através do estudo e da partilha de experiências vivenciadas pelos participantes. O propósito destas ações de formação é a transformação das práticas pedagógicas e/ou da escola, orientando-se para a resolução de problemas identificados a nível organizacional, curricular e pedagógico (Machado, 2018). Nos círculos de estudo existe uma dinâmica coletiva e uma ligação com os conhecimentos dos professores e com as práticas de sala de aula, transformando o formando em produtor da sua própria formação e o formador em dinamizador de reflexões e de situações de aprendizagem (Pacheco, 1997).

Sendo que são os professores que definem colaborativamente os conteúdos da ação de formação, por se tratar de um processo de autoformação, optei, na qualidade de dinamizador, por, na primeira das seis sessões, impulsionar um diálogo aberto em torno das expectativas e necessidades de formação dos professores. A definição dos conteúdos desta ação de formação decorreu da vontade expressa dos formandos, em torno de três principais temáticas: envolvimento dos alunos na aprendizagem da matemática, diferenciação curricular na sala de aula e avaliação da e para a aprendizagem.

Os participantes refletiram sobre o questionamento em sala de aula (Ulleberg & Solem, 2018), numa valorização da inquirição ao pensamento dos alunos, enquadrado na comunicação matemática (Guerreiro, Ferreira, Menezes & Martinho, 2015), assumindo uma relação construtivista entre a interação social e o ensino exploratório; as tarefas matemáticas (Ponte, 2005; Stein & Smith, 2009), caracterizadas como exercícios, problemas e investigações, como um fator relevante na exigência cognitiva da matemática, e o currículo diferenciado para alunos com perturbações de desenvolvimento (Carmo, 2012), na identificação de princípios educacionais; e a avaliação da e para a aprendiza-

gem (Guerreiro & Martins, 2018), numa relação da avaliação com a comunicação na sala de aula.

Opções metodológicas: princípios, participantes e recolha e análise de dados

Assumo como princípio metodológico o paradigma interpretativo, ao defender a importância de apreender o ponto de vista dos sujeitos (Bogdan & Biklen, 1994), professores, no contexto de uma ação de formação realizada em ambiente escolar. A ação de formação, matemática (com)partilha, enquadrada nos dispositivos legais, na modalidade de círculo de estudos, com dezoito horas presenciais e nove de trabalho autónomo, na dimensão científica e pedagógica dos formandos, decorreu num centro de formação de associação de escolas do distrito de Faro. Participaram quinze professores, com um mínimo de 20 anos de serviço, sendo sete do grupo de recrutamento 230 e oito do grupo de recrutamento 500. Os professores lecionam no 2.º e 3.º ciclos do ensino básico e no ensino secundário.

As sessões de formação consubstanciaram-se num trabalho em pequenos grupos, em torno de tarefas ou análise de produções científicas, e na discussão em grande grupo, no confronto e partilha de conhecimentos e práticas académicas e profissionais. No âmbito do trabalho autónomo, os professores refletiram globalmente sobre toda a formação, através de uma reflexão individual e de um relatório, individual ou de grupo, sobre o trabalho desenvolvidos com os alunos em sala de aula.

As sessões de formação foram integralmente gravadas em áudio, com autorização dos participantes, tendo sido analisadas as gravações com o intuído de categorizar as intervenções dos professores nas temáticas expressas e ilustrar as perspetivas e as práticas destes sobre a sua prática profissional (Goetz & LeCompte, 1984). A partir dos dados, gravações e reflexões, os resultados foram organizados tendo por base as temáticas centrais do círculo de estudos.

Envolvimento dos alunos na aprendizagem da matemática

As expetativas dos professores em relação à formação e à partilha com os demais docentes decorreu das dificuldades resultantes da sua prática no envolvimento dos alunos na aprendizagem: *Como criar dinâmicas que verdadeiramente sejam interessantes, motivadoras?* [Professor P3]. Estas preocupações resultam da aparente estagnação das práticas profissionais em contraciclo com as necessidades da sociedade atual:

> Nós damos aulas como se dava praticamente, no geral, há cinquenta anos (…). Eu dou aulas, basicamente como, espero eu, davam os meus melhores professores, espero eu. E acho que isto, nos dias de hoje, não é suficiente, e aos miúdos não lhes diz nada, isto não lhe diz nada. E às vezes, nós fazemos experiências e são sempre experiências, são sempre experiências e eu não consigo fazer destas experiências a prática, o regular [Professor P3].

A sistematização de práticas inovadoras é uma preocupação central dos professores, os quais frequentam formações em que são apresentadas ideias novas, mas que não constituem uma resposta global para a mudança das práticas dos professores: *Aprendemos coisas novas, achamos extremamente interessantes, mas depois no dia a dia é muito difícil pôr em prática. Talvez porque nós não tenhamos muita experiência nessa área, como é obvio, mas também porque não temos tempo* [Professor P12].

O fator tempo, em função da extensão dos programas, constitui a justificação principal dos professores para a estagnação das práticas em sala de aula: *Eu acho que o fator tempo aqui é fundamental, não temos tempo para preparar e investigar coisas diferentes para fazer com os nossos alunos* [Professor P12]. Os professores têm consciência da não existência de milagres na profissão docente e apontam a colaboração como um caminho para a alteração das suas práticas profissionais: *Eu sei que não há nada, nenhum pozinho [mágico] que a gente possa fazer, mas tentar, talvez com os colegas, conversando, conseguir novas estratégias para conseguir motivar estes alunos* [Professor P1].

Apontaram como princípio norteador a mudança de práticas de forma consistente em resultado de uma mudança de cultura de sala de aula e não tanto em função de ideias inovadoras que se esgotam na sua aplicação. Com este propósito, os professores foram desafiados a apoiar hipotéticos alunos, que não tinham realizado corretamente um exercício de cálculo de uma média aritmética ponderada, através do questionamento em sala de aula:

> Relativamente ao cálculo das médias [das idades], o aluno erra e faz a soma do número total de alunos [120] e divide por cinco, que é o número das idades apenas [variáveis]. (…). É possível que a média das idades dê vinte e quatro? Era a primeira pergunta que nós íamos fazer. Depois em função da resposta, provavelmente ele vai dizer que não, uma vez que as idades variam entre doze e dezasseis. Orientar relativamente a valores mais pequenos, em vez de ser com cento e vinte alunos, começar por exemplo e perguntar qual era a média das idades, por exemplo se houvesse dois alunos, um com dez e outro com doze [anos] [Professor P5].

Esta abordagem revela uma centralidade no conhecimento, num padrão de interação em que se reduz a dificuldade da tarefa matemática com o intuito de orientar a resolução. As hipotéticas questões dos professores apontaram na sua generalidade para uma focalização nos procedimentos matemáticos e não no pensamento dos alunos: *A primeira pergunta que se fazia, era, o que é que ele realmente queria calcular? Dá ideia de que ele não percebeu a pergunta, média de idades e vai fazer aqui uma soma de número de alunos* [Professor P7].

Os professores apontam como ações de comunicação a focalização nos procedimentos, *encaminhar para um trabalho de cálculo* [Professor P9], a explicação entre pares, *explicar uns aos outros é também uma boa estratégia* [Professor P14], e a partilha das resoluções entre os alunos, *uns apresentam aos outros como é que fizeram* [Professor P14].

As práticas desenvolvidas no âmbito do círculo de estudos, estimularam os professores a atender mais às respostas dos alunos: *O tempo que dedicamos durante a formação a analisar as respostas dos alunos em algumas tarefas permitiu-me percecionar que os caminhos são diversificados e que muitas das vezes são a nossa pressão e formalismos que condicionam as suas estratégias* [Professor P6]. No decorrer da formação, os professores

reconheceram o tradicionalismo das suas práticas: *Não tenho realizado amiúde, aulas com esta metodologia de trabalho* [ensino exploratório] *e considero que esta ação de formação acabou por romper com esse ciclo* [Professor P5].

Os processos de comunicação matemática em sala de aula surgem muito centrados nos procedimentos matemáticos com vista à resolução de exercícios, sem uma abordagem que estimule o pensamento do aluno em busca de ideias matemáticas. Esta rotina, nos processos comunicativos em sala de aula, pode resultar num insuficiente envolvimento dos alunos, especialmente quando estes se consideram impreparados matematicamente.

Diferenciação curricular na sala de aula de matemática

A diferenciação curricular na sala de aula constitui um alicerce base numa escola inclusiva em virtude da singularidade de cada um dos alunos. A consciência desta multiplicidade cognitiva é assumida pelos professores, mas realçada como uma dificuldade profissional: *Se nós tivéssemos dentro da sala de aula o mesmo tipo de alunos ou dois ou três tipos de alunos era uma coisa, o problema é a variedade dos alunos que temos* [Professor P7]. A temática da matemática para alunos com necessidades específicas, nomeadamente com perturbações do desenvolvimento e comportamento, constitui uma nova preocupação dos professores:

> Em especial para trabalhar com alunos que me estão a chegar com Síndroma de Asperger ou com alunos … (…) estão a chegar agora casos diferentes … que devem estar a chegar a todos, com outros tipos de necessidades em que um jogo de computador já não funciona, o fazer alguns testes, alguns trabalhos interativos não chegam, seja no secundário, seja no básico, que é preciso trabalhar com eles de outras formas, (…) … são alunos que acabam de ter uma certa inconstância, uma certa instabilidade, dado os problemas de saúde deles [Professor P10].

A partir da diferenciação curricular, inerente a uma escola inclusiva, os professores também realçam a dificuldade em perspetivarem a flexibilidade curricular no contexto da matemática: *Uma parte que eu gostava de trabalhar tem a ver com a flexibilidade agora curricular na parte da matemática … em que é suposto eles aprenderem através de projetos, trabalhos* [Professor P13].

Os professores participantes no círculo de estudos realçam a inclusão e a flexibilidade curricular como dois aspetos de diferenciação curricular críticos no contexto do ensino da matemática. No âmbito da adequação do currículo de matemática à diversidade dos alunos, incluindo os alunos com necessidades educativas específicas, trabalhou-se a natureza das tarefas matemáticas, exercícios, problemas e investigações:

> Essa do triângulo [exercício], acho que sim, que é uma tarefa relativamente simples desde que eles saibam calcular a área e o perímetro do triângulo. (…). A tarefa da folha de papel [problema], acho engraçada e acho que é uma tarefa que se pode por, desde que saibam o que é um círculo e calcular a área do círculo e conseguirem fazer isso. (…). Esta do dividir o polígono por um segmento de reta [investigação] (…) é uma tarefa que leva mais algum trabalho, tem algum trabalho. (…) Não sei se será uma tarefa fácil de eles conseguirem uma generalização até ao hexágono [Professor P8].

Estes professores de matemática trabalham, no essencial, com exercícios e, esporadicamente, com problemas, não apresentam tarefas de investigação matemática aos alunos: *É uma tarefa* [investigação] *que nós não fazemos em sala de aula, nós não fazemos isto, não estamos habituados a fazer isto, a maioria dos nossos alunos não está habituado a fazer isto, nem nós incentivamos a que façam isto* [Professor P3]. Os professores de matemática consideram que para implementar tarefas de investigação na sala de aula é preciso muito tempo, *obriga a ter muito tempo* [Professor P3].

Em sequência da ação de formação, os professores apontaram para a necessidade de diversificar a natureza das tarefas matemáticas: *O ensino da matemática terá de passar por tarefas verdadeiramente motivantes e que permitam o desenvolvimento da autonomia dos nossos alunos de forma a que estes se apropriem do conhecimento matemático* [Professor P3].

A discussão das práticas em torno de tarefas matemáticas concretas, de diferentes naturezas, exercícios, problemas e investigações, explorando os propósitos e as potencialidades de cada uma, foi valorizada pelos professores, pelas características inerentes à própria realização das tarefas e, sobretudo, por enquadrar a teoria:

> Eu gostei muito de hoje [sessão sobre tarefas matemáticas], ter sugestões concretas, de coisas giras, simples, práticas, úteis, que posso fazer com os miúdos. (…). Eu achei especialmente interessante ali a teoria, a tarefa e o grau de desafio, achei interessante isto com ligação às atividades e o que é cada uma [Professor P14].

No âmbito da valorização da aprendizagem da matemática a todos os alunos considerou-se a necessidade de uso de materiais didáticos, *há materiais que são bons para explorar* [Professor P11]. Os professores questionam-se sobre quais os objetivos para o ensino da matemática aos alunos com perturbações de desenvolvimento e comportamento, assumindo a inexistência de formação sobre os propósitos da educação matemática:

> Qual é que será o nosso objetivo para esse miúdo [autista]? É um miúdo escolarizável (…). Ele está no 7.º ano. (…) Eu tento adaptar para que ele consiga atingir os mesmos objetivos que os colegas, mas com estratégias diferentes e ele até consegue. Será que estamos a fazer bem o nosso objetivo? (…) Será que o que nós estamos a fazer, com este caso em particular, é o correto ou nós tínhamos de dar uma matemática para a vida? Tenho muitas dúvidas se aquilo que eu estou a fazer (…) se é o correto. Não tenho resposta. [Professor P10].

Contudo, a temática da inclusão em sala de aula de todos os alunos ainda não é consensual:

> Estarem na escola para mim não é inclusão, pelo contrário. Porque um menino diferente, numa sala de aula, muito, muito diferente, não é um menino um bocadinho diferente, é bastante diferente, como é o caso destas duas meninas que eu tenho, elas não sabem ler nem escrever e se calhar nunca irão conseguir aprender a ler e escrever. (…). A miúda sabe contar até vinte e não tem muito a noção do que é e está numa aula de quinto ano [Professor P14].

Os professores acreditam na inclusão, mas trabalham a integração, numa lógica de homogeneização de saberes e práticas, questionando-se sobre o verdadeiro papel da educação matemática numa escola inclusiva:

> Eu trabalho, não na sala de aula, mas na unidade [de apoio aos alunos com perturbações de

desenvolvimento]. Só vou lá uma vez por semana, mas dou um valor enorme aquilo que se faz naquela salinha. Em termos matemáticos, (…) é contagem, é associar, é contar até dez, é ordenar, é contar o dinheiro. (…) Até onde é que podemos ir nos conceitos matemáticos? É muito difícil perceber até onde é que podemos ir? [Professor P3].

Fundamentalmente, parece existir diferentes níveis de integração inerentes às características de desenvolvimento dos alunos:

Acho que foram aqui abordadas duas intervenções muito distintas que é a integração, como foi referido, do menino que tem dez, doze anos e que ainda não lê, mas não tem dificuldade em se movimentar, em falar, é o tipo de integração que até foi referido, (…) e é a integração daqueles que são portadores de deficiência física e deficiência mental. E nós temos esses dois casos na escola [Professor P11].

O ensino da matemática a todos os alunos, incluindo as crianças com perturbações de desenvolvimento e comportamento, ainda constitui um objetivo dificilmente atingido, por existência de uma visão de homogeneização do conhecimento da matemática e por ausência de formação e investigação com os professores do ensino básico e secundário.

Avaliação da e para a aprendizagem da matemática

A avaliação, muito centrada na classificação, é uma das preocupações dos professores de matemática ao manifestarem dificuldades em integrar as observações não formalizadas numa avaliação sumativa dos alunos:

Como avaliar, como trazer para o produto final da nossa avaliação, que se reflete num número, que se reflete num nível, trazer desde a autoavaliação do aluno, avaliação formativa, sumativa. Como operacionalizar tudo isto, como é que a avaliação pode ser um ponto de partida até para a motivação do aluno, implicando-o na sua avaliação, refletir essa avaliação no seu resultado [Professor P11].

A diferenciação dos instrumentos de avaliação, muito subordinados aos testes ou mini testes, surge igualmente como uma rotina de difícil alteração para os professores de matemática:

Avaliação para mim é um foco muito, muito importante. Avaliação formativa principalmente. (…). Acham que os nossos testes são muito virados só para o exame, com o objetivo que os alunos tenham sucesso no exame e que não deve ser assim, que nós temos … devemos fazer de maneira diferente. Eu queria aprender outras formas de avaliar ou como devo avaliar, tanto no 9.º ano, como no secundário, no 12.º. Mesmo assim no profissional, eu estou a optar por outros métodos (…). Faço mini testes, só, não faço um teste global. (…) Dou quatro ou cinco aulas, faço um mini teste, avalio (…), faço quatro ou cinco por período [Professora P5].

A centralidade dos exames, particularmente no secundário, por integrar os critérios de acesso ao ensino superior, constitui um impedimento ao desenvolvimento de uma avaliação do ensino secundário de forma autónoma:

Trabalha-se para o exame e desde muito cedo que se trabalha para o exame e enquanto não se fizer a separação, é claro que isso não podemos resolver nem espero que seja resolvido aqui. Enquanto não se avaliar o secundário, independentemente depois do acesso ao ensino superior ou não, a questão vai bater sempre no mesmo ponto, a falta de tempo, o não cumprir o programa,

a exigência que se dá na disciplina de matemática e noutras disciplinas de exame porque a nota que eles têm no 12.º ano (…). A nota que serve para terminar o 12.º ano, para dar a escolaridade obrigatória, (…) também é para acesso ao ensino superior e quer os professores queiram quer não, pensam nisso (…). Acabamos por avaliar os alunos por testes escritos porque eles têm um exame escrito para fazer no final do 12.º ano [Professor P8].

O envolvimento dos alunos na avaliação e a diversificação de instrumentos de avaliação das aprendizagens constitui a principal preocupação dos professores de matemática. Numa das sessões do círculo de estudos foram discutidas as práticas em torno da avaliação da aprendizagem muito associada à classificação final:

Para mim é uma doença, para mim o que é mais complicado é avaliar, é uma doença para mim, avaliar um aluno. (…). Porque tenho sempre muita dificuldade, não quero prejudicar os alunos e estou ali, penso, penso, será que eu estou a prejudicá-lo? O aluno é tímido, não participa tanto, estou a dar peso. Tenho de ter em conta que a participação dele pode ser, não só, a gente pensa muito que participar é quando falam na aula e não, o aluno pode participar sem falar, porque é tímido. E isso tudo, para mim, tenho de estar ali a pensar muito bem, a ponderar. E não é um aluno ou são dois alunos, são vinte e oito alunos, de uma maneira geral, nas turmas [Professor P4].

A avaliação, entendida como classificação, pode gerar nos alunos um empenho ou uma desistência futura em relação à aprendizagem da matemática:

O meu objetivo é sensibilizá-lo [o aluno, no final do 7.º ano], para ter uma atitude diferente no próximo ano. Se eu for muito penalizador, eu já sei automaticamente que ele vai desistir e eu preciso de o reabilitar para chegar ao nono [Professor P6].

Os docentes não consideram muito problemática a avaliação sumativa, mas preocupam-se com a quase inexistência de uma verdadeira avaliação formativa, no sentido de avaliação para as aprendizagens, sistemática ao longo das aulas de matemática: *A preocupação é o feedback que os alunos têm da avaliação das suas aprendizagens diárias, que não têm. Nós não temos tempo, nós andamos sempre a correr* [Professor P3].

Os professores conhecem os conceitos de avaliação da e para a aprendizagem, em função também de apresentações em seminários sobre a avaliação dos alunos, mas limitam a avaliação para a aprendizagem à avaliação diagnóstica: *Qual é a grande diferença, tirando os nomes, dessa avaliação que não se chama diagnóstica, se chama para a aprendizagem?* [Professor P14]. O processo de uma prática persistente de avaliação da e para a aprendizagem, numa necessidade de rever conceitos matemáticos anteriores, esbarra com o tempo e o cumprimento dos programas, acumulando as incompreensões dos alunos: *Sentimo-nos impotentes para resolver aquele problema* [desconhecimento base dos conceitos], *(…) preferimos não lidar com o problema e voltamos a avançar, isso acontece. (…) Não estamos a resolver nada* [Professor P3].

Neste sentido, os professores impacientam-se com a predominância dos processos de avaliação dos alunos, pautados por testes de certificação de conhecimentos, mas consideram que as abordagens formativas da avaliação têm por pressuposto uma obrigatoriedade de progressão dos alunos durante a escolaridade básica e secundária:

Atualmente acho que esta mensagem do para está quase que a obrigarmo-nos a fazer com que o para dê o de certo, para o aluno ir sempre avançando (…) O argumento é que os meninos

devem sempre avançar, nem que seja porque sim [Professor P11].

A avaliação restrita do conhecimento dos procedimentos matemáticos dos alunos apresenta-se assim como um garante do professor do reconhecimento dos conteúdos por si lecionados e adquiridos pelos alunos, longe da capacidade destes em resolverem problemas e comunicarem ideias matemáticas:

> Nós sofremos demais com tudo, temos de ser um bocadinho mais descontraídos nesta questão. (…) É assim, nós queremos que os miúdos saem …, miúdos prontos para a globalidade da coisa, não é? Acho que às vezes sofremos demais quando eles não vão preparados com alguns conhecimentos matemáticos. Se calhar sabem fazer outras coisas, sabem … [Professor P15].

A conceção da avaliação da aprendizagem da matemática, sustentada de forma estrita no conhecimento dos conteúdos e procedimentos matemáticos, assume uma normalização dos conhecimentos dos alunos em função de critérios gerais como as aprendizagens essenciais:

> Mas nós temos a responsabilidade sobre uma ou duas disciplinas, essa disciplina tem um programa, têm as aprendizagens essenciais, que devem ser …, que o aluno deve dominar, não é? Então, aí está, entre a boa vontade e avaliar, ter boa vontade! [Professor P11].

A normalização joga em desfavor de uma escola inclusiva em que os alunos devem ser reconhecidos pela sua singularidade: *Nós olhamos muito para o que eles não sabem e pouco para o que eles sabem, qualquer um, mesmo aqueles … eles sabem alguma coisa, todos fazem progressos (…) ele progrediu (…) ao seu* [nível] [Professor P3]. A natureza da avaliação restrita dos conhecimentos em desfavor de uma avaliação das competências foi caracterizada pelos professores, após a realização do círculo de estudos:

> A avaliação da e para a aprendizagem da matemática, tem de ser uma realidade, a maior parte de nós avalia "os silêncios" (comportamento dos alunos) ou as respostas direcionadas se são ou não acertadas, e não as interações e comunicações dos alunos [Professor P9].

A avaliação constitui um eixo central em todo o processo de ensino e de aprendizagem da matemática, fortemente condicionada pelas avaliações externas e exames de final de ciclo, particularmente no ensino secundário. Os professores apresentam desconforto por não encontrarem instrumentos de avaliação, distintos dos testes escritos tradicionais, que sejam, na sua perspetiva, igualmente fiáveis e que consigam classificar as competências dos alunos, nos diferentes domínios de conhecimentos, capacidades e atitudes.

Considerações Finais: É só inquietação, inquietação

Os professores participantes no círculo de estudos assumiram que, ao longo da ação de formação, se refletiu sobre o papel ativo do professor na mudança das práticas — Parar para pensar, parar para ouvir e parar para analisar! [Professor P2] —, sustentados na investigação matemática, numa vertente mais de investigação e menos normativa: *Não ficarmos só presos aos normativos à espera de respostas (…) procurarmos em mestrados, em*

artigos, respostas às minhas perguntas (…) o que fez foi pensar, inovar e procurar respostas noutro sítio, não só no despacho [Professor P3]. O acesso a produções da investigação em educação matemática foi significativamente valorizado pelos professores: *Desta formação saí a repensar as estratégias, as ações em sala de aula e com mais vontade em ler e procurar artigos científicos* [Professor P10]. A colaboração entre investigadores e professores (Guerreiro & Martins, 2018, Ulleberg & Solem, 2018) constitui uma forma de dar a conhecer aos docentes resultados de investigação no campo da educação matemática.

Os processos de formação e reflexão teórica, com incidência na prática, geram desassossegos capazes de produzir mudanças duradouras nas práticas profissionais, num contexto de partilha entre investigadores e professores: *As partilhas para mim realmente foi o mais interessante (…) sobretudo o que levo é mesma esta inquietação de que, se calhar, pode-se fazer as coisas de outra forma (…) mais esta partilha e esta inquietação* [Professor P15].

As práticas dos professores estruturam-se na sala de aula em torno da comunicação, das interações entre os alunos e entre estes e o professor, das tarefas e atividades, referentes aos conteúdos de saber, e da avaliação da (e para a) aprendizagem. Os professores reconhecem que, em cada dia, comunicam de formas diferentes, apresentam diferentes tarefas aos alunos e avaliam com a utilização de instrumentos de diferentes naturezas, como se defende na investigação em educação matemática (Guerreiro, Ferreira, Menezes & Martinho, 2015). O principal problema não resulta desta diversidade, mas da predominância da comunicação centrada no professor, nas tarefas restritas aos exercícios e numa avaliação dependente dos testes escritos: *A questão da comunicação, as várias formas de comunicação, do tipo de tarefas. (…). Creio que todos nós fazemos, de certa maneira, tudo isto, agora o peso com que se faz isto é que pode variar* [Professor P8].

Os professores do ensino básico e secundário regem-se quase exclusivamente por normativos: a legislação educativa, as orientações curriculares, os programas, os documentos estruturantes da organização escolar, as normas do conselho pedagógico, etc. Uma formação mais estruturada em princípios orientadores, resultantes da investigação matemática, numa tríade das tarefas, comunicação e avaliação, pode gerar uma consciência e uma inquietação do professor como ator principal da mudança das suas próprias práticas: *Ficarmos todos nós um pouco mais inquietantes é positivo* [Professor P3]. A estruturação de uma formação em torno destas três vertentes parece constituir um modelo que vá ao encontro das expectativas e necessidade de formação dos professores.

Referências bibliográficas

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação*. Porto: Porto Editora.

Carmo, J. S. (2012). Aprendizagem de conceitos matemáticos em pessoas com Deficiência Intelectual. *Revista DI*, *3*, 43–48.

Goetz, J. & LeCompte, M (1984). Analysis and Interpretation of Data. *Ethnography and Qualitative Design in Educational Research*. (pp. 164–207). Orlando: Academic Press, Inc.

Guerreiro, A., Ferreira, R. T., Menezes, L., & Martinho, M. H. (2015). Comunicação na sala de aula: Perspetiva do ensino exploratório da matemática. *Zetetiké*, *23*(44), 279–295.

Guerreiro, A., & Martins, C. (2018). Avaliação e comunicação: da e para a aprendizagem. *Educação & Matemática*, 149-150, 49-52.

Guerreiro, A. & Sousa, N. (2000). Círculos de Estudos: estratégia de formação. *O Particular e o Global no Virar do Milénio — Cruzar Saberes em Educação. Atas do 5º Congresso da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação*, na Universidade do Algarve (pp. 933–938). Lisboa: Edições Colibri/Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Machado, J. (2018). Formação em contexto e colaboração docente. In Machado, E. A., & Sousa, J. C. (Org.) *Formação contínua de professores em Portugal — de ontem para amanhã* (pp. 47–54). Santo Tirso: De facto editores.

Pacheco, J. (1997). Contributos para a compreensão do Círculo de Estudos. In Estrela, A. e outros (Org.) *Contributos da Investigação Científica para a Qualidade do Ensino — Atas do III Congresso da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação* (pp. 287–292). Porto: SPCE.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). Lisboa: APM.

Stein, M., & Smith, M. (2009). Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: Da investigação à prática. *Educação & Matemática*, *105*, 22–28.

Ulleberg, I., & Solen, I. (2018). Which questions should be asked in classroom talk in mathematics? Presentation and discussion of a questioning model. *Acta Didactica Norge*. *12*(1), 1-21.

Uma Investigação ao redor das institucionalizações das expertises para ensinar aritmética no Brasil nas primeiras décadas do século XX

Robert Rene Michel Junior

Universidade Federal de Juiz de Fora — UFJF (Brasil)

robertrene15@hotmail.com

Introdução

As dificuldades com a educação matemática nos anos iniciais nos suscitam inquietações que nos provocam para construir uma compreensão sobre a estruturação dos alicerces da educação pública, desde o espaço escolar. Particularmente com relação ao ensino de matemática, nos dedicamos neste trabalho à aritmética como um tema privilegiado nos anos iniciais de escolarização até os tempos atuais.

Sendo assim, o objetivo deste pôster é apresentar alguns resultados parciais da investigação acerca de saberes sistematizados para o ensino de aritmética em uma importante Revista pedagógica do estado brasileiro de Minas Gerais — a Revista do Ensino de Minas Gerais. Mais especificamente, discutiremos as contribuições de uma personagem, autora de um conjunto de artigos sobre aritmética publicados na Revista do Ensino, no ano de 1926.

Considerando como aporte teórico-metodológico a História Cultural, mobilizamos como hipóteses de trabalho *a matemática a ensinar e a matemática para ensinar* (Valente, 2018), na perspectiva de caracterizar uma expertise profissional para o ensino de aritmética da personagem escolhida — professora Vitalia Campos.

A expertise profissional e a sistematização de saberes

Hofstetter, Schneuwly, Freymond (2017) discutem o surgimento da expertise em educação no contexto suíço dos séculos XIX e XX. Essa construção no século XIX, tem início a partir dos chamados "homens de bem", personagens como pastores e professores, providos de saberes pedagógicos particulares, e incumbidos de estruturar a instrução pública elementar da época (marco histórico dessa emergência dos saberes) motivados pelo bem-estar social. Analisando o processo histórico de construção *de expertises* para a educação suíça os autores caracterizam a noção de *expertise* profissional:

> [...] uma instância, em princípio reconhecida como legítima, atribuída a um ou vários especialistas – supostamente distinguidos pelos seus conhecimentos, atitudes, experiências -, a fim de examinar uma situação, de avaliar um fenômeno, de constatar fatos (Hofstetter et al., 2017, p. 57).

Para investigar *expertises* profissionais para o ensino de aritmética tomamos a Revista de Ensino de Minas Gerais como fonte, pois segundo Biccas (2008, p. 15) foi "considerada como o impresso pedagógico oficial mais representativo da história da educação mineira". Portanto, esta Revista tem um papel relevante para a formação docente, atribuindo saberes e normas a serem seguidas, ganhando significado para estudos sobre a objetivação e a divulgação de novos saberes para ensinar aritmética.

Tabela 1. Artigos de Aritmética Vitalia Campos

Nome do Artigo	Número da Revista/Ano
"Como se faz uma lição de Arithmetica"	N. 10, 1926, p. 24-29
"Como se faz uma lição de Arithmetica	N. 11, 1926, p. 41-44
"Como se faz uma lição de Arithmetica"	N.12, 1926, p. 85-89
"Como se faz uma lição de Arithmetica"	N. 13, 1926, p. 137-140
"Lição de Arithmetica"	N. 15, 1926, p. 209-214
"Lição de Arithmetica"	N. 16-17, 1926, p. 261-265

Fonte: Autor da Pesquisa, 2019.

As produções de expertises presentes na Revista de Ensino de Minas Gerais

Identificamos inicialmente artigos referentes aos saberes aritméticos na revista mineira nos anos de 1925 a 1932, período em que se estabiliza um novo programa de ensino para o primário; sendo encontrados 84 artigos. Após esse primeiro levantamento, verificou-se que Vitalia Campos foi uma autora de artigos frequente nesse período, mais precisamente no ano de 1926, que sucede a publicação de um novo programa de ensino para o primário mineiro. Além disso, Vitalia Campos participou do I Congresso de Instrucção Primária[1] de Minas Gerais, realizado em 1927 na cidade de Belo Horizonte. Os artigos publicados por Vitalia Campos em 1926, estão sistematizados na tabela 1.

[1] O Congresso tinha por finalidade estudar e discutir propostas referentes ao ensino primário, como sua organização, meios de melhoramento do ensino e a difusão dessas ideias pelo Estado de Minas Gerais.

Considerações Finais

Algumas conclusões podem ser apresentadas a partir do que foi visto dentro dos seis artigos de ensino de aritmética escritos por Vitalia Campos e de sua participação no I Congresso de Instrucção Primária.

A princípio, foi possível perceber os saberes produzidos para o ensino de aritmética com a utilização das Cartas de Parker,[2] desde a apresentação dos números naturais; adição e subtração a partir de objetos do cotidiano; algumas propriedades como a comutatividade para a adição e multiplicação; divisão em partes iguais e noções de resto; e problemas com frações. Portanto, esses artigos configuram um trabalho de *expertise* importante para as décadas de 1920 e 1930 em Minas Gerais. Cabe ressaltar que Vitalia Campos possuía uma posição privilegiada de poder, atribuída pelo governo mineiro, que lhe permitia promover suas ideias dentro da Revista do Ensino.

O papel de destaque de Vitalia Campos na 2ª Secretária da Mesa Definitiva do Congresso e sua integração na 2ª Comissão do grupo de Organização geral do ensino reforça a posição privilegiada de poder para as ideias de reforma do ensino no I Con-

[2] As cartas de Parker constituem um conjunto de gravuras/quadros/tabuadas cujo fim é auxiliar o professor a conduzir metodicamente o ensino, sobretudo, das quatro operações fundamentais. (Valente; Pinheiro, 2015, p. 27).

gresso de Instrucção Primária.

Referências bibliográficas

Biccas, M. S. (2008). *O impresso como estratégia de formação Revista do Ensino de Minas Gerais* (1925–1940). Belo Horizonte: Argumentum.

Hofstetter, R., Schneuwly, B., & Freymond, M. (2017). Penetrar na verdade da escola para ter elementos concretos de sua avaliação — A irresistível institucionalização do expert em educação (século XIX e XX). In R. Hofstetter, & W. R. Valente (Eds.), *Saberes em (trans)formação: tema central da formação de professores*. (pp. 55–112). São Paulo: Livraria da Física.

Valente, W. R. (2018). O Saber Profissional do professor que ensina Matemática: o futuro do passado. *Revista Paradigma*, *39*, 190–201.

Valente, W. R., & Pinheiro, N. V. L. (2015). Chega de decorar a tabuada! — as cartas de parker e a árvore do cálculo na ruptura de uma tradição. *Educação Matemática em Revista*, 16, 22–37.

APM

Associação de Professores
de Matemática