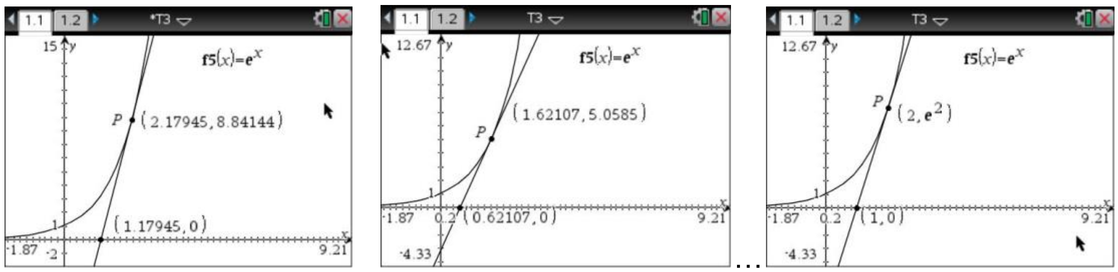
Funções Exponenciais e Logarítmicas: Exponenciais e Tangentes

Proposta de resolução?

1.1. Representa-se o gráfico da função $f(x) = e^x$.

Traça-se a reta tangente ao gráfico num ponto ao acaso. Obtêm-se as coordenadas do ponto de interseção da reta tangente com o eixo Ox e as coordenadas do ponto P. Arrasta-se este ponto sobre a curva.



Ao comparar as respetivas abcissas pode-se conjeturar que a abcissa do ponto de interseção da reta tangente com o eixo Ox difere em uma unidade da abcissa do ponto de tangência.

1.2.

Seja $f(x) = e^x$ e $P(a\,,\ e^a)$ um ponto qualquer do gráfico da função f.

A derivada da função f é : $f'(x) = e^x$

O valor da derivada da função em $x = a$ é: $f'(a) = e^a =$

$m \quad (declive\ da\ reta\ tangente\ ao\ gráfico)$

Pelo que a equação reduzida da reta tangente no ponto $P(a\,,\ e^a)$ é:

$$y = e^a x + e^a(1 - a)$$

Interseção com Ox:

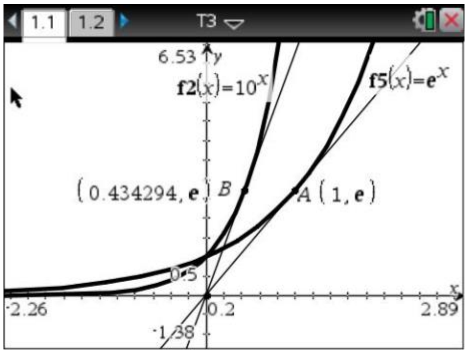
$y = e^a x + e^a(1 - a) \ \wedge \ y = 0 \ \Leftrightarrow \ x = a - 1$

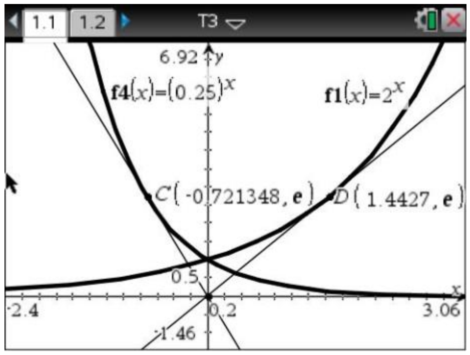
Logo, a abcissa do ponto de interseção da reta tangente ao gráfico nesse ponto com o eixo Ox tem menos uma unidade do que a abcissa do ponto $P(a\,,\ e^a)$.

Extraído da Brochura Problemas e Investigações com Tecnologias,
elaborada pelo Grupo T3, publicada pela APM em março de 2014

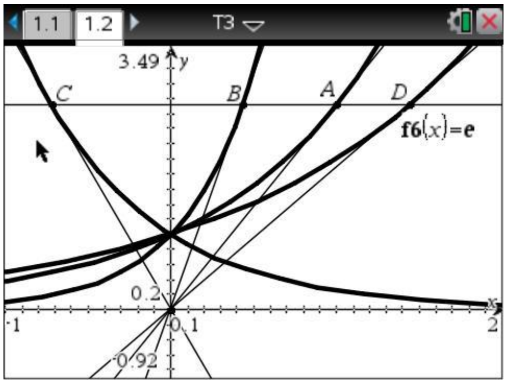
2.

2.1. Procedendo-se de modo semelhante ao da alínea 1.1. obtém-se:





Assim, o lugar geométrico que contém o conjunto dos pontos Q_i é a reta $y = e$.



2.2.

Seja $f(x) = a^x$ e $Q(c\ ,\ a^c)$ um ponto qualquer do gráfico da função f.

A derivada da função f é: $f'(x) = a^x \cdot lna$

O valor da derivada da função em $x = c$ é: $f'(c) = a^c \cdot lna =$

$m \quad (declive\ da\ reta\ tangente\ ao\ gráfico)$

Dado que a reta tangente ao gráfico neste ponto passa na origem do referencial a ordenada na origem é zero.

Assim a equação reduzida da reta tangente no ponto Q$(c\ ,\ a^c)$ é:

$$y = a^c \cdot lna \cdot x$$

Como o ponto Q pertence à reta tangente, então

$a^c = a^c \cdot lna \cdot c \iff c = \frac{1}{lna}$

Quanto à ordenada de todos os pontos Q nas condições da alínea 2.1.

$$f(c) = a^c = a^{\frac{1}{lna}} = a^{\frac{lne}{lna}} = a^{\log_a e} = e$$

Ou seja, todos os pontos Q têm ordenada e, donde pertencem à reta de equação $y = e$

2.3. Como se verifica na demonstração da conjetura da alínea anterior, a relação que existe entre a abcissa do ponto $Q(c\ ,\ a^c)$ e a base da função exponencial é:

$$c = \frac{1}{lna}$$

a abcissa do ponto Q é o inverso do logaritmo natural da base da função exponencial.